Министерство образования и науки Украины
Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского"
Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра автоматизированных систем обработки информации и управления

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 1 по дисциплине
«Проектирование и анализ вычислительных алгоритмов»

„ **Проектирование и анализ алгоритмов сортировки** ”

Выполнил *ІП-61 Кушка М.О.* _____
(шифр, фамилия, имя, отчество)

Проверил *Головченко М.Н.* _____
(фамилия, имя, отчество)

Киев 2018

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Цель работы – изучить основные подходы к анализу вычислительной сложности алгоритмов внутренней сортировки и оценить порог их эффективности.

2 ЗАДАНИЕ

Согласно варианту (таблица 2.1), выполнить анализ алгоритма внутренней сортировки на соответствие следующим свойствам:

- устойчивость;
- естественность поведения;
- основанность на сравнениях;
- потребности в дополнительной памяти (объем);
- потребности в знаниях о структуре данных.

Записать алгоритм внутренней сортировки при помощи псевдокода (или другого способа по выбору).

Провести анализ временной сложности в худшем, лучшем и среднем случае и записать временную сложность в асимптотических оценках.

Выполнить программную реализацию алгоритма на любом языке программирования с фиксацией временных оценочных характеристик (количество сравнений, количество перестановок, глубина рекурсивного углубления и пр. в зависимости от алгоритма).

Провести ряд испытаний алгоритма на массивах разной размерности (10, 100, 1000, 5000, 10000, 20000, 50000 элементов) и разных наборах входных данных (упорядоченный массив, обратно упорядоченный массив, массив случайных чисел) и построить графики зависимости временных оценочных характеристик от размерности массива, нанести на график асимптотические оценку худшего и лучшего случаев для сравнения.

Сделать обобщенный вывод по лабораторной работе.

Таблица 2.1 – Варианты алгоритмов

№	**Алгоритм сортировки**
1	Сортировка перемешиванием
2	Сортировка расчёской
3	Сортировка выбором
4	Сортировка Шелла (классическая)

5	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Хиббарда)
6	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Седжвика)
7	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Пратта)
8	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Марцина Циура)
9	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Фибоначчи)
10	Сортировка Шелла ($d = (3^j - 1) \leq n, j \in N$)
11	Быстрая сортировка (разбиение Ломуто)
12	Быстрая сортировка (разбиение Хоара)
13	Быстрая сортировка (повторяющиеся элементы)
14	Пирамидальная сортировка
15	Плавная сортировка
16	Интроспективная сортировка
17	Сортировка с помощью двоичного дерева
18	Сортировка перемешиванием
19	Сортировка Шелла (классическая)
20	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Хиббарда)
21	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Седжвика)
22	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Пратта)
23	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Марцина Циура)
24	Сортировка Шелла (*d* = последовательность Фибоначчи)
25	Сортировка с помощью двоичного дерева
26	Быстрая сортировка (разбиение Ломуто)
27	Быстрая сортировка (разбиение Хоара)
28	Быстрая сортировка (повторяющиеся элементы)
29	Пирамидальная сортировка
30	Плавная сортировка

