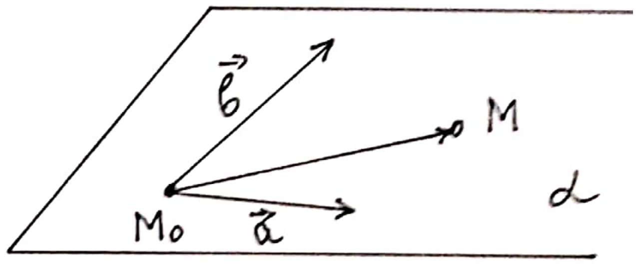
Уравнения на права и равнина в пространството

ОКС $K = Oxyz$

I Уравнения на равнина

1) Координатни параметрични:



$M_0(x_0, y_0, z_0)$ фиксирана

$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\ (a_1, a_2, a_3) \\ \vec{b}\ (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\}$ ЛНЗ

$\exists!$ равнина $\alpha \begin{cases} Z\ M_0 \\ \parallel \vec{a} \\ \parallel \vec{b} \end{cases}$

Нека т. $M(x, y, z)$ е произволна от α. Тогава $\overrightarrow{M_0M}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\exists!(\lambda, \mu)$: $\overrightarrow{M_0M} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$

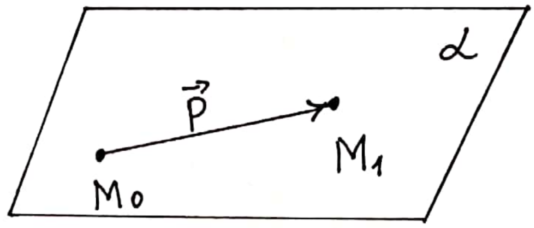
$$\alpha \begin{cases} x = x_0 + \lambda.a_1 + \mu.b_1 \\ y = y_0 + \lambda.a_2 + \mu.b_2 \\ z = z_0 + \lambda.a_3 + \mu.b_3 \end{cases}, \quad \begin{array}{l}\lambda \in \mathbb{R} \\ \mu \in \mathbb{R}\end{array}$$

2) Общо уравнение на равнина:

$$(*)\ \alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0 \quad , \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$$

т. $M_0(x_0, y_0, z_0)\ Z\ \alpha \iff A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D = 0$

Кога $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha$?



Нанасяме представител на $\vec{p}$ с начало M_0 до т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $\Rightarrow$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 - x_0 = p_1 \\ y_1 - y_0 = p_2 \\ z_1 - z_0 = p_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 = x_0 + p_1 \\ y_1 = y_0 + p_2 \\ z_1 = z_0 + p_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow M_1 \in \alpha \Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ удовл. $(*)$

$$A.x_1 + B.y_1 + C.z_1 + D = 0$$

$$A.(x_0 + p_1) + B.(y_0 + p_2) + C.(z_0 + p_3) + D = 0$$

$$\underbrace{(A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ от } M_0 \in \alpha}} + (A.p_1 + B.p_2 + C.p_3) = 0$$

Извод: $\vec{p}(p_1, p_2, p_3) \in \alpha \Leftrightarrow A.p_1 + B.p_2 + C.p_3 = 0.$

* * *

Примери:

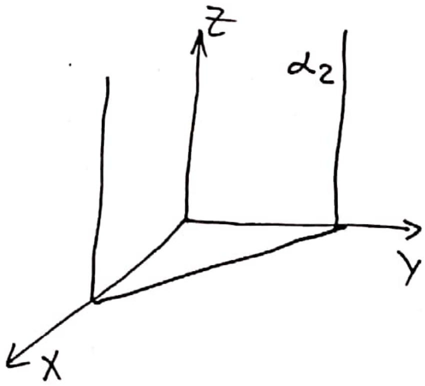
1) $\alpha_1 : A.x + B.y + C.z = 0$, $D = 0 \Leftrightarrow$ т. $O \in \alpha$

