情報科学応用 第 4 回課題

細川 夏風

2024 年 12 月 16 日

1 問題 A

$m, n, k \in \mathbb{Z}$

(1)$2 > 0 \wedge \exists k(-2020 = 2k)$
(2)$\forall m \exists k(0 = mk)$
(3)$\forall m(m > 0 \wedge \exists k(0 = mk))$
(4)$\exists n((0 > 0) \wedge \exists k(n = 0k))$
(5)$\forall m \exists k(-1 = mk)$

2 問題 B

(1)この命題に対して、論理式 $2 > 0 \wedge \exists k(-2020 = 2k)$ を $2 > 0 \wedge$ の部分と $\exists k(-2020 = 2k)$ に分けて考える．$2 > 0$ に付いて 2 は 0 より大きいので真．$\exists k(-2020 = 2k)$ について、$k = -1010$ のとき成り立つため真である．よってこの命題は真である．

(2)この命題の論理式 $\forall m \exists k(0 = mk)$ から考える．任意の整数となるような m' をとったとき、$k = 0$ をとると $m' \times 0$ は 0 になるためこの命題は真である．

(3)この命題の論理式 $\exists m(m \leq 0 \vee \forall k(0 \neq mk))$ から考える．このとき、$m = 0$ であればこの命題は成り立つ．よって否定命題が真であるため順命題は偽である．

(4)この命題の論理式 $\exists n((0 > 0) \wedge \exists k(n = 0k))$ から考える．この命題は論理式の前部分の $(0 > 0)$ の部分で成り立っていないため、偽である．

(5)この命題の論理式 $\forall m \exists k(-1 = mk)$ の否定命題 $\exists m \forall k(-1 \neq mk)$ について考える．任意の整数 k' をとる．このとき、$m = 0$ とすると、$mk' \neq 0$ となるため否定命題が成り立つため、順命題は偽である．

3　問題 C

証明　P を数列 a_n の述語としたとき、$\forall n P(n)$ について帰納法を用いて成り立つことを証明する.

$n = 1$ のとき、$10 \times 2^{1-1} - 3$ の解は 7 となるため成り立つ.

a_n のとき、

$$\begin{aligned} 2(10 \times 2^{n-1} - 3) + 3 &= 10 \times 2^n - 6 + 3 \\ &= 10 \times 2^n - 3 \\ &= a_{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

よって数列 a_n はすべての自然数 n について成り立つ. □

問題 D の証明

証明　基底の場合 $(n = 0)$

左辺と右辺をそれぞれ計算する.

$$\sum_{i=0}^{0} i^3 = 0^3 = 0$$

$$\left(\sum_{i=0}^{0} i\right)^2 = (0)^2 = 0$$

左辺と右辺が一致するため、$P(0)$ は成立する.

$n = k$ のとき、次が成り立つと仮定する.

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2$$

つまり、

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

が成立すると仮定する.

$n = k + 1$ の場合

左辺を計算する.

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3$$

帰納法の仮定を利用すると

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{k} i\right)^2 + (k+1)^3$$

$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ より：

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

次に、右辺を計算する.

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} i + (k+1)\right)^2$$

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right)^2$$

$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ を計算すると

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

これを二乗すると

$$\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

したがって、右辺は

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} i\right)^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

左辺を同様に計算する.

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ と $(k+1)^3 = \frac{4(k+1)^3}{4}$ をまとめて：

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4}$$

ここで $k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$ を利用すると

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

右辺と一致した.

基底の場合 $n = 0$ が成立し、帰納法の仮定を用いて $n = k + 1$ の場合も成立することを示した.
したがって、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

が成立する.

□