확률과 통계

확률변수

1. 확률변수

확률변수(random variable)

> *확률 실험의 발생 가능한*
> *결과에 하나의 값을 배정하는 함수*

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = 각 실험결과가 갖는 T의 수

HHH

= 0

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = 각 실험결과가 갖는 T의 수

HHT HTH THH

= 1

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = 각 실험결과가 갖는 T의 수

HTT THT TTH

= 2

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = 각 실험결과가 갖는 T의 수

TTT

= 3

1. 확률변수

확률변수란?

- 주로 확률변수는 영어 대문자 X,Y,Z 등을 사용함
- 모든 확률변수는 고유한 확률분포를 따름

1. 확률변수

확률변수란?

동전 1개를 3회 던지는 실험

R_X = X 가 가질 수 있는 값의 집합 = { 0, 1, 2, 3 }

. 확률변수

집합의 종류

유한 집합	▸ 원소의 수가 **유한한** 경우 예 ▸ { 0,1,2,3 }
셀 수 있는 무한집합	▸ 원소의 수가 무한 개이지만 **셀 수 있는** 경우 예 ▸ { 1,2,3,4,5, ……. }
셀 수 없는 무한집합	▸ 원소의 수가 무한이며 **셀 수 없는** 경우 예 ▸ { x | 155.5 〈 X 〈 180.2 }

2. 이산형 확률변수

이산형 확률변수(discrete r.v.)

이산형 확률변수 (discrete random variable)

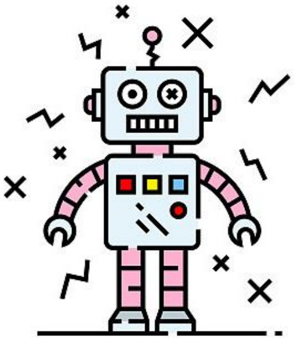
“ *확률변수 X 의 R_X 가 유한 집합 또는*
셀 수 있는 무한집합의 경우,
확률변수 X는 이산형 확률변수라고 함 ”

2. 이산형 확률변수

이산형 확률변수(discrete r.v.)

예

불량품의 수



예

방문자 수

예

TV모니터 결점 수

R_X = 유한집합 또는 셀수 있는 무한집합

2. 이산형 확률변수

이산형 확률변수(discrete r.v.)

확률함수(probability function)

$$f(x) = P(\underbrace{X}_{\text{확률변수}}=\underbrace{x}_{\text{확률변수 X 가 갖는 값 중의 하나}})$$

2. 이산형 확률변수

확률함수의 특징

$$0 \le f(x) \le 1 \quad \text{for all x}$$

$$\sum_{\text{all x}} f(x) = 1$$

예제 풀어보기

Q1. 다음 함수가 확률함수인지 확인하라.

(1)

$$f(x) = \frac{2x-1}{2}, x = 0,1,2,3$$

$x = 0$일 때, $f(x)$ =-0.5이므로 확률함수가 아니다.

(2)

$$f(x) = \frac{x+2}{20}, x = 0,1,2,3,4$$

모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이고 $\sum f(x) = 1$이므로 확률함수이다.

3. 연속형 확률변수

연속형 확률변수(continuous r.v.)

연속형 확률변수(continuous random variable)

"*확률변수 X 의 R_X 가 셀 수 없는 무한집합의 경우,*
확률변수 X는 연속형 확률변수라고 함"

3. 연속형 확률변수

연속형 확률변수(continuous r.v.)

사람의 키를 측정하는 실험

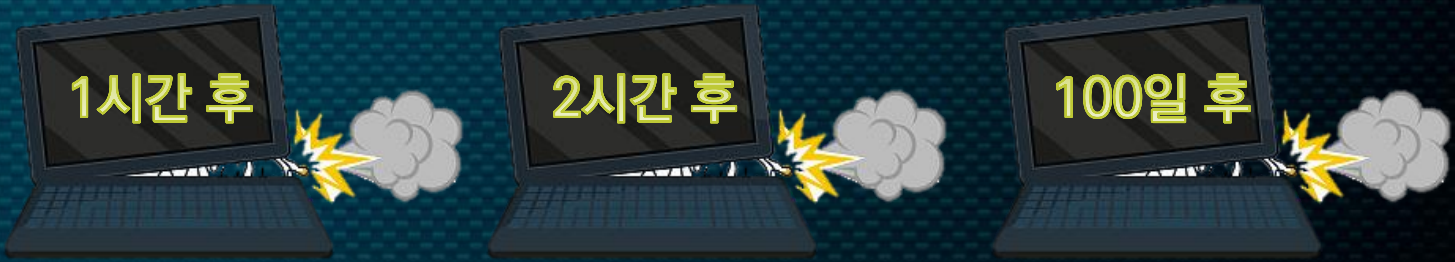
확률변수 X = 사람의 키

$$R_X = \{ x \mid 155.5 < x < 180.2 \}$$

3. 연속형 확률변수

연속형 확률변수(continuous r.v.)