2) $\alpha_2 : x + 2y + 3 = 0 \Rightarrow A = 1, B = 2, C = 0, D = 3$

разгл. $\vec{e}_3(0,0,1)$, дали $\vec{e}_3 \parallel \alpha_2$: $1.0 + 2.0 + 0.1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{e}_3 \parallel \alpha_2$

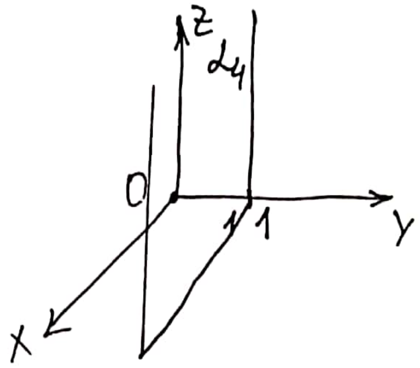
Извод: $C = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 \parallel Oz$



3) $\alpha_3 : 3y + 4.z = 0$

$A = 0$, $B = 3$, $C = 4$, $D = 0 \Rightarrow$?

4) $\alpha_4 : Y - 1 = 0$: $A = 0 \Rightarrow \alpha_4 \parallel Ox$
$B = 1$
$C = 0 \Rightarrow \alpha_4 \parallel Oz$
$C = -1 \Rightarrow \alpha_4 \not\ni$ т.O

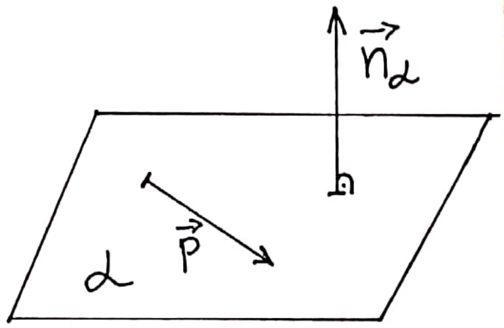


5) $O_{XY} : Z = 0$

$O_{XZ} : Y = 0$

$O_{YZ} : X = 0$

* * *



3) Нормален вектор на р-та α

$\alpha : A.X + B.Y + C.Z + D = 0$

$\vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow A.p_1 + B.p_2 + C.p_3 = 0$

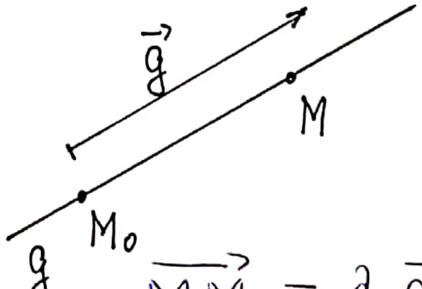
$\vec{n}_\alpha \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} \Rightarrow (\vec{n}_\alpha . \vec{p}) = 0 \xRightarrow{\text{ОКС}}$

$\vec{n}_\alpha (A, B, C)$

* * *

II Уравнения на права в пространството

1) Координатни параметрични:



$\overrightarrow{M_0M} = \lambda . \vec{g}$

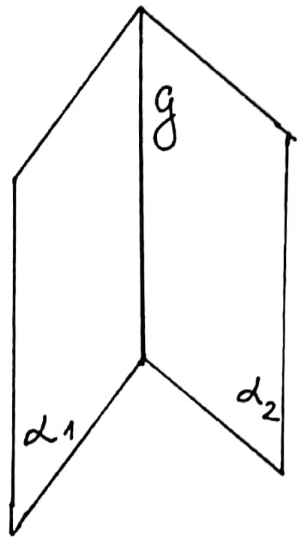
$M_0(x_0, y_0, z_0)$
$\vec{g}(g_1, g_2, g_3)$ – лнз $\Rightarrow \exists! g \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{g} \end{cases}$

$$g : \begin{cases} X = X_0 + \lambda . g_1 \\ Y = Y_0 + \lambda . g_2 \\ Z = Z_0 + \lambda . g_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Задаване на права чрез 2 равнини

