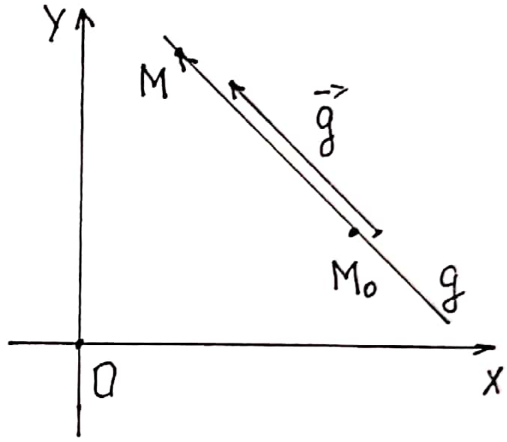
Уравнения на права в равнината

Нека е дадена ОКС $K = Oxy$

I Координатни параметрични уравнения на права



Фиксирана е т. $M_0(x_0, y_0)$

и вектор $\vec{g}(a, b) \neq (0,0)$

$$\exists!\, g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{g}(a, b) \end{cases}$$

Нека $M(x, y)$ е произволна точка от g.
Ще изразим M чрез M_0 и $\vec{g}$.

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{g} \Rightarrow \exists!\, s \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{g}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0) \\ \vec{g}\,(a, b) \end{array}\right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x - x_0 = s.a \\ y - y_0 = s.b \end{array}\right. , s \in \mathbb{R}$$

Изразяваме x и y

$$(1)\quad g : \begin{cases} x = x_0 + s.a \\ y = y_0 + s.b \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

се наричат координатни параметрични уравнения на g.

Този вид уравнения показват, че положението на точка върху права зависи само от един параметър.

$$M \leftrightarrow s \in \mathbb{R}$$

* * *

II Общо уравнение на права в равнината

От (1) $\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = x_0 + s.a \ /.b \\ y = y_0 + s.b \ /.(-a) \end{array} \right. + \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{b}_{A}.x + \underbrace{(-a)}_{B}.y + \underbrace{(-x_0.b + y_0.a)}_{C} = 0$$

Полагаме : $\left| \begin{array}{l} A = b \\ B = -a \\ C = -x_0.b + y_0.a \end{array} \right.$ и получаваме уравнение от вида:

$g: A.x + B.y + C = 0 \quad (2)$ - общо уравнение на права g в равнината.

$(A, B) \neq (0, 0)$

* * *

Геометричен смисъл на коефициентите

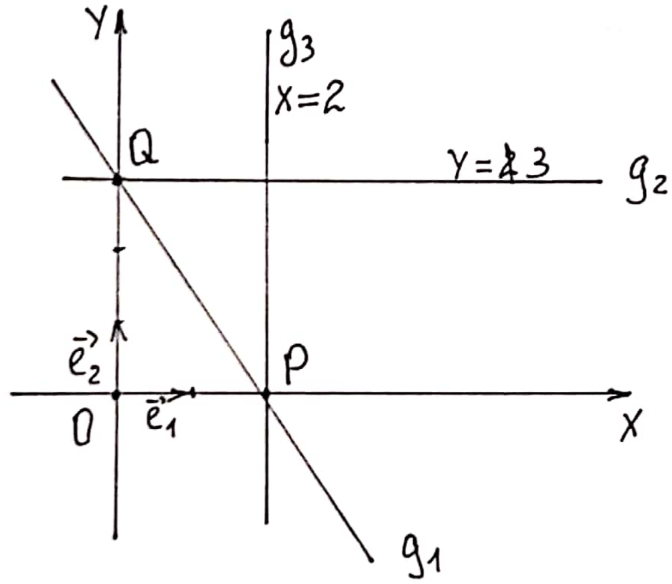
1) $C = 0 \iff g \ni$ т. $O(0,0)$

2) $g \parallel \vec{g}(a, b)$ от $\left| \begin{array}{l} a = -B \\ b = A \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{g \parallel \vec{g}(-B, A)}$

