6 зад. (ОС на кръстосани прави) ОКС $K = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = 5 + s \\ y = -1 + 2.s, s \in \mathbb{R} \\ z = 11 - s \end{cases}, \quad b: \begin{cases} x = -4 - 7p \\ y = 3 + 2p, p \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3p \end{cases}$$

а) Да се определи взаимното положение на a и b

За две прави в пространството има четири възможни взаимни положения:

$a \equiv b$, $a \parallel b$, $\exists!$ т. $S = a \cap b$, a и b - кръстосани

1) $a \parallel \vec{a}(1, 2, -1)$
$b \parallel \vec{b}(-7, 2, 3)$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ЛНЗ, т.е. не са колинеарни

извод: $a \not\equiv b$, $a \nparallel b$

2) Остава да проверим дали a и b имат обща точка.

$$\left| \begin{array}{ll} x = 5 + s = -4 - 7p & (1) \\ y = -1 + 2s = 3 + 2p & (2) \\ z = 11 - s = 4 + 3p & (3) \end{array} \right.$$

От (1) и (3) $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} p = -4 \\ s = 19 \end{array}}$

заместваме в (2)

Не се получава вярно рав.

Извод: a и b не се пресичат

Окончателно: a и b са кръстосани.

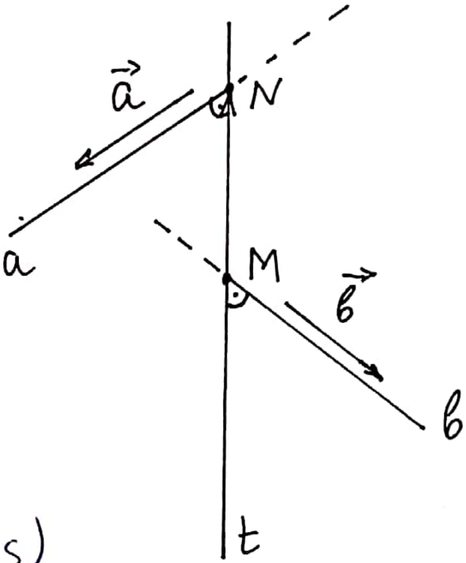
Не съществува равнина, която да ги съдържа едновременно.

б) Да се намерят уравнения на оста t на кръст. прави a и b

Търсим координатите на:

$$\begin{cases} \text{т. } N \in a \\ \text{т. } M \in b \\ MN \perp a \\ MN \perp b \end{cases}$$

Тези условия еднозначно определят правата $MN \equiv t$



От $N \in a \Rightarrow N(5+s, -1+2s, 11-s)$

От $M \in b \Rightarrow M(-4-7p, 3+2p, 4+3p)$

$$\overrightarrow{MN}(9+7p+s, -4-2p+2s, 7-3p-s)$$
$$\vec{a}(1, 2, -1)$$
$$\vec{b}(-7, 2, 3)$$

$$\begin{cases} (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{a}) = 0 \\ (\overrightarrow{MN} \cdot \vec{b}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (9+7p+s).1+(-4-2p+2s).2+(7-3p-s).(-1) = 0 \\ (9+7p+s).(-7)+(-4-2p+2s).2+(7-3p-s).3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6p+6s=6 \\ -62p-6s=50 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} p=-1 \Rightarrow M(3, 1, 1) \\ s=2 \Rightarrow N(7, 3, 9) \end{array}$$

$$\overrightarrow{MN}(4, 2, 8)$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2+2^2+8^2} = \sqrt{84}$$ разстояние между правите a и b

$$t \begin{cases} \ni M \\ \parallel \overrightarrow{MN} \end{cases} \Rightarrow t \begin{cases} x = 3+2.\lambda \\ y = 1+1.\lambda \\ z = 1+4.\lambda \end{cases}$$
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

7 зад. (Упражнение) Да се намерят уравнения на оста на кръстосаните прави

$$a: \begin{cases} x = 7+s \\ y = 0+2s \\ z = 1+2s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -1+2p \\ y = -4+2p \\ z = 3p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

и разстоянието между тях.

