

Survey of holomorphic homotopy theory

日下部 佑太 (D1) 学籍番号: 24A18804

2018 年 8 月 7 日

概要

本稿は筆者の専門である多変数複素解析におけるホモトピー論 (holomorphic homotopy theory) に関する Lárusson の論文 [5, 6, 7, 8, 9] を, 代数学特論で得た知識を活かしてまとめたものである. 主な目的は, これら五つの論文の根底にある “the Oka principle is about fibrancy in suitable model structures” という Lárusson の哲学を理解することである.

1 What is the Oka principle?

岡の原理とは標語的に言えば「Stein 多様体上の解析的な問題には位相的な障害しかない」というものであり, 岡潔の第 III 論文 (1939) に端を発する. この原理は Gromov (1989) による「複素解析におけるホモトピー原理」という解釈を経て, Forstnerič や Lárusson らによって岡多様体の理論へと発展した. 詳しい歴史や岡の原理の詳細については, 岡多様体に関する唯一の成書である [1] を参照されたい. 以下ではこの分野における主な研究対象である (弱) 岡多様体や (弱) 岡写像の概念を簡単に復習する. これらは Stein 多様体からの写像が岡の原理を満たすようなものとして定義される. 本稿を通して複素多様体は第二可算だが連結とは限らないものを考え, 連続写像の空間 $\mathcal{C}(X, Y)$ や正則写像の空間 $\mathcal{O}(X, Y)$ にはコンパクト開位相を入れることとする.

定義 1.1. 複素多様体の間の正則写像 $\pi: Y \rightarrow B$ が**弱岡写像**であるとは, 任意の Stein 多様体 X に対して次の二条件が成り立つことをいう:

1. $\pi_*: \mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, B)$ が Serre fibration.
2. $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : \pi \circ f \in \mathcal{O}(X, B)\}$ が weak homotopy equivalence.

また複素多様体 Y が**弱岡多様体**であるとは $Y \rightarrow *$ が弱岡であることとする ($*$ は singleton). 言い換えると, 任意の Stein 多様体 X に対して包含 $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ が weak homotopy equivalence であるということである.

定義 1.2. 複素多様体の間の正則写像 $\pi: Y \rightarrow B$ が**岡写像**であるとは, 任意の Stein 包含 $\iota: X' \hookrightarrow X$ (Stein 多様体の間の閉埋め込み) に対して次の二条件が成り立つことをいう:

1. $(\pi_*, \iota^*) : \mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{O}(X', B)} \mathcal{O}(X', Y)$ が Serre fibration.
2. $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : \pi \circ f \in \mathcal{O}(X, B), f \circ \iota \in \mathcal{O}(X', Y)\}$ が weak homotopy equivalence.

また複素多様体 Y が**岡多様体**であるとは $Y \rightarrow *$ が岡であることとする. 言い換えると, 任意の Stein 包含 $\iota : X' \hookrightarrow X$ に対して包含 $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f \circ \iota \in \mathcal{O}(X', Y)\}$ が weak homotopy equivalence であるということである.

岡多様体には色々な同値な定義があることが知られている (cf. [1, §5.15]). 次は其中最も単純なものである.

定理 1.3 (cf. [1, Proposition 5.15.1]). 複素多様体 Y が岡であることと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と可縮な閉複素部分多様体 $X \subset \mathbb{C}^n$ に対して制限写像 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, Y)$ が全射であることは同値である.

岡多様体であるための幾何学的な十分条件として Gromov の ellipticity と呼ばれるものがあり (cf. [1, §6]), それを用いることで例えば複素 Lie 群や複素等質多様体が岡であることが分かる. また代表的な岡写像の例として, 岡多様体をファイバーとする正則ファイバー束が挙げられる (cf. [1, Corollary 7.4.5]).

Lárusson は上で導入した概念とホモトピー論との深い関係を一連の研究 [5, 6, 7, 8, 9] で発見し, 特に岡の原理をモデル圏の枠組みに納めることに成功した. 以下ではこれらの成果を概観し, “the Oka principle is about fibrancy in suitable model structures” という Lárusson の哲学の理解を目指す.

2 複素多様体の圏の埋め込み $\mathcal{M} \hookrightarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$

\mathcal{M} で複素多様体の圏を表す. 複素多様体 X, Y の間の正則写像の空間 $\mathcal{O}(X, Y)$ の singular set $\text{Sing} \mathcal{O}(X, Y) \in \text{Set}_{\Delta}$ を $\text{Map}_{\mathcal{M}}(X, Y)$ とすることで \mathcal{M} を simplicial category と見る. 岡の原理と相性の良いモデル構造を持つ simplicial model category に \mathcal{M} を埋め込むのが目標である.

Stn で Stein 多様体からなる \mathcal{M} の full (simplicial) subcategory を表す. 連結 Stein 多様体は複素 Euclid 空間に埋め込まれるので Stn は essentially small である. simplicial functor $\text{Stn}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}_{\Delta}$ のなす simplicial category $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ を考える. enriched Yoneda lemma より任意の $X \in \text{Stn}$ と $F \in \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ に対し Set_{Δ} における自然な同型

$$F(X) \cong \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}}(\text{Map}_{\mathcal{M}}(-, X), F)$$

があるので simplicial full embedding $\text{Stn} \hookrightarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ が $X \mapsto \text{Map}_{\mathcal{M}}(-, X)$ により定まる. この明らかな拡張 $\mathcal{M} \rightarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ は写像空間の monomorphism (もちろん X が Stein なら isomorphism)

$$\text{Map}_{\mathcal{M}}(X, Y) \rightarrow \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}}(\text{Map}_{\mathcal{M}}(-, X), \text{Map}_{\mathcal{M}}(-, Y))$$

を与え, \mathcal{M} を $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ に simplicial に埋め込む. この埋め込みが full であるかは知られていないが, 次のような弱い意味では full embedding である.