전자제품이 첫 고장이 날 때까지 걸리는 시간 측정



$$R_X = \{ x \mid 0 < x \}$$

3. 연속형 확률변수

연속형 확률변수(continuous r.v.)

밀도함수(density function)

“ $f(x)$ 는 확률변수 X 가 값 x에 밀집된 정도를 나타내는 함수 ”

3. 연속형 확률변수

밀도함수의 특징

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)dx$$

"여기서 X 는 연속형 확률변수, a와 b는 상수이다."

3. 연속형 확률변수

밀도함수의 특징

$$0 \leq \ f(x)$$

for all x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

3. 연속형 확률변수

밀도함수의 특징

$P(X = x) = 0$ 이므로

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

" 여기서 X 는 연속형 확률변수, x 는 X 가 갖는 값 중의 하나이다. "

예제 풀어보기

Q2. $f(x)$가 밀도함수가 되기 위한 k의 값을 구하라.

(1)

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

예제 풀어보기

Q3. 확률변수 X는 아래의 밀도함수를 가진다.

$$f(x) = x \qquad 0 \le x \le 1$$
$$=(2-x) \qquad 1 \le x \le 2$$
$$= 0 \qquad otherwise$$

다음의 확률을 구하라

(1) $P\left(-1 < X < \frac{1}{2}\right)$

(2) $P\left(X \le \frac{3}{2}\right)$

(3) $P(X \ge 2.5)$

(4) $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{2}\right)$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

"분포함수 F(x)는 확률변수 X의 누적확률을 나타낸다."

$$F(x)=P(X\leq x)$$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = H 의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = H 의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = H 의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

동전 1개를 3회 던지는 실험

확률변수 X = H 의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)

동전 1개를 3회 던지는 실험

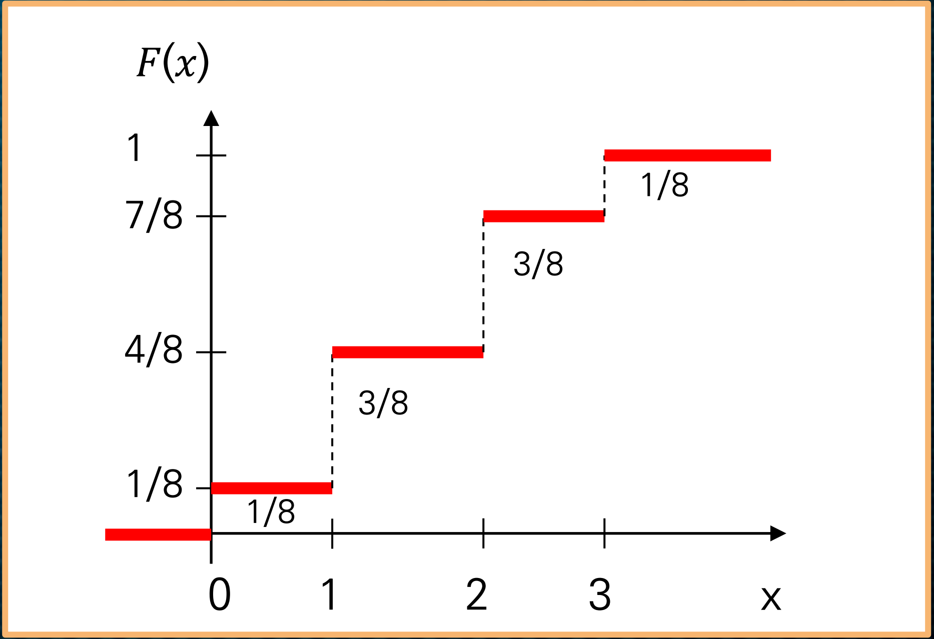
확률변수 X = H 의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