Примери:

1) $g_1: 3x+2y-6=0$

$g_1 \parallel \vec{g}_1(-2,3)$



2) $g_2: \ y-3=0$

$g_2 \parallel \vec{g}_2(-1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow g_2 \parallel O_x$

3) $g_3: \ x-2=0$

$g_3 \parallel \vec{g}_3(0,1) \Rightarrow g_3 \parallel O_y$

4) Общото уравнение на $O_x: y=0$

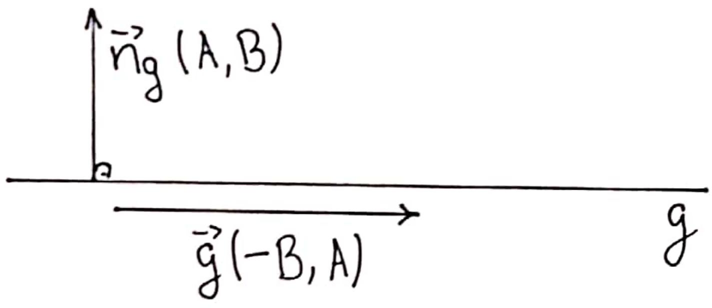
на $O_y: x=0$

* * *

Нормален вектор на права в равнината

ОКС $K=O_{xy}$

$g \parallel \vec{g}(-B,A)$



$\exists!$ направление в равнината $\perp g$.

Вектор $\vec{n}_g \perp g$ наричаме нормален в-р на g

От $(\vec{g} \cdot \vec{n}_g)=0$ и ОКС $\Rightarrow$ $\underline{/\vec{n}_g(A,B)/}$

Задачи:

Всички задачи са спрямо ОКС $K = Oxy$

1 зад. (Права през 2 точки)

Дадени са точки $A(1,-2)$ и $B(0,-1)$.

Да се намерят уравнения на правата AB

I начин: Координатни параметрични уравн.

$$AB \begin{cases} \ni A(1,-2) \\ \parallel \overrightarrow{AB}(-1,1) \end{cases}$$

$$AB \begin{cases} x = 1 + s.(-1) \\ y = -2 + s.1 \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

II начин: Общо уравнение на AB

Точките $M(x,y)$, $A(1,-2)$ и $B(0,-1)$ са колинеарни

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-y-1=0 \ |.(-1)$$

$$AB: x+y+1=0$$

* * *

Взаимни положения на две прави в равнината

$g_1: A_1.x + B_1.y + C_1 = 0$

$g_2: A_2.x + B_2.y + C_2 = 0$

1сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow g_1 \equiv g_2$

2 сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$ и $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$, т.е.

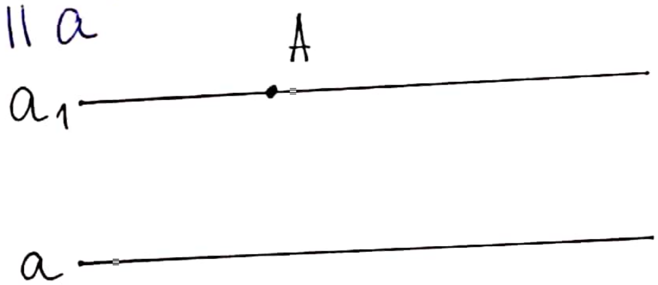
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \iff g_1 \parallel g_2$$

3 сл. $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 2 \iff \exists!$ т. $S = g_1 \cap g_2$

* * *

2 зад. (Успоредни прави)

Дадени са правата $a: 3.x + 4.y + 2 = 0$ и точка $A(1,-2)$. Да се намери уравнение на правата $a_1 \begin{cases} \ni A \\ \parallel a \end{cases}$.



