Работа над ошибками

ФИТ-212
Курненов К.И.
Вариант 17

(1) Найти: $5A^T + 2E - 4A$, если $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$5 \cdot A^T + 2E - 4A = 5\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -25 & 10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & -12 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Найти: BAC, если $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 14 & -25 \end{pmatrix}$$

$$BAC = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 14 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(3) Вычислить: определитель матрицы $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 8 \\ -4 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & -1 & 0 & 12 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, разлагая его по строке / столбцу.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 8 \\ -4 & -1 & 2 & -5 \\ 8 & -1 & 0 & 12 \\ 4 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} -1 & 12 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 25\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 32\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 16\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

Ответ: 11

(4) Найти: ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ приведением к ступенчатому виду. Выписать базисный минор.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 6 & 18 & -11 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & -19 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R = 3$; Базисный минор: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 10 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

(5) Решить: матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\det A = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 1$

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$

(6) Решить систему уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x+y+z=5 \\ x-4y-2z=-3 \\ 3x-5y-6z=-9 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$Ax=B$

$\det A = 49$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ -9 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 49 \qquad x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -9 & -6 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 98 \qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=2$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=2$.

(7) Найти общее решение системы уравнений и указать одно частное решение, не являющееся базисным и два базисных решения:

$$\begin{cases} 3x-2y+5z+4u=2 \\ 6x-4y+4z+3u=3 \\ 9x-6y+3z+2u=4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Система совместна и имеет бесконечное количество решений

$n=4-2=2$

$$\begin{cases} 3x-2y+5z+4u=2 \\ -6z-5u=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\frac{1}{5}-\frac{6}{5}z \\ 3x-2y+5z+4\left(\frac{1}{5}-\frac{6}{5}z\right)=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\frac{1}{5}-\frac{6}{5}z \\ 3x-2y+\frac{1}{5}z=\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\frac{1}{5}-\frac{6}{5}z \\ 3x=\frac{6}{5}+2y-\frac{1}{5}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\frac{1}{5}-\frac{6}{5}z \\ x=\frac{6}{15}+\frac{2}{3}y-\frac{1}{15}z \end{cases}$$

$y=s$; $z=t$

Общее решение: $\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}s-\frac{1}{15}t;\ s, t;\ \frac{1}{5}-\frac{6}{5}t\right)$

Частное решение при $s=t=15$: $(9{,}4;\ 15;\ 15;\ -17{,}8)$

Базисное решение 1 при $s=t=0$: $\left(\frac{2}{5};0;0;\frac{1}{5}\right)$

Базисно решение 2 при $\frac{1}{5}-\frac{6}{5}t=0$ и $s=0$: $\left(\frac{7}{18};0;\frac{1}{6};0\right)$