**Задачи по теория — ДИС на функции на няколко променливи**
**КН, 1 к., I п.**

Някои задачи от посочените тук или подобни на тях се падат на изпита по теория. Задачите обозначени със $*$ са по-сложни или имат по-дълги решения. Такива **не** се падат на изпита.

1. Нека $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено, $x^0 \in U$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Производната на $f(x)$ в т. $x^0$ по направлението $h$ се дефинира чрез границата (стига да съществува)
$$\frac{\partial f}{\partial h}(x^0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x^0 + th) - f(x_0)}{t}.$$
Докажете, че ако $f(x)$ притежава непрекъснати първи частни производни по всичките си променливи в околност на т. $x^0$, то тя има производна в тази точка по направлението $h$ и
$$\frac{\partial f}{\partial h}(x^0) = \langle \operatorname{grad} f(x^0), h\rangle.$$

2. Докажете, че най-малкото разстояние между две точки върху сфера е по дъга от голямата окръжност, минаваща през точките (голяма окръжност върху сфера наричаме всяко сечение на сферата с равнина през центъра ѝ).

3. Нека числовата функция на две променливи $f(x, y)$ е дефинирана в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворява условието $f(x, y) = f(y, x)$ нявсякъде в $\mathbb{R}^2$. Докажете, че ако съществуват частните производни $f'_x(x, y)$, $f''_{xx}(x, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$ нявсякъде в $\mathbb{R}^2$, то съществуват нявсякъде в $\mathbb{R}^2$ и частните производни $f'_y(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ и ги намерете.

4. Нека функциите $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ притежават първи частни производни по всичките си променливи навсякъде в своята дефиниционна област. Докажете, че
$$\operatorname{grad}(fg)(x) = g(x)\operatorname{grad} f(x) + f(x)\operatorname{grad} g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

5. Нека числовата функция $f(x, y)$ е дефинирана и притежава първи частни производни в правоъгълника $D := \{(x, y) : x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$, като $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ в $D$. Докажете, че $f(x, y)$ е тъждествено константа в $D$.

6. Нека $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ и $g : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати. Докажете, че функцията $h(x, y) := f(x)g(y)$ е интегруема върху множеството $[\alpha, \beta]\times[\gamma, \delta]$ и
$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta h(x, y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \cdot \int_\gamma^\delta g(y)dy.$$

7. * Нека $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Докажете, че

$$\left( \int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx.$$