Решение:

$a: 3x + 4y + 2 = 0$

$a_1 \parallel a \Rightarrow a_1: 3x + 4y + C = 0$

$A(+1,-2) \in a_1 \Rightarrow 3.1 + 4.(-2) + C = 0$

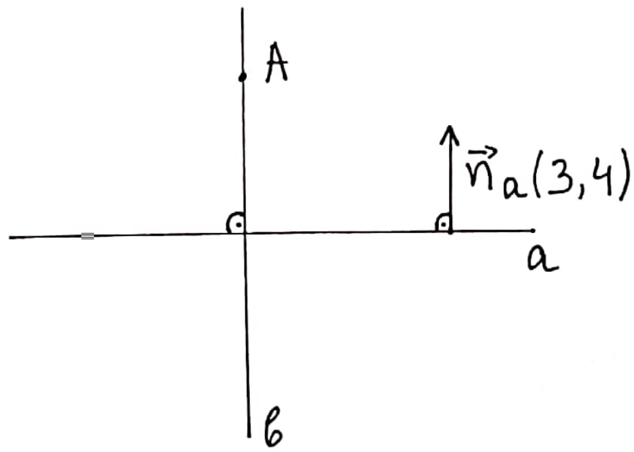
$C = 5 \Rightarrow a_1: 3x + 4y + 5 = 0$

* * *

3 зад. (Перпендикулярни прави)

$a: 3x + 4y + 2 = 0$, $A(1,-2)$

Да се намери уравнение на правата $b \begin{cases} \ni A \\ \perp a \end{cases}$



Решение

$$b \begin{cases} \ni A(1,-2) \\ \parallel \vec{n}_a(3,4) \end{cases} \Rightarrow b: \begin{cases} x = 1 + 3.\lambda \;/.4 \\ y = -2 + 4.\lambda \;/.(-3) \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b: 4x - 3y - 10 = 0$$

Извод: $a: 3.x + 4.y + 2 = 0$ $\quad \vec{n}_a(3,4)$

$b: 4.x - 3.y - 10 = 0$ $\quad \vec{n}_b(4,-3)$

$\vec{n}_a . \vec{n}_b = 0$

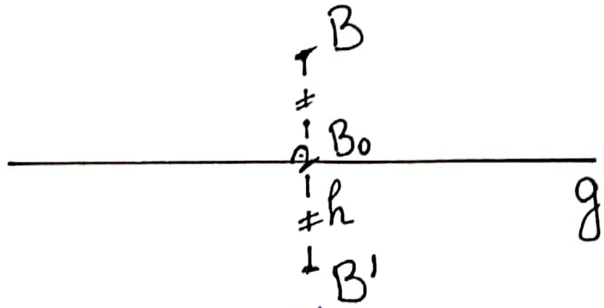
* * *

4 зад. (Симетрия относно права)

Дадени са права $g: x+y-1=0$ и т. $B(0,-1)$

σ_g - симетрия отн. g

т.$B \xrightarrow{\sigma_g}$ т. $B' \Leftrightarrow g \equiv s_{BB'}$



Да се намерят координатите на т. B'.

Решение:

1) Уравнения на $h \begin{cases} \perp g \\ \ni B \end{cases} \Rightarrow$

$g: x + y - 1 = 0$

$h: x - y + C = 0$

$B(0,-1) \Rightarrow C = -1$

$\underline{h: x - y - 1 = 0}$

2) т.$B_0 = h \cap g$

$$\left| \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{B_0(1,0)}$$

3) B_0 е средата на BB'

