岡の原理と楕円性

日下部 佑太 (大阪大学)

1　はじめに

この節では, タイトルにもなっている「岡の原理」と「楕円性」の言葉の意味を簡単に説明しておく. 一見するだけではそこまで深い関係があるとは分からない「岡の原理」と「楕円性」であるが, 本稿ではこれらが徐々に交わっていき最終的にはある意味で同じものになる (定理 7.4) 様子を概観したい.

1.1　岡の原理とは

岡の原理とは複素解析におけるホモトピー原理のことである. より厳密には, Stein 多様体 X (cf. §2) に対して X 上のあるクラスの解析的対象と位相的対象 (例えば正則ベクトル束の正則切断と連続切断) を考えたときに包含写像

$$\{\, X \text{ 上の解析的対象} \,\} \hookrightarrow \{\, X \text{ 上の位相的対象} \,\}$$

が弱同値になるということである. 標語的に「Stein 多様体上の解析的な問題には位相的な障害しかない」ことが岡の原理であるとも言うことができる. この原理は 1939 年の岡の第 III 論文 [19] に端を発し, Grauert, Gromov, Forstnerič らによって岡多様体の理論へと発展した. §3 以降でその様子を簡単に見ていくが, より詳しい歴史や岡多様体の理論に関しては [7, 8] を参照されたい.

1.2　楕円性とは

複素多様体に対する以下の意味での楕円性という言葉は, 1986 年に Gromov [15] によって初めて使われたように思われる. まず楕円性とは双曲性と真逆の性質でなければならない. そして複素解析においては小林, Eisenman, Brody らによる種々の双曲性があり, これらは複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^N$ からの非退化正則写像の非存在性と見ることができる. これらのことから複素多様体 Y の**楕円性**とは非退化正則写像 $\mathbb{C}^N \to Y$ が「たくさん」存在することと定めるのが妥当である. この「たくさん」の意味は §5 以降で厳密に定義される.

2 Stein 多様体の簡単な復習

この節では, 岡の原理における主役である Stein 多様体の基本的な事項を簡単に復習する. 以下, 複素多様体は有限次元 (i.e. 連結成分の次元が有界) かつ第二可算公理を満たすものとする.

定義 2.1. 複素多様体 X が **Stein 多様体**であるとは, 以下の 3 つの条件を満たすことである:

(1) (正則分離性) 任意の相異なる 2 点 $x, x' \in X$ に対し正則関数 $f \in \mathcal{O}(X)$ で $f(x) \neq f(x')$ となるものが存在する.

(2) 任意の点 $x \in X$ に対し正則写像 $f \in \mathcal{O}(X, \mathbb{C}^n)$ で x において局所双正則なものが存在する.

(3) (正則凸性) 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対し正則凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)} = \{x \in X : |f(x)| \leq \sup_K |f| \ \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$ もコンパクトである.

これは 1951 年に Stein [25] によって与えられたオリジナルの定義であるが, 実は定義の中の条件 (2) が (1) と (3) から導かれることを Grauert [10] が示していることに注意しておく.

Stein 多様体には様々な視点からの特徴付けがあり, その中でも重要なのは次の 3 つである.

定理 2.2. 複素多様体 X に対して以下は同値*:*

(1) X は *Stein* 多様体である*.*

(2) (Remmert [22]) 複素 *Euclid* 空間への固有正則埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ が存在する*.*

(3) (Cartan の定理 *B [4])* X 上の任意の解析的連接層 $\mathscr{F}$ と $q \geq 1$ に対して $H^q(X; \mathscr{F}) = 0$*.*

(4) (Grauert [13]) 固有かつ滑らかな関数 $\rho : X \to [0, \infty)$ で $i\partial\bar{\partial}\rho > 0$ となるものが存在する*.*

以下の例から Stein 多様体は開 Riemann 面の高次元版, アファイン代数多様体の解析版, 正則領域の多様体版と少なくとも 3 つのクラスの自然な一般化になっていることが分かる.

例 2.3. (1) (Behnke-Stein [2, 3]) 連結 Riemann 面に対して Stein であることとコンパクトでないことは同値である.

(2) アファイン代数多様体は Stein である (cf. 定理 2.2 (2)).

(3) (Cartan-Thullen [5]) $\mathbb{C}^n$ 内の領域に対して Stein であることと正則領域であることは同値である.

