

第11章のポイント

1. n 次の多項式の計算を基本的なアルゴリズムで行うと、 $O(n^2)$ 時間が必要だが、動的計画法によるアルゴリズムを用いると、 $O(n)$ 時間で計算することができる。また、漸近的には動的計画法の時間計算量と同じだが、実際の実行時間をさらに改善するアルゴリズムとして、ホーナーの方法とよばれるアルゴリズムがある。
2. n 個の行列の連続積を求める場合、積の結合則よりどのような順番で連続積を求めても答えは同じだが、計算時間には大きな違いがある。動的計画法によるアルゴリズムを用いると、計算時間がもっとも短くなる行列積の計算順序を $O(n^3)$ 時間で求めることができる。
3. $n \times n$ の2つの行列の積を基本的なアルゴリズムで計算すると、 $O(n^3)$ 時間が必要であるが、分割統治法を用いた再帰的アルゴリズムであるストラッセンの行列積アルゴリズムを使うと、 $O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})$ 時間で行列積を求めることができる。

演習問題

11.1 以下の文章の①～④について、それぞれもっとも適切な記号を1つずつ選べ。

多項式の値を求めるホーナーの方法は、 $n+1$ 個の係数をもつ多項式に対して、時間計算量が(①)である。

2つの $n \times n$ 行列の積を求める基本的なアルゴリズムの時間計算量は(②)であるが、ストラッセンの行列積アルゴリズムを用いることにより、(③)で行列積を求めることができる。また、 n 個の行列の最適な連続積を求める動的計画法を用いたアルゴリズムは、時間計算量が(④)である。

- | | | | |
|----------------|-------------|----------------------|-----------|
| ①: a. $O(n^2)$ | b. $O(n)$ | c. $O(\log n)$ | d. $O(1)$ |
| ②: a. $O(n^3)$ | b. $O(n^2)$ | c. $O(n^{\log_2 7})$ | d. $O(n)$ |
| ③: a. $O(n^3)$ | b. $O(n^2)$ | c. $O(n^{\log_2 7})$ | d. $O(n)$ |
| ④: a. $O(n^3)$ | b. $O(n^2)$ | c. $O(n^{\log_2 7})$ | d. $O(n)$ |

11.2 ホーナーの方法を再帰アルゴリズムとして実現せよ。

11.3 以下の行列 A_1, A_2, A_3, A_4 に対して、行列の連続積 $A_1 A_2 A_3 A_4$ を求める場合のもっとも少ない計算時間を求めよ。

A_1 : 15×4 行列, A_2 : 4×20 行列, A_3 : 20×20 行列, A_4 : 20×15 行列