Отг. т. $N(9,4,5) \in a$

т. $M(5,2,9) \in b$

* * *

8 зад. ОКС $K = Oxyz$

$$m: \begin{cases} x = 2-s \\ y = s \\ z = 1+2s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \qquad g: \begin{cases} x+2y+2z-1=0 \\ y+2z-1=0 \end{cases}$$

$\alpha: x - z + 2 = 0.$

а) Намерете уравнения на оста на кръстосаните прави m и g, и разстоянието между тях;

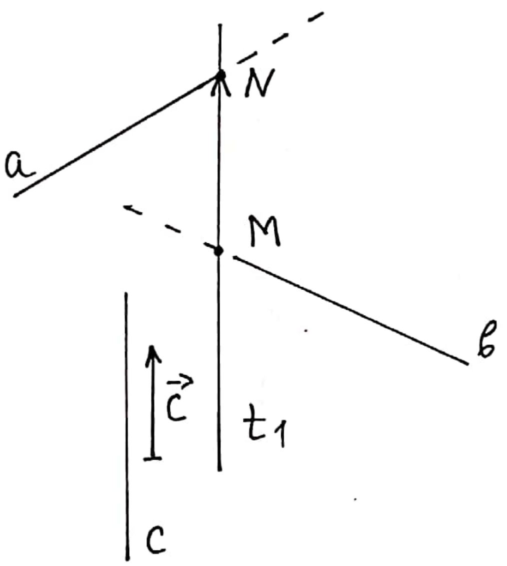
б) Намерете уравнения на ортогоналната проекция на правата g върху равнината α.

9 зад. (Трансверзали) ОКС $K = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = p \\ y = -2 + p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}, \quad b: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}, \quad c: \begin{cases} x = 1 + 2.q \\ y = -1 + 6.q \\ z = 2 - 1.q \end{cases}$$

а) Да се намерят уравнения на онази трансверзала t_1 на a и b, която е успоредна на правата c;

I начин



1) Коорд. парам. уравн. на b

$$b: \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}, \text{ изб. } z = s$$

$$b: \begin{cases} x = -s \\ y = 2 - s \\ z = s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$M \in b \Rightarrow M(-s, 2-s, s)$

$N \in a \Rightarrow N(p, -2+p, -1+2p)$

$\overrightarrow{MN}(p+s, -4+p+s, -1+2p-s) \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \Rightarrow$

$$\frac{p+s}{2} = \frac{-4+p+s}{6} = \frac{-1+2p-s}{-1}$$

$$\left| \begin{array}{l} -(p+s) = 2.(-1+2p-s) \\ 6.(p+s) = 2.(-4+p+s) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} p = 0 \Rightarrow M(0, -2, -1) \\ s = -2 \Rightarrow M(2, 4, -2) \end{array} \Rightarrow t_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 + 6.\lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

II начин (Упражнение)

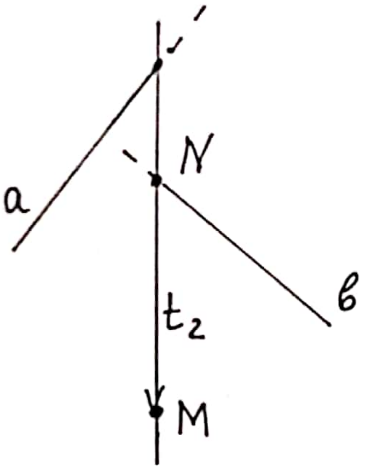
1) Намира се уравнение на равнината $\beta \begin{cases} \ni a \\ \parallel c \end{cases}$