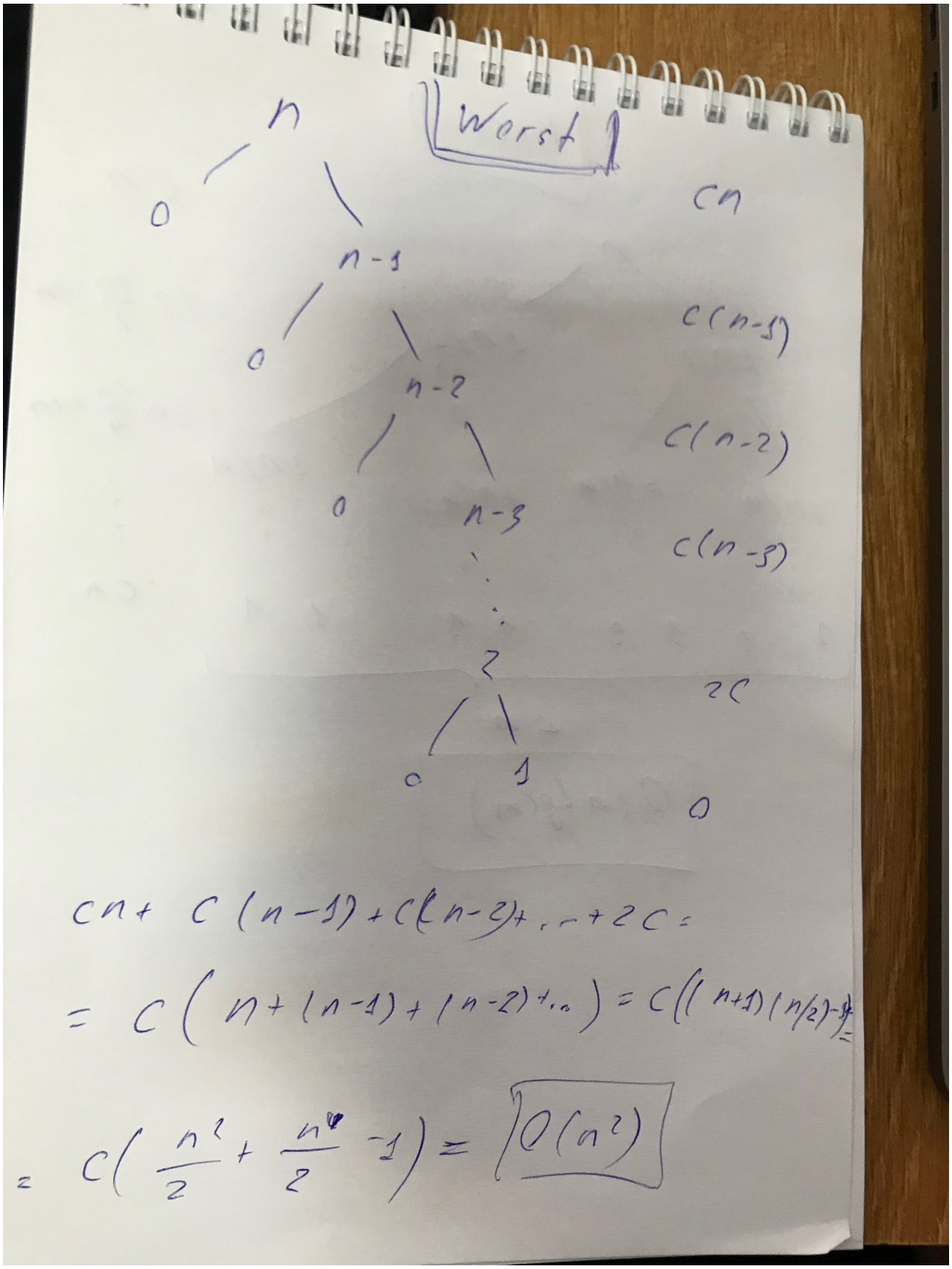
3 ВЫПОЛНЕНИЕ

3.1 Анализ алгоритма на соответствие свойствам

Анализ алгоритма быстрой сортировки на соответствие свойствам приведен в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Анализ алгоритма на соответствие свойствам

