

Lógica Proposicional Para Informática

1 - Introducción a la Lógica Proposicional

La lógica es una rama de la filosofía que estudia **la forma en que el ser humano razona**.

Intenta establecer cómo se forma **un pensamiento o razonamiento válido**: el pensamiento que se ha formado correctamente, que no presenta ambigüedades ni contradicciones.

El objetivo de este curso es la **lógica proposicional**, la cual se encarga del estudio de las expresiones llamadas proposiciones y de la forma de combinarlas y el resultado de estas combinaciones.

¿Qué es una proposición lógica?

Llamaremos **proposición** a cualquier expresión que **solo puede ser verdadera o falsa**, pero no las dos al mismo tiempo.

En el lenguaje cotidiano, este tipo de expresiones suelen ser llamadas **afirmaciones**.



DEFINICIÓN 1.1 : Proposición

Es una expresión lógica que se caracteriza por el hecho de que no es ambigua: solo puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas al mismo tiempo. En lenguaje cotidiano, las denominamos afirmaciones.

Algunos ejemplos de proposición simple en lenguaje cotidiano serían estos:



EJEMPLO 1.1 : Proposiciones simples en lenguaje cotidiano:

- “Hoy está lloviendo”
- “Los chanchos vuelan”
- “Los conejos saltan”

Es fácil notar que estas expresiones no dan lugar a términos medios. La única respuesta posible a cualquiera de ellas es “es verdadero” o “es falso”.

En la lógica proposicional evitamos el uso del lenguaje cotidiano debido a su tendencia a las ambigüedades y las confusiones, muy comunes en nuestras expresiones habituales. Solamente usaremos lenguaje cotidiano para que resulte más sencillo explicar el funcionamiento de las operaciones lógicas.

Estudiemos un poco el primer ejemplo del ejemplo 1.1:

- “Hoy está lloviendo”

Es fácil notar que no tengo forma de modificar esta expresión sin **agregarle más elementos**. Si intento **quitarle elementos** o **cambiar elementos** de la misma, podría, quizás, obtener otra expresión válida, pero esto resultaría en una **proposición equivalente**, que **expresa lo mismo**, pero escrito de otra manera. Por ejemplo, si quito la palabra “Hoy” obtengo:

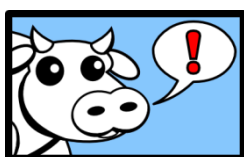
- “Está lloviendo”

Que es equivalente a la proposición original.

Esto nos muestra con mucha claridad porque decimos que **el lenguaje cotidiano tiende a la ambigüedad**: en el mismo existen **muchas formas de expresar lo mismo**, de formular la misma proposición, pero **con expresiones diferentes**, lo cual contribuye a la confusión.

Además de eso, la lógica proposicional no le asigna un juicio de valor a la proposición. O sea, la proposición en si puede expresar **un hecho falso o un hecho imposible en lenguaje cotidiano**. Pero a la lógica proposicional eso **no le importa**. De hecho, ni siquiera es un tema de estudio.

Lo único que le importa a la lógica proposicional es que la expresión tenga **validez lógica**.



DEFINICIÓN 1.2 : Validez Lógica

Una expresión tiene validez lógica si dicha expresión **puede comprobarse** mediante algún método, y si mediante ese método de comprobación siempre se obtiene el mismo resultado.

El Valor de Verdad

Un componente fundamental de la validez lógica radica en el hecho de que ninguna proposición lógica puede tener ambigüedades: **una proposición sólo puede ser verdadera o ser falsa**. No puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo, o no ser ni verdadera ni falsa.

A esa característica le llamaremos **valor de verdad**. Toda proposición tiene un valor de verdad establecido, y ese valor, como ya vimos, solamente puede ser verdadero o falso.



DEFINICIÓN 1.3 : Valor de Verdad

Es el valor que una proposición toma ante una operación lógica. Cada proposición solo puede tener un solo valor en un momento dado. Este valor sólo puede ser verdadero o falso.

La Tabla de Verdad

Para poder expresar estos valores, usaremos una herramienta llamada **tabla de verdad**.

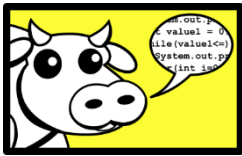
La tabla de verdad nos permite visualizar todos los posibles valores de una proposición y la forma en que esos valores cambian según voy aplicándole operaciones lógicas.



