Задачи по теория — функционални редици и редове
КН, 1 к., I п.

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Докажете, че редица $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ от функции, дефинирани в $D \subseteq \mathbb{R}$, е равномерно сходяща към функцията $f(x)$ в D тогава и само тогава, когато
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Докажете, че ако $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ и $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(x)$ в $D \subseteq \mathbb{R}$, то $f_n(x) + g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) + g(x)$ в D.

3. Нека функционалният ред $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в $D \subseteq \mathbb{R}$ и $v : D \to \mathbb{R}$ е ограничена. Докажете, че редът $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} v(x)u_n(x)$ е също равномерно сходящ в D.

4. Докажете, че ако радиусите на сходимост на степенните редове $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ са съответно R_1 и R_2, като $R_1 \neq R_2$, то радиусът на сходимост на $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n$ е $\min\{R_1, R_2\}$. Остава ли твърдението е сила, ако $R_1 = R_2$.

5. * Докажете, че степенният ред
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$
и полученият от него степенен ред чрез почленно диференциране
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$
имат един и същи радиус на сходимост.