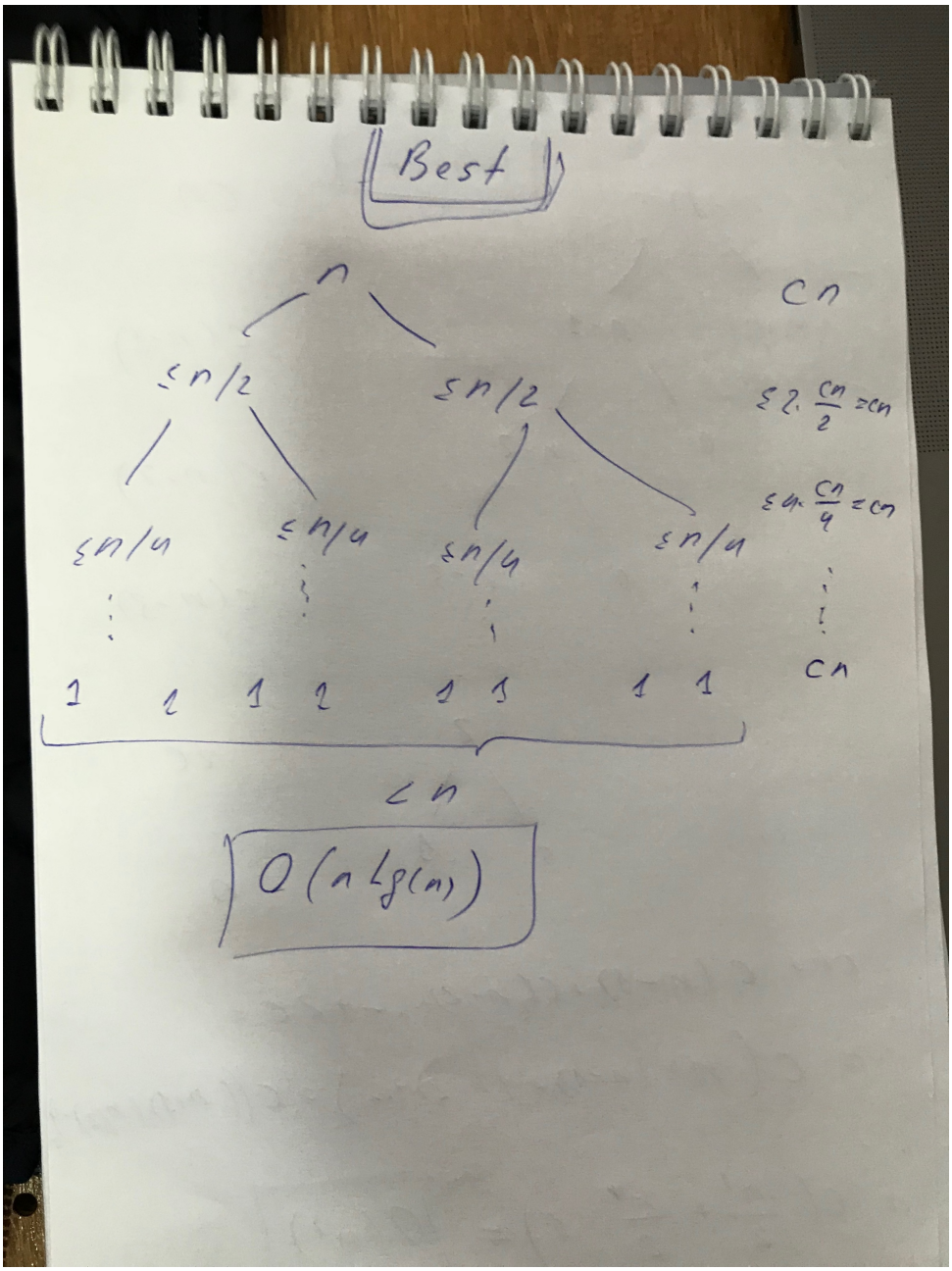
Свойство	**Быстрая сортировка**
Устойчивость	Да
Естественность поведения	Да
Основанность на сравнениях	Да
Потребности в дополнительной памяти (объем)	$O(\log n)$
Потребности в знаниях о структуре данных	Нет



$cn + c(n-1) + c(n-2) + \dots + 2c =$

$= c(n + (n-1) + (n-2) + \dots) = c((n+1)(n/2)$

$= c\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1\right) = \boxed{O(n^2)}$



3.2 Псевдокод алгоритма

```
algorithm quickSort(alist, first, last) is
    if first < last then
        splitpoint = partition(alist,first,last)
        quickSort(alist,first,splitpoint-1)
        quickSort(alist,splitpoint+1,last)

algorithm partition(alist, first, last) is
    pivotvalue = alist[first]
    leftmark = first+1
    rightmark = last
    done = False
```

```
    while leftmark < rightmark do

        while leftmark <= rightmark and alist[leftmark] <= pivotvalue do
            leftmark += 1

        while alist[rightmark] >= pivotvalue and rightmark >= leftmark do
            rightmark -= 1

        if rightmark < leftmark do
            done = True
        else do
            swap(alist[leftmark], alist[rightmark])

        swap(alist[first], alist[rightmark])

        return rightmark
```

3.3 Анализ временной сложности

Худшее время	$O(n^2)$
Лучшее время	$O(n \log n)$ (обычное разделение) или $O(n)$ (разделение на 3 части)
Среднее время	$O(n \log n)$

