Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра обчислювальної техніки

**Лабораторна робота №6**

З дисципліни «Методи оптимізації та планування»

“Проведення трьохфакторного експерименту при використанні рівняння регресії з квадратичними членами”

ВИКОНАВ:
Студент ІІ курсу ФІОТ
Групи ІО-92
Кушенко Сергій

ПЕРЕВІРИВ:
Регіда П.Г.

Київ 2021 р.

Мета роботи: Провести трьохфакторний експеримент і отримати адекватну модель – рівняння регресії, використовуючи **рототабельний** композиційний план.

Завдання до лабораторної роботи:

1. Ознайомитися з теоретичними відомостями.
2. Вибрати з таблиці варіантів і записати в протокол інтервали значень $x_1$, $x_2$, $x_3$. Обчислити і записати значення, відповідні кодованим значенням факторів +1; -1;+ $l$; - $l$; 0 для $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$.
3. Значення функції відгуку знайти за допомогою підстановки в формулу:

$$y_i = f(x_1, x_2, x_3) + random(10)-5,$$

де $f(x_1, x_2, x_3)$ вибирається по номеру в списку в журналі викладача.

4. Провести експерименти і аналізуючи значення статистичних перевірок, отримати адекватну модель рівняння регресії. При розрахунках використовувати натуральні значення факторів.
5. Зробити висновки по виконаній роботі.

*Алгоритм отримання адекватної моделі рівняння регресії*

1) *Вибір рівняння регресії (лінійна форма, рівняння з урахуванням ефекту взаємодії і з урахуванням квадратичних членів);*
2) *Вибір кількості повторів кожної комбінації (m = 2);*
3) *Складення матриці планування експерименту і вибір кількості рівнів (N)*
4) *Проведення експериментів;*
5) *Перевірка однорідності дисперсії. Якщо не однорідна – повертаємося на п. 2 і збільшуємо m на 1);*
6) *Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії. При розрахунку використовувати* ***натуральні*** *значення $x_1$, $x_2$ и $x_3$.*
7) *Перевірка нуль-гіпотези. Визначення значимих коефіцієнтів;*
8) *Перевірка адекватності моделі рівняння оригіналу. При неадекватності – повертаємося на п.1, змінивши при цьому рівняння регресії;*

Таблиця варіантів

| № варіанту | $x_1$ | | $x_2$ | | $x_3$ | | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | min | max | min | max | min | max | |
| 213 | -15 | 30 | 25 | 65 | -15 | -5 | 6,7+6,5*x1+1,3*x2+6,5*x3+2,4*x1*x1+0,8*x2*x2+9,6*x3*x3+2,6*x1*x2+0,9*x1*x3+5,8*x2*x3+2,8*x1*x2*x3 |

