СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ СПРЯМО ОКС

Нека е дадена ортонормирана координатна система (ОКС) $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = Oxyz$.

Координати на точка P спрямо K определяме по следния начин:

$\overrightarrow{OP} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 + z.\vec{e}_3$, това означава, че векторът $\overrightarrow{OP}$ има координати (x, y, z) спрямо K.

$\overrightarrow{OP}$ се нарича радиус-вектор. Той свързва точката P с началото O на координатната система.

Координатите на началото O са $(0, 0, 0)$, тогава координатите на точката P са (x, y, z).

Пресмятане на скаларно произведение спрямо ОКС:

Скаларните произведения на координатните вектори са:

$\langle\vec{e}_1, \vec{e}_1\rangle = \langle\vec{e}_2, \vec{e}_2\rangle = \langle\vec{e}_3, \vec{e}_3\rangle = 1, \langle\vec{e}_1, \vec{e}_2\rangle = \langle\vec{e}_1, \vec{e}_3\rangle = \langle\vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle = 0.$

Нека са дадени вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ – така се пресмята дължина на вектор спрямо ОКС;

$\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ – скаларно произведение спрямо ОКС

Разстояние между две точки с дадени координати:

$A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$

1 зад. Спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството са дадени точките:

$A(-1, -1, 1)$, $B(2, -7, 4)$ и $C(4, -2, 6)$.

a) Да се пресметне периметъра на ΔABC;
b) Да се определи вида на ΔABC според ъглите му;
c) Да се намерят координатите на петата H на височината през върха C на ΔABC.

Решение:

a) $\overrightarrow{AB}(3, -6, 3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 54$

$\overrightarrow{AC}(5, -1, 5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 51$

$\overrightarrow{BC}(2, 5, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 33;$

b) Най-дългата страна на триъгълника е AB, за да се определи вида му, трябва да се пресметне $\cos\sphericalangle ACB = \frac{(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|} = \frac{15}{\sqrt{51}.\sqrt{33}} > 0$. Триъгълникът е остроъгълен;

c) $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CA} + x.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}\right) = 0$

Решаваме $\left(\overrightarrow{CA} + x.\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$ и получаваме резултат $x = \frac{2}{3}$, който заместваме в равенството:

$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$ и пресмятаме координатите на $\overrightarrow{AH}(2,-4,2)$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OH}(1,-5,3)$

Окончателно координатите на точката са $H(1,-5,3)$.

2 зад. (**Упражнение**) Спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството са дадени точките:

$A(0,\ 2,\ 4)$, $B(3,-4,-2)$ и $C(5,-2,6)$.

a) Да се пресметне периметъра на ΔABC;

b) Да се определи вида на ΔABC според ъглите му;

c) Да се намерят координатите на петата H на височината през върха C на ΔABC.

3 зад. Спрямо ОКС $K = Oxyz$ в пространството са дадени точките:

$A(0,\ 0,-2)$, $B(4,0,-4)$, $C(2,0,0)$ и $D(5,3,-3)$.

a) Да се координатите на точките M и N, такива че $M \in AB, N \in CD, MN \perp AB, MN \perp CD$;

b) Да се намерят координатите на петата H на височината през върха D на тетраедъра $ABCD$.

Решение:

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ $\qquad$ $\overrightarrow{MB} = x.\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{CN} = y.\overrightarrow{CD}$, тогава

$\overrightarrow{MN} = x.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + y.\overrightarrow{CD}$

$MN \perp AB \;\Longrightarrow \left(\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}\right) = 0$

$MN \perp CD \;\Longrightarrow \left(\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}\right) = 0$, от последните две скаларни произведения получаваме система за x и y:

$$\left|\begin{array}{l}\left(x.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + y.\overrightarrow{CD}\right).\overrightarrow{AB} = 0\\ \left(x.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + y.\overrightarrow{CD}\right).\overrightarrow{CD} = 0\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}x.\overrightarrow{AB}^2 + y.\left(\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}\right) + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}) = 0\\ x.\left(\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}\right) + y.\overrightarrow{CD}^2 + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}) = 0\end{array}\right.$$

$\overrightarrow{AB}(4,0,-2), \overrightarrow{CD}(3,3,-3), \overrightarrow{BC}(-2,0,4)$

$\overrightarrow{AB}^2 = 4^2 + 0^2 + (-2)^2 = 20, \overrightarrow{CD}^2 = 27,$

$\left(\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}\right) = 4.3 + 0.3 + (-2).(-3) = 18, \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}\right) = -16, \left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}\right) = -18$

$\left| \begin{array}{l} 20.x + 18.y = 16 \\ 18.x + 27.y = 18 \end{array} \right.$, системата има решение: $\left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{array} \right.$.

Заместваме $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}.\overrightarrow{CD}$

За да определим координатите на точките M и N, изразяваме радиус-векторите:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}.\overrightarrow{CD}$. Записваме по координати:

$\left| \begin{array}{l} x_M = 4 - \frac{1}{2}.4 = 2 \\ y_M = 0 - \frac{1}{2}.0 = 0 \\ z_M = -4 - \frac{1}{2}.(-2) = -3 \end{array} \right.$ $\left| \begin{array}{l} x_N = 2 + \frac{1}{3}.3 = 3 \\ y_N = 0 + \frac{1}{3}.3 = 1 \\ z_M = 0 + \frac{1}{3}.(-3) = -1 \end{array} \right.$.

b) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH}$, $\overrightarrow{CH} = x.\overrightarrow{CA} + y.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DC} + x.\overrightarrow{CA} + y.\overrightarrow{CB}$

$DH \perp CA \Rightarrow \left(\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CA}\right) = 0$

$DH \perp CB \Rightarrow \left(\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{CB}\right) = 0$, от последните две скаларни произведения получаваме система за x и y. Тази система може да решите за упражнение по начина от подусловие а).

Отговор: $H(5,0,-3)$.