3 オリジナルの岡の原理

複素多様体 X に対して, $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{hol}}(X)$ (resp. $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{top}}(X)$) で X 上の階数 r の正則ベクトル束 (resp. C^0 級複素ベクトル束) の同値類の集合を表す. 正則構造を忘却することで自然な写像 $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{hol}}(X) \to \mathrm{Vect}^r_{\mathrm{top}}(X)$ が定まることに注意する. 岡は第 III 論文 [19] で Cousin の第 II 問題を扱う中で次の岡の原理を発見した.

定理 3.1 (岡 [19]). *X が Stein 多様体ならば自然な写像 $\mathrm{Vect}^1_{\mathrm{hol}}(X) \to \mathrm{Vect}^1_{\mathrm{top}}(X)$ は全単射である.*

本稿の初めに述べた岡の原理の定義に合わせて言い換えると, Stein 多様体 X に対して包含写像

$$\{\, X \text{ 上の正則直線束 } \} \hookrightarrow \{\, X \text{ 上の複素直線束 } \}$$

が同値類の集合の間の全単射を導くという意味で弱同値ということである. 以下で定理 3.1 の現代的な証明を与えるが, 証明の前に $\mathrm{Vect}^1_{\mathrm{hol}}(X) \cong H^1(X;\mathcal{O}^*_X)$, $\mathrm{Vect}^1_{\mathrm{top}}(X) \cong H^1(X;\mathcal{C}^*_X)$ と自然な同型があることに注意しておく.

証明. 2 つの短完全列を繋ぐ次の可換図式が存在する:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\exp(2\pi i\cdot)"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}^*_X \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathcal{C}_X \arrow[r, "\exp(2\pi i\cdot)"] & \mathcal{C}^*_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

これから導かれる長完全列の一部を見ると

$$\begin{tikzcd}
H^1(X;\mathcal{O}_X) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X;\mathcal{O}^*_X) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(X;\mathcal{O}_X) \arrow[d] \\
H^1(X;\mathcal{C}_X) \arrow[r] & H^1(X;\mathcal{C}^*_X) \arrow[r] & H^2(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(X;\mathcal{C}_X)
\end{tikzcd}$$

が可換である. ここで X が Stein かつ $\mathcal{O}_X$ が連接 (岡の連接定理 [20]) であるので Cartan の定理 B から左上と右上が 0 になり, $\mathcal{C}_X$ が細層であることから左下と右下が 0 になる. 従って

$$\begin{tikzcd}
H^1(X;\mathcal{O}^*_X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^2(X;\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \\
H^1(X;\mathcal{C}^*_X) \arrow[r, "\sim"] & H^2(X;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

となり, 証明前の注意から主張が従う. $\square$

4 Grauert の岡の原理

Grauert はオリジナルの岡の原理 (定理 3.1) を任意の階数に一般化した (より一般的に主束に対する岡の原理も示しているがここでは省略する).

定理 4.1 (Grauert [11, 12]). *X が Stein 多様体ならば任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して自然な写像 $\mathrm{Vect}^r_{\mathrm{hol}}(X) \to \mathrm{Vect}^r_{\mathrm{top}}(X)$ は全単射である.*

$r > 1$ のときは構造群 $GL_r(\mathbb{C})$ が非可換になってしまうため, 前節のような cohomological な証明は通用しない. ここで次の補題のような **homotopical な岡の原理**に焦点を移す必要がある.

補題 4.2 (Grauert [11, 12], Grauert-Kerner [14], Ramspott [21])**.** X を *Stein* 多様体, $h : Z \to X$ を正則ファイバー束とし, ファイバーに推移的かつ正則に作用する複素 *Lie* 群 G を変換群にもつとする. このとき h の正則切断の空間から連続切断の空間への包含写像 $\mathcal{O}_h(X) \hookrightarrow \mathcal{C}_h(X)$ は弱ホモトピー同値である *(i.e.* 各次数のホモトピー群の同型を導く*)*.

この補題の証明は省略するが, 鍵となるアイデアは指数写像 $\exp : \mathrm{T}_1 G \to G$ を用いて問題を線形化することである. オリジナルの岡の原理の証明でも指数関数を用いていたことに注意したい.