## Програмний код:

```
import math
import random
from _decimal import Decimal
from scipy.stats import f, t
import numpy
from itertools import compress
from functools import reduce

xmin = [-15, 25, -15]
xmax = [30, 65, -5]
norm_plan_raw = [[-1, -1, -1],
                 [-1, +1, +1],
                 [+1, -1, +1],
                 [+1, +1, -1],
                 [-1, -1, +1],
                 [-1, +1, -1],
                 [+1, -1, -1],
                 [+1, +1, +1],
                 [-1.73, 0, 0],
                 [+1.73, 0, 0],
                 [0, -1.73, 0],
                 [0, +1.73, 0],
                 [0, 0, -1.73],
                 [0, 0, +1.73]]

x0 = [(xmax[_] + xmin[_])/2 for _ in range(3)]
```

```
dx = [xmax[_] - x0[_] for _ in range(3)]

natur_plan_raw = [[xmin[0],           xmin[1],           xmin[2]],
                  [xmin[0],           xmin[1],           xmax[2]],
                  [xmin[0],           xmax[1],           xmin[2]],
                  [xmin[0],           xmax[1],           xmax[2]],
                  [xmax[0],           xmin[1],           xmin[2]],
                  [xmax[0],           xmin[1],           xmax[2]],
                  [xmax[0],           xmax[1],           xmin[2]],
                  [xmax[0],           xmax[1],           xmax[2]],
                  [-1.73*dx[0]+x0[0], x0[1],             x0[2]],
                  [1.73*dx[0]+x0[0],  x0[1],             x0[2]],
                  [x0[0],             -1.73*dx[1]+x0[1], x0[2]],
                  [x0[0],             1.73*dx[1]+x0[1],  x0[2]],
                  [x0[0],             x0[1],             -1.73*dx[2]+x0[2]],
                  [x0[0],             x0[1],             1.73*dx[2]+x0[2]],
                  [x0[0],             x0[1],             x0[2]]]


def equation_of_regression(x1, x2, x3, cef, importance=[] * 11):
    factors_array = [1, x1, x2, x3, x1 * x2, x1 * x3, x2 * x3, x1 * x2 * x3, x1 ** 2,
x2 ** 2, x3 ** 2]
    return sum([el[0] * el[1] for el in compress(zip(cef, factors_array),
importance)])


def func(x1, x2, x3):
    coeffs = [6.7, 6.5, 1.3, 6.5, 2.4, 0.8, 9.6, 2.6, 0.9, 5.8, 2.8]
    return equation_of_regression(x1, x2, x3, coeffs)


def generate_factors_table(raw_array):
    raw_list = [row + [row[0] * row[1], row[0] * row[2], row[1] * row[2], row[0] *
row[1] * row[2]] + list(
        map(lambda x: x ** 2, row)) for row in raw_array]
    return list(map(lambda row: list(map(lambda el: round(el, 3), row)), raw_list))


def generate_y(m, factors_table):
    return [[round(func(row[0], row[1], row[2]) + random.randint(-5, 5), 3) for _ in
range(m)] for row in factors_table]


def print_matrix(m, N, factors, y_vals, additional_text=":"):
    labels_table = list(map(lambda x: x.ljust(10),
                            ["x1", "x2", "x3", "x12", "x13", "x23", "x123", "x1^2",
"x2^2", "x3^2"] + [
                                "y{}".format(i + 1) for i in range(m)]))
    rows_table = [list(factors[i]) + list(y_vals[i]) for i in range(N)]
    print("\nМатриця планування" + additional_text)
    print(" ".join(labels_table))
    print("\n".join([" ".join(map(lambda j: "{:<+10}".format(j), rows_table[i])) for
i in range(len(rows_table))]))
    print("\t")


def print_equation(coeffs, importance=[True] * 11):
    x_i_names = list(compress(["", "x1", "x2", "x3", "x12", "x13", "x23", "x123",
"x1^2", "x2^2", "x3^2"], importance))
    coefficients_to_print = list(compress(coeffs, importance))
    equation = " ".join(
        ["".join(i) for i in zip(list(map(lambda x: "{:+.2f}".format(x),
```

```
coefficients_to_print)), x_i_names)])
    print("Рівняння регресії: y = " + equation)


def set_factors_table(factors_table):
    def x_i(i):
        with_null_factor = list(map(lambda x: [1] + x,
generate_factors_table(factors_table)))
        res = [row[i] for row in with_null_factor]
        return numpy.array(res)

    return x_i


def m_ij(*arrays):
    return numpy.average(reduce(lambda accum, el: accum * el, list(map(lambda el:
numpy.array(el), arrays))))


def find_coefficients(factors, y_vals):
    x_i = set_factors_table(factors)
    coeffs = [[m_ij(x_i(column), x_i(row)) for column in range(11)] for row in
range(11)]
