1 Basic・未分類

- 演算子の優先順位：！ * / % + - « » < > <= >= == != & ˆ | && ||
- 閉区間 $[l_1,\ r_1]$ と $[l_2,\ r_2]$ の共通部分の長さは $\max(0,\ \min(r_1,\ r_2) - \max(\mathrm{l}_1,\ \mathrm{l}_2) + 1)$
- N 個の閉区間 $[l_1,\ r_1],\ \cdots, [l_N,\ r_N]$ から 2 つ選んだときの最長共通区間の求め方：
  1. `ans = 0` とする
  2. N 個の区間を l の昇順にソート
  3. $i = 2,\ 3,\ \cdots,\ N$ の順に，`ans` を $\min(r_i,\ \max(r_1,\ \cdots,\ r_{i-1})) - l_i$ で `chmax`
- N 個の閉区間 $[l_1,\ r_1],\ \cdots, [l_N,\ r_N]$ から区間 i ともう一つを選んだときの最短共通区間は，l が最大の区間，r が最小の区間，最短の区間の 3 つとの共通区間の最小値 (CF1834-D)
- 穴あきグリッドでの最大長方形問題 $\to$ $y \geqq k$ での最大長方形問題 $\times$ y (ABC311-G)
- 元の配列から順序の変更のない集合を扱うときは，（左端，右端，最小，最大）の 4 つの値で管理できる (ABC324-G)

2 Math

- ACL の `modpow` は `__int128_t` に対応していない $\to$ 自作 `modpow` を使用 (snippet:modpow)
- XOR はとにかく桁ごとに見る
- 角度の比較は余弦定理で cos 2 乗して比べる際は分子の符号に注意
- n 個から隣り合わないようにとる通り数 $= fibo[n+1]$ $(fibo[0] = fibo[1] = 1)$
- カタラン数 $= \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$
- 集合 S の部分集合 T を列挙するときは，S をビットで表す整数を i とすると `for(ll j = i; j > 0; j = (j - 1) & i)` とすればよい。総数は 3^n 個。(ARC056-C, ABC321-G)
- 1 以上 N 以下の整数値をとる確率変数 X について，

$$(x \text{ の期待値}) = \sum_{i=1}^{N} (i \times P(X = i)) = \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i)$$

- シェルピンスキーのギャスケット（三角形のフラクタル図形）で黒い部分の位置は段の `superset` に一致 (ARC137-D)

- 原始根・位数
  P を素数，r を P の原始根とする（P が素数なので r は必ず存在)。
  - $a^{P-1} \equiv 1 \pmod P$（フェルマーの小定理）
  - a の位数 $=$ $a^n \equiv 1 \pmod P$ を満たす最小の自然数 n で，必ず $P-1$ の約数
  - r が P の原始根 $\iff$ r の位数が $P-1$
  - r^n の位数 $= \dfrac{P-1}{\gcd(n, P-1)}$
  - $r^x \equiv r^y \pmod P \iff x \equiv y \pmod{P-1}$

- オイラーの ϕ 関数　$\phi(n) =$ (n と互いに素である n 以下の自然数の個数)
  - $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ 　(m, n は互いに素)
  - $\phi(pn) = p\phi(n)$ 　(p は素数，n は p の倍数)
  - $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ 　(p は素数，$n \geq 1$)
  - $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{e_i}$ とすると，$\phi(n) = n \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$
  - $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$ 　(n と a は互いに素)
  - (n と互いに素である n 以下の素因数の和)$= \dfrac{n\phi(n)}{2}$ $(n \geq 2)$
  - $\displaystyle\sum_{d|n} \phi(d) = n$ 　($d|n$ は「d は n の約数」の意)
  - $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{e_i}$ とすると，$\displaystyle\sum_{d|n} d\phi(d) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-(-p_i)^{2e_i+1}}{1+p_i}$
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi(i) = \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{\lfloor n/i \rfloor} \phi(j)$

- メビウス関数 $\mu(n)$
  $\mu(1) = 1$. $n \geq 2$ で $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} {p_i}^{e_i}$ とすると, $\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & (e_1 = e_2 = \cdots = e_k = 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$
  - $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ 　(m, n は互いに素)
  - $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \geq 2) \end{cases}$

・ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mu(i) = 1 - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{\lfloor n/i\rfloor}\mu(j)$

・ $\displaystyle g(n) = \sum_{d|n} f(d) \implies f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d) = \sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$

・ $\displaystyle\phi(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d = \sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$