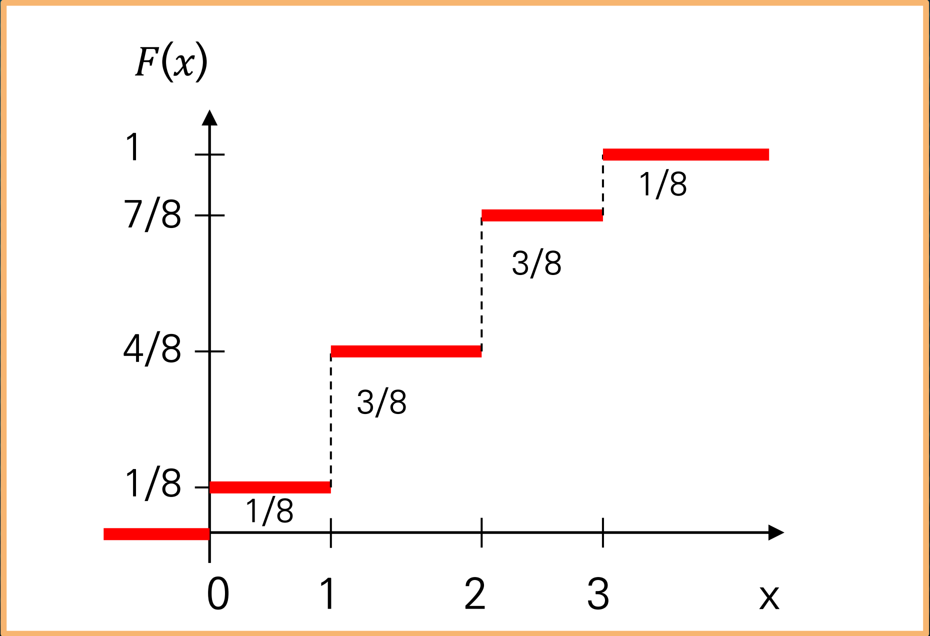
4. 분포함수

분포함수(distribution function)



4. 분포함수

분포함수(distribution function)



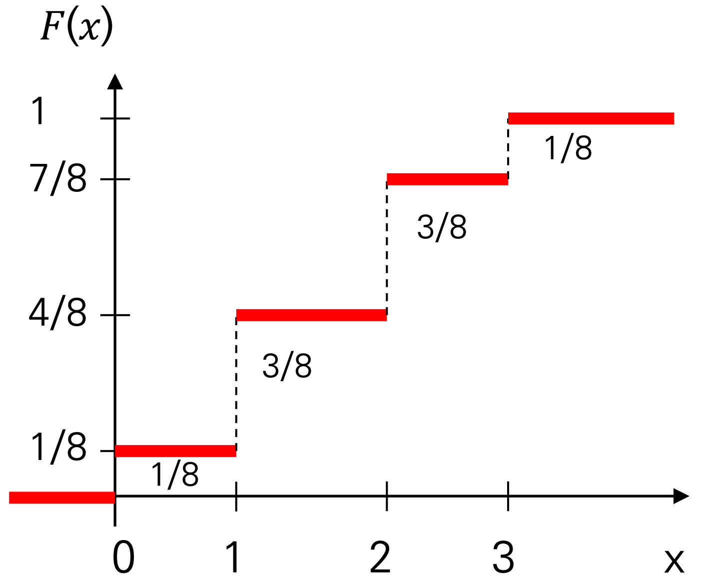
$P(X < 0) = 0$

$P(X = 0) = 1/8$

$P(0 < X < 1) = 0$

4. 분포함수

분포함수(distribution function)



$$F(1) = P(X \le 1)$$
$$= P(-\infty < X < 0)$$
$$+P(X = 0)$$
$$+P(0 < X < 1)$$
$$+P(X = 1)$$
$$= \frac{4}{8}$$

4. 분포함수

이산형 확률변수의 분포함수 F(x) 의 특징

1. $F(-\infty) = 0$

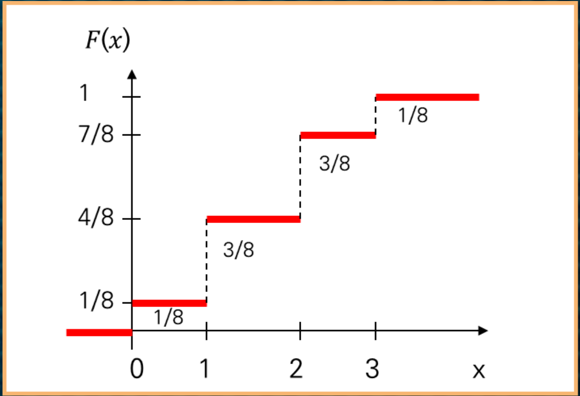
2. $F(+\infty) = 1$

3. $F(x)$는 비감소 함수이다

4. $F(x)$는 우측으로부터 연속이다

4. 분포함수

이산형 확률변수의 분포함수 F(x) 의 특징



4. F(x)는 우측으로부터 연속이다

4. 분포함수

연속형 확률변수의 분포함수 F(x) 의 특징

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$
3. F(x)는 증가 함수이다
4. F(x)는 모든 x 값에 대하여 연속이다

예제 풀어보기

Q4. 이산형확률변수 X가 아래의 확률함수 f(x)를 가질 때, 다음을 구하여라.

$$\mathrm{f}(x) = k\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \quad x = 1, 2, 3$$

(1) k를 발견하라.