2) Намира се т. $N = \text{в} \cap \beta$

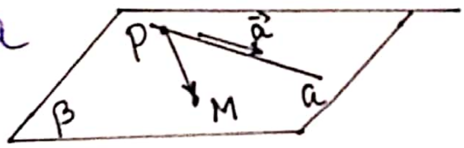
3) $t_1 \begin{cases} \ni N \\ \parallel \vec{c}(2, 6, -1) \end{cases}$

* * *

б) Да се намерят уравнения на онази трансверзала t_2 на a и в, която минава през т. $M(6, 0, 4)$



1) Търсим общо уравнение на $\beta \begin{cases} \ni M \\ \ni a \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \beta \parallel \vec{a}(1, 1, 2) \\ \beta \ni M(6, 0, 4) \\ \beta \ni P(0, -2, -1) \in a \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \parallel \overrightarrow{PM}(6, 2, 5)$$

$$\beta: \begin{vmatrix} x-6 & y & z-4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \beta: x + 7y - 4z + 10 = 0$$

2) Търсим т. $N = \text{в} \cap \beta$

$$\left|\begin{array}{l} x = -s \\ y = 2 - s \\ z = s \\ x + 7y - 4z + 10 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} s = 2 \\ N(-2, 0, 2) \\ M(6, 0, 4) \\ \overrightarrow{NM}(8, 0, 2) \end{array} \Rightarrow t_2: \begin{cases} x = 6 + 4.\mu \\ y = 0 \\ z = 4 + 1.\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$

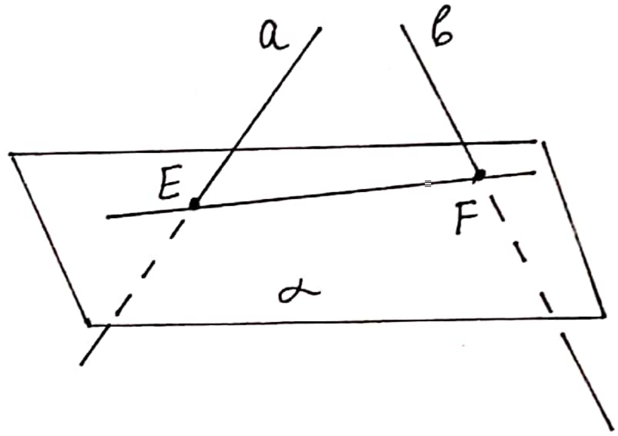
в) Да се намерят уравнения на онази трансверзала t_3 на a и b, която лежи в равнината