    y_numpy = list(map(lambda row: numpy.average(row), y_vals))
    free_values = [m_ij(y_numpy, x_i(i)) for i in range(11)]
    beta_coefficients = numpy.linalg.solve(coeffs, free_values)
    return list(beta_coefficients)


def cochran_criteria(m, N, y_table):
    def get_cochran_value(f1, f2, q):
        partResult1 = q / f2
        params = [partResult1, f1, (f2 - 1) * f1]
        fisher = f.isf(*params)
        result = fisher / (fisher + (f2 - 1))
        return Decimal(result).quantize(Decimal('.0001')).__float__()

    print("Перевірка за критерієм Кохрена: m = {}, N = {}".format(m, N))
    y_variations = [numpy.var(i) for i in y_table]
    max_y_variation = max(y_variations)
    gp = max_y_variation / sum(y_variations)
    f1 = m - 1
    f2 = N
    p = 0.95
    q = 1 - p
    gt = get_cochran_value(f1, f2, q)
    print("Gp = {}; Gt = {}; f1 = {}; f2 = {}; q = {:.2f}".format(gp, gt, f1, f2, q))
    if gp < gt:
        print("Gp < Gt => дисперсії рівномірні => все правильно")
        return True
    else:
        print("Gp > Gt => дисперсії нерівномірні => змінюємо значення m")
        return False


def student_criteria(m, N, y_table, beta_coefficients):
    def get_student_value(f3, q):
        return Decimal(abs(t.ppf(q / 2, f3))).quantize(Decimal('.0001')).__float__()

    print("\nПеревірка за критерієм Стьюдента: m = {}, N = {} ".format(m, N))
    average_variation = numpy.average(list(map(numpy.var, y_table)))
    variation_beta_s = average_variation / N / m
```

```
    standard_deviation_beta_s = math.sqrt(variation_beta_s)
    t_i = [abs(beta_coefficients[i]) / standard_deviation_beta_s for i in
range(len(beta_coefficients))]
    f3 = (m - 1) * N
    q = 0.05
    t_our = get_student_value(f3, q)
    importance = [True if el > t_our else False for el in list(t_i)]

    print("Оцінки коефіцієнтів βs: " + ", ".join(list(map(lambda x:
str(round(float(x), 3)), beta_coefficients))))
    print("Коефіцієнти ts: " + ", ".join(list(map(lambda i: "{:.2f}".format(i),
t_i))))
    print("f3 = {}; q = {}; tтабл = {}".format(f3, q, t_our))
    beta_i = ["β0", "β1", "β2", "β3", "β12", "β13", "β23", "β123", "β11", "β22",
"β33"]
    importance_to_print = ["важливий" if i else "неважливий" for i in importance]
    to_print = map(lambda x: x[0] + " " + x[1], zip(beta_i, importance_to_print))
    print(*to_print, sep="; ")
    print_equation(beta_coefficients, importance)
    return importance


def fisher_criteria(m, N, d, x_table, y_table, b_coefficients, importance):
    def get_fisher_value(f3, f4, q):
        return Decimal(abs(f.isf(q, f4, f3))).quantize(Decimal('.0001')).__float__()

    f3 = (m - 1) * N
    f4 = N - d
    q = 0.05
    theoretical_y = numpy.array([equation_of_regression(row[0], row[1], row[2],
b_coefficients) for row in x_table])
    average_y = numpy.array(list(map(lambda el: numpy.average(el), y_table)))
    s_ad = m / (N - d) * sum((theoretical_y - average_y) ** 2)
    y_variations = numpy.array(list(map(numpy.var, y_table)))
    s_v = numpy.average(y_variations)
    f_p = float(s_ad / s_v)
    f_t = get_fisher_value(f3, f4, q)
    theoretical_values_to_print = list(
        zip(map(lambda x: "x1 = {0[1]:<10} x2 = {0[2]:<10} x3 =
{0[3]:<10}".format(x), x_table), theoretical_y))
    print("\nПеревірка за критерієм Фішера: m = {}, N = {} для таблиці
y_table".format(m, N))
    print("Теоретичні значення Y для різних комбінацій факторів:")
    print("\n".join(["{arr[0]}: y = {arr[1]}".format(arr=el) for el in
theoretical_values_to_print]))
    print("Fp = {}, Ft = {}".format(f_p, f_t))
    print("Fp < Ft => модель адекватна" if f_p < f_t else "Fp > Ft => модель
неадекватна")
    return True if f_p < f_t else False


m = 3
N = 15
natural_plan = generate_factors_table(natur_plan_raw)
y_arr = generate_y(m, natur_plan_raw)
while not cochran_criteria(m, N, y_arr):
    m += 1
    y_arr = generate_y(m, natural_plan)

print_matrix(m, N, natural_plan, y_arr, " для натуралізованих факторів:")
coefficients = find_coefficients(natural_plan, y_arr)
print_equation(coefficients)
```

```
importance = student_criteria(m, N, y_arr, coefficients)
d = len(list(filter(None, importance)))
fisher_criteria(m, N, d, natural_plan, y_arr, coefficients, importance)
```

