33 **Условие:** Показать, что множество со следующими операциями является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

ФИТ-212
Курчанов К.И.
Вариант 14

Решение.

$\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle,$

$\langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2\rangle$

Так как

$\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_2, b_2\rangle + \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle$

то операция сложения коммутативна

Также операция сложения ассоциативна:

$(\langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle) + \langle a_3, b_3\rangle = \langle a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3\rangle$

$\langle a_1, b_1\rangle + (\langle a_2, b_2\rangle + \langle a_3, b_3\rangle) = \langle a_2 + a_3 + a_1, b_2 + b_3 + b_1\rangle$

$\langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 a_2 + b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1\rangle$

$\langle a_2, b_2\rangle \cdot \langle a_1, b_1\rangle = \langle a_2 a_1 + b_2 b_1, a_2 b_1 + a_1 b_2\rangle$

Операция умножения коммутативна

$(\langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2\rangle) \cdot \langle a_3, b_3\rangle = \langle a_3(a_1 a_2 + b_1 b_2) + b_3(a_1 b_2 + a_2 b_1), a_3(a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_3(a_1 a_2 + b_1 b_2)\rangle$

$\langle a_1, b_1\rangle (\langle a_2, b_2\rangle \cdot \langle a_3, b_3\rangle) = \langle a_1(a_2 a_3 + b_2 b_3) + b_1(a_2 b_3 + a_3 b_2), a_1(a_2 b_3 + a_3 b_2) + b_1(a_2 a_3 + b_2 b_3)\rangle$

Операция умножения не ассоциативна

Ответ Данное множество M не является кольцом.

(34) 1) $8! = 40320$

$7! = 5040$

2) $\frac{30!}{5!} = 2{,}2104405e+30$

3) $C_8^4 + C_8^5 = \frac{8!}{4!(8-4)!} + \frac{8!}{5!(8-5)!} = 126$

4) $C_{18}^6 \cdot C_{12}^6 = \frac{18!}{6!(18-6)!} \cdot \frac{12!}{6!(12-6)!} = 17\,153\,136$

5) $\frac{15!}{4!\,5!\,6!} = 630630$

6) $2^6 = 64$

7) $C_{n+k-1}^{n-1} \Rightarrow \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165$

8) 916

(35) Условие: сколькими способами из колоды карт в 36 листов можно выбрать неупорядоченный набор из 5 карт так, чтобы в этом наборе было бы точно: 1 король, 2 дамы, 1 карта красной масти.

Решение:

1) 1 красный король (2 способа)
Две дамы из двух чёрных (1 способ)
Две карты из чёрных (C_{14}^2 способов)
} 182

2) 1 красная дама (2 способа)
1 чёрная дама (2 способа)
1 чёрный король (2 способа)
Две карты из чёрных (C_{14}^2 способов)
} 728

3) Король и дамы чёрные
1 красная карта (16 способов)
1 чёрный король (2 способа)
2 чёрные дамы (1 способ)
1 черная карта (13 способов)
} 416

Ответ: 1326

(36) Условие: Сколько различных слов можно получить перестановкой букв α?

Решение:

„Парламент"

В перестановках согласные идут в алфавитном порядке, гласные – в порядке, обратном алфавитному.

еаа ЛМНПРТ

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\,6!} = 84$$

Ответ: 84.

37 Условие Найти наибольший член разложения бинома $(a+b)^n$

Решение

1) $(3+\sqrt{3})^{18}$

2) T_k – наибольший член

$$T_k = (C_{18}^{k} \cdot 3^{18-k} \cdot (\sqrt{3})^{k})$$

$$\begin{cases} C_{18}^{k} (\sqrt{3})^{k} > C_{18}^{k-1} (\sqrt{3})^{k-1} \\ C_{18}^{k} (\sqrt{3})^{k} > C_{18}^{k+1} (\sqrt{3})^{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{18!}{k!(18-k)!} (\sqrt{3})^{k} > \frac{18!}{(k-1)!(19-k)!} (\sqrt{3})^{k-1} \\ \frac{18!}{k!(18-k)!} (\sqrt{3})^{k} > \frac{18!}{(k+1)!(17-k)!} (\sqrt{3})^{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{k} > \frac{1}{19-k} \\ \frac{1}{18-k} > \frac{\sqrt{3}}{k+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}(19-k) > k \\ k+1 > (18-k)\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\underset{11{,}04.}{\frac{18\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}} < \underset{12}{k} < \underset{12{,}04\ldots}{\frac{19\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}$$

3) $C_{18}^{12} \cdot 3^{18-12} \cdot (\sqrt{3})^{12} = 986567072 4$

Ответ: 986567072 4.

(38) <u>Условие:</u> Из данной пропорции найти x и y.

<u>Решение:</u>

1) $C_x^{y+1} : C_x^{y} : C_x^{y-1} = 6 : 14 : 21$

2) $\dfrac{x!}{(y+1)!\,(x-y+1)!} : \dfrac{x!}{y!\,(x-y)!} =$

$= \dfrac{x!}{(y+1)!\,(x-y-1)!} \cdot \dfrac{y!\,(x-y)!}{x!} =$

$= \dfrac{y!\,(x-y)!}{(y+1)!\,(x-y-1)!} = \dfrac{x-y}{y+1}$

3) $\dfrac{x!}{y!\,(x-y)!} : \dfrac{x!}{(y-1)!\,(x-y+1)!} =$

$= \dfrac{x!}{y!\,(x-y)!} \cdot \dfrac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{x!} =$

$= \dfrac{(y-1)!\,(x-y+1)!}{y!\,(x-y)!} = \dfrac{x-y}{y}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{y+1} = 21 \Rightarrow \dfrac{7y-y}{y+1} = 21 \Rightarrow y = -\dfrac{21}{15} \\ \dfrac{x-y}{y} = 6 \Rightarrow 6y = x-y \end{cases}$

$x = 7y$

$x = 7 \cdot \left(-\dfrac{7}{5}\right) = -\dfrac{49}{5}$

<u>Ответ:</u> $\left(-\dfrac{49}{5}; -\dfrac{7}{5}\right)$.