定理 4.1 の証明. (全射性) X 上の階数 r の任意の複素ベクトル束 E に対して, 自明束への埋め込み $E \hookrightarrow X \times \mathbb{C}^N$ が存在することに注意する (例えば 1 の分割を用いる). 従って E は複素 Grassmann 多様体 $G_{r,N}$ 上の普遍ベクトル束 $U_{r,N} = \{(\lambda, v) \in G_{r,N} \times \mathbb{C}^N : v \in \lambda\}$ のある連続写像 f_0 による引き戻しに同型である:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & U_{r,N} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_0} & G_{r,N} \end{array}$$

ここで補題 4.2 より f_0 から始まるホモトピー $f_t : X \to G_{r,N}$ $(t \in [0,1])$ で $f_1 \in \mathcal{O}(X, G_{r,N})$ となるものが存在し, $E \cong f_0^*(U_{r,N})$ は正則ベクトル束 $f_1^*(U_{r,N})$ に位相的に同型である.
(単射性) E_1, E_2 を X 上の階数 r の正則ベクトル束, $\{U_\alpha\}_\alpha$ を X の開被覆, $\{g^j_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta, GL_r(\mathbb{C}))\}_{\alpha,\beta}$ を E_j $(j = 1, 2)$ の遷移写像系とする. このとき位相同型 (resp. 正則同型) $E_1 \to E_2$ の集合は正則ファイバー束

$$\coprod_\alpha (U_\alpha \times GL_r(\mathbb{C})) \Big/ \langle (x, v_\alpha) \sim (x, g^2_{\beta\alpha}(x) v_\alpha g^1_{\alpha\beta}(x)) \rangle$$

の連続切断 (resp. 正則切断) の集合との間に自然な全単射をもつ. 従って位相同型 $E_1 \to E_2$ が存在するならば, 対応する連続切断を補題 4.2 を用いて正則切断に変形することで正則同型 $E_1 \to E_2$ が得られる. □

5 Gromov の岡の原理: Gromov 楕円性

§1 で楕円性は $\mathbb{C}^N$ から非退化正則写像が「たくさん」存在するという性質のことだと定義された. そのような正則写像 $\mathbb{C}^N \to Y$ の存在は原点で非退化 (沈めこみ) であるものだけ考えても一般性を失わない. 原点の像に依存しながら原点で非退化な正則写像 $\mathbb{C}^N \to Y$ を繋げて Y 上の正則ベクトル束からの正則写像ができあがるという意味で非退化正則写像が「たくさん」ある場合を考えると, Gromov が [16] で定義した楕円性になる.

定義 5.1. 複素多様体 Y が **Gromov 楕円的**[*1]であるとは, Y 上の正則ベクトル束 $\pi : E \to Y$ と正則写像 $s \in \mathcal{O}(E, Y)$ で各 $y \in Y$ に対して $s(0_y) = y$ かつ $s|_{E_y} : E_y \to Y$ が 0_y で非退化となるもの

[*1] 通常は単に楕円的であると言われるが, 後半で他の楕円性も考えるためここではこのように呼ぶ.

が存在することをいう[*2]. このような正則写像 $s : E \to Y$ は Y 上の **dominating spray** と呼ばれる (非退化の条件が無ければ単に spray と呼ばれる).

次の例 (1) から dominating spray が指数写像の一般化であることが分かる.

例 5.2. (1) 複素等質多様体 Y は Gromov 楕円的である. 実際 G を正則かつ推移的に Y に作用する複素 Lie 群としたとき, $s : Y \times \mathrm{T}_1 G \to Y$ を $s(y, v) = \exp(v) \cdot y$ と定めると dominating spray になる.

(2) 接束 $\mathrm{T}Y$ を張る有限個の $\mathbb{C}$ 完備正則ベクトル場 $V_1, \cdots, V_N$ が存在するならば Y は Gromov 楕円的である. これを確かめるには $\varphi_j^t \in \mathrm{Aut}(Y)$ $(t \in \mathbb{C})$ を V_j の flow とし, dominating spray $s : Y \times \mathbb{C}^N \to Y$ を $s(y, t_1, \ldots, t_N) = \varphi_1^{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_N^{t_N}(y)$ と定めればよい.