$\alpha_1 : A_1.X + B_1.Y + C_1.Z + D_1 = 0$

$\alpha_2 : A_2.X + B_2.Y + C_2.Z + D_2 = 0$:



$r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \exists!\, g = \alpha_1 \cap \alpha_2$

Примери: 1) $g_1 \begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$

2) $g_2 \begin{cases} 2.X - 3.Z = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$

* * *

Взаимни положения на две равнини

1) $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

2) $r\begin{pmatrix} A_1 & \dots & D_1 \\ A_2 & & D_2 \end{pmatrix} = 2$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$

3) $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$

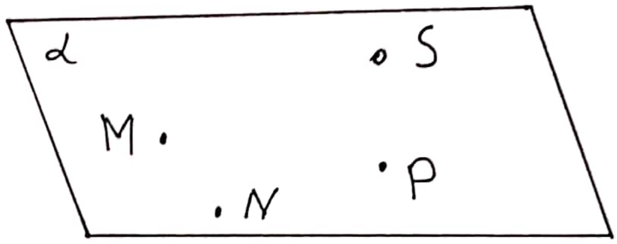
1 зад. ОКС $K = Oxyz$

$M(3,1,4)$, $N(2,1,3)$, $P(1,2,-1)$, $Q(0,-3,2)$

а) Да се намери общо уравнение на равнината α, определена от M, N, P

I н. С компланарност на 4 точки:

Нека т. $S(x,y,z)$ е произволна от α



M, N, P и S са компланарни

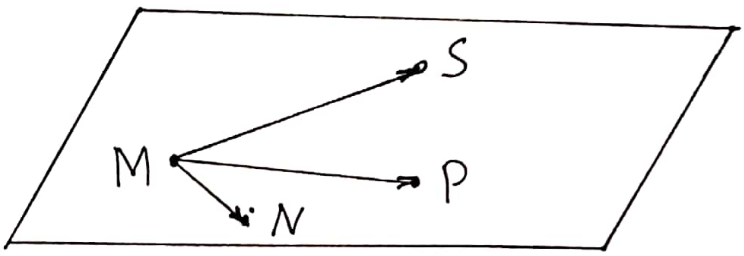
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

II н. С компланарност на 3 вектора

$\overrightarrow{MS}(x-3, y-1, z-4)$

$\overrightarrow{MN}(-1, 0, -1)$

$\overrightarrow{MP}(-2, 1, -5)$



са компланарни $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: x - 3y - z + 4 = 0$

III Неопределени коефициенти

$\alpha: A.x + B.y + C.z + D = 0$

$\alpha \parallel \overrightarrow{MN}(-1, 0, -1) \Rightarrow \quad A.(-1) + B.0 + C.(-1) = 0$

$\alpha \parallel \overrightarrow{MP}(-2, 1, -5) \Rightarrow \quad A.(-2) + B.1 + C.(-5) = 0 \quad \Rightarrow$

$\alpha \ni M(3, 1, 4) \quad \Rightarrow \quad A.3 + B.1 + C.4 + D = 0$

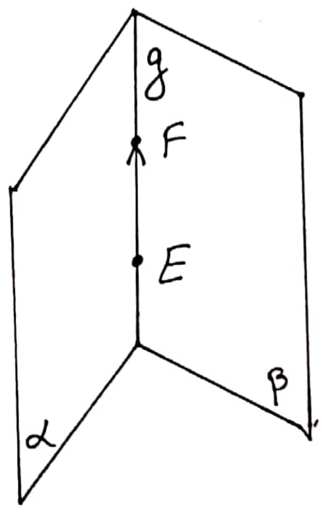
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A = -C \\ B = 3.C \\ D = -4.C \end{array} \right. \quad \text{при } C = -1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -3 \\ C = -1 \\ D = 4 \end{array} \right.$$

* * *

б) Да се намерят координатни параметрични уравнения на $g = \alpha \cap \beta$, ако:

$\alpha: x - 3y - z + 4 = 0$

$\beta: 2x + y + 5.z - 6 = 0$



Решение:

$$g \begin{cases} x - 3y - z + 4 = 0 \\ 2x + y + 5z - 6 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

! Избираме 2 разл. точки E и F от g:

За т. E избирам $y_E = 0$, от $(*) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x - z + 4 = 0 \\ 2x + 5z - 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x_E = -2 \\ z_E = 2 \end{array}$

$E(-2, 0, 2)$

За т. F избирам $x_F = 0$, от $(*) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -3y - z + 4 = 0 \\ y + 5z - 6 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$

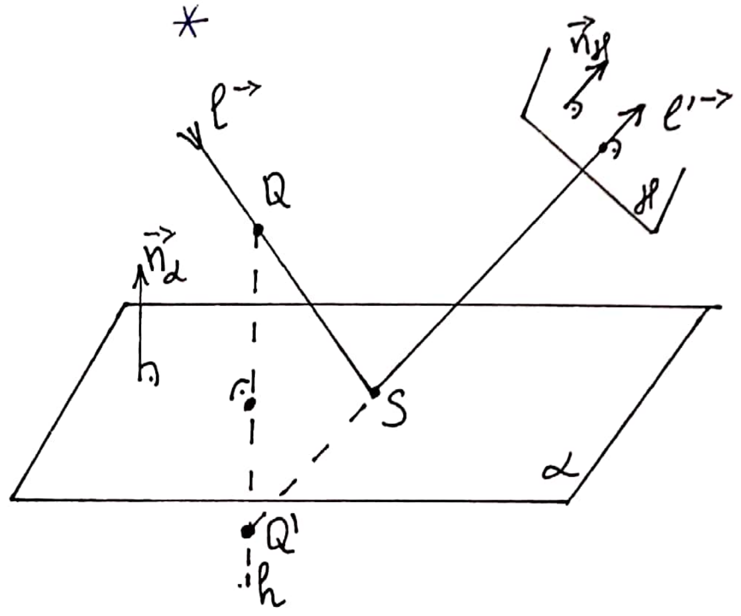
$\Rightarrow \begin{array}{l} y_F = 1 \\ z_F = 1 \end{array} \Rightarrow F(0, 1, 1)$

$$g\begin{cases}\ni E(-2,0,2)\\ \ni F(0,1,1)\end{cases} \Rightarrow g\begin{cases}\ni E(-2,0,2)\\ \parallel \overrightarrow{EF}(2,1,-1)\end{cases} \Rightarrow g:\begin{cases}x=-2+2p\\ y=0+1.p\\ z=2-1.p\end{cases}$$

$p\in\mathbb{R}$

* * *

в) Светлинен лъч $\vec{l} \ni Q$, отразява се от р-та α и отразеният лъч $\vec{l'}$ пробожда γ под прав ъгъл. Да се намерят уравнения на правите l и l'.



$\alpha: x-3y-z+4=0$

$\gamma: x+y-z+1=0$

Решение:

1) Ако т. $Q \xrightarrow{\sigma_\alpha} Q'$, то

$Q' \ni l'$

Търсим т. Q'.

$$h\begin{cases}\ni Q\\ \perp \alpha\end{cases} \Rightarrow h\begin{cases}\ni Q(0,-3,2)\\ \parallel \vec{n}_\alpha(1,-3,-1)\end{cases}$$

$$h:\begin{cases}x=0+1.s\\ y=-3-3.s, \quad s\in\mathbb{R}\\ z=2-1.s\end{cases}$$

т. $Q_0 = h\cap\alpha$

$$\left|\begin{array}{l}x=s\\ y=-3-3.s\\ z=2-s\\ x-3y-z+4=0\end{array}\right. \Rightarrow s-3.(-3-3s)-(2-s)+4=0$$