$\alpha: 2x+2y-z+1=0.$

Упътване: 1) т. $E = a \cap \alpha$

2) т. $F = b \cap \alpha$

3) $t_3 \equiv EF$



* * *

Разстояние от точка до равнина

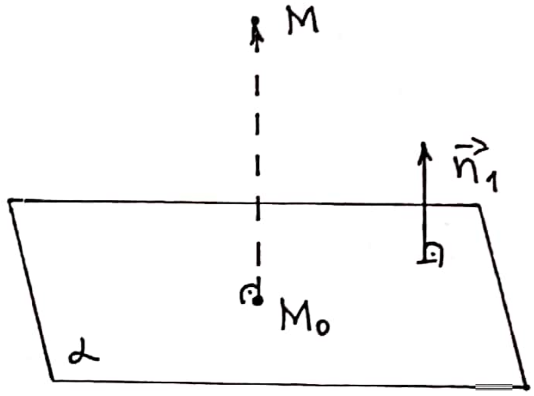
ОКС $K = Oxyz$

$\alpha: A.x+B.y+C.z+D=0$

$\vec{n}_\alpha(A, B, C)$

$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$

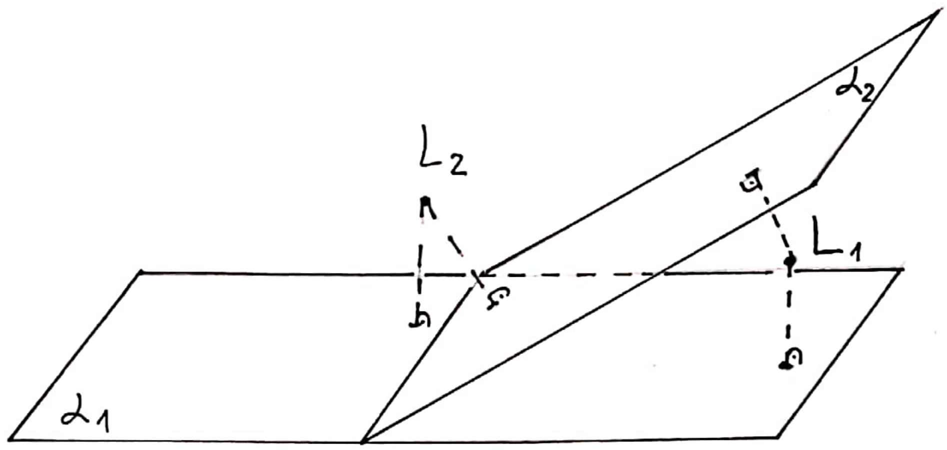
$\vec{n}_1 = \dfrac{\vec{n}_\alpha}{|\vec{n}_\alpha|} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} . (A, B, C)$



$$\alpha: \frac{A.x+B.y+C.z+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$ – нормално уравнение на α

$M(x_M, y_M, z_M)$

$$\delta(M, \alpha) = \frac{A.x_M+B.y_M+C.z_M+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ → ориентирано разстояние от точка до права



10 зад. ОКС $K = Oxyz$

$\alpha_1: 2x - y + 2z + 3 = 0$

$\alpha_2: x - 2y + 2z - 3 = 0$

Да се намерят общи уравнения на ъглополовящите равнини π_1 и π_2 на двустенните ъгли, определени от α_1 и α_2.

Решение:

т. $L \in \pi_1$ (или π_2) $\Leftrightarrow |\delta(L, \alpha_1)| = |\delta(L, \alpha_2)|$

$$\left| \frac{2x - y + 2z + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{x - 2y - 2z - 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} \right|$$

$$\frac{2x - y + 2z + 3}{3} = \pm \frac{x - 2y - 2z - 3}{3}$$

$\pi_1: 2x - y + 2z + 3 = x - 2y - 2z - 3$

$\pi_2: 2x - y + 2z + 3 = -(x - 2y - 2z - 3)$

$\pi_1: x + y + 4z + 6 = 0$

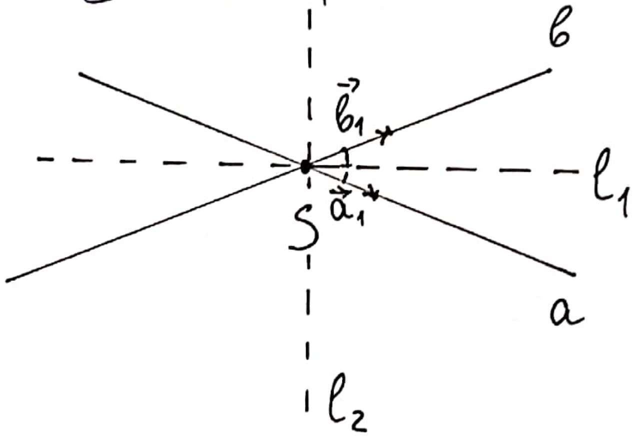
$\pi_2: x - y = 0$

Scanned with CamScanner

11 зад. ОКС $K = Oxyz$

$$a: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 3 - 1.s \\ z = 1 + 2.s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b: \begin{cases} x = -1 + p \\ y = 6 - 2p \\ z = -1 + 2p \end{cases}, p \in \mathbb{R}$$

Да се намерят уравнения на ъглополовящите l_1 и l_2 на ъглите между a и b.