・ $\displaystyle\sum_{d|n}\frac{\mu^2(d)}{\phi(d)} = \frac{n}{\phi(n)}$

- 二項係数 $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \le k \le n)$　　ここでは，$n < k$ なら $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$ とする。

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = (p+q)^n$

・ $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

・ $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} = 2^{n-1}$

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k} = F_{n+1}$　　(F_n は n 番目のフィボナッチ数 $(F_0 = 0, F_1 = 1)$)

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$

・ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k}\binom{q-k}{k} = \binom{p+q+1}{n}$

・ $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$

・ $\displaystyle\sum_{i=-a}^{a}(-1)^k\binom{a+b}{a+i}\binom{b+c}{b+i}\binom{c+a}{c+i} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$

- 床関数・天井関数

  $n, m \in \mathbb{Z},\ \ x, y \in \mathbb{R}$ とする。

・ $x - 1 < \lfloor x\rfloor \le x$

・ $x \le \lceil x\rceil < x + 1$

- $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$ $\longleftarrow$ これを床関数の性質に適用して天井関数の性質に変えられる
- $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- $\lfloor x + y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$
- $\left\lfloor \frac{y}{x} \right\rfloor \geq \frac{y}{x} - \frac{x-1}{x} \quad (x, y > 0)$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{im}{n} \right\rfloor = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$ $(m, n$ は互いに素$)$
- $\displaystyle\lfloor nx \rfloor = \sum_{i=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor$
- $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$
- $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = m$ $(m \geq 1)$ となる整数 i の範囲は $\left\lfloor \frac{n}{m+1} \right\rfloor + 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$
- $n < x \iff n < \lceil x \rceil \iff n \leq \lceil x \rceil - 1 \iff n + 1 \leq \lceil x \rceil$
- $n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor \iff n < \lfloor x \rfloor + 1 \iff n - 1 < \lfloor x \rfloor$
- $n > x \iff n > \lfloor x \rfloor \iff n \geq \lfloor x \rfloor + 1 \iff n - 1 \leq \lfloor x \rfloor$
- $n \geq x \iff n \geq \lceil x \rceil \iff n > \lceil x \rceil - 1 \iff n + 1 > \lceil x \rceil$

3 Graph

- 始点が複数あるグラフ $\to$ 超頂点を作って長さ 0 の辺を張る
- DAG ではわざわざ BFS とかしなくても普通に DP できる
- 補グラフでの BFS は頂点と隣接する頂点でなく未訪問の頂点を `set` で持っておいてそっちから攻める (ABC319-G)
- 木の DP で頂点ごとに情報をもつときは `map` でマージテク (CF600-E)
- 木の任意パス上の辺の重みの min/max $\to$ ダブリング (CF609-E)
- フロー問題で頂点に何かしらのコストが定められているとき，頂点を 2 倍つくってコスト分の容量の辺をはる
- 頂点を通る際に条件がある最短経路 $\longrightarrow$ 一つ前の頂点を dp テーブルと `priority_queue` にもって Dijkstra (JOI-7-route)

- ゲームの状態を頂点に持った有向グラフで行先がない $\Longrightarrow$ 負け，
負けに行ける $\Longrightarrow$ 勝ち，勝ちにしか行けない $\Longrightarrow$ 負け　を使う問題では，出次数を数えた後，逆辺を張ったグラフで BFS (ABC209-E)

- 頂点数 N のグラフ,G の頂点集合を $V \coloneqq \{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ と表し，
$f(S) \coloneqq S \subseteq V$ を頂点集合とする G の**連結部分グラフ**の個数
$g(S) \coloneqq S \subseteq V$ を頂点集合とする G の**部分グラフ**の個数
とすると，$f(S) = g(S) - \displaystyle\sum_{\varnothing \neq T \subsetneq S} f(T)g(S \setminus T)$

4 DP・FPS

- 多項式 $f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n$ の総積を求めるときは `queue` を使い列の長さが 1 になるまで「列の末尾に $f_1 \times f_2$ を加え，列から $f_1,\ f_2$ を削除」という操作を行えばよい $(\mathcal{O}(M \log N \log M)) \leftarrow$ `mulall` で実装済

- 部分列 dp：https://noshi91.hatenablog.com/entry/2023/02/26/135340

5 string

- 文字列集合 $S_1,\ S_2,\ \cdots, S_n$ を好きな順番で連結して新たな文字列を作るとき，
$S_{p_1} S_{p_2} \cdots S_{p_n}$ が辞書順で最小 $\Longleftrightarrow$ $\forall i \ \ S_{p_i} S_{p_{i+1}} \leq S_{p_{i+1}} S_{p_i}$