$s=-1 \to h \Rightarrow Q_0(-1,0,3)$

$Q(0,-3,2)$

$Q_0(-1,0,3)$ - средата $\Rightarrow$ $\dfrac{x'+0}{2}=-1$ $\quad x'=-2$

$Q'(x',y',z')$

$\dfrac{y'+(-3)}{2}=0$ $\quad y'=3$

$\dfrac{z'+2}{2}=3$ $\quad z'=4$

$Q'(-2,3,4)$

2) $l' \begin{cases} \ni Q' \\ \perp \gamma \end{cases} \Rightarrow l' \begin{cases} \ni Q'(-2,3,4) \\ \parallel \vec{n}_\gamma(1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow l' \begin{cases} x=-2+1.t \\ y=3+1.t \\ z=4-1.t \end{cases}$

$t \in \mathbb{R}$

3) Търсим т. $S = l' \cap \alpha$

$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3+t \\ z=4-t \\ x-3y-z+4=0 \end{cases} \Rightarrow (-2+t)-3.(3+t)-(4-t)+4=0$

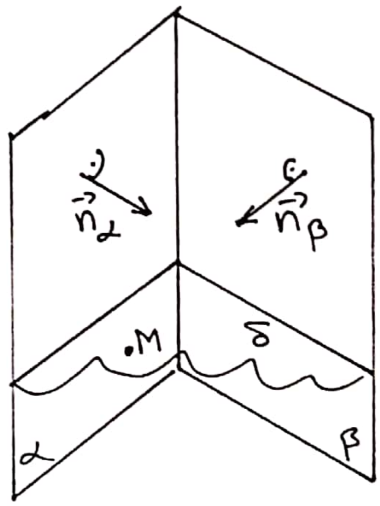
$t=-11 \rightarrow l' \Rightarrow S(-13,-8,15)$

4) $l \begin{cases} \ni Q(0,-3,2) \\ \ni S(-13,-8,15) \end{cases} \Rightarrow \vec{SQ}(13,5,-13)$

$l \begin{cases} \ni Q(0,-3,2) \\ \parallel \vec{SQ}(13,5,-13) \end{cases} \Rightarrow l: \begin{cases} x=0+13.\lambda \\ y=-3+5.\lambda \\ z=2-13.\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

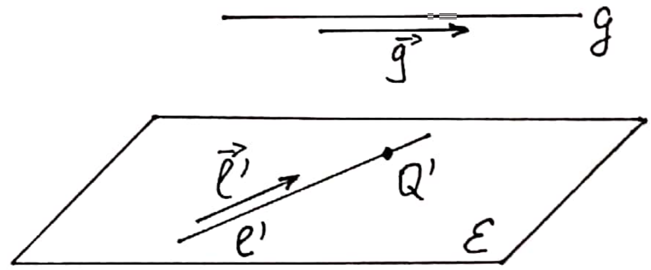
г) Да се намерят общи уравнения на следните равнини:

1) $\delta \begin{cases} \ni M(3,1,4) \\ \perp \alpha: x-3y-z+4=0 \\ \perp \beta: 2x+y+5z-6=0 \end{cases}$



$\delta \begin{cases} \parallel \vec{n}_\alpha(1,-3,-1) \\ \parallel \vec{n}_\beta(2,1,5) \\ \ni M(3,1,4) \end{cases}$

$$\delta: \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \delta: 2x+y-z-3=0$$

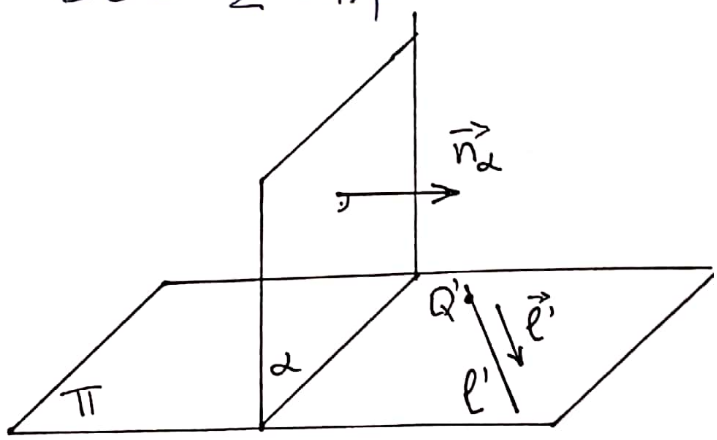


2) $\varepsilon \begin{cases} \ni \ell' \\ \parallel g = \alpha \cap \beta \end{cases}$