命題 2.1 ([5, Proposition 4.2]). $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ における複素多様体 X, Y の間の任意の射 $\tau: X \rightarrow Y$ を *vertex level* に制限した $\mathcal{O}(-, X) \rightarrow \mathcal{O}(-, Y)$ はある正則写像 $f \in \mathcal{O}(X, Y)$ により与えられる. つまり合成 $\mathcal{M} \hookrightarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ は *full embedding* を与える.

注意 2.2. 上のような埋め込み $\mathcal{M} \hookrightarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ を考える理由を以下に挙げる:

- (1) presheaf を考える理由: 圏を complete かつ cocomplete にするため.
- (2) simplicial presheaf を考える理由: Stein 包含は cofibration になってほしく Stn 上の (空間に値を持つ) presheaf の圏で objectwise cofibration を引き起こすと要求するのが自然であるが, topological presheaf を考えるとこれが成り立たないため. 例えば $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \{1\}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ を考えると Serre や Hurewicz の意味の cofibration にはならない (値域の任意の非空開集合が非可算個の連結成分を持ち, 像の可縮な近傍が存在しないため). しかし singular set をとると Set_{Δ} の cofibration になる. またこのようにしても Serre fibration や weak homotopy equivalence の情報は失われない.
- (3) simplicially enriched presheaf を考える理由: 少なくとも Stein 多様体が定義域であるようなところは full に埋め込みたいが, enrich されていない functor の圏では米田の補題を使えないため.

3 $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ のモデル構造と局所化: projective, injective, intermediate

本稿を通して Set_{Δ} には Kan-Quillen モデル構造だけを入れることにする. モデル圏の一般論から以下のモデル構造が $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ 上に得られる.

命題 3.1 (cf. [10, Proposition A.3.3.2 & Remark A.3.3.4]).

- (1) $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ には *weak equivalence* と *fibration* を *objectwise* に定めることで, *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを (global) projective structure と呼ぶ.
- (2) $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ には *weak equivalence* と *cofibration* を *objectwise* に定めることで, *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを (global) injective structure と呼ぶ.

注意 3.2. 任意の Stein 多様体は projective structure に関して cofibrant かつ fibrant であるが, 一般に injective fibrant にはならない (cf. 注意 3.10).

Stn に Grothendieck 位相を入れて simplicial site と考え, left Bousfield localization をすることで local model structure を作る. つまり cofibration は変えずに weak equivalence を増やす. Stn 上の Grothendieck 位相 (i.e. ホモトピー圏 hStn 上の Grothendieck 位相) は, $X \in \text{Stn}$ に対して像が X を被覆する開埋め込みの族のホモトピー類を X の covering とすることで定まるものとする.

定義 3.3 (local weak equivalence). $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ の射 $f: F \rightarrow G$ が *local weak equivalence* であるとは, 上の位相に関する F と G の各次数のホモトピー層の同型を f が導くことをいう (cf. [13, Definition 3.3.2]). これは次の local right lifting property と同値である: 任意の Stein 多様体 X と任意の Set_{Δ}

での可換図式

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & G(X) \end{array}$$

に対して, \mathbf{hStn} での X のある covering sieve R が存在して R の射を代表する任意の \mathbf{Stn} の射 $S \rightarrow X$ に対して以下のようなリフトが存在する:

$$\begin{array}{ccccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & F(X) & \longrightarrow & F(S) \\ \downarrow & & \nearrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & G(X) & \longrightarrow & G(S) \end{array}$$

定理 3.4 (cf. [13, Theorem 3.4.1, Proposition 3.6.1]).

- (1) $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ には *local weak equivalence* と *projective cofibration* により *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを *local projective structure* と呼ぶ.
- (2) $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ には *local weak equivalence* と *injective cofibration (monomorphism)* により *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを *local injective structure* と呼ぶ.

次に Stein 包含が cofibration になるような最小の model structure を考える. これは cofibration が projective structure より多く, injective structure より少ない intermediate なものになる. 集合 C_0 を Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ と $n \geq 0$ に対する $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ 内の monomorphism

$$X \times \partial\Delta^n \cup_{X' \times \partial\Delta^n} X' \times \Delta^n \rightarrow X \times \Delta^n$$

からなるものとする. $n = 0$ や $X' = \emptyset$ の場合を考えることで C_0 が Stein 包含や, projective structure の generating cofibration $X \times \partial\Delta^n \rightarrow X \times \Delta^n$ を含むことが分かる.

定義 3.5 (intermediate cofibration). C を C_0 の saturation (C_0 を含み pushout, retract, transfinite composition で閉じている最小の $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ の射のクラス) とする. C の射を *intermediate cofibration* と呼ぶ. これは C_0 の射の pushout の transfinite composition の retract として書ける.

定理 3.6 ([6, Theorem 13, §22]).

