МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Омский государственный технический университет»

Факультет информационных технологий и компьютерных систем

Кафедра «Прикладная математика и фундаментальная информатика»

Расчётно-графическая работа

по дисциплине Алгебра

Студента	Курпенова Куата Ибраимовича
	фамилия, имя, отчество полностью
Курс	1 Группа ФИТ-212
Направление	02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии
	код, наименование
Руководитель	доц., канд. пед. наук, доцент
	должность, ученая степень, звание
	Белим С.Ю.
	фамилия, инициалы
Выполнил	27.05.2022
	дата, подпись студента
баллы	
	дата, подпись руководителя

Омск-2022

Вариант 14

Задача №1

Найти длины (нормы) векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и угол между векторами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$.

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Длина векторов:

$$\bar{a} = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = 2$$

$$\bar{b} = \sqrt{\left(\bar{b},\bar{b}\right)} = \sqrt{1+1+1+1} = 2$$

Угол между векторами:

$$cos\,\alpha = \frac{\left(\bar{a},\bar{b}\right)}{|\bar{a}|\,\left|\bar{b}\right|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\alpha = 0$$

Ответ: $|\bar{a}| = 2, \left|\bar{b}\right| = 2, \alpha = 0$

Задача 3.

Является ли линейным оператором отображение:

$$\varphi: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$$

по правилу:

$$\forall f(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \varphi(f) = f' + 3f''$$

Решение:

Условия:

$$\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g),\ f, g \in \mathbb{R}_n[x]$$
$$\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f),\ f \in \mathbb{R}_n[x],\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Первое условие:

$$f, g \in \mathbb{R}_n[x]$$
$$f(x) = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$
$$g(y) = [y_1, y_2, \dots, y_n]$$
$$f(x) + g(x) = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$
$$\varphi(f+g) = (f' + g') + 3(f'' + g'')$$
$$= [(x_1 + y_1)' + 3(x_1 + y_1)', \dots, (x_n + y_n)' + 3(x_n + y_n)']$$

первое условие выполняется.

Второе условие:

$$f \in \mathbb{R}_n[x],\ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\alpha f(x) = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n]$$
$$\varphi(\alpha f) = \alpha f' + \alpha f'' = [\alpha(x_1' + 3x_1'), \dots, \alpha(x_n' + 3x_n')]$$

второе условие выполняется.

Ответ: отображение φ является линейным оператором.

Задание 4.

Линейное пространство: φ: $Mat\,(2,2,R) \rightarrow \; Mat(2,2,\mathbb{R})$

Оператор: $\forall M \in Mat\,(2,2,R) : \varphi\,(M) \, = \, M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} M$

Естественный базис: $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Решение:

Результат отображения:

$$\varphi\,(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\,(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\,(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\,(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора:

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Модифицированный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \; x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Ядро оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $Ker = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Задание 5.

Найти спектр и базисы собственных подпространств:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Спектр:

$$det\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \to \sigma(\varphi) = \{-1_2, 1_1\}$$

При λ = 1:

$$(A - E)\bar{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + \dfrac{x_3}{2} \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to S_1 = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

При λ = -1:

$$(A + E)\bar{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to S_2 = \langle\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$$

Ответ: $\sigma(\varphi) = \{-1_2, 1_1\}$, $S_1 = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$, $S_2 = \langle\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$