

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

***МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ,
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ. ПРОБЛЕМА
ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ***

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічної
роботи з дисципліни “Чисельні методи”

Київ
Політехніка
2001

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

***МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ
РІВНЯНЬ, НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ.
ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ***

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічної
роботи з дисципліни “Чисельні методи”

для студентів спеціальності
“Інформаційні управляючі системи та технології”

ЗАТВЕРДЖЕНО
Методичною радою НТУУ „КПІ”

Київ
Політехніка
2001

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, нелінійних рівнянь та їх систем. Проблема власних значень. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи з курсу “Чисельні методи” для студентів спеціальності “Інформаційні управляючі системи та технології” /Укл.: В.М. Кузнецов, О.Г. Жданова –К.: Політехніка, 2001 – 61 с.

Навчальне видання

***МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ, НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ.
ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ***

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-графічної
роботи з дисципліни “Чисельні методи”


для студентів спеціальності
“Інформаційні управляючі системи та технології”

Укладачі:

Кузнецов Валерій Миколайович
Жданова Олена Григорівна

Відповідальний редактор
Рецензенти

В. О. Тихонов
С. М. Гриша
В. М. Томашевський

Темплан 2001р., поз. 

Редактор Л.Ю.Больбух

ЗМІСТ

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК.....	7
1.1. Джерела і класифікація похибок	7
1.2. Деякі елементарні факти теорії похибок.....	8
2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	11
2.1. Метод Гаусса	11
2.2. Умови застосування методу Гаусса.....	15
2.3. Метод Гаусса з вибором головного елемента.....	15
2.4. Обчислення визначника методом Гаусса з вибором головного елемента....	27
2.5. Обернення матриць	27
2.6. Метод прогону.....	28
2.7. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних.....	32
алгебраїчних рівнянь	32
3. ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ	35
3.1. Метод Данилевського розгортання вікового визначника.....	35
4. МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ.....	40
4.1. Метод поділу відрізка навпіл (метод бісекції, діхотомії).....	41
4.2. Метод простої ітерації (послідовних наближень)	43
4.3. Класичні ітераційні методи	45
4.4. Метод січних (хорд, лінійної інтерполяції)	46
4.5. Метод Ньютона (метод дотичних)	47
4.6. Комбінований метод.....	49
4.7. Розв'язання алгебраїчних рівнянь.....	51
4.8. Відшукування коренів алгебраїчних рівнянь методом вилучення множників....	51
4.9. Метод Ліна вилучення множників	52
4.10. Вилучення квадратичного множника за методом Хічкока.....	53
5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	53
5.1. Метод ітерації розв'язання систем нелінійних рівнянь	54
5.2. Метод Ньютона.....	54
5.3. Інші методи розв'язання.....	56
6. ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ	57
6.1. Завдання 1	57
6.2. Завдання 2	62
6.3. Завдання 3.....	66
6.4. Завдання 4.....	67
Список літератури	68

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Методичні вказівки містять деякий теоретичний матеріал та завдання до виконання розрахунково-графічної роботи. Враховуючи стислість односеместрового курсу, автори відібрали тільки класичні методи чисельного розв'язання відповідних математичних задач з прозорою алгоритмічною структурою, математичне обґрунтування яких не перевантажене складними логічними побудовами та громіздкими викладками. Коли ж це обґрунтування потребує використання розділів математики, що не входять до основного курсу (наприклад, методів функціонального аналізу), автори відсилають читача до конспекту лекцій спецкурсу "Додаткові розділи чисельного аналізу". Радимо також настійливо знайомитись з іншими методами розв'язання задач за наведеною у вказівках літературою, які в залежності від ситуації можуть дати більш ефективні алгоритми з точки зору точності та кількості арифметичних операцій для реалізації.

У курсі чисельних методів вивчаються питання побудови, застосування і теоретичного обґрунтування алгоритмів наближеного розв'язування різноманітних класів математичних задач з орієнтацією на використання сучасної обчислювальної техніки.

До програми основного курсу входять наступні розділи чисельних методів:

- 1) методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь;
- 2) проблема власних значень і методи її вирішення;
- 3) методи розв'язування алгебраїчних рівнянь високих степенів і трансцендентних рівнянь; розв'язування систем таких рівнянь;
- 4) методи наближення функцій дійсного змінного;
- 5) методи чисельного інтегрування і диференціювання функцій дійсного змінного;
- 6) методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь.