3.4 Программная реализация алгоритма

3.4.1 Исходный код

```
import random
import time
import pickle
import sys
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy as sp
import math


class QuickSort:
    """QuickSort algorithm with Hoare partition scheme."""
```

```
def __init__(self, lst):
    """Init list and auxiliary variables."""
    self.lst = lst
    self.comparisons = 0
    self.swaps = 0
    self.maxRecursionLevel = 0

def sort(self):
    """Sort list with the quicksort method."""
    self.quickSort(self.lst, 0, len(self.lst)-1, self.maxRecursionLevel)

def showResult(self):
    """Show sorted list and additional sorting information."""
    # print("List after sort:", self.lst)
    print("Number of comparisons:", self.comparisons)
    print("Number of swaps:", self.swaps)
    print("Max recursion lever:", self.maxRecursionLevel)

def quickSort(self, lst, first, last, recursionLevel):
    """Main quicksort function."""

    # Calculate recursion level.
    if (recursionLevel > self.maxRecursionLevel):
        self.maxRecursionLevel += recursionLevel

    if first < last:
        self.comparisons += 1

        splitpoint = self.partition(self.lst, first, last)

        self.quickSort(self.lst, first, splitpoint-1, recursionLevel+1)
        self.quickSort(self.lst, splitpoint+1, last, recursionLevel+1)

def partition(self, lst, first, last):
    """Additional quicksort function to divide list on two parts."""

    pivotvalue = lst[first]

    leftmark = first + 1
    rightmark = last

    done = False
    while not done:
```

```
            while leftmark <= rightmark and lst[leftmark] <= pivotvalue:
                leftmark += 1

            while lst[rightmark] >= pivotvalue and rightmark >= leftmark:
                rightmark -= 1

            if rightmark < leftmark:
                done = True
            else:
                lst[leftmark], lst[rightmark] = lst[rightmark], lst[leftmark]
                self.swaps += 1

        lst[first], lst[rightmark] = lst[rightmark], lst[first]
        self.swaps += 1

        return rightmark

    def __exit__(self):
        """Exempts memory after using the class."""
        print("Destructor")
        del self.lst[:]
        del self.comparisons
        del self.swaps
        del self.maxRecursionLevel


class EvaluateAlgorithm:
    """Evaluate the quicksort algorithm for different lists."""

    def __init__(self):
        self.lengths = [10, 100, 1000, 2000, 5000, 10000, 20000]
        self.folders = ['10', '100', '1000', '2000', '5000', '10000', '20000']
        self.files = ['ordered', 'backordered', 'random']

    def saveToFile(self):
        """Save different lists to files."""
        for lng, folder in zip(self.lengths, self.folders):
            ordered = [x for x in range(1, lng+1)]
            backordered = [x for x in range(lng, 0, -1)]
            rand = [random.randint(1, lng) for x in range(lng)]

            with open('data/' + folder + '/' + self.files[0], 'wb') as file:
                pickle.dump(ordered, file)
            with open('data/' + folder + '/' + self.files[1], 'wb') as file:
```

```
            pickle.dump(backordered, file)
        with open('data/' + folder + '/' + self.files[2], 'wb') as file:
            pickle.dump(rand, file)

def evaluate(self):
    """
    Evaluate the time of sorting with the quicksort algorithm for different
    lists.
    """
    sys.setrecursionlimit(40000)

    evaluation = list()
    for folder in self.folders:
        line = []
        print("Folder:", folder)
        with open('data/' + folder + '/' + self.files[0], 'rb') as file:
            ordered = pickle.load(file)
            quicksort = QuickSort(ordered)

            start = time.time()
            quicksort.sort()
            end = time.time()

            quicksort.showResult()

            del quicksort
            line.append(end - start)
            print("Ordered:", line[0])
            print("\n\n")

        with open('data/' + folder + '/' + self.files[1], 'rb') as file:
            backordered = pickle.load(file)
            quicksort = QuickSort(backordered)

            start = time.time()
            quicksort.sort()
            end = time.time()

            quicksort.showResult()

            del quicksort
            line.append(end - start)
            print("Backordered:", line[1])
            print("\n\n")
```

```
            with open('data/' + folder + '/' + self.files[2], 'rb') as file:
                rand = pickle.load(file)
                quicksort = QuickSort(rand)

                start = time.time()
                quicksort.sort()
                end = time.time()