(3) 特に $A \subset \mathbb{C}^n$ を tame な閉解析的部分集合で余次元が 2 以上のものとすると補空間 $\mathbb{C}^n \setminus A$ は Gromov 楕円的である (Rosay-Rudin [23, Theorem 4.5] の例より tame という条件は外すことができない). ここで $A \subset \mathbb{C}^n$ が **tame** であるとは, ある自己同型 $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}^n$ で $\varphi(A)$ の $\mathbb{P}^n \supset \mathbb{C}^n$ での閉包が無限遠超平面 $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}^n$ を含まないようなものが存在することである (e.g. 代数的部分集合). この場合 A に制限すると固有になる射影 $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ が十分あり, これと $p(A)$ で消える正則関数 $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$, $p(v) = 0$ となるベクトル $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ から定まるベクトル場 $V = (f \circ p)v$ を $\mathrm{T}(\mathbb{C}^n \setminus A)$ を張るように有限個考えればよい.

次が Gromov の岡の原理であり, 例 5.2 (1) から補題 4.2 の一般化になっている (従って Grauert の岡の原理の一般化にもなっている) ことが分かる. Gromov はより一般的に局所自明でない沈めこみの切断に対しても同様の岡の原理を示しているがここでは省略する.

定理 5.3 (Gromov [16])**.** *X を Stein 多様体, $h : Z \to X$ を Gromov 楕円的なファイバーをもつ正則ファイバー束, $X' \subset X$ を閉解析的部分集合, $K \subset X$ をコンパクト $\mathcal{O}(X)$ 凸[*3]集合, $P_0 \subset P \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクト集合とし, 連続切断の (連続な) 族 $f_0 : P \times X \to Z$ は $f_0|_{P_0 \times X}$, $f_0|_{P \times X'}$, $f_0|_{P \times K}$ が正則切断の族になるようなものとする. このとき f_0 を始点とし f_1 が X 上の正則切断の族となるような連続切断の族のホモトピー $f_t : P \times X \to Z$ $(t \in [0, 1])$ で, 全ての $t \in [0, 1]$ に対し次が成り立つようなものが存在する:*

(1) $(P_0 \times X) \cup (P \times X')$ 上で $f_t = f_0$ が成り立つ.

(2) $f_t|_{P \times K}$ は正則切断の族であり, $P \times K$ 上一様に f_0 を近似する.

特に切断の空間の間の包含写像 $\mathcal{O}_h(X) \hookrightarrow \mathcal{C}_h(X)$ は弱ホモトピー同値である.

結論を簡単に言えば, Stein 多様体 X のある一部分で与えられた正則切断の族を X 全体に正則に拡張したり近似したりする問題には位相的な障害しかないということである. この岡の原理は Grauert らによるのものの単なる一般化ではなく, 例えば 2 次元以上の Stein 多様体の最良次元複素 Euclid 空

[*2] $E_y = \pi^{-1}(y)$ は E の $y \in Y$ 上のファイバーを表し, 0_y はその原点を表す.

[*3] 正則凸とも言われる. 正則凸包 $\widehat{K}_{\mathcal{O}(X)}$ (cf. 定義 2.1) が K に等しいということである.

間への埋め込みなどは Gromov の岡の原理を用いることで初めて証明されたことである ([6, 24]).

Gromov は同論文で岡の原理自体がより簡単な関数論的な条件により特徴付けられるかどうかを問題にした. この問題が次節の Forstnerič の岡の原理への架け橋となる.

問題 5.4 (Gromov [16, 3.4.(D)]). あるクラスのコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ に対する Runge 型近似性 $\overline{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, Y)|_K} = \mathcal{O}(K, Y)$ が Stein 多様体から Y への写像に関する岡の原理を導くか.

6 Forstnerič の岡の原理: 岡多様体

Forstnerič は前節の Gromov の問題 5.4 を解決し, 岡多様体という概念に至った.

定義 6.1. 複素多様体 Y が**岡多様体**であるとは, コンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ の開近傍から Y への任意の正則写像を正則写像 $\mathbb{C}^n \to Y$ により K 上一様に近似できることをいう.

次が Gromov の問題 5.4 を解決する Forstnerič の岡の原理であり, 岡多様体が岡の名を冠する所以である.

定理 6.2 (cf. [8, Theorem 5.4.4]). *X を Stein 多様体, $h : Z \to X$ を岡多様体をファイバーにもつ正則ファイバー束とする. このとき Gromov の岡の原理 (定理 5.3) と同様の主張が成立する.*

この定理の主張が逆に岡多様体を特徴付けていることにも注意する. このことから様々な岡性 (様々な形の岡の原理) が互いに同値であることが従う (cf. [8, §5.15]).

