1. Inductive types

- Constructor を与えると inductive type が定まる。

  (ℕ は $\dfrac{}{0:\mathbb{N}}$ $\dfrac{n:\mathbb{N}}{\mathrm{suc}\,n:\mathbb{N}}$ によって定まる。)

- Inductive type から他の型への関数を定めるには constructor の行き先を定めればよい。

$$\mathrm{rec}' : \underbrace{C}_{0に対応} \to \underbrace{(C\to C)}_{sucに対応} \to (\mathbb{N}\to C)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}'\ c\ f\ 0 &= c \\ \mathrm{rec}'\ c\ f\ (\mathrm{suc}\,n) &= f\,(\underbrace{\mathrm{rec}'\ c\ f\ n}_{再帰呼び出し}) \end{aligned}$$

これだと少し弱い。
pred, factorial の定義が面倒。

$$\mathrm{rec} : C \to (\mathbb{N}\to C\to C) \to (\mathbb{N}\to C)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}\ c\ f\ 0 &= c \\ \mathrm{rec}\ c\ f\ (\mathrm{suc}\,n) &= f\ n\ (\mathrm{rec}\ c\ f\ n) \end{aligned}$$

rec' : $\dfrac{}{0\mapsto c}$ $\dfrac{n\mapsto x}{\mathrm{suc}\,n\mapsto fx}$

rec : $\dfrac{}{0\mapsto c}$ $\dfrac{n\mapsto x}{\mathrm{suc}\,n\mapsto f\,n\,x}$

- F : Type → Type が "良い" とき、$\dfrac{x:FA}{sx:A}$ を constructor として A を定めると、
  ("良い" → (strict positivity とか (HoTT Book 5.6)))

  A は initial F-alg? (HoTT Book 5.4)

$\dfrac{n:1+\mathbb{N}}{sn:\mathbb{N}}$ とまとめられる。

$$\begin{aligned} \mathrm{rec}' &: (FC\to C)\to(A\to C) \quad \text{catamor.} \\ \mathrm{rec} &: (F(\mathbb{N}\times C)\to C)\to(A\to C) \quad \text{paramor.} \end{aligned}$$

initiality :

$$\forall\ \begin{array}{c} FX \\ f\downarrow \\ X \end{array} \quad \exists!\ \begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Fg} & FX \\ s\downarrow & /\!/ & \downarrow f \\ A & \xrightarrow[g]{} & X \end{array} \qquad \forall\ \begin{array}{c} 1+X \\ \downarrow \\ X \end{array} \quad \exists!\ \begin{array}{ccc} 1+\mathbb{N} & \xrightarrow{1+g} & 1+X \\ s\downarrow & /\!/ & \downarrow \\ \mathbb{N} & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}$$

(Set T… 成り立…)

- (Lambek) s : FA → A は iso。A は F の不動点。

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Fg} & F^2A \\ s\downarrow & /\!/ & \downarrow Fs \\ A & \xrightarrow[g]{} & FA \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{F(sg)} & FA \\ s\downarrow & /\!/ & \downarrow s \\ A & \xrightarrow[sg]{} & A \end{array}$$

initiality より $sg = 1$

$gs = F(sg) = 1$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & \to & \mathbb{N} & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow & /\!/ & \downarrow \\ & & \mathbb{N} & \xrightarrow[g]{} & X \end{array}\right)$$

- $A \xrightarrow{g} FA$ によって A に F-coalg 構造が入る。

FX	init. alg.	term. coalg.
X	0	1
$1+X$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}_\infty$
$1+S\times X$	List S	Lazylist S
$S\times X$	0	Stream
$1+X^2$	Bintree	Lazy –

- (Adámek's fixed point theorem)

  $\mathcal{C}$ が 0 と $[0 \xrightarrow{!} F0 \xrightarrow{F!} F^2 0 \to \cdots$ の colim$]$ を持つ.

  $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ が "この" colim を保つなら,

  $[0 \to F0 \to F^2 0 \to \cdots]$ の colim が initial F-alg.

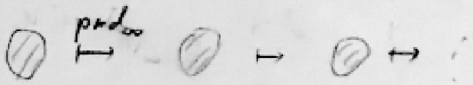
  $\mathbb{N} = \mathrm{colim}(0 \to 1 \to 2 \to \cdots)$

  $\bullet \to \vdots \to \vdots \to \cdots$

2 Coinductive types

- Destructor を与えると coinductive type が定まる

$$\frac{n : \mathbb{N}_\infty}{\mathrm{prd}_\infty\, n : 1+\mathbb{N}_\infty}$$



$\mathbb{N}_\infty$ の元はカプセルみたいなもの.

prd_∞ によって解体すると, 中身が出てくる.

中身は(空っぽか, カプセルが入っている)かのどちらか.

より身近な例)

- prod. type $\dfrac{x : A\times B}{\pi_1 x : A}$ $\dfrac{x : A\times B}{\pi_2 x : B}$.

- fun. type $\dfrac{(a:A)\quad f : A\to B}{\mathrm{ev}_a f : B}$ ($a:A$ で添字づけられた destructor ev_a)

- 他の型から coind. type への関数を定めるには, 値を解体したときのふるまいを定めればよい.

$\mathrm{corec}' : (C \to 1+C) \to (C \to \mathbb{N}_\infty)$ anamor.