Обчислювальний алгоритм слід розглядати як необхідну складову *обчислювального експерименту* – ефективного методу розв'язування природно-наукових задач.

Обчислювальний експеримент можна подати у вигляді наступної схеми:

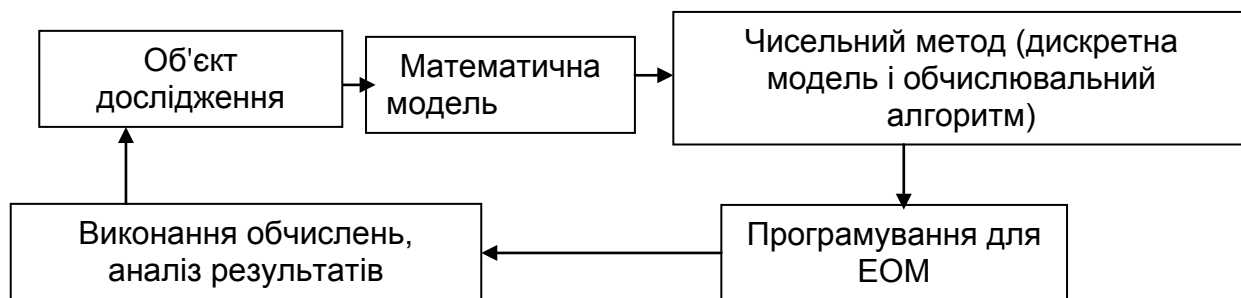


Рис. 1

1.1. Джерела і класифікація похибок

Похибка розв'язку задачі зумовлюється такими причинами:

- 1) математичний опис задачі є неточним (модель неадекватна фізичному процесу, неточно задані вхідні дані опису);

2) метод, що застосовується, не є точним: отримання точного розв'язку математичної задачі, що виникає, потребує необмеженого або неприйнятно великого числа арифметичних операцій, тому замість точного розв'язку задачі доводиться вдаватися до наближеного;

3) при введенні даних в машину, при виконанні арифметичних операцій і при виведенні даних виконуються округлення.

Похибки, що відповідають цим причинам, називають:

- 1) неусувною похибкою;
- 2) похибкою методу;
- 3) похибкою обчислення.

Часто неусувну похибку поділяють на дві частини:

а) *неусувною похибкою* називають лише похибку, що є наслідком неточності задання числових даних, які входять до математичного опису задачі;

б) похибку, що є наслідком невідповідності математичного опису задачі реальності, називають *похибкою математичної моделі*.

1.2. Деякі елементарні факти теорії похибок

Нехай a є точне, і a^* - наближене значення деякої величини.

Різниця $a - a^* = \varepsilon$ називається *похибкою наближеного значення a^** . Оскільки точне значення a зазвичай невідоме, то невідоме і точне значення ε .

Величину $|\varepsilon| = |a - a^*|$ називають *абсолютною похибкою a^** .

Однак часто буває відома верхня межа абсолютної похибки, тобто таке Δ , що

$$|a - a^*| = |\varepsilon| \leq \Delta. \quad (1.1)$$

З виразу (1.1) випливає, що

$$a^* - \Delta \leq a \leq a^* + \Delta, \quad (1.2)$$

або ще скорочено записують

$$a = a^* \pm \Delta. \quad (1.3)$$

Відношення абсолютної похибки $|\varepsilon|$ до $|a^*|$ називають *відносною похибкою a^** , а верхню межу цієї величини δ

$$\frac{|a^* - a|}{|a^*|} = \frac{|\varepsilon|}{|a^*|} \leq \frac{\Delta}{|a^*|} = \delta \quad (1.4)$$

називають *межею відносної похибки a^** .

Розглянемо межі абсолютної і відносної похибки при введенні й округленні чисел в ЕОМ.

Як відомо, для запису чисел в ЕОМ найчастіше використовується двійкова система з плаваючою комою.

При введенні числа a в ЕОМ його зазвичай округлюють і наближено записують у вигляді

$$a \approx \pm 2^p \sum_{k=1}^t \alpha_k 2^{-k} = a^*, \quad (1.5)$$

де p визначає порядок числа,

$$\alpha_k = 0, 1, \quad k \geq 2, \quad \alpha_1 = 1,$$

t визначає кількість розрядів мантиси.