## Результат програми:

```
C:\Users\HP\Anaconda3\python.exe C:/МОПЕ/Lab6/lab6.py
Перевірка за критерієм Кохрена: m = 3, N = 15
Gp = 0.19109947643979058; Gt = 0.3346; f1 = 2; f2 = 15; q = 0.05
Gp < Gt => дисперсії рівномірні => все правильно

Матриця планування для натуралізованих факторів:
x1        x2        x3        x12       x13       x23       x123      x1^2      x2^2      x3^2      y1        y2        y3
-15       +25       -15       -375      +225      -375      +5625     +225      +625      +225      -2        +1        +2
-15       +25       -5        -375      +75       -125      +1875     +225      +625      +25       -5        -4        +4
-15       +65       -15       -975      +225      -975      +14625    +225      +4225     +225      -3        +0        -1
-15       +65       -5        -975      +75       -325      +4875     +225      +4225     +25       -1        -2        +5
+30       +25       -15       +750      -450      -375      -11250    +900      +625      +225      -2        +0        +1
+30       +25       -5        +750      -150      -125      -3750     +900      +625      +25       -2        -5        -4
+30       +65       -15       +1950     -450      -975      -29250    +900      +4225     +225      +0        +3        -4
+30       +65       -5        +1950     -150      -325      -9750     +900      +4225     +25       -2        +3        -4
-31.425   +45.0     -10.0     -1414.125 +314.25   -450.0    +14141.25 +987.531  +2025.0   +100.0    +5        +5        -1
+46.425   +45.0     -10.0     +2089.125 -464.25   -450.0    -20891.25 +2155.281 +2025.0   +100.0    +5        +4        +4
+7.5      +10.4     -10.0     +78.0     -75.0     -104.0    -780.0    +56.25    +108.16   +100.0    +0        +0        -4
+7.5      +79.6     -10.0     +597.0    -75.0     -796.0    -5970.0   +56.25    +6336.16  +100.0    +1        +4        -3
+7.5      +45.0     -18.65    +337.5    -139.875  -839.25   -6294.375 +56.25    +2025.0   +347.822  -1        -4        -5
+7.5      +45.0     -1.35     +337.5    -10.125   -60.75    -455.625  +56.25    +2025.0   +1.822    +2        +2        -5
+7.5      +45.0     -10.0     +337.5    -75.0     -450.0    -3375.0   +56.25    +2025.0   +100.0    +4        +2        +4

Рівняння регресії: y = -16.63 -0.03x1 +0.45x2 -1.95x3 -0.00x12 -0.00x13 +0.01x23 -0.00x123 -0.00x1^2 -0.00x2^2 -0.08x3^2

Перевірка за критерієм Стьюдента: m = 3, N = 15
Оцінки коефіцієнтів βs: -16.631, -0.035, 0.446, -1.949, -0.0, -0.001, 0.009, -0.0, -0.0, -0.004, -0.08
Коефіцієнти ts: 46.90, 0.10, 1.26, 5.50, 0.00, 0.00, 0.03, 0.00, 0.00, 0.01, 0.23
f3 = 30; q = 0.05; tтабл = 2.0423
β0 важливий; β1 неважливий; β2 неважливий; β3 важливий; β12 неважливий; β13 неважливий; β23 неважливий; β123 неважливий; β11 неважливий; β22 неважливий; β33 неважливий
Рівняння регресії: y = -16.63 -1.95x3

Перевірка за критерієм Фішера: m = 3, N = 15 для таблиці y_table
Теоретичні значення Y для різних комбінацій факторів:
x1 = 25        x2 = -15       x3 = -375      : y = 0
x1 = 25        x2 = -5        x3 = -375      : y = 0
x1 = 65        x2 = -15       x3 = -975      : y = 0
x1 = 65        x2 = -5        x3 = -975      : y = 0
x1 = 25        x2 = -15       x3 = 750       : y = 0
x1 = 25        x2 = -5        x3 = 750       : y = 0
x1 = 65        x2 = -15       x3 = 1950      : y = 0
x1 = 65        x2 = -5        x3 = 1950      : y = 0
x1 = 45.0      x2 = -10.0     x3 = -1414.125 : y = 0
x1 = 45.0      x2 = -10.0     x3 = 2089.125  : y = 0
x1 = 10.4      x2 = -10.0     x3 = 78.0      : y = 0
x1 = 79.6      x2 = -10.0     x3 = 597.0     : y = 0
x1 = 45.0      x2 = -18.65    x3 = 337.5     : y = 0
x1 = 45.0      x2 = -1.35     x3 = 337.5     : y = 0
x1 = 45.0      x2 = -10.0     x3 = 337.5     : y = 0
Fp = 2.9404953685058404, Ft = 2.063
Fp > Ft => модель неадекватна
```

## Висновок:

У ході виконання лабораторної роботи я провів повний трьохфакторний експеримент при використанні рівняння регресії з квадратичними членами. Закріпив отримані знання практичним їх використанням при написанні програми, що реалізує завдання лабораторної роботи. Мета лабораторної роботи досягнута.