Петър Иванов – 2MI0800335 / I курс / I група

① Разбиване на краен затворен интервал $[a,b]$ е множеството от точки $\tau := \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, където

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат делящи.
Точките $c_1, c_2, \dots, c_n$ се наричат междинни, такива, че $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1,2,n$
Диаметър на разбиването τ е числото $d(\tau) := \max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$.

Нека имаме $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена с разбиване $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и ~~междинни~~ междинни точки $c_1, c_2, \dots, c_n$.
Дефинираме малката и голямата суми на Дарбу по следния начин:

$$s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \quad m_i = \inf_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

(минималната ст. на $f(x)$ в инт. $[x_{i-1}, x_i]$ / или мин. стойност на c_i)

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

(макс. стойност на c_i)

$$\underline{I} = \sup_\tau s_\tau \quad ; \quad \overline{I} = \inf_\tau S_\tau$$

~~Когато горната и долната граница се~~
При $d(\tau) \to 0$ (намаляване на диаметъра на разбиването) двете граници се доближават и в момента в който станат равни $\underline{I} = \overline{I} = I$, това наричаме определен интеграл посредством суми на Дарбу.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, \quad x \in [a,b]$$

(2) ~~Имаме~~ Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ и вземаме $\varepsilon>0$, $\varepsilon\in\mathbb{R}$.
По теоремата за осцилациите имаме

$$\omega[f,(x_i-x_{i-1})]<\varepsilon$$

$$\omega[f,[x_i-x_{i-1}]].\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})<$$
$$<\varepsilon.\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon(b-a)$$

(3) $\cancel{\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)}$

~~Нека~~ Имаме $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, деф. и непрекъсната и $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, при което $F(x)=f(x)$, ($F(x)$ е примитивна на $f(x)$). Ако $f(x)$ е деф. в $[a,b]$, то и $F(x)$ е деф. вгорние инт.

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

Избираме произволно $x_0\in[a,b]$ и $h\neq0$, такова че $x_0+h\in[a,b]$. Тогава диференчното частно е

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h}f(x)dx-\int_a^{x_0}f(x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x)dx=\frac{1}{h}f(c_h)(x_0+h-x_0)=$$

c_h - междинна точка за (x_0, x_0+h)

2MI0800335

$\sim \frac{1}{h} f(c_h)(x_0+h-x_0)$

Когато $h \to 0$, тогава $c_h \to x_0$

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{h}} f(c_h)(\cancel{x_0}+\cancel{h}-\cancel{x_0}) = f(x_0)$

Тъй като избрахме произволно $x_0 \in [a,b]$, теоремата е доказана