При такому поданні абсолютна похибка не більше від одиниці останнього двійкового розряду в наближеному значенні a^* :

$$|a - a^*| = |\varepsilon| \leq 2^{p-t} = \Delta. \quad (1.6)$$

Межа відносної похибки при такому поданні може бути визначена так:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a^*|} = \frac{2^{p-t}}{2^p \sum_{k=1}^t \alpha_k 2^{-k}} \leq \frac{2^{p-t}}{2^{p-1}} = 2^{-t+1}. \quad (1.7)$$

Розглянемо оцінку похибки при виконанні найпростіших дій над наближеними числами.

Похибка суми

Нехай $a = x_1 + x_2$, і відомі наближені значення x_1^* і x_2^* та межі Δ_1 і Δ_2 для їх абсолютних похибок. Позначимо похибки доданків ε_1 та ε_2 , відповідно.

Тоді

$$a^* = x_1^* + x_2^*, \quad a = (x_1^* + \varepsilon_1) + (x_2^* + \varepsilon_2) = a^* + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = a^* + \varepsilon.$$

Отже,

$$|\varepsilon| = |a - a^*| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \leq \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta,$$

тобто

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Отже, абсолютна похибка суми не більша за суму меж абсолютних похибок доданків. Це правило розповсюджується на довільне скінченне число доданків.

Аналогічне правило існує і для абсолютної похибки різниці (показати самостійно).

Розглянемо відносну похибку суми.

Очевидно,

$$\frac{|a - a^*|}{|x_1^* + x_2^*|} \leq \frac{|x_1 - x_1^*| + |x_2 - x_2^*|}{|x_1^* + x_2^*|} \leq \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{|x_1^* + x_2^*|}. \quad (1.8)$$

Позначимо через

$$\delta_1 = \frac{\Delta_1}{|x_1^*|}, \quad \delta_2 = \frac{\Delta_2}{|x_2^*|}$$

межі відносних похибок доданків.

Тоді з (1.8) випливає

$$\frac{|a - a^*|}{|x_1^* + x_2^*|} \leq \frac{\delta_1 |x_1^*| + \delta_2 |x_2^*|}{|x_1^* + x_2^*|} = \delta. \quad (1.9)$$

Припустимо, що x_i^* одного знаку. Тоді

$$|x_1^* + x_2^*| = |x_1^*| + |x_2^*|.$$

У цьому випадку

$$\frac{|a - a^*|}{|x_1^* + x_2^*|} \leq \frac{\delta_1 |x_1^*| + \delta_2 |x_2^*|}{|x_1^*| + |x_2^*|} \leq \max(\delta_1, \delta_2) = \bar{\delta}. \quad (1.10)$$

Таким чином, межу відносної похибки суми можна взяти за правилом (1.9), а у разі, коли наближені значення доданків мають однаковий знак, відносна похибка суми не перевищує максимальної відносної похибки доданків.

Самостійно розповсюдити це правило на довільне число доданків.

Похибка добутку

Нехай $a = x_1 x_2$, $a^* = x_1^* x_2^*$. Тоді

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= |a - a^*| = |(x_1^* + \varepsilon_1)(x_2^* + \varepsilon_2) - x_1^* x_2^*| = |x_1^* \varepsilon_2 + x_2^* \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2| \leq \\ &\leq |x_1^*| |\varepsilon_2| + |x_2^*| |\varepsilon_1| + |\varepsilon_1| |\varepsilon_2| \leq \Delta_1 |x_2^*| + \Delta_2 |x_1^*| + \Delta_1 \Delta_2, \end{aligned}$$

тобто

$$|\varepsilon| \leq \Delta_1 |x^*_2| + \Delta_2 |x^*_1| + \Delta_1 \Delta_2 = \Delta. \quad (1.11)$$

При малих Δ_1 і Δ_2

$$|\varepsilon| \lesssim \Delta_1 |x^*_2| + \Delta_2 |x^*_1| = \tilde{\Delta}. \quad (1.12)$$

Отже, за межу абсолютної похибки добутку можна взяти праву частину (1.11), а при малих межах абсолютних похибок співмножників – праву частину (1.12).