DEFINICIÓN 1.4 : Tabla de Verdad

Es un diagrama que permite visualizar fácilmente **todos los posibles valores de verdad** de una proposición dada, en todas sus posibles combinaciones.

Un ejemplo de tabla de verdad, aplicado a los ejemplos de proposición que ya vimos, es el siguiente:



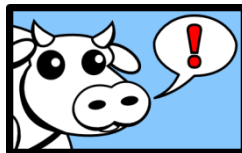
EJEMPLO 1.2 : Tabla de Verdad

"Hoy está lloviendo"
V
F

La tabla de verdad se diseña de esta manera: se indica la proposición con la que se está trabajando, se traza una línea, y bajo ella añadimos todos los posibles valores de verdad de esa proposición. Si se trata de solo una proposición, como en el ejemplo, la combinación de valores de verdad nos dejará solo dos valores: **V** y **F**, verdadero y falso.

Tipos de Proposiciones

Este tipo de proposiciones, cuya tabla de verdad solo tiene dos valores, se llaman **proposiciones atómicas** o **proposiciones simples**.

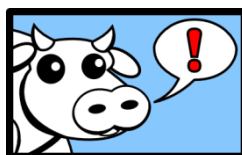


DEFINICIÓN 1.5 : Proposiciones Atómicas

Son proposiciones no pueden dividirse en proposiciones más sencillas, ni siquiera en lenguaje cotidiano. La combinación de valores de su tabla de verdad solo tiene dos valores: **V** y **F**.

Los ejemplos que se muestran en el ejemplo 1.1 son ejemplos de proposiciones atómicas.

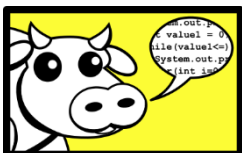
Ahora bien, si tomamos varias proposiciones atómicas y las combinamos mediante conectores, obtendremos una **proposición compleja**.



DEFINICIÓN 1.6 : Proposiciones Complejas

Son proposiciones formadas por la combinación de **dos o más proposiciones simples** mediante **conectores u operadores lógicos**. La cantidad de combinaciones de valores de su tabla de verdad va a depender de la cantidad de proposiciones atómicas diferentes que la formen.

En lenguaje cotidiano, se trata de expresiones que contienen las partículas "Y" u "O". Por ejemplo:



EJEMPLO 1.3 : Proposiciones complejas en lenguaje cotidiano:

- "Hoy está lloviendo y esta frío" =
"Hoy está lloviendo" + "y" + "Hoy está frío"
- "Los chanchos vuelan o corren muy rápido" =
"Los chanchos vuelan" + "o" + "Los chanchos corren muy rápido"
- "Los conejos saltan y rebotan contra los troncos" =
"Los conejos saltan" + "y" + " Los conejos rebotan contra los troncos"

Las proposiciones complejas tienen tablas de verdad que son, también, más complejas. Esto se debe a que, si bien, cada proposición simple sigue teniendo solo dos valores de verdad posibles, los valores de verdad de una proposición son independientes de los valores de verdad de otra proposición.

Lógica Proposicional para Informática

Por ejemplo, consideremos el primer ejemplo: “Hoy está lloviendo y esta frío”, que, como se muestra en el ejemplo, está formado por las proposiciones “Hoy está lloviendo” y “Hoy está frío”, unidas por la partícula “y”.

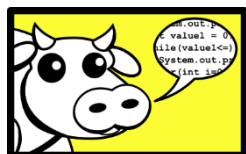
Esto da lugar a las siguientes posibilidades de valores de verdad:

- “Hoy está lloviendo” tiene valor de verdad **V** y “Hoy está frío” tiene valor de verdad **V**
- “Hoy está lloviendo” tiene valor de verdad **V** y “Hoy está frío” tiene valor de verdad **F**
- “Hoy está lloviendo” tiene valor de verdad **F** y “Hoy está frío” tiene valor de verdad **V**
- “Hoy está lloviendo” tiene valor de verdad **F** y “Hoy está frío” tiene valor de verdad **F**

De esta manera, podemos ver que la tabla de verdad va a tener bastantes valores más. Para armar esta tabla de verdad, haremos como en el caso de una proposición simple: nombraremos cada proposición y luego pondremos una línea por debajo, y agregaremos los valores de verdad de cada una debajo, siguiendo las combinaciones que acabamos de ver.