$B(0,-1)$ $\quad \dfrac{x'+0}{2} = 1 \Rightarrow x' = 2$

$B_0(1,0)$

$B'(x',y')$ $\quad \dfrac{y'+(-1)}{2} = 0 \Rightarrow y' = 1$

$B'(2;1)$

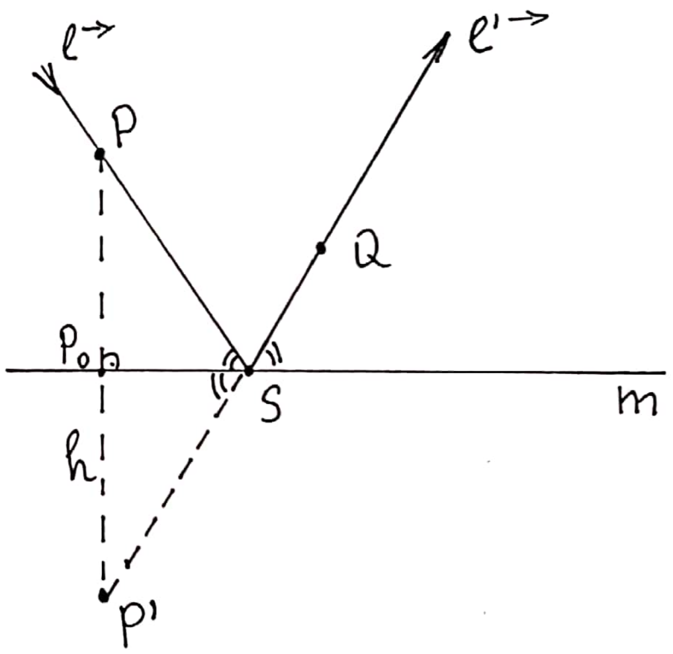
5 зад. (Светлинни лъчи)

Дадени са права $m: x+y-3=0$, т. $P(-5,4)$, т. $Q(-1,1)$

Светлинен лъч $\vec{l}$ минава през т. P, отразява се от правата m и отразеният лъч $\vec{l'}$ минава през т. Q.

Намерете уравнения на правите l и l', които съдържат лъчите.

Решение:



Важно:

Нека т. $P \xrightarrow{\sigma_m} P'$, то $P' \in l'$.

1) Намираме т. P'

$$h \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \perp m: x+y-3=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow h: x-y+C=0$

$P \in h \Rightarrow -5-4+C=0$

$h: x-y+9=0$

т. $P_0 = h \cap m$

$$\begin{vmatrix} x+y-3=0 \\ x-y+9=0 \end{vmatrix}$$

$x=-3$

$y=6$

т. $P_0(-3,6)$ - средата

т. $P(-5,4)$

т. $P'(x', y')$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x'+(-5)}{2} = -3 \Rightarrow x' = -1$

$\dfrac{y'+4}{2} = 6 \Rightarrow y' = 8$

т. $P'(-1, 8)$

2) Общо уравнение на $\ell' \begin{cases} \ni Q(-1,1) \\ \ni P'(-1,8) \end{cases}$, т. $M(x,y)$ произв.

$$\ell': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7x-7=0 \,/ :(-7)$$

$$\underline{\ell': x+1=0}$$

Важно: От $x_Q = x_{P'} = -1 \Rightarrow x=-1$ за всяка точка от $\ell' \Rightarrow$ направо може да се напише

$$\ell': x = -1$$

3) Намираме т. $S = \ell' \cap m$

$$\begin{vmatrix} x+y-3=0 \\ x=-1 \end{vmatrix} \Rightarrow y=4 \Rightarrow S(-1;4)$$

4) Общо уравнение на $\ell \begin{cases} \ni P(-5,4) \\ \ni S(-1,4) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ell: y=4$$

* * *

6 зад. (Упражнение)