Межу відносної похибки добутку можна отримати з наявних меж абсолютної похибки. Для цього праву і ліву частини (1.11), (1.12) поділимо на

$$|x^*_1 x^*_2| = |x^*_1| |x^*_2|.$$

Отримуємо при $x^*_1, x^*_2 \neq 0$

$$\frac{|\varepsilon|}{|x^*_1 x^*_2|} \leq \frac{\Delta_1}{|x^*_1|} + \frac{\Delta_2}{|x^*_2|} + \frac{\Delta_1}{|x^*_1|} \frac{\Delta_2}{|x^*_2|} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2 = \delta, \quad (1.13)$$

$$\frac{|\varepsilon|}{|x^*_1 x^*_2|} \lesssim \delta_1 + \delta_2 = \tilde{\delta}, \text{ при малих } \delta_1 \text{ і } \delta_2. \quad (1.14)$$

Отже, за межу відносної похибки добутку можна взяти праву частину (1.13), а при малих δ_1 і δ_2 маємо просте правило: межа відносної похибки добутку наближено дорівнює сумі меж відносних похибок співмножників.

Самостійно отримати оцінку абсолютної і відносної похибок відношення двох величин.

Похибка функції

Для простоти розглянемо функцію двох змінних $f(x_1, x_2)$. Припустимо, що ця функція неперервно диференційована в деякій області **G**. Припустимо, що числа x^*_1 і x^*_2 є наближеними значеннями координат точки (x^*_1, x^*_2) , причому замкнений прямокутник, що містить обидві точки (x_1, x_2) і (x^*_1, x^*_2) , цілком знаходиться в області **G**.

За формулою скінченних приростів Лагранжа маємо

$$f(x_1, x_2) - f(x^*_1, x^*_2) = f'_{x_1}(\xi, \eta)(x_1 - x^*_1) + f'_{x_2}(\xi, \eta)(x_2 - x^*_2), \quad (1.15)$$

де (ξ, η) – координати деякої точки відрізка, що з'єднує точки (x_1, x_2) і (x^*_1, x^*_2) .

З виразу (1.15) отримуємо

$$|\varepsilon| = |f(x_1, x_2) - f(x^*_1, x^*_2)| \leq |f'_{x_1}(\xi, \eta)| |x_1 - x^*_1| + |f'_{x_2}(\xi, \eta)| |x_2 - x^*_2|,$$

або, якщо C_1, C_2 – деякі оцінки для $|f'_{x_1}|, |f'_{x_2}|$ в замкненій області \bar{G}

$$\max_{\bar{G}} |f'_{x_1}| \leq c_1, \max_{\bar{G}} |f'_{x_2}| \leq c_2,$$

і Δ_1, Δ_2 – межі абсолютних похибок x^*_1, x^*_2 ,

$$|\varepsilon| \leq c_1 \Delta_1 + c_2 \Delta_2. \quad (1.16)$$

Нерівність (1.16) дає межу абсолютної похибки обчислення функції

$$f(x_1, x_2).$$

Іноді поступають нестрого, вважаючи

$$|\varepsilon| \lesssim |f'_{x_1}(x^*_1, x^*_2)| \Delta_1 + |f'_{x_2}(x^*_1, x^*_2)| \Delta_2,$$

тобто межу абсолютної похибки функції в точці (x^*_1, x^*_2)

$$\Delta \cong |f'_{x_1}(x^*_1, x^*_2)| \Delta_1 + |f'_{x_2}(x^*_1, x^*_2)| \Delta_2. \quad (1.17)$$

Для отримання меж відносної похибки функції розділимо праву і ліву частини (1.17) на $|f(x^*_1, x^*_2)|$. Отримаємо

$$\delta \cong \frac{|f'_{x_1}(x_1^*, x_2^*)|}{|f(x_1^*, x_2^*)|} \Delta_1 + \frac{|f'_{x_2}(x_1^*, x_2^*)|}{|f(x_1^*, x_2^*)|} \Delta_2 = \left| (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_1} \right| \Delta_1 + \left| (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_2} \right| \Delta_2 =$$

$$= \left| x_1^* (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_1} \right| \frac{\Delta_1}{|x_1^*|} + \left| x_2^* (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_2} \right| \frac{\Delta_2}{|x_2^*|}.$$

Остаточню

$$\delta \cong \left| x_1^* (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_1} \right| \delta_1 + \left| x_2^* (\ln f(x_1^*, x_2^*))'_{x_2} \right| \delta_2,$$

де δ_1 і δ_2 - межі відносних похибок аргументів.