- (1) $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ には *objectwise weak equivalence* と *intermediate cofibration* により *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを *intermediate structure* と呼ぶ.
- (2) $\mathbf{Set}_{\Delta}^{\mathbf{Stn}^{\text{op}}}$ には *local weak equivalence* と *intermediate cofibration* により *proper combinatorial simplicial model structure* が入る. これを *local intermediate structure* と呼ぶ.

この定理の証明は Jardine [3] による (site が discrete な場合の) intermediate structure の存在の証明と同様である.

命題 3.7 (intermediate fibration の特徴付け [6, §22]). $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の射 $F \rightarrow G$ が *intermediate fibration* であることと, 任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ と任意の $n \geq 0$ に対する

$$X \times \Lambda_k^n \cup_{X' \times \Lambda_k^n} X' \times \Delta^n \rightarrow X \times \Delta^n$$

に関して *right lifting property* をもつということと同値である. さらに, 上の形の射は *intermediate generating trivial cofibration* となる.

以下では上で導入したモデル構造における weak equivalence と cofibration がどのようなものであるかを述べる (fibration については次節以降を参照).

n 次元開球 $\mathbb{B}^n \in \text{Stn}$ に対し, 任意の射 $* \mapsto \mathbb{B}^n$ は強変位レトラクションの包含であり, $F \in \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ に対し $F(*) \rightarrow F(\mathbb{B}^n)$ は weak equivalence になる. これと任意の被覆が \mathbb{B}^n による細分をもつことから次が従う. ただし $\Gamma : \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}_\Delta$, $F \mapsto F(*) = \text{Map}_{\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}}(*, F)$ は (simplicial) global section functor を表す.

命題 3.8 (local weak equivalence の特徴付け [6, §4]). $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の射 $f : F \rightarrow G$ が *local weak equivalence* であることと, Set_Δ の射 $\Gamma(f) : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(G)$ が *weak equivalence* であることは同値である. 特に複素多様体の間の正則写像が *local weak equivalence* であることと *homotopy equivalence* であることは同値である.

$\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の全ての対象は injective cofibrant である. また定義から Stein 多様体は projective cofibrant であり intermediate cofibrant であるが, 命題 2.1 を用いることで [7] で逆も証明された.

定理 3.9 (cofibrant の特徴付け [7, Theorem 6]). 複素多様体 X に対して次は同値:

1. X は *intermediate cofibrant*.
2. X は *projective cofibrant*.
3. X は Stein 多様体.

intermediate cofibration になる正則写像は Stein 包含と双正則写像のみであると考えられている.

注意 3.10. 三つの local model structure は全て異なる. まず \mathbb{D} は holomorphically contractible なので弱岡であり定理 5.1 より local projective fibrant であるが, Liouville の定理より \mathbb{D} は岡ではなく系 5.6 より local intermediate fibrant ではない. また \mathbb{C} は岡なので系 5.6 より local intermediate fibrant であるが, local injective fibrant ではない. より強く任意の正次元の複素多様体 Y が injective fibrant ではないことが, injective trivial cofibration $\mathbb{D} \hookrightarrow 2\mathbb{D}$ を考えることで分かる.

4 Set_Δ との simplicial Quillen equivalence

simplicial functor $\Pi : \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$, $F \mapsto \Pi(F) = \text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing}(-), \Gamma(F))$ を考える. これは $\Pi \circ \Pi = \text{Id}$ を満たす (つまり射影である). また simplicial natural transforma-

tion $\eta : \text{id}_{\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}} \rightarrow \Pi$ が $F \in \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$, $X \in \text{Stn}$ に対し $(\eta_F)_X : F(X) \rightarrow \Pi(F)(X) = \text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing} X, \Gamma(F))$ を F による $\text{Sing} X = \text{Map}_{\text{Stn}}(*, X) \rightarrow \text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(F(X), F(*))$ に対応するものとして定められる. 射 $\eta_{\Pi(F)} = \Pi(\eta_F) : \Pi(F) \rightarrow \Pi^2(F) = \Pi(F)$ が $\text{id}_{\Pi(F)}$ と等しいことに注意する. また $\Gamma(\eta_F) = \text{id}_{\Gamma(F)}$ なので $\eta_F : F \rightarrow \Pi(F)$ は local weak equivalence である. 系 4.2 で分かることだが Π と η は functorial な localization ([2, Definition 3.2.16]) を与える.

命題 4.1 ([6, §6]). $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ には三つの *local model structure* のいずれかを入れる. このとき次の *simplicial Quillen equivalence* が得られる:

$$\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}} \xrightleftharpoons[\Pi|_{\text{Set}_\Delta}]{\Gamma} \text{Set}_\Delta$$

証明. $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の任意の射 $f : F \rightarrow \Pi(K)$ は

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \Pi(K) \\ \eta_F \downarrow & & \parallel \eta_{\Pi(K)} \\ \Pi(F) & \xrightarrow{\Pi(f)} & \Pi(K) \end{array}$$