Решение:

1) ? т. $S = a \cap b$

$$\begin{cases} x = -1 + 2s = -1 + p & (1) \\ y = 3 - s = 6 - 2p & (2) \\ z = 1 + 2s = -1 + 2p & (3) \end{cases}$$

От (1) и (3) => $s = 1$, $p = 2$

проверяваме в (2) => Да =>

=> т. $S(1, 2, 3)$

2) $a \parallel \vec{a}(2, -1, 2)$, $|\vec{a}| = 3$ => $\vec{a}_1\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

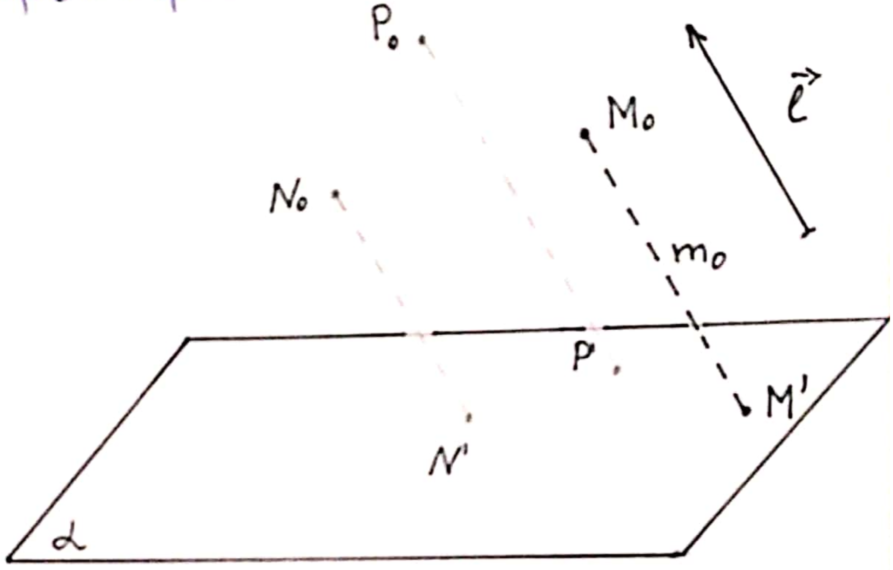
$b \parallel \vec{b}(1, -2, 2)$, $|\vec{b}| = 3$ => $\vec{b}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} l_1 \parallel \vec{a}_1 + \vec{b}_1 \left(1, -1, \frac{4}{3}\right) \\ l_1 \ni S(1,2,3) \end{cases} \Rightarrow l_1: \begin{cases} x = 1 + 3.\lambda \\ y = 2 - 3.\lambda \\ z = 3 + 4.\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} l_2 \parallel \vec{a}_1 - \vec{b}_1 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \\ l_2 \ni S(1,2,3) \end{cases} \Rightarrow l_2: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Коя от l_1 и l_2 е ъглоп. на острия и коя - на тъпия ъгъл м/у a и b?

Успоредно проектиране в пространството



α - проекционна равнина

$\vec{e}$ - проектиращо направление

$\vec{e} \nparallel \alpha$

Разгл. т. M_0 от пространството

Постр. ! права $m_0 \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{e} \end{cases}$

$M' = m_0 \cap \alpha$

Казваме, че при успоредно проектиране по направл. $\vec{e}$ върху α точката M_0 се изобразява в т. M'.

1 зад. АКС $Oxyz$

$\alpha: x+y+2z+2=0$, $\vec{e}(1,-2,0)$

1) Да се провери, че $\vec{e} \nparallel \alpha$

$A=1$, $B=1$, $C=2$

$A.1+B.(-2)+C.0 = 1.1+1.(-2)+2.0 = -1 \neq 0 \Rightarrow$

$\vec{e} \nparallel \alpha$

2) Да се намери аналитично представяне на успоредното проектиране по напр. на $\vec{\ell}$ върху равнината α.