2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax=f, \quad (2.1)$$

де A - матриця $m \times m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ - шуканий вектор, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ - заданий вектор.

Припускаємо, що $f \neq \bar{0}$, та визначник матриці A відмінний від нуля, так що існує єдиний розв'язок x . З курсу алгебри відомо, що систему (2.1) можна розв'язати за формулами Крамера*. Для великих m цей спосіб практично несприятний, оскільки потребує порядку $m!$ арифметичних дій, тому широко використовуються інші методи розв'язання, наприклад, метод Гаусса**, який потребує $V(m^3)$ дій.

Методи чисельного розв'язання системи (2.1) поділяються на дві групи:

- прямі методи;
- ітераційні методи.

У *прямих* (або *точних*) методах розв'язок x системи (2.1) відшукується за скінченну кількість арифметичних дій. Внаслідок похибок округлення прямі методи насправді не зумовлюють точний розв'язок системи (2.1) і назвати їх точними можливо, лише залишаючи остеронь похибки округлення.

Ітераційні методи (їх також називають методами *послідовних наближень*) полягають у тому, що розв'язок x системи (2.1) відшукується як границя при $n \rightarrow \infty$ послідовних наближень $x^{(n)}$, де n - номер ітерації. Здебільшого, за скінченну кількість ітерацій ця границя не досягається.

2.1. Метод Гаусса

Запишемо систему (2.1) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= f_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m &= f_m. \end{aligned} \quad (2.2)$$

* Крамер Габріель (1704-1752)- швейцарський математик

** Гаусс Карл Фридрих (1777-1855)- німецький математик, астроном, фізик, геодезист, професор Гетінгенського університету.

Метод Гаусса розв'язання системи (2.2) полягає у послідовному вилученні невідомих x_1, x_2, \dots, x_{m-1} з цієї системи.

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділив перше рівняння на a_{11} , одержимо

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1m}x_m = y_1, \quad (2.3)$$

де $c_{1j} = a_{1j}/a_{11}$; $j = \overline{2, m}$; $y_1 = f_1/a_{11}$.

Розглянемо тепер рівняння системи (2.2), що залишилися

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = f_i; \quad i = \overline{2, m}. \quad (2.4)$$

Помножимо (2.3) на a_{i1} та віднімемо одержане рівняння з i -го рівняння системи (2.4), $i = \overline{2, m}$.

У результаті одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1j}x_j + \dots + c_{1m}x_m &= y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mj}^{(1)}x_j + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тут позначено:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}; \quad f_i^{(1)} = f_i - y_1a_{i1}; \quad i, j = \overline{2, m}. \quad (2.6)$$

Матриця системи (2.5) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mm}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Матриці такої структури позначають так:

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix},$$

де хрестиками позначені ненульові елементи.

У системі (2.5) невідоме x міститься тільки в першому рівнянні, тому надалі достатньо мати справу із скороченою системою рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ &\dots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mj}^{(1)}x_j + \dots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тим самим здійснили перший крок методом Гаусса. Коли $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то з системи (2.7) аналогічно можна вилучити невідоме x_2 . І перейти до системи, еквівалентної (2.2), що має матрицю такої структури:

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{pmatrix}.$$

При цьому перше рівняння системи (2.5) залишається без зміни. Так само вилучаючи невідомі x_3, x_4, \dots, x_{m-1} , отримаємо систему рівнянь такого вигляду:

$$x_1 + c_{1,2}x_2 + \dots + c_{1,m-1}x_{m-1} + c_{1,m}x_m = y_1,$$

(2.8)

Матриця цієї системи

(2.9)

Побудова системи (2.8) складає *прямий хід* методу Гаусса. *Зворотний хід* полягає у відшукуванні невідомих x_1, \dots, x_m з системи (2.8). Так як матриця системи має трикутний вигляд, можна послідовно, починаючи з x_m , відшукати всі невідомі. Дійсно, $x_m = y_m, x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} x_m$ і т. д.