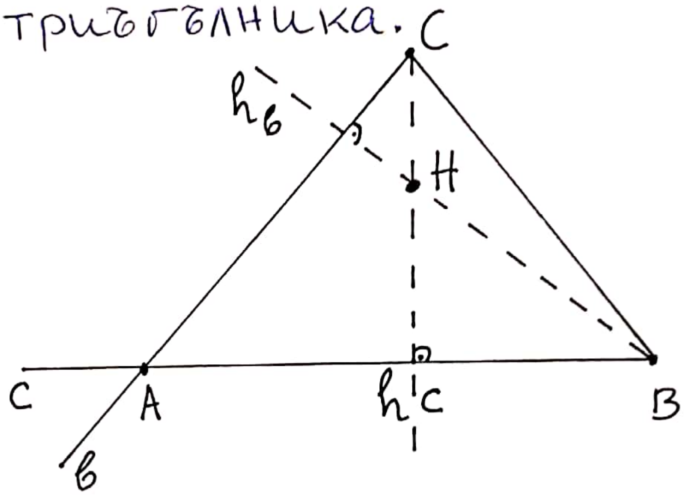
Дадени са т. $P(2,4)$ и т. $Q(0,1)$. Светлинен лъч $\vec{\ell} \ni P$, отразява се от абсцисната ос Ox $(y=0)$ и отразеният лъч $\vec{\ell'} \ni Q$. Намерете уравнения на правите ℓ и ℓ'.

7 зад. Дадени са:

$b: 5x+4y-13=0$

$c: x+2y-5=0$ и т. $H(14,15)$

Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако правите b и c съдържат съответно страните AC и AB, а т. H е ортоцентърът на триъгълника.



Решение:

1) т. $A = b \cap c$

$$\begin{cases} 5x+4y-13=0 \\ x+2.y-5=0 \end{cases}$$

т. $A(1;2)$ (?)

2) Уравнение на $h_c \begin{cases} \ni H(14,15) \\ \perp c: x+2y-5=0 \end{cases}$

$h_c: 2x-y+D=0$

$2.14-15+D=0$

$D=-13$

$\Rightarrow h_c: 2x-y-13=0$

3) т. $C = h_c \cap b$

$$\begin{cases} 2x-y-13=0 \\ 5x+4y-13=0 \end{cases}$$

т. $C(5,-3)$

За упр. $S_{\triangle ABC} = ?$

4) $h_b \begin{cases} \ni H(14,15) \\ \perp b: 5x+4y-13=0 \end{cases}$

$h_b: 4x-5y+19=0$ (?)

6) т. $B = h_b \cap c$

$$\begin{cases} 4x-5y+19=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

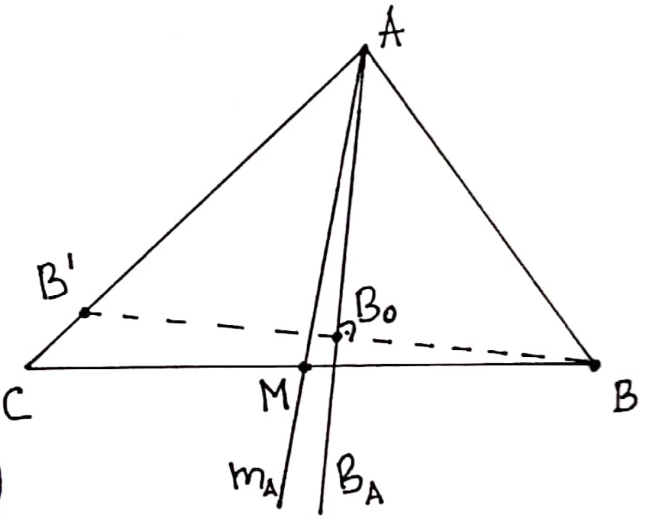
т. $B(-1,3)$

8 зад. Дадени са: $b_A: 2x-3y-5=0$

$m_A: x-8y+4=0$

т. $B(3,-4)$

а) Да се нам. коорд. на върховете B и C на $\triangle ABC$, за който b_A и m_A са съотв. ъглополовяща и медиана през върха A.



1) т. $A = b_A \cap m_A$

$$\begin{cases} 2x-3y-5=0 \\ x-8y+4=0 \end{cases} \Rightarrow A(4,1)$$

2) Нека т. $B \xrightarrow{\sigma_{b_A}}$ т. B',

тогава т. $B' \in AC$ (правата)

Намираме т. $B'(-1,2)$ (Упр.)

