Работа над ошибками

ФИТ-212
Курпенов К. И.
Вариант 14

① Условие: Проверить, будут ли следующие системы матриц линейно независимыми в линейном пространстве $M_2(\mathbb{R})$

Решение:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Система совместна}$$

$$n = 4 \neq r(A) = 2$$

$$n = 4 > r(A) = 2$$

$\Rightarrow$ бесконечное множество решений $\Rightarrow$ Система линейно зависима

Ответ: Система линейно зависима.

② Условие: В следующем примере проверить, является ли система многочленов f_1, f_2, f_3 базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$

$f_1(x) = -2 + x + x^2$

$f_2(x) = x - x^2$

$f_3(x) = -3 + 2x + x^2$

Решение:

$$\lambda_1(x^2+x-2) + \lambda_2(-x^2+x) + \lambda_3(x^2+2x-3) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 0\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ система линейно зависима система многочленов f_1, f_2, f_3 не является базисом в линейном пространстве $\mathbb{R}[x]_2$.

Ответ: Не является базисом.

③ Условие: Найти все значения λ, при которых вектор b является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3, если $a_1 = (\lambda, 4, 1)$, $a_2 = (2, -2, -3)$, $a_3 = (2, 3, 2)$, $b = (-3, -4, 4)$

Решение:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = b$$

$$\lambda_1(\lambda, 4, 1) + \lambda_2(2, -2, -3) + \lambda_3(2, 3, 2) = (-3, -4, 4)$$

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -3 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -4 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -4\lambda + 6 - 24 + 4 + 9\lambda - 16 \neq 0 \\ 5\lambda = 30 \\ \lambda \neq 6 \end{array}$$

Ответ: $\lambda \neq 6$.

4. Условие: Является ли линейно зависимой системой векторов пространства $C[a,b]$ $\quad 1, \sin x, \cos x$

Решение:

1) $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0$
$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cos x - \lambda_3 \sin x = 0$
$\lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 \sin x - \lambda_3 \cos x = 0$
$\lambda_1 \cdot 0 - \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \sin x = 0$
$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0 \\ -\lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0 \\ \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \cos x = 0 \end{cases}$$

Пусть $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

2) Если допустить, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то придём к противоречию, так как невозможно $\sin x \sim \cos x \Rightarrow$ система $1, \sin x, \cos x$ линейно независима.

Ответ: Система линейно независима.

5. Условие: Докажите, что линейные пространства $V = \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ и $W = \mathbb{R}^2$ изоморфны.

Решение:

Построим отображение по следующему правилу: $f: V \to W$, $f: (x+yi) \to (x, y)$.

1) Пусть $(x+iy) \to (x, y)$
$(m+in) \to (m, n)$, тогда если $(x,y) = (m,n)$, то
$(x+iy) = (m+in) \Rightarrow f - in$
$\forall (x,y)\ \exists\ (x+iy) \Rightarrow f - sur$
$f - in$ и $sur \Rightarrow f - bi$

2) Проверка условий сохранения операций:
$f((x+iy)+(m+in)) = f((x,y)+(m,n)) = f(x+m, y+n) = f(x,y) + f(m,n) =$
$= f(x+iy) + f(m+in)$
Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$:
$f(\alpha(x+iy)) = f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = \alpha f(x,y) = \alpha f(x+iy)$
Все условия выполнены $\Rightarrow V$ и W изоморфны

Ответ: V и W изоморфны.