                quicksort.showResult()

                del quicksort
                line.append(end - start)
                print("Random:", line[2])
                print("\n\n")

            evaluation.append(line)

        return evaluation

    def bestTime(self, n):
        """Best algorithm's working time."""
        return n * math.log(n)

    def worstTime(self, n):
        """The worst algorithm's working time."""
        return n*n

    def showPlots(self):
        """Shows 3 plots for 3 types of arrays. Plot is time/size."""

        times = [
            [6.198883056640625e-05, 5.412101745605469e-05,
                3.886222839355469e-05],
            [0.0013110637664794922, 0.0012891292572021484,
                0.00041794776916503906],
            [0.11106300354003906, 0.10880279541015625, 0.005784988403320312],
            [0.41941189765930176, 0.42520689964294434, 0.015279054641723633],
            [2.740694046020508, 2.76031494140625, 0.03850197792053223],
            [10.79902696609497, 11.202094078063965, 0.0696408748626709],
            [37.34802293777466, 36.93501591682434, 0.1409311294555664]
        ]

        orderedTimes = []
```

```
        backorderedTimes = []
        randTimes = []

        for ordered, backordered, rand in times:
            orderedTimes.append(ordered)
            backorderedTimes.append(backordered)
            randTimes.append(rand)

        lng = len(orderedTimes)

        best = [self.bestTime(x) for x in range(1, 100)]
        worst = [self.worstTime(x) for x in range(1, 100)]
        y = [x for x in range(1, 100)]

        plot = DrawPlot(
                [orderedTimes, backorderedTimes, randTimes],
                [self.lengths, self.lengths, self.lengths],
                legends=[
                    "Ordered lists",
                    "Backordered lists",
                    "Random data lists"
                ]
            )

        asymptoticEvaluation = DrawPlot(
                [best, worst],
                [y, y],
                legends=[
                    "O(n*log(n))",
                    "O(n^2)",
                ],
                showLine=False
            )

        plot.show()
        asymptoticEvaluation.show()


class DrawPlot:
    """Can draw any x/y plots."""

    def __init__(
            self,
            xs, ys,
```

```
            legends,
            showLine=True,
            title="Different lists comparison",
            xlabel="Time (sec)",
            ylabel="Length (elements)",
            figureName="Quicksort evaluation"):
        """Set all necessary parameters."""
        self.xs = xs
        self.ys = ys
        self.legends = legends
        self.showLine = showLine
        self.title = title
        self.xlabel = xlabel
        self.ylabel = ylabel
        self.figureName = figureName
        self.colors = ['b', 'm', 'y', 'c', 'g', 'r', 'k']
        self.dots = ['x', 'o', 'v', '*', '+', '.', ',']

    def show(self):
        """Show the plot."""
        for x, y, color, legend, marker in zip(self.xs, self.ys, self.colors,
self.legends, self.dots):
            f2p = sp.polyfit(x, y, 2)
            f2 = sp.poly1d(f2p)

            fx = sp.linspace(0, x[-1], 1000)
            plt.figure(figsize=(12, 8), num=self.figureName)
            plt.plot(fx,  f2(fx),  linewidth=int(self.showLine),  color=color,
label=legend)

            plt.title(self.title)
            plt.xlabel(self.xlabel)
            plt.ylabel(self.ylabel)

            plt.scatter(x, y, color=color, marker=marker)

        plt.legend(loc='lower right')
        plt.grid(True, linestyle='-', color='0.75')
        plt.show()


def main():

    # Ask user about list parameters.
```

```
    n = int(input("Enter number of elements in the list\n> "))
    minValue = int(input("Enter min possible value in the list\n> "))
    maxValue = int(input("Enter max possible value in the list\n> "))

    print("n =", n)
    print("max =", maxValue)
    print("min =", minValue)

    lst = [random.randint(minValue, maxValue) for x in range(n)]
    print("List before sort:", lst)

    quickSortClass = QuickSort(lst)

    start = time.time()
    quickSortClass.sort()
    end = time.time()

    quickSortClass.showResult()

    print("Working time: %f sec" % (end - start))

    # Test the algorithm
    # evaluate = EvaluateAlgorithm()
    # evaluation = evaluate.evaluate()
    # print(evaluation)
    # evaluate.showPlots()
    # evaluate.saveToFile()


if __name__ == '__main__':
    main()
```

3.4.2 Примеры работы

На рисунках 3.1 и 3.2 показаны примеры работы программы сортировки массивов на 10 и 100 элементов соответственно.