Gromov の岡の原理から Gromov 楕円的な複素多様体が岡であることが従うことに注意する. 逆に岡であれば (岡の原理が成り立つならば), Gromov 楕円的であるかどうかというのは自然な問題である. Gromov は [16] でこのことを問題にして Stein 多様体に対しては岡性と Gromov 楕円性が同値であることを確かめている [16, Remark 3.2.A].

問題 6.3 (Gromov [16, Question 3.2.A$''$]). 任意の複素多様体に対して岡であることと Gromov 楕円的であることは同値か.

この問題は今年になってから否定的に解決された (cf. §9). それでは去年まで Gromov 楕円多様体から岡多様体に焦点を移す意味がなかったのかというとそうではなく, 以下で見るように岡性は Gromov 楕円性に比べて種々の操作で閉じているなどのメリットがある.

例 6.4. (1) 岡多様体をファイバーとする正則ファイバー束 $E \to B$ に対して E と B の岡性は同値である (cf. [8, Theorem 5.6.5]).

(2) 特に正則被覆写像 $\widetilde{Y} \to Y$ に対して $\widetilde{Y}$ と Y の岡性は同値である (cf. [8, Proposition 5.6.3]).

(3) Hopf 多様体は岡である (上の例と例 5.2 (3) を用いる). 従って岡性は Kähler 性を導かない.

(4) (非特異) トーリック多様体は岡である (Lárusson [7, Theorem 2.17]). これは §8 の結果からも従う.

7　凸楕円性による岡多様体の特徴付け

Gromov 楕円性と岡性の問題 (問題 6.3) をひとまず無視して, より弱い楕円性によって岡性を特徴付けることを目指そう. Gromov は [16] において次のような予想をした.

予想 7.1 (Gromov [16, §1.4.E″])**.** 複素多様体 Y に対して以下は同値であろう:

(1) Y は岡多様体である.

(2) 任意の Stein 多様体 X と任意の正則写像 $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ に対して自明束からの正則写像 $s_f : X \times \mathbb{C}^N \to Y$ で各 $x \in X$ に対して $s_f(x,0) = f(x)$ かつ $s_f(x,\cdot) : \mathbb{C}^N \to Y$ が原点で非退化となるものが存在する[*4].

注意 7.2. Gromov 楕円的であれば予想 7.1 の (2) を満たすことは簡単に分かる (ベクトル束 E を引き戻して Cartan の定理 B を用いてその引き戻しへ自明束から全射を作ればよい). 岡多様体が (2) を満たすことは $X \times \mathbb{C}^N$ の零切断の近傍から条件を満たす局所的な正則写像を作っておき, それを岡の原理により全体まで広げることで確かめられる.

予想 7.1 (2) よりも (見かけ上) 弱い次の楕円性を考える.

定義 7.3. 複素多様体 Y が**凸楕円的**であるとは, 任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ と任意の正則写像 $f \in \mathcal{O}(K,Y)$ に対して自明束からの正則写像 $s_f : K \times \mathbb{C}^N \to Y$ で各 $x \in K$ に対して $s_f(x,0) = f(x)$ かつ $s_f(x,\cdot) : \mathbb{C}^N \to Y$ が原点で非退化となるものが存在することをいう.

凸楕円的ならば岡であることを示して Gromov の予想を証明したのが [17] における主結果のうちの一つである.

定理 7.4 ([17, Theorem 2.2])**.** *複素多様体が岡であることと凸楕円的であることは同値である. 特に Gromov の予想 7.1 は正しい.*

ここでも証明で鍵となるアイデアは, コンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ の近傍からの正則写像 $f : K \to Y$ に対する $s_f : K \times \mathbb{C}^N \to Y$ によるファイバーを保つ写像 $(\mathrm{pr}_1, s_f) : K \times \mathbb{C}^N \to K \times Y$ を考えることで問題を線形化することであり, 岡や Grauert らによって開発された手法が根底にある.

8　岡多様体の局所化原理

前節で紹介した凸楕円性による岡多様体の特徴付け (定理 7.4) の応用として次の局所化原理が得られる. ここで複素多様体の Zariski 開集合とは, 補集合が閉解析的部分集合になるようなものである.