Решение:

* Нека т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \longrightarrow M'(x', y', z')$

* $m_0 \begin{cases} \ni M_0(x_0,y_0,z_0) \\ \parallel \vec{\ell}(1,-2,0) \end{cases} \Rightarrow \quad m_0 : \begin{cases} x = x_0 + 1.s \\ y = y_0 - 2.s \\ z = z_0 + 0.s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$

* $M' = m_0 \cap \alpha$

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + s \\ y = y_0 - 2.s \\ z = z_0 + 0.s \\ x + y + 2z + 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (x_0+s) + (y_0 - 2s) + 2.(z_0) + 2 = 0 \\ (x_0 + y_0 + 2z_0 + 2) - 1.s = 0 \\ s = x_0 + y_0 + 2z_0 + 2 \longrightarrow m_0 \end{array}$$

$$M' : \begin{cases} x' = x_0 + (x_0 + y_0 + 2z_0 + 2) = 2.x_0 + y_0 + 2.z_0 + 2 \\ y' = y_0 - 2.(x_0 + y_0 + 2z_0 + 2) = -2.x_0 - y_0 - 4z_0 - 4 \\ z' = z_0 \qquad = z_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 зад. АКС $Oxyz$
(Упр.) $\alpha: x+y+2.z+3=0$ $\quad \ell: \begin{cases} x=3+s \\ y=1+2s, \ s\in\mathbb{R} \\ z=2-s \end{cases}$

1) Да се докаже, че $\ell \nparallel \alpha$;

2) Да се намери аналитично представяне на успоредното проектиране по направл. на ℓ върху равнината α.

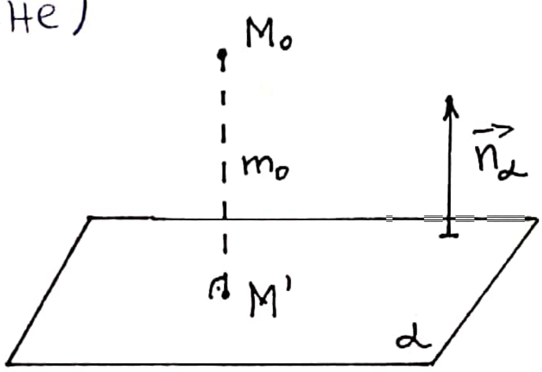
* * *

3 зад. (Ортогонално проектиране)

ОКС $K=Oxyz$

$\alpha: x-y-z+4=0$

$\vec{n}_\alpha(1,-1,-1)$ – проектиращо направление



Аналитично представяне на ортогонално проектиране върху α:

1) $M_0(x_0, y_0, z_0)$

2) $m_0 \begin{cases} \ni M_0 \\ \parallel \vec{n}_\alpha \end{cases} \Rightarrow m_0 \begin{cases} x = x_0 + 1.s \\ y = y_0 - 1.s, \ s\in\mathbb{R} \\ z = z_0 - 1.s \end{cases}$

3) $M' = m_0 \cap \alpha$

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + s \\ y = y_0 - s \\ z = z_0 - s \\ x-y-z+4=0 \end{array} \right.$$