(2.10)

Одержимо ці загальні формули.

$$x_1 = 1, \quad c_1 = x_2 = 1, \quad c_2 = 1$$

(2.11)

та припустимо, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Поділивши обидві частини цього рівняння на $a_{kk}^{(k-1)}$, одержимо

(2.12)

$$\begin{aligned}
x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{km}x_m &= y_k, \\
a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,m}^{(k)}x_m &= f_{k+1}^{(k)}, \\
&\dots \\
a_{mk+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{mm}^{(k)}x_m &= f_k^{(k)}.
\end{aligned}$$

де $c_{kj} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$; $j = \overline{k+1, m}$; $y_k = f_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}$.

Далі помножимо рівняння (2.12) на $a_{ik}^{(k-1)}$ та віднімемо одержане співвідношення з i -го рівняння системи (2.11). У результаті остання група рівнянь системи (2.11) набуває наступного вигляду:

де $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)}c_{kj}$; $i, j = \overline{k+1, m}$; $f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k$; $i = \overline{k+1, m}$.

Отже, у прямому ході методу Гаусса коефіцієнти рівнянь перетворюються за наступним правилом

$$\begin{aligned}
a_{kj}^{(0)} &= a_{kj}; \quad k, j = \overline{1, m}; \\
c_{kj} &= a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \quad j = \overline{k+1, m}; \quad k = \overline{1, m};
\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)}c_{kj}; \quad i, j = \overline{k+1, m}; \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.14)$$

Обчислення правих частин системи (2.8) здійснюється за формулами:

$$f_k^{(0)} = f_k; \quad y_k = f_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \quad k = \overline{1, m}; \quad (2.15)$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{jk}^{(k-1)}y_k; \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.16)$$

Коефіцієнти c_{ij} і праві частини y_i ; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{i+1, m}$ зберігаються у пам'яті ЕОМ і використовуються при здійсненні зворотного ходу за формулами (2.10).

Основним обмеженням методу є припущення, що всі елементи $a_{kk}^{(k-1)}$, на які здійснюється ділення, відрізняються від нуля. Число $a_{kk}^{(k-1)}$ називається *провідним елементом* на k -му кроці вилучення. Навіть, якщо деякий провідний елемент не дорівнює нулеві, а просто є близьким до нуля, у процесі обчислень відбувається нагромадження похибок. Вихід з цього полягає в тому, що як провідний елемент вибирається не $a_{kk}^{(k-1)}$, а інше число (тобто на k -му кроці вилучається не x_k , а інша змінна x_j , $j \neq k$). Така стратегія вибору провідних елементів здійснюється в методі Гаусса з вибором головного елемента, який буде розглянуто пізніше.

А тепер підрахуємо число арифметичних дій, що необхідні для розв'язання системи за допомогою методу Гаусса. Оскільки виконання операцій множення і ділення на ЕОМ потребує набагато більше часу, ніж виконання додавання і віднімання, обмежимося підрахуванням числа множень і ділень.

1. Обчислення коефіцієнтів c_{kj} ; $k = \overline{1, m}$; $j = \overline{k+1, m}$ за формулами (2.13) потребує

$$\sum_{k=1}^m (m-k) = 1 + 2 + \dots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2} \text{ ділень.}$$

2. Обчислення всіх коефіцієнтів a_{ij}^k за формулами (2.14) потребує

$$\sum_{k=1}^{m-1} (m-k)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (m-1)^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}$$

множень (тут ми використовуємо рівність

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

що легко перевіряється за індукцією).

Отже, обчислення ненульових елементів C_{ij} трикутної матриці C потребує

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = \frac{(m^2-1)m}{3}$$

операцій множення і ділення.

3. Обчислення правих частин y_k за формулами (2.15) потребує m ділень, а відшукування f_i^k за формулами (2.16)

$$\sum_{k=1}^m (m-k) = \frac{m(m-1)}{2}$$

множень. Разом, обчислення правих частин перетвореної системи (2.8) потребує

$$m + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

дій множення і ділення.

Усього для реалізації прямого ходу методом Гаусса необхідно виконати

$$\frac{(m^2-1)m}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

дій.

4. Для реалізації зворотного ходу методу Гаусса за формулами (2.10) необхідно

$$\sum_{i=1}^{m-1} (m-i) = \frac{m(m-1)}{2}$$

множень.

Всього, для реалізації методу Гаусса необхідно виконати

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m^2+3m-1)}{3}$$

дій множення і ділення, причому основний час витрачається на прямий хід. Для великих m число дій множення і ділення в методі Гауса близьке до $\frac{m^3}{3}$. За витратами часу та необхідною машинною пам'яттю метод Гауса придатний для розв'язання систем рівнянь (2.2) загального вигляду з кількістю змінних m порядку 100.

