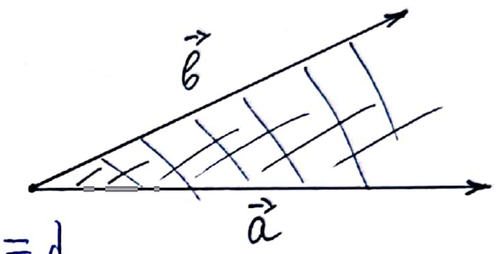
Скаларно произведение на два вектора

$\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{b} \neq \vec{0}$

Опр: $(\vec{a}.\vec{b}) = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})_e \rightarrow$ число

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})_e$ – елементарно геометричен ъгъл между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



1) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})_e = \sphericalangle(\vec{b},\vec{a})_e$;
2) $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})_e \in [0;\pi]$;
3) $\cos x = \lambda \Rightarrow \exists!\ x_0 \in [0;\pi]: \cos x_0 = \lambda$

Свойства:

1) $(\vec{a}.\vec{b}) = (\vec{b}.\vec{a})$;
2) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}) + (\vec{b}.\vec{c})$;
3) $(\lambda.\vec{a}).\vec{b} = \lambda.(\vec{a}.\vec{b})$;
4) $(\vec{a}.\vec{a}) = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
   $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$
5) $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}.\vec{b})}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$
6) $(\vec{a}.\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
7) Координатно представяне

$K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – ОКС, ако:

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \Rightarrow \vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = 1$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1 \Rightarrow (\vec{e}_1.\vec{e}_2) = (\vec{e}_2.\vec{e}_3) = (\vec{e}_3.\vec{e}_1) = 0$

* Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ спр. $K \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2} + a_3.\vec{e_3}$

$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ спр. $K \Leftrightarrow \vec{b} = b_1.\vec{e_1} + b_2.\vec{e_2} + b_3.\vec{e_3}$

$$(\vec{a}.\vec{b}) = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

* Разстояние между две точки:

$A_1(x_1, y_1, z_1)$ спр. ОКС $K \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1} = x_1.\vec{e_1} + y_1.\vec{e_2} + z_1.\vec{e_3}$

$A_2(x_2, y_2, z_2)$ спр. ОКС $K \Leftrightarrow \overrightarrow{OA_2} = x_2.\vec{e_1} + y_2.\vec{e_2} + z_2.\vec{e_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

* * *

Задачи:

1 зад. Дадени са векторите $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$|\vec{a}| = 1, \ |\vec{b}| = 2, \ |\vec{c}| = \sqrt{2}$

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}, \ \sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$

$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

$\vec{q} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c}$

а) $|\vec{p}| = ?, \ |\vec{q}| = ?$

б) $(\vec{p}.\vec{q}) = ?, \ \cos\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = ?$

в) $\lambda = ?$ така, че $\vec{p} \perp \vec{r}$;

г) $\lambda = ?$ така, че $|\vec{r}| = \sqrt{5}$.

Решение : $\vec{a}^2 = 1$, $\vec{b}^2 = 4$, $\vec{c}^2 = 2$, $(\vec{a}.\vec{b}) = 0$, $(\vec{b}.\vec{c}) = 0$, $(\vec{a}.\vec{c}) = 1$

а) $|\vec{q}|^2 = \vec{q}^2 = (2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c})^2 = 4\vec{a}^2 + 9.\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 12(\vec{a}.\vec{b}) + 4(\vec{a}.\vec{c}) -$

$- 6.(\vec{b}.\vec{c}) = 4.1 + 9.4 + 2 - 0 + 4.1 - 6.0 = 46$

$|\vec{p}| = ?$ за упр.

б) $(\vec{p}.\vec{q}) = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) = 2.\vec{a}^2$

$$\cos \measuredangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{(\vec{p}.\vec{q})}{|\vec{p}|.|\vec{q}|}$$

в) $(\vec{p}.\vec{r}) = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}).(\vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c}) =$

$\vec{a}^2 + \lambda.(\vec{a}\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{c}) + (\vec{a}\vec{b}) + \lambda.\vec{b}^2 - (\vec{b}.\vec{c}) - (\vec{a}.\vec{c}) - \lambda(\vec{b}.\vec{c}) + \vec{c}^2 = 0$

г) $\vec{r}^2 = 5$

$(\vec{a} + \lambda.\vec{b} - \vec{c})^2 = 5$

2 зад.

Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – ЛНЗ.

Даден е вектор $\vec{p} \perp \vec{a}$, $\vec{p} \perp \vec{b}$, $\vec{p} \perp \vec{c}$.

Да се докаже, че $\vec{p} = \vec{o}$.

Д-во:

$\vec{p} = \alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c} \quad / . \vec{p}$

$\vec{p}^{\,2} = \alpha . (\vec{a} . \vec{p}) + \beta . (\vec{b} . \vec{p}) + \gamma . (\vec{c} . \vec{p})$

$\vec{p}^{\,2} = 0.$

3 зад.