$(x_0+s)-(y_0-s)-(z_0-s)+4=0$

$(x_0-y_0-z_0+4)+3.s=0$

$s = -\frac{1}{3}.(x_0-z_0-y_0+4)$

$x' = x_0 - \frac{1}{3}.(x_0-y_0-z_0+4)$

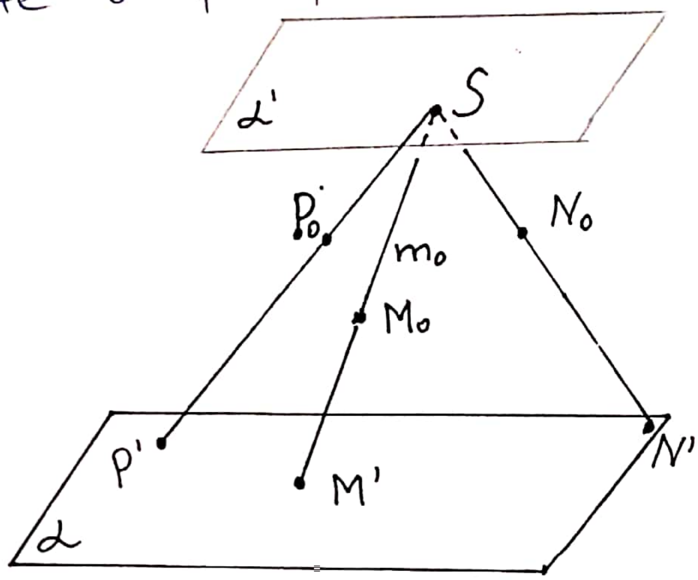
$y' = y_0 + \frac{1}{3}.(x_0-y_0-z_0+4)$

$z' = z_0 + \frac{1}{3}.(x_0-y_0-z_0+4)$

$$x' = \frac{1}{3}\cdot(2.x_0 + y_0 + z_0 - 4)$$
$$y' = \frac{1}{3}\cdot(x_0 + 2y_0 - z_0 + 4) \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$z' = \frac{1}{3}\cdot(x_0 - y_0 + 2z_0 + 4)$$

* * *

Централно проектиране в пространството



α – проекционна равнина

т. S – проекционен център

$S \notin \alpha$

Нека $\alpha' \begin{cases} \ni S \\ \parallel \alpha \end{cases}$

Можем да изобразим върху α всяка т. $M_0 \notin \alpha'$.

4 задача: АКС $Oxyz$

$\alpha: x - y + 2z - 1 = 0$, т. $S(2,0,1)$

Да се намери аналитично представяне на централно проектиране с център S върху α.

1) Проверка за $S \notin \alpha$

$2 - 0 + 2.1 - 1 = 3 \neq 0 \Rightarrow S \notin \alpha$

2) $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin \alpha' \begin{cases} \ni S \\ \parallel \alpha \end{cases}$

3) $m_0 \begin{cases} \ni M_0(x_0,y_0,z_0) \\ \ni S(2,0,1) \end{cases} \Rightarrow m_0 \parallel \overrightarrow{SM_0}(x_0-2, y_0-0, z_0-1)$

$$m_0 \equiv SM_0 : \begin{cases} x = 2 + s.(x_0 - 2) \\ y = 0 + s.(y_0) \\ z = 1 + s.(z_0 - 1) \end{cases} , s \in \mathbb{R}$$

4) $M' = m_0 \cap \alpha$

$$\left| \begin{array}{l} x = 2 + s(x_0 - 2) \\ y = \quad s.y_0 \\ z = 1 + s.(z_0 - 1) \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2 + s(x_0-2) - (s.y_0) + 2.(1 + s(z_0 - 1)) - 1 = 0 \\ 3 + s.(x_0 - y_0 + 2z_0 - 4) = 0 \\ s = \dfrac{-3}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4} \to m_0 \end{array}$$

$$x' = 2 + \frac{-3.(x_0 - 2)}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4} = \frac{-x_0 - 2y_0 + 4z_0 - 2}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4}$$

$$y' = 0 + \frac{-3.y_0}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4} = \frac{-3y_0}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4}$$

$$z' = 1 + \frac{(-3).(z_0 - 1)}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4} = \frac{x_0 - y_0 - z_0 - 1}{x_0 - y_0 + 2z_0 - 4}$$

* * *

5 зад. (Упр.) АКС $Oxyz$

$S(0,2,1)$, $\alpha: x - 2y + 2z - 1 = 0$

Да се намери представяне на централното проектиране с център S върху α.