と分解するので f は $\Pi(f)$ から決定される. またこれは $\Gamma(F) \rightarrow \Gamma(\Pi(K)) = K$ から誘導されている. これらは全て simplicial に自然であるので $(\Gamma, \Pi|_{\text{Set}_\Delta})$ は simplicial adjunction である. Quillen adjunction であることは, 定義から Γ が injective cofibration (resp. local weak equivalence) を Set_Δ での cofibration (resp. weak equivalence) にうつすことから従う (projective cofibration は injective cofibration でもあることに注意). また $\eta_F : F \rightarrow \Pi(F)$ が local weak equivalence であることから $F \rightarrow \Pi(K)$ が local weak equivalence であることと $\Pi(f) : \Pi(F) \rightarrow \Pi(K)$ が local weak equivalence であることは同値である. 命題 3.8 より, これは $\Gamma(F) \rightarrow K$ が weak equivalence であることは同値であるので $(\Gamma, \Pi|_{\text{Set}_\Delta})$ は Quillen 同値でもある. \square

この命題から $\Pi|_{\text{Set}_\Delta}$ は Kan fibration を local injective fibration に送る. 特に fibrant $K \in \text{Set}_\Delta$ に対して $\text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing}(-), K)$ は local injective fibrant であるので次が分かる.

系 4.2. $\Gamma(F)$ が fibrant となるような $F \in \text{Set}_\Delta$ に対して $\eta_F : F \rightarrow \Pi(F)$ は functorial な local fibrant replacement を与える. 言い換えると, そのような F に対して η_F は functorial な localization を与える. 特に複素多様体 X に対して $\eta_X : X \rightarrow \Pi(X)$ は $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の local injective model structure に関する X の cofibrant-fibrant model を与える.

命題 4.3 (cf. [6, §7]). 三つの local model structure のいずれかで考える. $\Gamma(F), \Gamma(G)$ が fibrant となるものの間の $\text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の global fibration $f : F \rightarrow G$ に対し, f が local fibration であることと, $F \rightarrow G \times_{\Pi(G)} \Pi(F)$ が objectwise weak equivalence であることは同値. 特に global fibrant $F \in \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ が local fibrant であることと $\eta_F : F \rightarrow \Pi(F)$ が objectwise weak equivalence であることは同値.

証明. 系 4.2 より次の図式は f の localization を与える:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & G \\ \eta_F \downarrow & & \downarrow \eta_G \\ \Pi(F) & \xrightarrow{\Pi(f)} & \Pi(G) \end{array}$$

このとき f が local fibration であることと, 上の図式が global structure で homotopy fiber square であることは同値である (cf. [2, Proposition 3.4.8]). これは F から $\Pi(F) \rightarrow \Pi(G) \leftarrow G$ の homotopy pullback への自然な射が objectwise weak equivalence ということと同じである. しかし今 $\Gamma(F) \rightarrow \Gamma(G)$ は Kan fibration であるので, 上の Quillen 同値から $\Pi(f)$ は local fibration であり特に global fibration である. 従って homotopy pullback は objectwise pullback と自然に objectwise に weak equivalent である (cf. [2, Corollary 13.3.8]). \square

5 Oka principle = fibrancy

5.1 weak Oka property = local projective fibrancy

定理 5.1 (weak Oka property = local projective fibrancy [6, Theorem 11]). 正則写像 $\pi : Y \rightarrow B$ が弱岡であることと *local projective fibration* であることは同値である. 特に複素多様体が弱岡であることと *local projective fibrant* であることは同値である.

証明. 命題 4.3 より π が local projective fibration であることは, 任意の Stein 多様体 X に対して次の二条件が成り立つことと同値である:

1. $\text{Sing}\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \text{Sing}\mathcal{O}(X, B)$ が Kan fibration.
2. $\text{Sing}\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \text{Sing}\mathcal{O}(X, B) \times_{\text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing}X, \text{Sing}B)} \text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing}X, \text{Sing}Y)$ が w.e.

$\text{Map}_{\text{Set}_\Delta}(\text{Sing}X, \text{Sing}Y) = \text{Sing}\mathcal{C}(|\text{Sing}X|, Y)$ が $\text{Sing}\mathcal{C}(X, Y)$ とホモトピー同値であることなどを使うと後者は $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{C}(X, B)} \mathcal{C}(X, Y)$ が weak homotopy equivalence であることと同値である. 従ってこれらの条件は弱岡であることの条件 (定義 1.1) と同値である. \square

Toën-Vezzosi [13, Corollary 3.4.7] によると $F \in \text{Set}_\Delta^{\text{stn}^{\text{op}}}$ が local projective fibrant であることと, objectwise fibrant かつ stack である (hyperdescent condition [13, Definition 3.4.9] を満たす) ことは同値である. 複素多様体は objectwise fibrant なので定理 5.1 から次が従う.

系 5.2 ([6, Theorem 9]). 複素多様体が弱岡であることと *simplicial Stein site* Stn 上の *stack* を表現することは同値である.