3) Общо уравнение на правата AB' $\begin{cases} \in A(4,1) \\ \in B'(-1,2) \end{cases}$

$$AB': \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB': x+5y-9=0$$

4) Търсим т. $C(x_c, y_c)$

$C \in AB' \Rightarrow x_c+5y_c-9=0 \quad (1)$

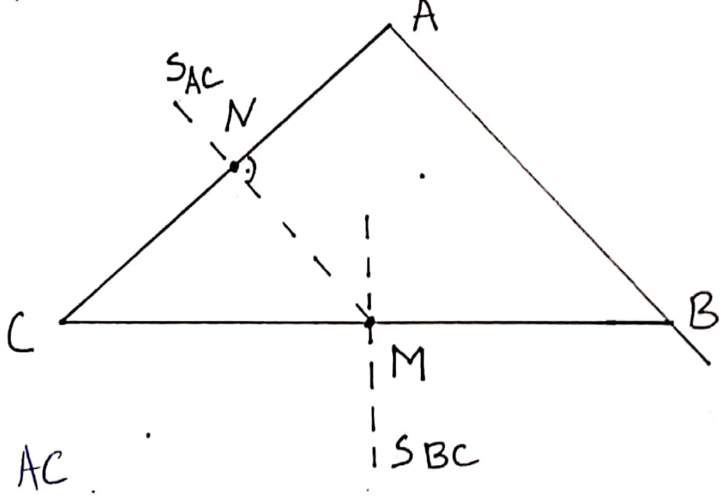
Нека т. M е средата на $BC \Rightarrow$ т. $M\left(\frac{x_c+3}{2}, \frac{y_c+(-4)}{2}\right)$

$M \in m_A \Rightarrow \left(\frac{x_c+3}{2}\right) - 8.\left(\frac{y_c-4}{2}\right)+4=0 \quad (2)$

От (1) и (2) $\Rightarrow C(-11,4)$

б) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -11 & 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = 36$ кв. ед.

в) Да се намерят координатите на центъра S и радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.



Търсим уравнения на две от симетралите S_{AC} и S_{BC}

1) $S_{AC} \begin{cases} \ni N \text{ - средата на } AC \\ \perp AC \equiv AB' \end{cases}$

$AB': x + 5y - 9 = 0$
т. $N\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\underline{S_{AC}: 5x - y + 20 = 0}$

2) $S_{BC} \begin{cases} \ni M \text{ - средата на } BC, \ M(-4, 0) \\ \perp BC: 4x + 7y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{S_{BC}: 7x - 4y + 28 = 0}$

3) т. $S = S_{AC} \cap S_{BC}$

$\left| \begin{array}{l} 5x - y + 20 = 0 \\ 7x - 4y + 28 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{S(-4, 0) \equiv \text{т. } M}$

4) $R = |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{65}$

9 зад. Дадена е правата $g: 2x-3y-5=0$.

Да се намери образът на правата в при осева симетрия относно g, ако:

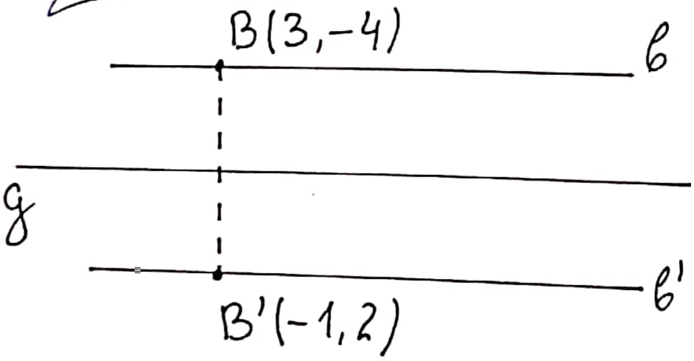
а) $в: 2x-3y-18=0 \Rightarrow \boxed{в \parallel g}$