(39) Условие: Найти коэффициен при x^k в разложении данного выражения P по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Решение:

x^{40}; $P = (x^3 + 3 - x^4)^{13}$

$(x^3)^m \cdot (3)^n \cdot (-x^4)^k \cdot P(m, n, k)$

$3m + 4k = 40$

$k = 10 - \frac{3m}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 0. & k = 10 \\ m = 4 & k = 7 \\ m = 8 & k = 4 \\ m = 12 & k = 1 \end{cases}$

$m + n + k = 13$

$(0; 9; 10); (4; 8; 7); (8; 7; 4); (12; 6; 1)$

$$x^{13} = 13!\left(\frac{(x^3)^0}{0!\,9!\,10!} - \frac{(x^3)^4}{4!\,8!\,7!} + \frac{(x^3)^8}{8!\,7!\,4!} - \frac{(x^3)^{12}}{12!\,6!\,1!}\right)$$

Ответ: $x^{13} = 13!\left(-\frac{(x^3)^4}{4!\,8!\,7!} + \frac{(x^3)^8}{8!\,7!\,4!} - \frac{(x^3)^{12}}{12!\,6!\,1!}\right)$

(41) Условие: Подсчитать количество различных перестановок цифр данного числа α, при которых никакие и одинаковых цифр не идут друг за другом.

Решение:

$$78974894$$

$$P(2;2;2;2) = \frac{8!}{2^4} = 2520$$

$$P(2;2;2;1) = \frac{7!}{2^3} = 630$$

$$P(2;2;1;1) = \frac{6!}{4} = 180$$

$$P(2;1;1;1) = \frac{5!}{2} = 60$$

$$P(1;1;1;1) = 24$$

$$P = 2520 - 630 - 180 - 60 - 24 = 1626$$

Ответ: 1626.

(42) Условие: Сколько существует перестановок n различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно k или ровно m предметов?

Решение:

$n = 8,\ k = 2,\ m = 5$

$D_{8,2};\ D_{8,5}$

$D_{8,2} + D_{8,5} = C_8^2 D_6 + C_8^5 D_3 =$

$= \frac{8!}{2!\,6!}\,6!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) =$

$= 7416$

Ответ: 7416.

43 Условие: Скольким способами можно распределить n различных открыток в k:

1) различных
2) неразличимых конвертов, если:
   а) все конверты непусты
   б) допускаются пустые конверты

Решение:

$n = 10$; $k = 3$

1а) $U\cdot(10,3) = C_3^0\, 3^{10} - C_3^1\, 2^9 + C_3^2\, 1^8$

1б) $U(10,3) = 3^{10}$

2а) $V\cdot(10,3) = \dfrac{U\cdot(10,3)}{3!}$

2б) $V(10,3) = V\cdot(6,3) + V(6,2) + V(6,1)$

Ответ: 1а)

(44) Условие: Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

Решение:

$a=1;\ b=14;\ c=-6;\ d=-45;\ e=-27$

$f(n+5)=f(n+4)+14f(n+3)-6f(n+2)-45f(n+1)-27f(n)$

$x^5-x^4-14x^3+6x^2+45x+27=0$

$(x-3)^2(x+1)^2(x+3)=0$

$x_1=-3$

$x_2=-1$

$x_3=3$

$f(n)=(-3)^n(C_1+nC_2)+(-1)^n(C_3+nC_4)+3^nC_5$

Ответ: $f(n)=(-3)^n(C_1+nC_2)+(-1)^n(C_3+nC_4)+3^nC_5$

(45) Условие: Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

Решение:

$a = 2\sqrt{3}$; $b = -4$, $c = 27$; $d = -54\sqrt{3}$; $e = 108$

$f(n+5) = 2\sqrt{3}f(n+4) - 4f(n+3) + 27f(n+2) - 54\sqrt{3}f(n+1) + 108f(n)$

$x^5 - 2\sqrt{3}x^4 + 4x^3 - 27x^2 + 54\sqrt{3}x - 108 = 0$

$x_1 = 3$

$x_{23} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

$x_{45} = \sqrt{3} \pm i$

$$f(n) = 3^n C_1 + \sqrt{3}^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} C_2 + \sin\frac{\pi n}{6} C_3\right)$$

Ответ: $f(n) = 3^n C_1 + \sqrt{3}^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} C_2 + \sin\frac{\pi n}{6} C_3\right)$

46

Условие: Найти общий вид решения рекуррентного соотношения 4-го порядка.

Решение

$a = -7$; $b = 0$, $c = 8$; $d = -56$

$x^4 + 7x^3 + 0x^2 - 8x + 56 = 0$

$x_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$

$x_2 = 2\left(\cos\left(+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1 + i\sqrt{3}$

$x_3 = -2$

$x_4 = 7$

$x_n = C_1(-2)^n + C_2(7)^n + 2^n\left(C_3\cos\frac{\pi n}{3} + C_4\frac{\pi n}{3}\right)$

$0 = C_1 + C_2 + C_3$

$C_1 = -C_2 - C_3$

$x_n = (-C_2 - C_3)(-2)^n + C_2(7)^n + 2^n\left(C_3\cos\frac{\pi n}{3} + C_4\frac{\pi n}{3}\right)$

Ответ: $x_n = (-C_2 - C_3)(-2)^n + C_2(7)^n + 2^n\left(C_3\cos\frac{\pi n}{3} + C_4\frac{\pi n}{3}\right)$