[6] の前の論文での主結果 [5, Theorem 2.1] は, Y が弱岡多様体であることと discrete Stein site 上で $\text{Sing}\mathcal{O}(-, Y)$ が有限被覆に関する descent condition (finite excision) を満たすことが同値である

ことを述べている．同論文では代数的な弱岡多様体に対する descent theorem [5, Theorem 5.1] も示されている．

5.2 Oka property = local intermediate fibrancy

命題 5.3 (local intermediate trivial fibration の特徴付け [6, Proposition 14]). $\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の *local weak equivalence* $F \rightarrow G$ が *local intermediate fibration* であることと, 任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対して *homotopy right lifting property* を持つこと (i.e. $\text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}}(X, F) \rightarrow \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}}(X, G) \times_{\text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}}(X', G)} \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}}(X', F)$ が *trivial fibration*) は同値である．

証明. 定義より $F \rightarrow G$ が local intermediate fibration になることと C_0 の射に対して right lifting property をもつことは同値である．随伴を取ることで, このことは任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対する次の図式でリフトが存在することと同値である:

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^n & \longrightarrow & F(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^n & \longrightarrow & G(X) \times_{G(X')} F(X') \end{array}$$

これは任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対して $F(X) \rightarrow G(X) \times_{G(X')} F(X')$ が trivial fibration になることと同値である． \square

Lárusson の [6] における主結果は次のような local intermediate fibration の特徴付けを与える．証明は命題 5.3 の場合とは異なり簡単ではない．

定理 5.4 (local intermediate fibration の特徴付け [6, Theorem 19]). $\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の射 $f: F \rightarrow G$ に対して *local intermediate fibration* であることと, 任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対して次の二条件が成り立つことをいう:

1. $F(X) \rightarrow G(X) \times_{G(X')} F(X')$ が *Kan fibration*.
2. 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & F & \xrightarrow{\eta_F} & \Pi(F) \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \Pi(f) \\ X & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\eta_G} & \Pi(G) \end{array}$$

におけるリフトの空間の間の射

$$(\eta_F)_* : \text{Map}_{X' \downarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}} \downarrow G}(X, F) \rightarrow \text{Map}_{X' \downarrow \text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}} \downarrow \Pi(G)}(X, \Pi(F))$$

が *weak equivalence*.

注意 5.5. (1) 命題 3.7 を用いることで, 定理 5.4 の一つ目の条件が (global) intermediate fibration の特徴付けを与えることが分かる (命題 5.3 の証明を参照せよ).

(2) 定理 5.4 の二つの条件で $X' = \emptyset$ とすると, 命題 4.3 における $\Gamma(F), \Gamma(G)$ が fibrant となるような射 $F \rightarrow G$ に対する local projective fibration の必要十分条件が出てくる.

系 5.6 (Oka property = local intermediate fibrancy [6, Corollary 20]). 正則写像 $\pi : Y \rightarrow B$ が岡であることと *local intermediate fibration* であることは同値である. 特に複素多様体が岡であることと *local intermediate fibrant* であることは同値である.

証明. 定理 5.1 と同様にして, $\pi : Y \rightarrow B$ に対する定理 5.4 の条件が任意の Stein 包含 $\iota : X' \hookrightarrow X$ に対して次の二条件が成り立つことと同値だと分かる:

1. $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{O}(X', B)} \mathcal{O}(X', Y)$ が Serre fibration.
2. 任意の可換図式

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & B \end{array}$$

における正則なリフトの空間 $L_{\mathcal{O}}(X, Y)$ から連続なリフトの空間 $L_{\mathcal{C}}(X, Y)$ への包含が weak homotopy equivalence.

以下ではこれらの条件が岡であるための条件 (定義 1.2) と同値であることを見る. $\mathcal{C}_{\pi, \iota}(X, Y) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : \pi \circ f \in \mathcal{O}(X, B), f \circ \iota \in \mathcal{O}(X', Y)\}$ とおいて可換図式

$$\begin{array}{ccccc} L_{\mathcal{O}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{O}(X', B)} \mathcal{O}(X', Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ L_{\mathcal{C}}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{\pi, \iota}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{O}(X', B)} \mathcal{O}(X', Y) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{C}(X, Y) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, B) \times_{\mathcal{C}(X', B)} \mathcal{C}(X', Y) \end{array}$$

を考える. $X' \hookrightarrow X$ が (Serre の意味で) cofibration であることから右下の水平な射は Serre fibration である. 右下の四角が pullback square であることと共通の条件から, 右半分の水平な射は全て Serre fibration である. 従って上半分の図式は fibration sequence の間の射であり, 左の垂直な射が weak homotopy equivalence であることと中央の垂直な射が weak homotopy equivalence であることは同値である. \square

命題 4.3 から次が簡単に分かる.

命題 5.7 ([6, §22]). $\Gamma(F), \Gamma(G)$ が fibrant となるものの間の $\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}$ の射 $f : F \rightarrow G$ に対し, f が *local intermediate fibration* であることと, *intermediate fibration* かつ *local projective fibration* であることは同値. 特に $F \in \text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}$ が *local intermediate fibrant* であることと, *intermediate fibrant* かつ *local projective fibrant* であることは同値.

これと注意 5.5 から次の岡写像の特徴付けが得られる (定義 1.2 と比較せよ).

系 5.8 ([6, §22]). 正則写像 $\pi : Y \rightarrow B$ が岡写像であることと, 任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対して次の二条件が成り立つことは同値:

1. $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X, B) \times_{\mathcal{O}(X', B)} \mathcal{O}(X', Y)$ が Serre fibration.
2. $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : \pi \circ f \in \mathcal{O}(X, B)\}$ が weak homotopy equivalence.

特に複素多様体 Y が岡であることと, Y が弱岡かつ任意の Stein 包含 $X' \hookrightarrow X$ に対して $\mathcal{O}(X, Y) \rightarrow \mathcal{O}(X', Y)$ が Serre fibration であることが同値になるが, このことは定義から直接示すこともできる (cf. [6, §16]). もちろんこの同値性は定理 1.3 から直ちに従う.

fibration の値域が fibrant ならば定義域が fibrant であることは定義から明らかであるが, local intermediate structure ではこの逆も成り立つ. これは岡多様体が定理 1.3 のように特別な Stein 包含だけを用いて特徴付けられることの簡単な帰結である.