Нека $в \xrightarrow{\sigma_g} в' \Rightarrow в' \parallel g$

Изб. т. $B(3,-4) \in в$

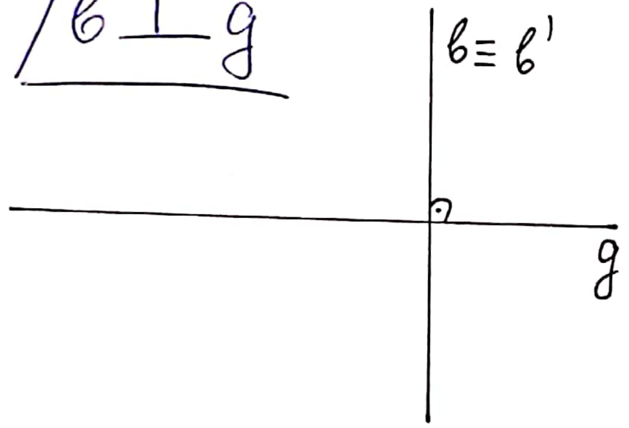
$B(3,-4) \xrightarrow{\sigma_g} B'(-1,2)$ (?)

Тогава $в' \begin{cases} \in B' \\ \parallel g \end{cases} \Rightarrow \boxed{в': 2x-3y+8=0}$



б) $в: 3x+2y-1=0 \Rightarrow \boxed{в \perp g}$

$\Rightarrow \boxed{в \equiv в'}$



в) $в: 5x-y-19=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow в \nparallel g$ и $в \not\perp g$

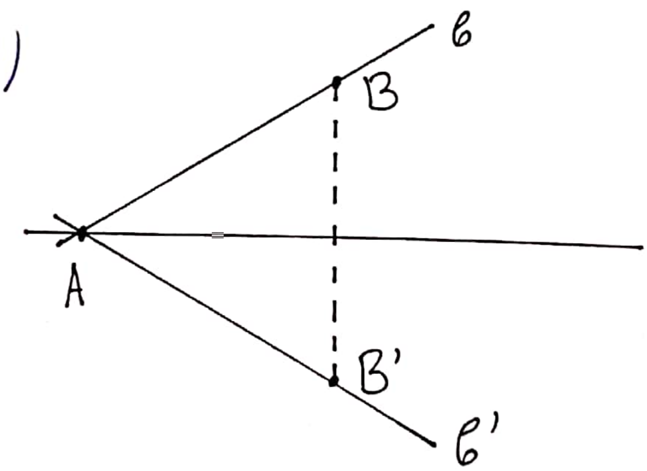
Нека т. $A = в \cap g \Rightarrow A(4,1)$ (?)

Изб. т. $B(3,-4) \in в$

$B \xrightarrow{\sigma_g} B'(-1,2)$

Тогава $в' \begin{cases} \in A \\ \in B' \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{в': x+5y-9=0}$



Scanned with CamScanner

10 зад. Дадени са: $b: 2x - y = 0$
$c: x - 2y + 3 = 0$ и т. $M(3,4)$.

а) Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, за който: правите b и c съдържат съотв. страните AC и AB, а т. M е медицентъра

1) $A = b \cap c \Rightarrow A(1,2)$

2) Нека $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, тогава

$B \in c \Rightarrow x_B - 2y_B + 3 = 0$

$C \in b \Rightarrow 2x_C - y_C = 0$

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}\cdot(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \Rightarrow \frac{1 + x_B + x_C}{3} = 3$$

$$\frac{2 + y_B + y_C}{3} = 4$$

$$\begin{cases} 2x_C - y_C = 0 \\ x_B - 2y_B + 3 = 0 \\ 1 + x_B + x_C = 3.3 \\ 2 + y_B + y_C = 3.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B(5,4) \\ C(3,6) \end{matrix}$$

б) Да се намерят:

* $S_{\triangle ABC} = ?$
* $P_{\triangle ABC} = ?$
* Вида на $\triangle ABC$;
* Две височини и координати на ортоцентъра;
* център и радиус на описаната окръжност.