$\ell' \begin{cases} x = -2 + 1.t \\ y = 3 + 1.t \\ z = 4 - 1.t \end{cases}$, $g: \begin{cases} x = -2 + 2.p \\ y = 0 + 1.p \\ z = 2 - 1.p \end{cases}$

$Q'(-2,3,4)$

$\varepsilon: y+z-7=0$



3) $\pi \begin{cases} \ni \ell' \\ \perp \alpha \end{cases}$

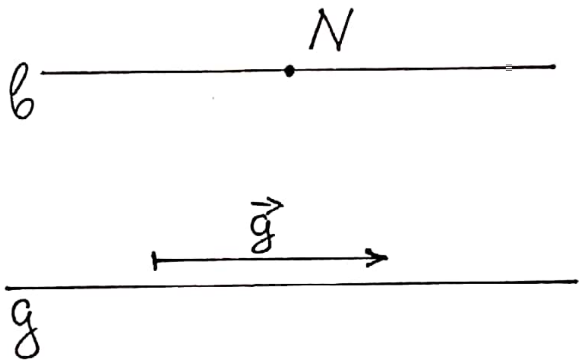
$\pi: x+z-2=0$

2 зад. ОКС $K = Oxyz$

$$g: \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{т. } M(1,2,3) \quad \text{т. } N(5,-1,1)$$

а) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата

$$b: \begin{cases} \ni N \\ \parallel g \end{cases}$$



1) От $\left| \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{array} \right.$

За коорд. парам. уравнения на g

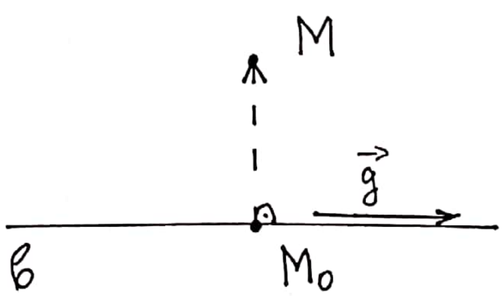
изб. $x = s \rightarrow y = 3 - 2.s$, $z = -2 - 1.s \Rightarrow g: \begin{cases} x = s \\ y = 3 - 2.s \\ z = -2 - 1.s \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow g \parallel \vec{g}(1, -2, -1)$

$$b: \begin{cases} \ni N(5, -1, 1) \\ \parallel \vec{g}(1, -2, -1) \end{cases} \Rightarrow b: \begin{cases} x = 5 + p \\ y = -1 - 2.p \\ z = 1 - 1.p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

б) Да се намери разстоянието от т. M до b

Търсим т. $M_0 = \text{орт. пр.}_b M$



$M_0 \ni b \Rightarrow M_0(5+p, -1-2p, 1-p)$

$M(1, 2, 3)$

$\overrightarrow{M_0M}(-4-p, 3+2p, 2+p)$

$\vec{g}(1, -2, -1)$

$(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{g}) = 0 \Rightarrow (-4-p).1 + (3+2p).(-2) + (2+p).(-1) = 0$

