

Задачи по теория — определен интеграл
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със * са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Докажете, че произведението на интегрируеми функции е също интегрируема функция.
2. Докажете, че функцията на Дирихле $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, която се дефинира чрез

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

не е интегрируема върху $[0, 1]$.

3. * (Теорема за средните стойности) Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата, а $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема и неотрицателна. Тогава съществува $c \in [a, b]$ такова, че

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

4. Нека $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, е непрекъснатата четна функция. Докажете, че

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

5. Нека $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, е непрекъснатата нечетна функция. Докажете, че

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

6. Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъснатата T -периодична функция. Докажете, че:

$$(a) \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b;$$

$$(б) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

7. * Пресметнете определения интеграл

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Нека $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, е непрекъсната и неограничена. Ако съществува границата

$$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)(b-x)^\lambda$$

с някое $\lambda < 1$, то несобственият интеграл $\int_a^b f(x) dx$ е абсолютно сходящ.

9. Нека $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната. Ако съществува границата

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)x \neq 0 \quad (\text{но се допуска } \pm\infty),$$

то несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ е разходящ.