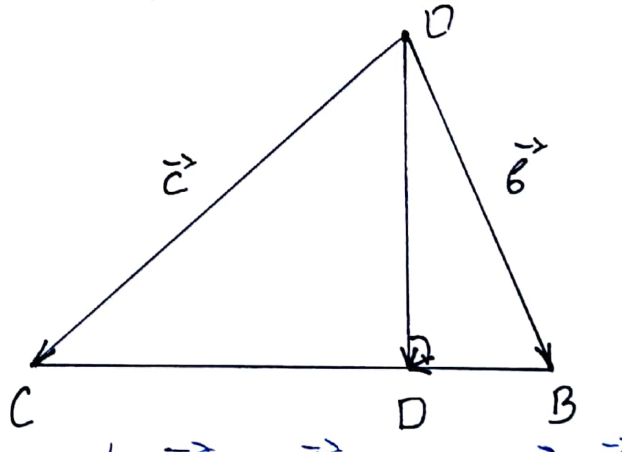
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, |c| = 3$

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})_e = \sphericalangle(\vec{b}, \vec{c})_e = \sphericalangle(\vec{c}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$

Тетраедър $OABC$: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$

а) Ако т. D $\begin{cases} \in BC \\ OD \perp BC \end{cases}$, да се изрази

$\vec{OD}$ чрез $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$;



$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$

$\vec{BD} \parallel \vec{BC} \Rightarrow \exists!\, x : \vec{BD} = x . \vec{BC}$

$\vec{BD} = x . (\vec{c} - \vec{b})$

$\vec{OD} = \vec{b} + x . (\vec{c} - \vec{b})$

$\vec{OD} \perp \vec{BC} \Rightarrow (\vec{OD} . \vec{BC}) = 0$

$(\vec{OD} . \vec{BC}) = [\vec{b} + x . (\vec{c} - \vec{b})] . (\vec{c} - \vec{b}) = 0$

$\vec{b} . (\vec{c} - \vec{b}) + x . (\vec{c} - \vec{b})^2 = 0$

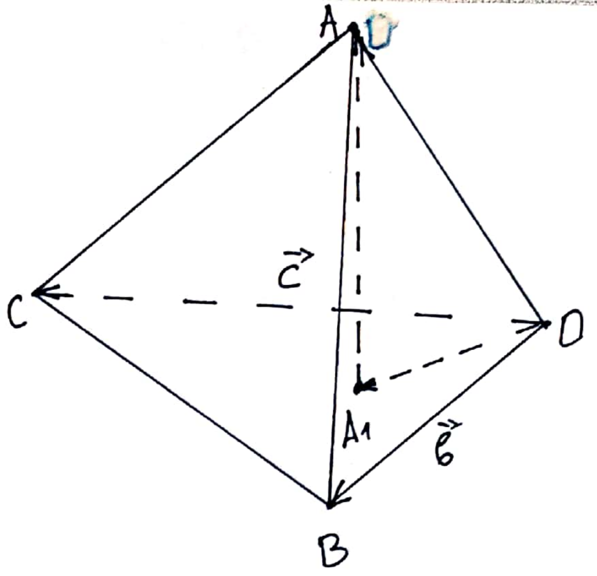
$(\vec{b} . \vec{c}) - \vec{b}^{\,2} + x . (\vec{c}^{\,2} - 2(\vec{b} . \vec{c}) + \vec{b}^{\,2}) = 0$

$x = -\frac{1}{14}$

$\vec{OD} = \vec{b} - \frac{1}{14} . (\vec{c} - \vec{b})$

$\vec{OD} = \frac{15}{14} . \vec{b} - \frac{1}{14} . \vec{c}$

б) Нека т. A_1: $\begin{cases} \in (BOC) \\ AA_1 \perp (BOC) \end{cases}$



Да се изрази $\vec{OA_1} = ?$ чрез $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{OA_1}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни

$\Rightarrow \exists!$ числа $(\beta; \gamma)$:

$\vec{OA_1} = \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c}$

$\vec{AA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OA} = \beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c} - \vec{a}$

$$\begin{vmatrix} (\vec{AA_1} . \vec{b}) = 0 \\ (\vec{AA_1} . \vec{c}) = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c} - \vec{a}) . \vec{b} = 0 \\ (\beta . \vec{b} + \gamma . \vec{c} - \vec{a}) . \vec{c} = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \beta . \vec{b}^2 + \gamma . (\vec{b} . \vec{c}) - (\vec{a} . \vec{b}) = 0 \\ \beta . (\vec{b} . \vec{c}) + \gamma . \vec{c}^2 - (\vec{a} . \vec{c}) = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \beta + \frac{3}{2} . \gamma - 1 = 0 \\ \beta . (\frac{3}{2}) + \gamma . 9 - 3 = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = \\ \gamma = \end{matrix}$$

$\vec{OA_1} = \quad . \vec{b} + \quad . \vec{c}$

За упр. $|\vec{OA_1}| = ?$