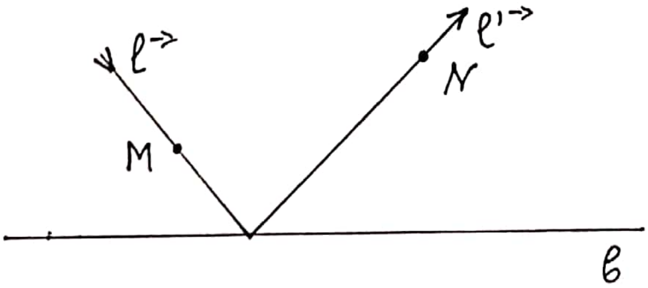
$p = -2 \to M_0(3, 3, 3)$

$\overrightarrow{M_0M}(2, 1, 0)$

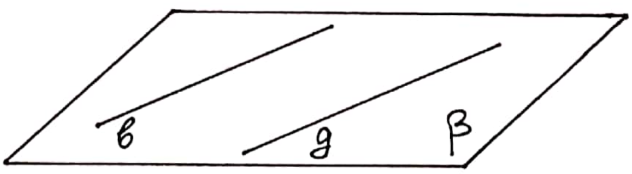
$d(M, b) = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{5}$

в) Упр: $M \xrightarrow{\sigma_b} M'$, намерете координатите на M'

Светлинен лъч $\vec{l} \ni M$, отразява се от правата b и отразеният лъч $\vec{l'}$ минава през т. $N(10,-1,0)$



г) (Упражнение) Да се намери общо уравнение на равнината $\beta \begin{cases} \ni b \\ \ni g \end{cases}$.



Отг.: $\beta: 5x + 4y - 3z - 18 = 0$

3 зад. (Упражнение) ОКС $K = Oxyz$

$A(0,2,4)$
$B(1,0,2)$
$C(-4,2,1)$
$D(-3,0,-3)$

а) Да се намерят коорд. на т. $H \begin{cases} \ni AB \\ CH \perp AB \end{cases}$

! $H = $ орт. пр.$_{AB}C$

б) $S_{\triangle ABC} = ?$ (векторно произведение)

в) $V_{ABCD} = ?$ (смесено произведение)

4 зад. ОКС $K = Oxyz$ (10 точки)

$\Pi: 3.x + 2.y - z - 1 = 0$

т. $A(-3,-1,2)$, правата $a \ni A$

т. $B(6,-9,6)$ правата $b \ni B$

$$a \xrightarrow{\sigma_\Pi} b$$

а) Да се намерят координатни параметрични уравнения на правите a и b;

б) Нека $a \cap \Pi =$ т. P, $b \cap \Pi =$ т. Q.

Да се докаже, че точките A, B, P и Q лежат в една равнина и да се намери уравнението на тази равнина.

* * *

5 зад. ОКС $K = Oxyz$

$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0$

Да се определи взаимното положение на правата a и р-та α. Да се намерят координатни параметрични уравнения на правата $a' = \sigma_\alpha(a)$ във всеки от случаите:

а) $a: \begin{cases} x = 2 + 3.s \\ y = 1 - 1.s \\ z = 2 + 1.s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0$

$a \ni A(2,1,2)$, $2 + 2.1 - 2 - 2 = 0$

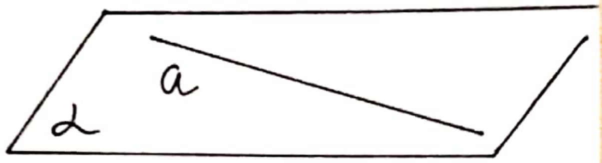
$\underline{/ A \in \alpha}$

$a \parallel \vec{a}(3,-1,1)$, $1.3 + 2.(-1) - 1 = 0$

$\underline{/ \vec{a} \parallel \alpha}$

$\Rightarrow a \subset \alpha$ (a лежи в α)

$a \xrightarrow{\sigma_\alpha} a \Rightarrow a' \equiv a$



* * *

б)

$$a: \begin{cases} x = 2 + 1.p \\ y = +1 - 1.p \\ z = -4 - 1.p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