命題 5.9. $\pi : E \rightarrow B$ を複素多様体の間の全射な岡写像であるとする. このとき E が岡であることと B が岡であることは同値である.

付録A 写像空間のホモトピー型

Y を弱岡多様体とする. つまり任意の Stein 多様体 X に対して $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ が weak homotopy equivalence になるということであった. これがいつ homotopy equivalence になるかを考える.

注意 A.1. (1) 写像空間は locally compact でなければ CW 複体にならないことに注意する (距離化可能であるため).

(2) functorial homotopy inverse が存在するかという問題も興味深い. simplicial に考えると objectwise weak equivalence $\eta_Y : Y \rightarrow \Pi(Y)$ が simplicial homotopy equivalence であるかということであるが, もし injective cofibration η_Y が projective cofibration でもあれば η_Y は simplicial homotopy equivalence になる (定理 5.1 と [2, Corollary 9.6.5] を用いよ).

[5, Theorem 2.2] で affine algebraic manifold X に対して right homotopy inverse が存在することが示され, [9] で ANR (absolute neighborhood retract) の理論を用いて次のように一般化された.

命題 A.2 ([9, Proposition 8]). X が *finitely dominated* (i.e. id_X が相対コンパクトな像を持つ写像に homotopic) な Stein manifold で $\mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$ が weak homotopy equivalence なら right homotopy inverse をもつ.

この命題と ANR property の Dugundji-Lefschetz characterization を用いて Y が岡多様体であるという強い仮定のもとで次が示された.

定理 A.3 ([9, Theorem 1]). X を有限個の臨界点しかもたない強多重劣調和皆既 *Morse* 関数を持つ *Stein* 多様体とし, Y を岡多様体とする. このとき $\mathcal{O}(X, Y)$ は $\mathcal{C}(X, Y)$ の *strong deformation retract* である.

以下では正則写像の空間のホモトピー型をその空間への正則写像のみから復元できるかという問題を考える.

$$|\Delta^n| = \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} : x_0 + \dots + x_n = 1\}$$

の代わりに

$$|\Delta^n|_{\mathbb{C}} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : z_0 + \dots + z_n = 1\}$$

を考えることで, singular set $\text{Sing}(Y)$ と同様に *affine singular set* $\text{Sing}_{\mathbb{C}} Y \in \text{Set}_{\Delta}$ を $\text{Sing}_{\mathbb{C}}(Y)_n = \mathcal{O}(|\Delta^n|_{\mathbb{C}}, Y)$ で定める. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して制限写像 $\mathcal{O}(|\Delta^n|_{\mathbb{C}}, Y) \rightarrow \mathcal{C}(|\Delta^n|, Y)$ は単射なので, 自然な cofibration $\text{Sing}_{\mathbb{C}}(Y) \hookrightarrow \text{Sing}(Y)$ が得られる.

注意 A.4. Y が Brody 双曲的 (i.e. 整曲線 $\mathbb{C} \rightarrow Y$ が全て定数) ならば $\text{Sing}_{\mathbb{C}}(Y)$ は discrete である.

定理 A.5 ([8, Theorem 1]). 岡多様体 Y に対して cofibration $\text{Sing}_{\mathbb{C}}(Y) \hookrightarrow \text{Sing}(Y)$ は *strong deformation retract* の包含である.

正則写像 $X \times |\Delta^n|_{\mathbb{C}} \rightarrow Y$ を考えることで, 正則写像の空間の *affine singular set* $\text{Sing}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X, Y)$ も定義することができる. 上の定理はこの状況でも成り立つ.

定理 A.6 ([8, Theorem 2]). Y を岡多様体とすると, 任意の *Stein* 多様体 X に対する二つの射

$$\text{Sing}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \text{Sing} \mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \text{Sing} \mathcal{C}(X, Y)$$

はどちらも *Kan complex* の間の *weak equivalence* である.

注意 A.7. Y が弱岡多様体であることと $\text{Sing} \mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \text{Sing} \mathcal{C}(X, Y)$ が *strong deformation retract* の包含であることは同値である.

筆者の結果 [4, Corollary 3.1] を用いると左の射が *weak equivalence* になることが, 岡多様体の特徴付けることが分かる.

系 A.8. Y が岡多様体であることと $\text{Sing}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X, Y) \hookrightarrow \text{Sing} \mathcal{O}(X, Y)$ が *strong deformation retract* の包含であることは同値である.

付録B $\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn}^{\text{op}}}$ における mapping cylinder

モデル圏における射 $f : F \rightarrow G$ の *mapping cylinder* $\text{Cyl}(f)$ とは, cofibration $\iota : X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ と trivial fibration (単に *weak equivalence* の場合もある) $\pi : \text{Cyl}(f) \rightarrow Y$ への分解 $f = \pi \circ \iota$ のことである.

以下では [7] に沿って, 三つのモデル構造における Stein 多様体の間の正則写像の mapping cylinder を扱い, その応用などを述べる.