$\mathrm{corec} : (C \to 1+(\mathbb{N}_\infty + C)) \to (C \to \mathbb{N}_\infty)$ apomor.

$$\mathrm{prd}_\infty(\mathrm{corec}'\, f\, c) = \begin{cases} * & (fc = * \in 1) \\ \underline{\mathrm{corec}'\, f\, c'} & (fc = c' \in C) \end{cases}$$

余再帰よびだし

$$\mathrm{prd}_\infty(\mathrm{corec}\, f\, c) = \begin{cases} * & (fc = * \in 1) \\ n & (fc = n \in \mathbb{N}_\infty) \\ \mathrm{corec}\, f\, c' & (fc = c' \in C) \end{cases}$$

c に f をくり返し適用したときのふるまいを模倣

・ $F : \mathrm{Type} \to \mathrm{Type}$ が良いとき、$\dfrac{x : Z}{px : FZ}$ を destructor として Z を定めると、

Z は terminal F-coalg? (つまり $F^{op} : \mathrm{Type}^{op} \to \mathrm{Type}^{op}$ の initial alg.)

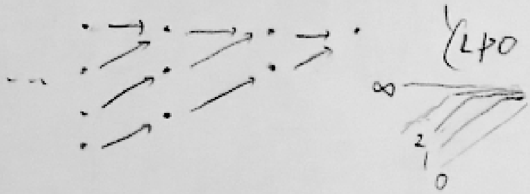
$$\left[\ \forall \begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ FX \end{array} \quad \exists ! \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ \downarrow & = & \downarrow \\ FX & \to & FZ \end{array} \right] \qquad \overbrace{\forall \begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ 1+X \end{array} \quad \exists ! \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & \mathbb{N}_\infty \\ f\downarrow & = & \downarrow prd_\infty \\ 1+X & \xrightarrow[1+g]{} & 1+\mathbb{N}_\infty \end{array}}^{(*)}$$

Set において 分りきったことを 確認したいけど $\mathbb{N}_\infty$ って何?

・(Lambek) $p : Z \to FZ$ は iso.

・(Adámek) 適当な条件のもとで $\lim[\cdots \to F^2 1 \to F1 \to 1]$ が term. F-coalg.

$\mathbb{N}_\infty = \lim[\cdots \to F^2 1 \to F1 \to 1] \cong \mathbb{N} \amalg \{\infty\}$ (LPO を仮定すれば)



・LPO を仮定して (*) を確認する。

(i) g の構成

$$g\,x := \begin{cases} \min \overbrace{\{n \in \mathbb{N} : f^{n+1} x = *\}}^{S} & (S \text{ が元をもつとき}) \\ \infty & (S \text{ が空のとき}) \end{cases}$$

・$gx = n$ のとき、$prd_\infty(gx) = n-1$、$g(fx) = n-1$ $(-1 := *)$

・$gx = \infty$ のとき $prd_\infty(gx) = \infty$、$g(fx) = \infty$。

(ii) g の一意性。

$prd_\infty\, g' = (1+g') f$ とする。$prd_\infty^k\, g' = g' f^k$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g'} & \mathbb{N}_\infty \\ f\downarrow & = & \downarrow prd_\infty \\ 1+X & \xrightarrow{g'} & 1+\mathbb{N}_\infty \\ f\downarrow & = & \downarrow prd_\infty \\ 1+X & \xrightarrow{g'} & 1+\mathbb{N}_\infty \\ \downarrow & \vdots & \downarrow \end{array}$$

・$gx = n$ のとき $f^n x \in X$, $f^{n+1} x \in 1$ なので

$prd_\infty^n (g'x) \in \mathbb{N}_\infty$, $prd_\infty^{n+1} (g'x) \in 1$.

よって $g'x = n$.

・$gx = \infty$ のとき $\forall n.\ f^n x \in X$ なので

$\forall n.\ prd_\infty^n (g'x) \in \mathbb{N}_\infty$.

よって $g'x = \infty$

・非構成的数学で $\mathbb{N} \amalg \{\infty\}$ と $\mathbb{N}_\infty$ の差を感じるには…
位相を使う。

$\lambda X.\ 1+X : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ の init. alg. は $\mathbb{N}$ (離散) ← すぐわかる。

term. coalg. は $\mathbb{N}_\infty$ ($\mathbb{N}$の1点 cpt 化) になることを確かめる。

・prd_∞ は連続。 [$0 \quad 1 \quad 2\ 3 \cdots \infty$]

・Set のときと同様に構成した g は連続。

[$\{n\}, \{x : x \geq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{N}_\infty$ の開基
$g^{-1}(\{n\}) = (f^{n+1})^{-1}(\{*\}) - (f^n)^{-1}(\{*\})$ は開
$g^{-1}(\{x \geq n\}) = \mathbb{N}_\infty - (f^n)^{-1}(\{*\})$ は開]

・Synthetic topology の informal な話

$U \subseteq X$ が開 $\Leftrightarrow$ $x \in X$ に対して ($x \in U$ が semidecidable)

たとえば $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_\infty$ は開

($x \in U$ が成り立つならば成り立つことを観測できる
(観測方法は神に教えてもらう))

3. Coinduction

・Destructor によるふるまいが等しい項は等しい?

funext : $(\forall x.\ fx = gx) \to f = g$ cubical type theory においては明らか

・実際 $R : \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{N}_\infty \to \mathrm{Prop}$ が bisimulation であるとは、

$$R\,m\,n \to \left(\begin{array}{l} (\mathrm{prd}_\infty m = * \wedge \mathrm{prd}_\infty n = *) \\ \vee\ (\exists m', n'.\ \mathrm{prd}_\infty m = m' \wedge \mathrm{prd}_\infty n = n' \wedge R\,m'\,n') \end{array} \right)$$

が成り立つこと。

・coind. : bisim. R に対して、$R\,m\,n \to m = n$

$\mathbb{N}_\infty \to 2^{\mathbb{N}}$ がうめこみであることの証明などにも使える。