(2) 분포함수 F(x)를 발견하라.

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 평균

평균

분포의 중심

분산

분포의 중심으로부터
각각의 값들이 얼마큼
흩어져 있는지를 나타내는 척도

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 평균

- X의 평균 (Mean) : 기호로 그리스문자 μ
- E : Expected Value
- EX : Expected value of X, $\mu = EX$

$$EX = \sum_{\text{all } x} x f(x)$$

OR

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 분산

- X의 분산 (Variance of X, VarX) : 기호로 그리스문자 σ^2
- 확률변수 X가 평균 μ 로부터 얼마나 흩어져 있는지에 대한 척도

$$\sigma^2 = VarX = E(X-\mu)^2 = EX^2 - \mu^2$$

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 분산

$$VarX = \sum_{\text{all x}} (x-\mu)^2 f(x)$$

OR

$$VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$EX^2 = \sum_{all\,\mathbf{X}} x^2 f(x)$$

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 평균 예제

동전 1개를 3회 던지는 실험

X = H의 수

$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$EX = \sum_{all x} xf(x) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5$$

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 평균 예제

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20000}{x^3} & , \quad x > 100 \\ 0 & , \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{100}^{\infty} x \frac{20000}{x^3} dx = 200$$

5. 확률변수의 평균과 분산

확률변수의 평균과 분산 예제

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1) \;, & 1 < x < 2 \\ 0 \;, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

예 확률변수 X의 평균과 분산을 구하라.

5. 확률변수의 평균과 분산

$$EX = \int_1^2 x\,2(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

$$EX^2 = \int_1^2 x^2\,2(x-1)dx = \frac{17}{6}$$

$$\sigma^2 = EX^2 - \mu^2 = \frac{1}{18}$$

σ^2 : 반드시 양수임

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수

$$Y = g(X)$$

예

$$Y = 2X+3,\ Y = X^2 + 4$$

- X가 이산형 확률변수이면 Y도 이산형 확률변수
- X가 연속형 확률변수이면 Y도 연속형 확률변수

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수

확률변수 X의 함수가 g(X) 인 경우,

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{all\ \mathbf{x}} g(x)f(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \end{cases}$$

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수

확률변수 X의 밀도함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3} & , \quad -1 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

예 g(X)= 4X+3인 경우 E(g(X))를 구하라.

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수

확률변수 E(g(X) 예시

$$E(4X+3)=\int_{-1}^{2}(4x+3)\frac{x^2}{3}dx=8$$

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수의 특징

“ 확률변수 X 의 함수 : $Y = aX + b$,여기서 a 와 b 는 상수이다. ”

$E(a) = a$

$Var(a) = 0$

상수는 흩어짐이 없음

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수의 특징

$E(a) = a, \ Var(a) = 0$

$$E(aX) = aEX$$

$$E(aX+b) = aEX + b$$

$$E(aX-b) = aEX - b$$

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수의 특징

$E(a) = a, \ Var(a) = 0$

$$Var(aX) = a^2 VarX$$

$$Var(aX+b) = a^2 VarX$$

$$Var(aX-b) = a^2 VarX$$

기댓값은 선형식 그대로 적용

상수의 위치이동은 Variance에는 영향을 주지 않음

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수의 특징

예 확률변수 X 의 함수: Y = 2X+3

$$EY = E(2X+3) = 2EX+3$$

6. 확률변수의 함수

확률변수의 함수의 특징

예 확률변수 X 의 함수: Y = 2X+3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{VarY} &= \mathrm{Var}(2X+3) = \mathrm{E}((2X+3)-(2EX+3))^2 \\
&= \mathrm{E}\,(2X+3)^2 - 2E(2X+3)(2EX+3) + E(2EX+3)^2 \\
&= \mathrm{E}\,(4X^2+12X+9) - \mathrm{E}\,(4(EX)^2+12EX+9) \\
&= 4(\mathrm{E}X^2-(EX)^2) \\
&= 4\mathrm{VarX}
\end{aligned}
$$

예제 풀어보기

Q5. 확률변수 X의 확률함수는 다음과 같을 때, 답을 구하라.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/6	1/3	1/3	1/6

(1) $g(X)=(2X+1)^2$ 일 때 $E(g(X))$을 구하라.

예제 풀어보기

Q6. 확률변수 X의 밀도함수는 다음과 같을 때, 답을 구하라.

$$f(x) = \frac{x - 80}{1600} \qquad 100 \leq x \leq 140$$

(1) 평균 $E(X)$를 구하라.

(2) 분산 $\mathrm{Var}(X)$를 구하라.

(3) $E(3X+2)$와 $\mathrm{Var}(3X+2)$를 구하라.