B.1 local intermediate structure

X, Y を Stein 多様体とし, X は有限次元であるとする. 正則写像 $f : X \rightarrow Y$ の local intermediate structure における mapping cylinder を構成しよう: 仮定より閉埋め込み $i : X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ が存在する. これを用いて

$$\text{Cyl}(f) = \text{Cyl}(f)_{\text{int}} = Y \times \mathbb{C}^N, \quad \iota = (f, i) : X \rightarrow \text{Cyl}(f), \quad \pi : \text{Cyl}(f) \rightarrow Y, \quad (y, z) \mapsto y$$

と定義すると, local intermediate structure での f の mapping cylinder を与える.

Lárusson はこの応用として拡張定理が近似定理を導くことの証明 ([7, Theorem 1]) や, 岡である Stein 多様体が Gromov の ellipticity を満たすことの別証明 ([7, Theorem 2]) を与えた.

B.2 local projective structure

X, Y を Stein 多様体とし, $f : X \rightarrow Y$ を正則写像とする. (local, global 両方の) projective structure における f の mapping cylinder $\text{Cyl}(f) = \text{Cyl}(f)_{\text{proj}}$ は次の (Set_Δ) における pushout で得られる:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \iota_0 & & \downarrow \\ X \times \Delta^1 & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

次の図式も pushout square であることに注意する:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{f \sqcup \text{id}} & Y \sqcup X \\ \downarrow \iota_0 \sqcup \iota_1 & & \downarrow \\ X \times \Delta^1 & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \end{array}$$

これらにおける包含射 ι_0, ι_1 の定義は明らかであろう.

命題 B.1. 合成 $X \rightarrow Y \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ を ι とし, pushout の普遍性から与えられる射影 $\text{Cyl}(f) \rightarrow Y$ を π とすると (local, global 両方の) projective structure における f の mapping cylinder になる.

証明. $Y \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ は projective cofibration の pushout なので projective cofibration であり, また Stein 多様体 Y が projective cofibrant なので $X \rightarrow Y \sqcup X$ も projective cofibration である. 従ってこれらの合成である ι も projective cofibration である.

また $Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ は objectwise trivial cofibration $X \rightarrow X \times \Delta^1$ の pushout なので objectwise weak equivalence である. 従って $Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ の left inverse である π も objectwise weak equivalence であり, 特に local weak equivalence でもある. \square

定義から, 複素多様体 Z への任意の射 $\text{Cyl}(f) \rightarrow Z$ は $\text{Hom}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(Y, Z) = \mathcal{O}(Y, Z)$ の元 φ と

$$\text{Hom}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(X \times \Delta^1, Z) = \text{Hom}_{\text{Set}_{\Delta}}(\Delta^1, \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(X, Z)) = (\text{Sing} \mathcal{O}(X, Z))_1 = \mathcal{C}(I, \mathcal{O}(X, Z))$$

の元 ψ の組で $\varphi \circ f = \psi(0)$ を満たすものと 1 対 1 に対応する. ただし $I = [0, 1]$ である. つまり射 $\text{Cyl}(f) \rightarrow Z$ は, 正則写像のホモトピー $X \times I \rightarrow Z$ で $0 \in I$ で f を通って分解するものと 1 対 1 に対応する. 後者は Top における通常の mapping cylinder $\text{Cyl}(f)_{\text{top}} = Y \cup_X (X \times I)$ から Z への連続写像で各スライスで正則なものと言っても同じである. このことの応用として次が得られる.

系 B.2 ([7, p. 1151]). X, Y を Stein 多様体とし, $f : X \rightarrow Y$ を正則写像とする. Z が弱岡かつ f が *homotopy equivalence* であるか, Z が可縮な弱岡多様体であると仮定する. このとき任意の正則写像 $X \rightarrow Z$ は正則写像のホモトピーにより $f : X \rightarrow Y$ を通って分解するものに変形できる.

証明. どちらの場合も同様の証明であるので, 一つ目の仮定の場合だけを示す. f が local weak equivalence であること (命題 3.8) と π が local weak equivalence であることから, $\iota : X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ は local projective trivial cofibration である. これと Z が local projective fibrant であること (定理 5.1) から $\iota^* : \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(\text{Cyl}(f), Z) \rightarrow \text{Map}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(X, Z) = \text{Sing} \mathcal{O}(X, Z)$ は trivial Kan fibration であり, vertex level での全射 $\text{Hom}_{\text{Set}_{\Delta}^{\text{stn op}}}(\text{Cyl}(f), Z) \rightarrow \mathcal{O}(X, Z)$ を導く. \square

B.3 Quillen model structure

X, Y を Stein 多様体とし, $f : X \rightarrow Y$ を正則写像とする. ここでは Quillen モデル構造の入った位相空間の圏 Top における通常の mapping cylinder $\text{Cyl}(f) = \text{Cyl}(f)_{\text{top}} = Y \cup_X (X \times I)$ を考える. X が CW 複体の構造を持つため, 命題 B.1 の証明と同様に $X \rightarrow \text{Cyl}(f)$ が確かに (Serre の意味で) cofibration になることが分かる.

命題 B.3. Stein 多様体の間の正則写像 $f : X \rightarrow Y$ と弱岡多様体 Z に対し, $\mathcal{O}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(\text{Cyl}(f), Z) \times_{\mathcal{C}(X, Z)} \mathcal{O}(X, Z)$ は *weak homotopy equivalence* である.