系 8.1 ([17, Theorem 1.4])**.** *岡であるような Zariski 開集合で被覆される複素多様体は岡である.*

[*4] この条件は [15] で初めて考えられたもので条件 Ell_1 と呼ばれている.

証明には Forstnerič の岡の原理の変種 [8, Theorem 8.6.1] から従う次の補題を用いる.

補題 8.2. *Y を複素多様体, $U \subset Y$ を岡であるような Zariski 開集合とする. このとき任意の Stein 多様体 X と任意の正則写像 $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ に対して自明束からの正則写像 $s_f : X \times \mathbb{C}^N \to Y$ で $s_f(\cdot, 0) = f$ かつ各 $x \in f^{-1}(U)$ に対して $s_f(x, \cdot) : \mathbb{C}^N \to Y$ が原点で非退化となるものが存在する.*

系 8.1 の証明. 岡多様体の定義 (での K のコンパクト性) から岡であるような 2 つの Zariski 開集合 U, V により $Y = U \cup V$ と書けている場合を考えれば十分である. 任意の Stein 多様体 X と正則写像 $f \in \mathcal{O}(X,Y)$ に対して補題 8.2 を用いることで得られる $s_f : X \times \mathbb{C}^N \to Y$ を考える. この s_f を f の代わりに, そして V を U の代わりに再び補題 8.2 を用いることで $s_{s_f} : (X \times \mathbb{C}^N) \times \mathbb{C}^{N'} \to Y$ が得られる. これを $s_{s_f} : X \times \mathbb{C}^{N+N'} \to Y$ と見ると, 各 $x \in X$ に対して $s_{s_f}(x, 0) = f(x)$ かつ $s_{s_f}(x, \cdot) : \mathbb{C}^{N+N'} \to Y$ が原点で非退化となっており, Y が凸楕円的であることが確かめられた. □

[17, §4.3] や次節で見られるように, 局所化原理を用いることで新しい岡多様体が色々と見つかっている. 他にも次のようにトーリック多様体が岡であることの別証明が得られる.

例 8.3. Zariski 位相で局所的に $(\mathbb{C}^*)^n$ に双正則な複素多様体は局所化原理により岡である. 特にトーリック多様体や有理曲面は岡である.

次は無視することのできない重要な問題であるが, 今のところ未解決である.

問題 8.4. 岡であるような (Euclid 位相に関する) 開集合で被覆される複素多様体は岡であるか.

例えば $n > 1$ に対する閉単位球の補空間 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ は $\mathbb{C}^n$ と双正則な Fatou-Bieberbach 領域により被覆されているが岡多様体であるかどうかは分かっていない (cf. [9]).

9 Gromov 楕円的でない岡多様体

最後に, [18] で得られた Gromov の問題 6.3 に否定的な解答を与える Gromov 楕円的でない岡多様体の例を紹介する. なぜ凸楕円性による岡多様体の特徴付けよりも後なのかというと, この例の岡性が局所化原理によって確かめられるからである.

系 9.1 ([18, Corollary 1.4]). *各 $n \geq 3$ に対し $\mathbb{C}^n \setminus ((\overline{\mathbb{N}^{-1}})^2 \times \{0\}^{n-2})$ は Gromov 楕円的でない岡多様体である. ここで $\mathbb{N}^{-1} = \{j^{-1} : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ である.*

この例が Gromov 楕円的でないことは Andrist-Shcherbina-Wold [1] の結果から分かる (ここで $n \geq 3$ が必要になる). [18] では彼らの証明を改良し, Gromov 楕円的でないだけでなく弱劣楕円的 (weakly subelliptic) でないことまで示した. ここで弱劣楕円性は Gromov 楕円性と同様に自身の上の正則ベクトル束からの spray によって定義される岡性の十分条件であり, そのような楕円性の中で最も弱いものである.