Рисунок 3.1 – Сортировка массива на 10 элементов

```
Enter number of elements in the list
> 10
Enter min possible value in the list
> -5
Enter max possible value in the list
> 5
n = 10
max = 5
min = -5
List before sort: [1, -4, -5, 1, -3, -5, 0, 0, 0, 3]
List after sort: [-5, -5, -4, -3, 0, 0, 0, 1, 1, 3]
Number of comparisons: 7
Number of swaps: 0
Max recursion lever: 7
Working time: 0.000035 sec
```

Рисунок 3.2 – Сортировка массива на 100 элементов

```
Enter number of elements in the list
> 100
Enter min possible value in the list
> -50
Enter max possible value in the list
> 50
n = 100
max = 50
min = -50
List before sort: [-41, -20, -34, 3, 10, 23, -45, 41, 0, -16, 42, -17, -42, -13, 22,
-32, 39, 13, -24, -46, 22, -22, -34, -7, 12, 47, 15, 18, 42, 46, 2, -34, -34, 22, 21,
 -34, 38, -31, -17, -32, 35, -36, -9, -23, 46, 40, 11, 8, -18, -47, -25, -49, -38, -5
0, 28, -6, 24, -12, 44, 28, 17, -18, -1, -35, 9, -35, 18, -11, 25, -20, -12, -16, -19
, -43, -30, -6, -47, 35, 43, 3, 23, -23, 29, -32, -41, -50, 33, -14, -14, 0, 4, -6, 7
, 25, -1, -1, 0, 29, -32, 11]
List after sort: [-50, -50, -49, -47, -47, -46, -45, -43, -42, -41, -41, -38, -36, -3
5, -35, -34, -34, -34, -34, -34, -32, -32, -32, -32, -31, -30, -25, -24, -23, -23, -2
2, -20, -20, -19, -18, -18, -17, -17, -16, -16, -14, -14, -13, -12, -12, -11, -9, -7,
 -6, -6, -6, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 2, 3, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 13, 15, 17, 18
, 18, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 24, 25, 25, 28, 28, 29, 29, 33, 35, 35, 38, 39, 40, 41,
 42, 42, 43, 44, 46, 46, 47]
Number of comparisons: 69
Number of swaps: 0
Max recursion lever: 15
Working time: 0.000279 sec
```

3.5 Испытания алгоритма

3.5.1 Временные оценочные характеристики

В таблице 3.2 приведены оценочные характеристики числа сравнений, числа перестановок и глубины рекурсии алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для массивов разной размерности, когда массивы содержат упорядоченную последовательность элементов.

Таблица 3.2 – Оценочные характеристики алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для упорядоченной последовательности элементов в массиве

Размерность массива	Число сравнений	Число перестановок	Глубина рекурсии
10	9	9	9
100	99	99	99
1000	999	999	999
2000	1999	1999	1999
5000	4999	4999	4999
10000	9999	9999	9999
20000	19999	19999	19999

В таблице 3.3 приведены оценочные характеристики числа сравнений, числа перестановок и глубины рекурсии алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для массивов разной размерности, когда массивы содержат обратно упорядоченную последовательность элементов.

Таблица 3.3 – Оценочные характеристики алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для обратно упорядоченной последовательности элементов в массиве

Размерность массива	Число сравнений	Число перестановок	Глубина рекурсии
10	9	9	9
100	99	99	99
1000	999	999	999
2000	1999	1999	1999
5000	4999	4999	4999
10000	9999	9999	9999
20000	19999	19999	19999

В таблице 3.4 приведены оценочные характеристики числа сравнений, числа перестановок и глубины рекурсии алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для массивов разной размерности, массивы содержат случайную последовательность элементов.