EJEMPLO 1.4: Tabla de Verdad de una Proposición Compleja formada por Dos Proposiciones

“Hoy está lloviendo y está frío”

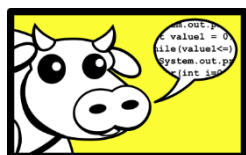


“Hoy está lloviendo”	“Hoy está frío”
V	V
V	F
F	V
F	F

Si mi proposición compleja tiene más de dos proposiciones atómicas, entonces mis combinaciones aumentan:

EJEMPLO 1.5: Tabla de Verdad de una Proposición Compleja formada por Tres Proposiciones

“Hoy está lloviendo y está frío y hay mucha humedad”



“Hoy está lloviendo”	“Hoy está frío”	“Hoy hay mucha humedad”
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Como se puede apreciar, la complejidad aumenta de forma geométrica con cada nueva proposición simple que agreguemos.

A eso debemos añadirle que el lenguaje cotidiano puede confundirnos con su ambigüedad. Por ejemplo:

“Hoy está lloviendo y está frío y no hace calor”, es una proposición compleja formada por las siguientes proposiciones simples:

- “Hoy está lloviendo”
- “Hoy está frío”
- “Hoy no hace calor”

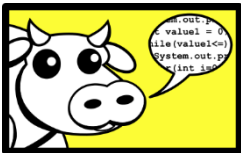
Pero las dos últimas proposiciones **son equivalentes**, ya que expresan **exactamente lo mismo**, por lo tanto no son dos proposiciones diferentes, sino que desde un punto de vista lógico **se trata de la misma proposición**. Eso significa que con mucha facilidad yo podría equivocarme al analizar una proposición compleja en lenguaje cotidiano, dándole más complejidad que la realmente tiene, o menos. Esto resulta muy problemático para el estudio de proposiciones complejas. Por eso debemos abandonar el uso del lenguaje cotidiano y utilizar una notación especial.

Notación BNF para Expresar Proposiciones

Como ya vimos, el lenguaje cotidiano es demasiado ambiguo como para resultar confiable en el estudio de las proposiciones. Por ese motivo, se utiliza una notación especial llamada **Notación Formal de Backus-Naur (BNF)**.

En esta notación, una proposición simple **se reduce a una sola letra**. Y **cada proposición diferente se identifica con una letra diferente**. De esta manera dejamos de considerar el lenguaje cotidiano y nos centramos solamente en las proposiciones **y cómo estas se relacionan entre sí**.

Por ejemplo:



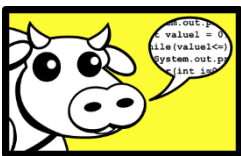
EJEMPLO 1.6: Proposiciones en Notación BNF

“Hoy está lloviendo”	a
“Hoy hace frío”	b
“Hoy está lloviendo y hace frío”	a Y b

De esta manera, podemos convertir la tabla del ejemplo 1.5 con esta notación, simplificándola un poco:

EJEMPLO 1.5: Tabla de Verdad de una Proposición Compleja formada por Tres Proposiciones

“Hoy está lloviendo y está frío y hay mucha humedad”
a Y b Y c



a	b	c
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F



CONCLUSIÓN:

- La lógica proposicional estudia el razonamiento humano mediante el estudio de las proposiciones y cómo usarlas para generar expresiones con validez lógica.
- Una proposición es una expresión que sólo puede ser verdadera o falsa.
- No importa que la expresión sea verdadera o falsa, solo importa que pueda tener esos dos valores, y solo esos dos valores.
- Ese valor de una proposición es llamado valor de verdad.
- Las proposiciones más sencillas son llamadas proposiciones atómicas, y varias proposiciones atómicas pueden combinarse en proposiciones complejas mediante conectores llamados operadores lógicos.
- La combinación de todos los valores de verdad de una proposición se expresa en una tabla de verdad.
- La tabla de verdad de una proposición compleja puede ser bastante extensa.
- El lenguaje cotidiano es muy ambiguo y complica la tarea de estudiar las proposiciones, por lo que se hace necesario una notación especial, llamada notación BNF.
- En esa notación, una proposición atómica se reduce a solo una letra.