証明. 可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(Y, Z) & & & & \\ \downarrow & \searrow & & \searrow & \\ & \mathcal{C}(\text{Cyl}(f), Z) \times_{\mathcal{C}(X, Z)} \mathcal{O}(X, Z) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}(X, Z) & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathcal{C}(Y, Z) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(\text{Cyl}(f), Z) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}(X, Z) \end{array}$$

で左と右の垂直な射が weak homotopy equivalence であることと右下の水平な射が Serre fibration であること, 左下の水平な射が weak homotopy equivalence であることから明らかである. \square

f が開埋め込みである場合に上の命題を用いることで次を示すことができる.

系 B.4 ([7, p. 1152]). X を Stein 多様体, Y を弱岡多様体, $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ を連続写像とする. もし f が Stein コンパクト集合 (i.e. Stein 近傍基をもつコンパクト集合) の近傍で正則なら, そのような写像を通るホモトピーで f を正則写像 $X \rightarrow Y$ に変形できる.

付録C $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ における (co)fibrant model

モデル圏の定義から $\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ の任意の対象に対して (co)fibrant model が存在するが, ここでは複素多様体の (co)fibrant model として再び複素多様体であるものが存在するかという問題を考える.

C.1 cofibrant model

$\text{Set}_{\Delta}^{\text{Stn}^{\text{op}}}$ のモデル構造として local intermediate structure を考える. 複素多様体 X の cofibrant model で再び複素多様体になるようなものは, Stein 多様体 X_{cof} (intermediate cofibrant) からの homotopy equivalence であるような岡写像 (local intermediate trivial fibration) $X_{\text{cof}} \rightarrow X$ のことである. このような cofibrant model を考える解析的な動機として, Stein 多様体に対しては Gromov の ellipticity という岡であるための幾何学的な必要十分条件が存在することと命題 5.9 から, このような cofibrant model が存在すると岡多様体の幾何学的な特徴付けを得ることができるというものがある. もう一つの動機としては, 他の Stein 多様体から X への正則写像が全て X_{cof} を通って (一意的とは限らないが) 分解するという興味深い性質を持つということがある.

Lárusson [7] は Jouanolou trick を用いて任意の quasi-projective manifold の上に affine bundle で total space が Stein であるものを構成した. 岡ファイバーをもつ正則ファイバー束は最初の節で述べたように岡写像であるので, [7] における議論から次が従う.

命題 C.1 (cf. [7]). 次の条件を満たす複素多様体のクラスが存在する:

1. クラス内の任意の複素多様体は *cofibrant model* で再び複素多様体であるものを持つ.
2. 任意の Stein 多様体と *quasi-projective manifold* を含む.
3. 積, 被覆, 有限分岐被覆, 閉部分多様体, 超曲面の補空間を取る操作で閉じている.

C.2 fibrant model

Stein 多様体 X に対して, Stein 岡多様体 X_{fib} への homotopy equivalence であるような Stein 包含 $X \hookrightarrow X_{\text{fib}}$ は fibrant model になる. これは Stein 多様体の \mathbb{C}^n への埋め込み定理を洗練することで, ホモトピー型を保つ Stein 岡多様体への埋め込み定理を示すことが出来るかという問題と密接に関連する. Ritter [11, 12] は開 Riemann 面が elliptic manifold にホモトピー型を保って埋め込むことができ, 特にアニュラスの場合は値域として $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ を取れることを示した. 現時点では他にどのような Stein 多様体に対してこのことが成り立つかは知られていない.

参考文献

- [1] F. Forstnerič. *Stein Manifolds and Holomorphic Mappings. The Homotopy Principle in Complex Analysis. Second Edition.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 56. Springer, Berlin (2017)
- [2] P.S. Hirschhorn. *Model Categories and Their Localizations.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99. American Mathematical Society, Providence, RI (2003)
- [3] J.F. Jardine. *Intermediate model structures for simplicial presheaves.* Canad. Math. Bull. **49**(3), 407–413 (2006)
- [4] Y. Kusakabe. *Dense holomorphic curves in spaces of holomorphic maps and applications to universal maps.* Internat. J. Math. **28**(4), 1750028 (2017). 15 pp.
- [5] F. Lárusson. *Excision for simplicial sheaves on the Stein site and Gromov’s Oka principle.* Internat. J. Math. **14**(2), 191–209 (2003)
- [6] F. Lárusson. *Model structures and the Oka principle.* J. Pure Appl. Algebra **192**(1–3), 203–223 (2004)
- [7] F. Lárusson. *Mapping cylinders and the Oka principle.* Indiana Univ. Math. J. **54**(4), 1145–1159 (2005)
- [8] F. Lárusson. *Affine simplices in Oka manifolds.* Doc. Math. **14**, 691–697 (2009)
- [9] F. Lárusson. *Absolute neighbourhood retracts and spaces of holomorphic maps from Stein manifolds to Oka manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **143**(3), 1159–1167 (2015)
- [10] J. Lurie. *Higher topos theory.* Annals of Mathematics Studies, vol. 170. Princeton University Press, Princeton, NJ (2009)
- [11] T. Ritter. *Acyclic embeddings of open Riemann surfaces into new examples of elliptic manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **141**(2), 597–603 (2013)
- [12] T. Ritter. *A strong Oka principle for embeddings of some planar domains into $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.* J. Geom. Anal. **23**(2), 571–597 (2013)
- [13] B. Toën, G. Vezzosi. *Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory.* Adv. Math. **193**(2), 257–372 (2005)