$\alpha: x + 2.y - z - 2 = 0$

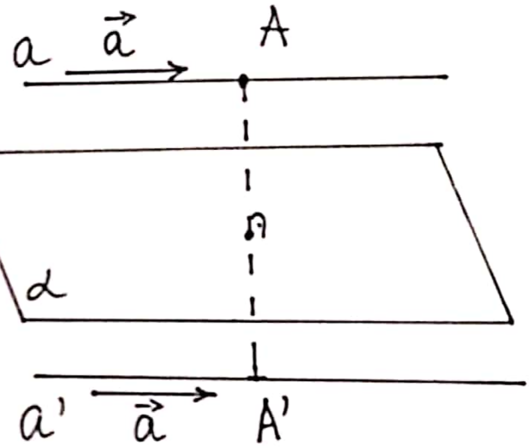
$a \ni A(2, 1, -4)$, $A \notin \alpha$

$a \parallel \vec{a}(1, -1, -1)$, $1.1 + 2.(-1) - (-1) = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel \alpha$

Извод: $a \parallel \alpha$

$a \xrightarrow{\sigma_\alpha} a' \Rightarrow a' \parallel \alpha$



Намираме т. $A' = \sigma_\alpha(A)$

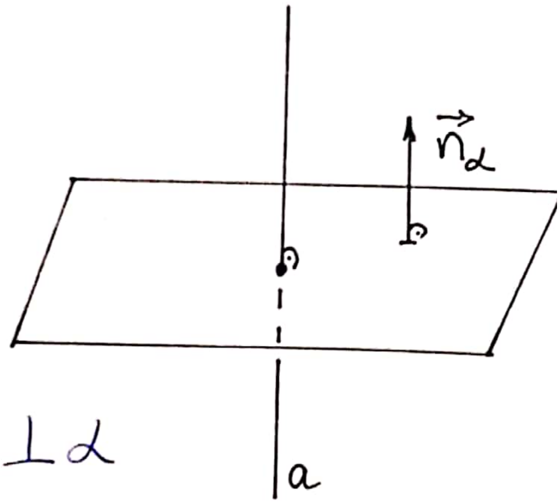
$A(2, 1, -4) \xrightarrow{\sigma_\alpha} A'(0, -3, -2) \Rightarrow a' \begin{cases} x = 0 + 1.q \\ y = -3 - 1.q \\ z = -2 - 1.q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$

(?)

* * *

в) $$a: \begin{cases} x = 1 + 1.q \\ y = 2 + 2.q \\ z = 3 - 1.q \end{cases}, q \in \mathbb{R}$$

$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0$



$\left.\begin{array}{l} a \parallel \vec{a}(1, 2, -1) \\ \alpha \perp \vec{n}_\alpha(1, 2, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \vec{n}_\alpha \Rightarrow a \perp \alpha$

$a \xrightarrow{\sigma_\alpha} a$

$a' \equiv a$

г)
$$a: \begin{cases} x = 2 + 1.t \\ y = 1 - 1.t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = -4 + 5.t \end{cases}$$

$a \ni A(2, 1, -4) \xrightarrow{\sigma_\alpha} A'(0,-3,-2)\,(?)$

$a \parallel \vec{a}(1, -1, 5)$

$\alpha: x + 2y - z - 2 = 0 \qquad \vec{n}_\alpha(1, 2, -1)$

$1.1 + 2.(-1) - 5 = -6 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \nparallel \alpha$

Извод: Правата a пробожда α.

$a \not\parallel \alpha$

Нека $a \cap \alpha = $ т. S

$S \xrightarrow{\sigma_\alpha} S$

$$a \begin{cases} \ni A \\ \ni S \end{cases} \xrightarrow{\sigma_\alpha} a' \begin{cases} \ni A' \\ \ni S \end{cases}$$

За коорд. на т. S:

$$\left| \begin{aligned} &x = 2 + t \\ &y = 1 - t \\ &z = -4 + 5t \\ &x + 2y - z - 2 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{т. } S(3, 0, 1) \quad A'(0, -3, -1) \Rightarrow \vec{SA'}(-3, -3, -2)$$

$$a': \begin{cases} x = 0 - 3.\lambda \\ y = -3 - 3.\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2.\lambda \end{cases}$$