これらの非可解な問題には，それほど実用的な問題は含まれていないので，一般にはその問題が非可解なのかどうかを考察する必要はないだろう．しかし，これら非可解な問題は，今後どんなにコンピュータが発達しても解くことはできない問題であり，その存在は記憶にとどめておいてほしい．

第13章のポイント

1. 問題を解くもっとも高速なアルゴリズムの最悪時間計算量を，**問題の複雑さ**といい，同じ複雑さの問題の集合を**問題のクラス**とよぶ．問題のクラスはその時間計算量によって包含関係を構成しており，この包含関係を問題の**クラス階層**とよぶ．
2. 問題を解くアルゴリズムの時間計算量が入力サイズの多項式で表される問題のクラスを，**クラス *P***とよぶ．また，問題に対する解が与えられたとき，その問題の解が正しいかどうかを多項式時間で確かめられる問題のクラスを，**クラス *NP***とよぶ．定義より，$P \subseteq NP$であるが，$P \neq NP$が成り立つかどうかは，情報科学分野の最大の未解決問題の1つである．
3. 解きたい問題Aの入力を問題Bの入力に変換し，問題Bを解くアルゴリズムにより問題Aの解を求めるという方法を，問題の**帰着**とよぶ．とくに，入出力の変換に必要な時間計算量が入力サイズの多項式のオーダであるとき，問題Aは問題Bに**多項式時間で帰着可能**であるという．
4. ***NP* 困難問題**とは，クラスNPに含まれるすべての問題を多項式時間で帰着可能である問題であり，***NP* 完全問題**とは，NP困難かつクラスNPに含まれる問題である．NP完全問題は，その定義よりクラスNPに含まれる問題の中でもっとも難しい問題だと考えられている．
5. 停止性判定問題に代表されるようないくつかの問題は，コンピュータを用いて解くことができないことが証明されている．このような解くことができない問題のことを**非可解な問題**とよぶ．

演習問題

13.1　以下の文章の①～⑥について，それぞれ正しい記号を下から選べ．正しい記号が複数存在する場合はすべて列挙せよ．

問題のクラスにおいて，クラスPは（　①　）問題のクラスであり，クラスNPは（　②　）問題のクラスである．

ある問題Aが問題Bに$O(n)$時間で帰着でき，問題Bを$O(n^2)$時間で解くアルゴリズムが存在するとき，（　③　）．

問題Aが（　④　），（　⑤　）の2つの条件を満たすとき，その問題AをNP完全とよぶ．このNP完全問題は（　⑥　）．

①：a. 入力サイズの多項式に比例する時間で解ける

b. 入力サイズの指数に比例する時間で解ける

c. クラス NP を含む　　d. クラス NP に含まれる

②：a. 入力サイズの多項式に比例する時間で解ける

b. 入力サイズの多項式に比例する時間で解が正しいかどうかを確かめることができる

c. クラス P を含む　　d. クラス P に含まれる

③：a. 問題 A は $O(n^2)$ 時間で解ける　　b. 問題 A は $O(n)$ 時間で解ける

c. 問題 B は $O(n)$ 時間で解ける　　d. 問題 A と問題 B の難しさは同じである

④：a. 問題 A はクラス P に属する　　b. 問題 A はクラス NP に属する

c. 問題 A はクラス P に属さない　　d. 問題 A はクラス NP に属さない

⑤：a. 問題 A はクラス NP に属する任意の問題に多項式時間で帰着可能である

b. 問題 A はクラス P に属する任意の問題に多項式時間で帰着可能である

c. クラス P に属する任意の問題を多項式時間で問題 A に帰着可能である

d. クラス NP に属する任意の問題を多項式時間で問題 A に帰着可能である

⑥：a. つねに NP 困難問題でもある　　b. クラス NP に必ず属する

c. クラス NP に属する問題の中でもっとも難しい問題だと考えられている

d. 入力サイズの多項式時間で計算できる

13.2 以下のような 2 つの問題について，問題 P_1 は問題 P_2 に $O(n)$ 時間で帰着可能であることを証明せよ．

問題 P_1　配列に格納された n 個の整数の最大値を求める問題

問題 P_2　配列に格納された n 個の整数の最小値を求める問題

13.3 以下の文章は，停止性判定問題が非可解な問題であることの証明を簡略化したものである．空欄を埋めよ．

以下のような問題を考える．

問題 HALT

入力：プログラム P およびデータ x

出力：計算(P, x)が正常終了するなら OK，そうでなければ NO（ここで，計算(P, x)とは，プログラム P にデータ x を入力として与えたときに実行される計算を表す）．

このとき，HALT が非可解であることを，背理法により証明する．まず，“HALT を解くプログラム Q が存在する” と仮定する．つまりプログラム Q はプログラム P と入力 x の組(P, x)を入力とし，（　①　）ならば OK，そうでなければ NO を出力するプログラムである．

まず，この Q を用いてつぎの性質をもつプログラム Q′ を作る．Q′ はプログラム P を入力とし，（　②　）ならばプログラム Q′ は異常終了し，（　③　）ならばプログラム Q′ は正常終了する．このような Q′ は Q から簡単に作ることができる．このとき，Q に（　④　）を入力として実行した場合の Q の出力を場合分けして考える．

・Q が OK を出力するならば，Q′ が Q からできていることより，Q′ は（　⑤　）．

・Q が NO を出力するならば，Q′ が Q からできていることより，Q′ は（　⑥　）．

いずれの場合も Q′ の実行結果は Q の定義に矛盾するので，（　⑦　）という最初の仮定が間違っていることがわかる．