証明. $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} = \bigcup_{j=1}^n \mathbb{C}^{j-1} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-j}$ であることと例 6.4 (2), そして局所化原理より,

$$\mathbb{C}^n \setminus (\exp^{-1}(\mathbb{N}^{-1}) \times \overline{\mathbb{N}^{-1}} \times \{0\}^{n-2})$$

が岡であることを示せば十分である. 上で $\mathbb{C}^n$ から抜き取る集合を S とおく. 各 $y \in \mathbb{C}^n \setminus S$ に対して自己同型 $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}^n$ で次の条件を満たすものを構成できる (cf. [18]):

(1) $\varphi(y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$.
(2) $\varphi(S) \cap (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*)$ は $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$ に集積点をもたない.
(3) $\mathrm{pr}_n(\varphi(S)) \cap \mathbb{C}^*$ は $\mathbb{C}^*$ に集積点をもたない (pr_n は第 n 成分への射影).

これから $\mathrm{pr}_n((\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S))) = \exp^{-1}(\mathrm{pr}_n(\varphi(S)))$ が離散点列であることが従い, Rosay-Rudin [23] の結果から離散点列 $(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S)) \subset \mathbb{C}^n$ が tame (例 5.2 (3)) であることが分かる. よって例 5.2 (3) と Gromov の岡の原理から $\mathbb{C}^n \setminus (\mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n-1}} \times \exp)^{-1}(\varphi(S))$ は岡であり, これを普遍被覆とする $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*) \setminus \varphi(S)$ も岡である (例 6.4 (2)). 従って $\varphi^{-1}(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*) \setminus S \subset \mathbb{C}^n \setminus S$ は岡であるような y の Zariski 開近傍であり, 再び局所化原理によって $\mathbb{C}^n \setminus S$ は岡である. $\square$

参考文献

[1] R. B. Andrist, N. Shcherbina, and E. F. Wold. The Hartogs extension theorem for holomorphic vector bundles and sprays. *Ark. Mat.*, 54(2):299–319, 2016.

[2] H. Behnke and K. Stein. Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.*, 120:430–461, 1949.

[3] H. Behnke and K. Stein. Elementarfunktionen auf Riemannschen Flächen als Hilfsmittel für die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen. *Canadian J. Math.*, 2:152–165, 1950.

[4] H. Cartan. Variétés analytiques complexes et cohomologie. In *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, 1953*, pages 41–55. Georges Thone, Liège; Masson & Cie, Paris, 1953.

[5] H. Cartan and P. Thullen. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 106(1):617–647, 1932.

[6] Y. Eliashberg and M. Gromov. Embeddings of Stein manifolds of dimension n into the affine space of dimension $3n/2 + 1$. *Ann. of Math. (2)*, 136(1):123–135, 1992.

[7] F. Forstnerič. Oka manifolds: from Oka to Stein and back. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(4):747–809, 2013. With an appendix by Finnur Lárusson.

[8] F. Forstnerič. *Stein manifolds and holomorphic mappings*, volume 56 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer, Cham, second edition, 2017. The homotopy principle in complex analysis.

[9] F. Forstnerič and T. Ritter. Oka properties of ball complements. *Math. Z.*, 277(1-2):325–338, 2014.

[10] H. Grauert. Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. *Math. Ann.*, 129:233–259, 1955.

[11] H. Grauert. Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen. *Math. Ann.*, 133:450–472, 1957.

[12] H. Grauert. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen. *Math. Ann.*, 135:263–273, 1958.

[13] H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68:460–472, 1958.

[14] H. Grauert and H. Kerner. Approximation von holomorphen Schnittflächen in Faserbündeln mit homogener Faser. *Arch. Math. (Basel)*, 14:328–333, 1963.

[15] M. Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[16] M. Gromov. Oka's principle for holomorphic sections of elliptic bundles. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(4):851–897, 1989.

[17] Y. Kusakabe. Elliptic characterization and localization of Oka manifolds. *Indiana Univ. Math. J.*, to appear.

[18] Y. Kusakabe. Oka complements of countable sets and non-elliptic Oka manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.

[19] K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. III. Deuxième problème de Cousin. *J. Sci. Hiroshima Univ.*, 9:7–19, 1939.

[20] K. Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 78:1–27, 1950.

[21] K.-J. Ramspott. Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homogener Faser. *Math. Z.*, 89:234–246, 1965.

[22] R. Remmert. Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 243:118–121, 1956.

[23] J.-P. Rosay and W. Rudin. Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1):47–86, 1988.

[24] J. Schürmann. Embeddings of Stein spaces into affine spaces of minimal dimension. *Math. Ann.*, 307(3):381–399, 1997.

[25] K. Stein. Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. *Math. Ann.*, 123:201–222, 1951.