離散数学 演習課題レポート 3

細川 夏風

2024 年 11 月 13 日

1　問 1

(1). この命題について、$n = 1, n = 2$ のとき $-1 \in \mathbb{Z}, 1 \in \mathbb{Z}$ であるため、この場合にいおいてはこの命題は真である。以下の命題について、$(F(n+1))^2 - F(n+2)F(n) = (-1)^n$ について、この命題における命題関数を $P(n)$ としたとき、$P(n) \to P^{+}(n)$ であることを証明するればよい．$P(k)$ となるような k を任意にとったとき、$(F(k+1)^2) - F(k+2)F(k) = (-1)^k$ となる．帰納法より $P^{+}(k)$ について、$F((k+1)+2)^2 - F((k+1)+2)F(k+1) = (-1)^{k+1}$. この式について、$F(k+3) = F(k+2) + F(k+1)$ を利用すると、

$$\begin{aligned} F(k+2)^2 - F(k-3)F(k+1) &= F(k+2)^2 - (F(k+1) + F(k+2))F(k+1) \\ &= F(k+2)^2 - F(k+1)^2 - F(k+2)F(k+1) \\ &= (F(k+1)^2 - F(k+2)F(k)) \\ &= -((-1)^k) \\ &= F(k+2)^2 - F(k+3)F(k+1) = (-1)^{k+1} \end{aligned} \tag{1}$$

という等式が導ける．よって、この命題は真である。

(2). (a) $\exists k(3^n - 1 = 2k)$ このとき、$k \in \mathbb{Z}$ という命題について帰納法を用いて証明せよ．

(b) $n = 1$ のとき、$3^1 - 1 = 2$ である．そのため、$n = 1$ は 2 の倍数である $k \in \mathbb{Z}$ となるような k を任意にとったとき、$3^k - 1$ が 2 の倍数であると仮定したとき、$\exists l(3^k - 1 = 2l)$ となる整数 l をとる．$k + 1$ について考える，

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 1 &= 3 \times 3^k - 1 \\ &= 3(2l + 1) - 1 \\ &= 6l + 2 \\ &= 2(3l + 1) \end{aligned} \tag{2}$$

$3l + 1$ は整数であるから、$3^{k+1} - 1$ は 2 の倍数である．よって、すべての自然数 n に対して、$3^n - 1$ は 2 の倍数である．

2　問 2

(1). (a) 全単射であるには全射であるかつ単射であるため、以下の論理式で表せる．$\forall y \exists x(f(x) = y)$ のとき、$y' \in \mathbb{Z}_+$ を任意に取る．$\exists x(f(x) = y')$ のとき、y' について場合分けを行う．$y' = 2k'$ 満

たす正の整数 k' を取れる．$x' = k'$ とおくこのとき $f(x') = k(f) = 2k' = y'y'$ が奇数のとき、$y'2k' + 1$ を満たすような 0 以上の整数 k' を取れる．$f(x') = -2x' + 1 = 2k' + 1$ という式になる．このとき $x' = -k'$ という式に変形可能であるため、このとき $f(x') = f(-k') = y'$ という式が成り立つ．以上より、f は全射である．

i. $f(x'_1) = f(x'_2)$ を満たすっ整数 $x'_1 = x'_2$ を任意にとる．

A. $x'_1 > 0$ かつ $x'_2 > 0$ のとき、$f(x'_1) = 2x'_1$ かつ $f(x'_2) = 2x'_2$ で $f(x'_2)$ より、$2x'_1 = 2x'_2$ であるから $x'_1 = x'_2$.

B. このとき $x'_1 > 0$ かつ $x'_2 \leq 0$ のとき $f(x'_1) = 2x'_1$、$f(x'_2) = -2x'_2 + 1$ このとき、$f(x'_1)$ は偶数で $f(x'_2)$ は奇数であり、$f(x'_1) = f(x'_2)$ と矛盾する．

C. このとき $x'_1 \leq 0$ かつ $x'_2 > 0$ のとき $f(x'_1) = -2x'_1 + 1$、$f(x'_2) = 2x'_2$ このとき、$f(x'_1)$ は奇数で $f(x'_2)$ は偶数であり、$f(x'_1) = f(x'_2)$ と矛盾する．

D. $x'_1 \leq 0$ かつ $x'_2 \leq 0$ のとき、$f(x'_1) = -2x'_1 + 1$ かつ $f(x'_2) = -2x'_2 + 1$ で $f(x'_1) = f(x'_2)$ より、$-2x'_1 + 1 = -2x'_2 + 1$ であるから $x'_1 = x'_2$.

以上より単射である．

よって全単射である．

(2). 否定命題、$\exists A \exists B (A \subset B \wedge \bar{A} \subset B)$ を証明する．$B = U$ とすると、A が $\emptyset$ のとき、$A \subset B$ かつ $\bar{A} \subset B$ となる．よって、$\exists A \exists B (A \subset B \wedge \bar{A} \subset B)$ が成り立つ．

(3). (a) $x \in \mathbb{R}$ について、$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ となる実数 x は存在するという命題について証明しなさい．

(b) $x' \in \mathbb{R}$ となる x' をとる命題の式について変形すると $(x-1)(x-2) = 0$ であるため、$x' = 1$ のときに 0 の積となりこの命題が成り立つ．また、$x = 2$ のときにも 0 の積であるため、命題が成り立つことがわかる．命題を満たす x' の値が存在するため、命題は真である．

(4). (a) 任意の実数 x と任意の実数 y について $Q(x, y) : x > y \to x^2 > y^2$ という命題が成り立つかについて証明しなさい．

(b) この命題について偽であると仮定した場合、否定命題は $x' \in \mathbb{R}$ と $y' \in \mathbb{R}$ となる x' と y' とる $\exists x' \exists y' (x' > y' \wedge (x')^2 \leq (y')^2)$ となる．$x' = 2$、$y' = -2$ について否定命題を満たすため、この順命題である $Q(x, y) : x > y \to x^2 > y^2$ は偽である．

3 問 3

(1). 証明: 問題文の定義 2 よりと集合 B について、論理式は

$$(\forall z (z \in B \to z \leq 24)) \wedge (\forall t (\forall z (z \in B \to z \leq t) \to 24 \leq t)).\ ただし、z, t \in \mathbb{R}$$

この式について

$$\forall z (z \notin B \to z > 24)$$

という論理式の部分に注目して考える．このとき、z の値については $z > 24$ になる．そのため $z \leq 24$ 常に成り立つことがわかる．

$$\forall t (\forall z (z \in B \to z \leq t) \to 24 \leq t)$$

という論理式の部分に注目したとき、$t \in \mathbb{R}$ となるような t' を取る.

$$\forall z(z \in B \to z \leq t') \to 24 \leq t')$$

この命題について背理法を用いる.

$$\exists z(z \notin B \land 24 > t')$$

このとき、$a \leq 24$ これについて不等式について、$a \leq 24, a \geq t', 24 > t'$ という不等式が成り立つ. この不等式は成り立たないより、この命題は偽である. 背理法からは $\forall z(z \in B \to z \leq t') \to 24 \leq t')$ という命題は真である. よってこれらの命題より 24 は上限である.