問題

次の説明文のうち、間違っているものをひとつ選べ。図 1 はストラッセンの行列積アルゴリズム、図 2 はその説明の一部を示している。図 3 は行列積の基本的なアルゴリズムを示している。

選択肢

(a) ストラッセンの行列積アルゴリズムのアイデアは、次の考え方である。2×2 行列を基本単位として、あらかじめ行列の各要素の計算式を求めておく。よりサイズの大きい $n \times n$（ただし n は 2 のべき乗とする）の行列に対しては、行列を縦・横それぞれ 2 分割することで行列のサイズを小さくし、分割して小さくした行列を再帰的に計算する。これにより、再帰的に同じ計算式を適用することで、計算回数を減らしている。

(b) ストラッセンの行列積アルゴリズムは、最悪時間計算量が $\mathcal{O}(n^{2.81})$、図 3 のアルゴリズムは $\mathcal{O}(n^3)$ であり、ストラッセンの行列積アルゴリズムの方が最悪時間計算量が高速である。

(c) 行列の連続積は動的計画法を用いたアルゴリズムを用いれば高速に計算できるため、さらに行列の連続積全体の計算を高速に実行することを目的として、ストラッセンの行列積アルゴリズムを行列同士の積に適用することは高速化に寄与しない。

(d) 図 1 のアルゴリズムの中で、Matrix_Multiplay_Strassen 関数が 7 回呼ばれているが、これは行列積を求める中で行列の要素を計算ために必要な値を求めるために呼び出されている。

アルゴリズム 11.7 ストラッセンの行列積アルゴリズム

入力：2 つの $n \times n$ 行列 A, B を表す 2 次元配列 A, B

```
Matrix_Multiplay_Strassen(A,B) {
  if (A, Bが1x1の行列) return AxB;
  else {
    A, BをそれぞれA11, A12, A21, A22とB11, B12, B21, B22に分割;
    X1=Matrix_Multiplay_Strassen(A11+A22,B11+B22);
    X2=Matrix_Multiplay_Strassen(A21+A22,B11);
    X3=Matrix_Multiplay_Strassen(A11,B12-B22);
    X4=Matrix_Multiplay_Strassen(A22,B21-B11);
    X5=Matrix_Multiplay_Strassen(A11+A12,B22);
    X6=Matrix_Multiplay_Strassen(A21-A11,B11+B12);
    X7=Matrix_Multiplay_Strassen(A12-A22,B21+B22);
    C1=X1+X4-X5+X7; C2=X3+X5; C3=X2+X4; C4=X1+X3-X2+X6;
    C1, C2, C3, C4を1つの配列Cに結合;
    return C;
  }
}
```

図 1 ストラッセンの行列積アルゴリズム

それでは，n が 2 のべき乗の場合の $n \times n$ 行列の積を求めるストラッセンの行列積アルゴリズムを説明しよう．このアルゴリズムは分割統治法を用いた再帰アルゴリズムであり，まず入力の 2 つの $n \times n$ 行列 A, B を，以下のようにそれぞれ 4 つの $\dfrac{n}{2} \times \dfrac{n}{2}$ 行列である $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ と $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ に分割する．

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

このとき，行列積 $C = AB$ は定義より 2×2 行列の場合と同じように以下のように表すことができる．

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_{11} \times B_{11} + A_{12} \times B_{21} & A_{11} \times B_{12} + A_{12} \times B_{22} \\ A_{21} \times B_{11} + A_{22} \times B_{21} & A_{21} \times B_{12} + A_{22} \times B_{22} \end{pmatrix}$$

つまり，2×2 行列の場合と同じように以下の計算を実行することにより，行列積 $C = AB$ を求めることができる．

$$\begin{aligned}
&X_1 = (A_{11} + A_{22}) \times (B_{11} + B_{22}), && X_2 = (A_{21} + A_{22}) \times B_{11}, \\
&X_3 = A_{11} \times (B_{12} - B_{22}), && X_4 = A_{22} \times (B_{21} - B_{11}), \\
&X_5 = (A_{11} + A_{12}) \times B_{22}, && X_6 = (A_{21} - A_{11}) \times (B_{11} + B_{12}), \\
&X_7 = (A_{12} - A_{22}) \times (B_{21} + B_{22}) && \\
&C = AB = \begin{pmatrix} X_1 + X_4 - X_5 + X_7 & X_3 + X_5 \\ X_2 + X_4 & X_1 + X_3 - X_2 + X_6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

図 2　ストラッセンの行列積アルゴリズムの考え方

アルゴリズム 11.4　行列積を求める基本的なアルゴリズム

入力：$p \times q$ の 2 次元行列 A と $q \times r$ の 2 次元行列 B を表す 2 次元配列 A, B

```
for (i=1; i<=p; i=i+1) {
  for (j=1; j<=r; j=j+1) {
    C[i][j]=0;
    for (k=1; k<=q; k=k+1) { C[i][j]=C[i][j]+A[i][k]*B[k][j]; }
  }
}
```

図 3　行列積を求める基本的なアルゴリズムの考え方