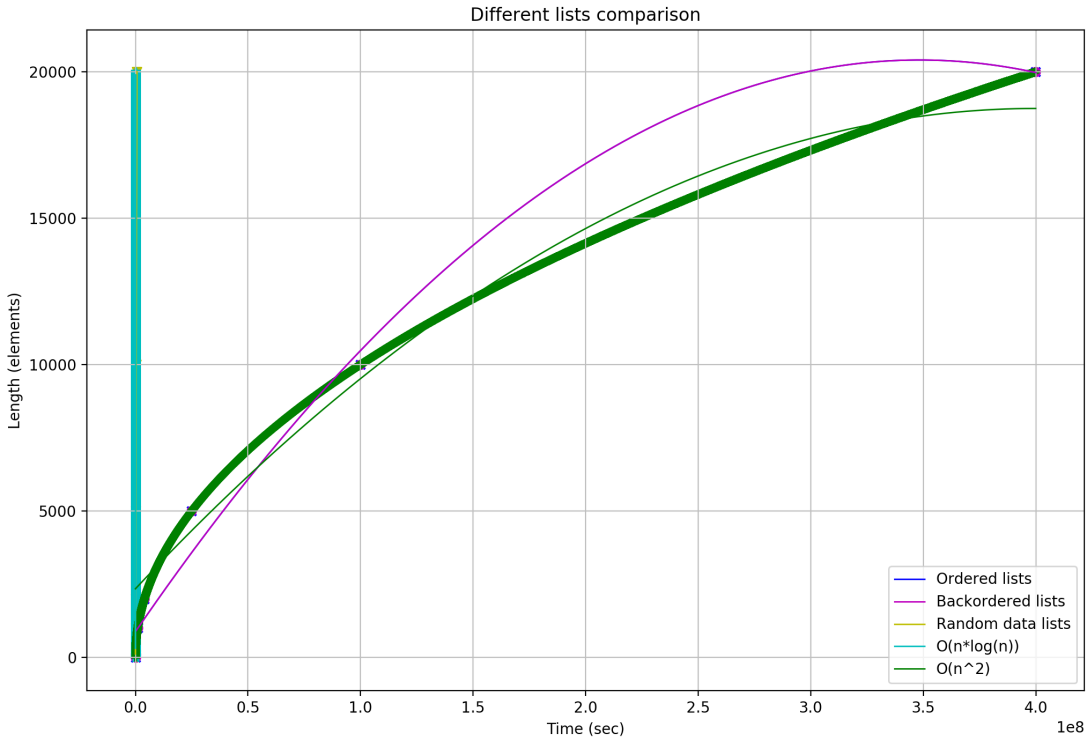
Таблица 3.4 – Оценочные характеристики алгоритма быстрой сортировки с разбиением Хоара для случайной последовательности элементов в массиве

Размерность массива	Число сравнений	Число перестановок	Глубина рекурсии
10	6	9	4
100	66	156	14
1000	691	2302	22
2000	1395	5159	24
5000	3460	14150	30
10000	6967	31266	30
20000	13950	66848	34

3.5.2 Графики зависимости временных оценочных характеристик шот размерности массива

На рисунке 3.3 показаны графики зависимости временных оценочных характеристик от размерности массива для случаев, когда массивы содержат упорядоченную последовательность элементов, когда массивы содержат обратно упорядоченную последовательность элементов, когда массивы содержат случайную последовательность элементов. На рисунке 3.4 также показаны асимптотические оценки худшего и лучшего случаев и асимптотические оценки алгоритмов.

Рисунок 3.3 – Графики зависимости временных оценочных характеристик



ВЫВОДЫ

В рамках данной лабораторной работы я познакомился с таким видом сортировки как «быстрая сортировка» при разбиении входного массива методом Хоара. Данный алгоритм, хотя и был придуман более сорока лет назад, до сих пор остается довольно быстрым на фоне современных алгоритмов сортировки.

Я реализовал данный алгоритм при помощи языка программирования Python, что, безусловно, делает сортировку довольно емкую по времени (что обусловлено особенностями языка реализации), однако, в целях лабораторной работы этот язык я считаю уместным, поскольку Python обладает рядом преимуществ по сравнению с другими языками программирования такими как, например простое построение графиков функций и прочее.