2.2. Умови застосування методу Гаусса

Вище було показано, що метод Гаусса перетворює вихідну систему рівнянь

$$Ax = f \tag{2.17}$$

до еквівалентної системи

$$Cx = y, \tag{2.18}$$

де C - верхня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі. З'ясуємо тепер, як зв'язані між собою вектори правих частин f та y . Праві частини системи (2.18) обчислюються за формулами:

$$f_k^{(0)} = f_k; y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}; k = \overline{1, m};$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} y_k; i = \overline{k+1, m},$$

Із цих співвідношень можна послідовно одержати

$$f_1 = a_{11} y_1$$

$$f_2 = a_{21} y_1 + a_{22}^{(1)} y_2$$

$$f_j = b_{j1} y_1 + b_{j2} y_2 + \dots + b_{jj} y_j; j = \overline{1, m}, \quad (2.19)$$

де b_{jj} -числові коефіцієнти, причому $b_{jj} = a_{jj}^{(j-1)}$.

Співвідношення (2.19) можна записати у матричному вигляді

$$f = B y, \quad (2.20)$$

де B -нижня трикутна матриця з елементами $a_{jj}^{(j-1)}; j = \overline{1, m}$ ($a_{11}^{(0)} = a_{11}$) на головній діагоналі.

Нагадаємо, що головне припущення при формулюванні методу Гаусса полягало у тому, що усі $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$. Тому на діагоналі матриці B стоять ненульові елементи, $(B = \prod_{j=1}^m a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$, тобто B має обернену, а $y = B^{-1} f$. Підставляючи останнє у (2.18), приходимо до рівняння

$$C x = B^{-1} f,$$

звідки

$$B C x = f.$$

(2.21)

Порівнюючи (2.21) з рівнянням (2.17), приходимо до висновку, що як наслідок застосування методу Гаусса одержане розкладання вихідної матриці A у добуток $A = B C$, де B - нижня трикутна матриця з ненульовими елементами на головній діагоналі, C -верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю.

Зараз можна тлумачити метод Гаусса таким чином. Нехай задано матрицю A і вектор f . Спочатку утворюється розклад A у добуток двох трикутних матриць $A = B \cdot C$. Далі послідовно розв'язуються дві системи рівнянь

$$B y = f \quad (2.22)$$

$$C x = y$$

(2.23)

з трикутними матрицями, звідки і одержується шуканий вектор x . Розклад $A = B C$ відповідає прямому ходу методу Гаусса, а розв'язок системи (2.22)- (2.23)- зворотному ходу. Зауважимо, що у вищенаведеному алгоритмі розклад $A = B C$ та розв'язок системи (2.22) здійснюються одночасно.

З вищезазначеного можна зробити висновок. Оскільки

$$(A = (B \cdot (C = \prod_{j=1}^m a_{jj}^{(j-1)},$$

то метод Гаусса дає змогу одночасно з розв'язком системи (2.17) обчислити визначник матриці A простим множенням ведучих елементів. Якщо ж завданням є просто обчислення визначника матриці, то це можна зробити за допомогою методу Гаусса, при цьому немає потреби обчислювати праві частини перетворюваних рівнянь.

Далі, додержуючись стандартних позначень, нижні трикутні матриці будемо позначати L (від англійського lower- нижній), та верхні трикутні - літерою U (від англійського upper-верхній).

Позначимо через Δ_j -кутовий мінор порядку j матриці A , тобто

$$\Delta_1 = a_{11}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \dots; \Delta_m = (A) \begin{vmatrix} 1 & \dots & m \end{vmatrix}.$$

Теоретичне обґрунтування можливості розкладу матриці у добуток двох трикутних матриць містить наступна теорема.

Теорема про LU - розклад. Нехай усі кутові мінори матриці A відмінні від нуля, $\Delta_j \neq 0, j = \overline{1, m}$. Тоді матрицю A можна подати однозначно у вигляді добутку

$$A=LU,$$

(2.24)

де L - нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами і U - верхня трикутна матриця з одиничною головною діагоналлю.

Доведення. Доведемо сформульоване твердження спочатку для матриць другого порядку. Будемо шукати розклад матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $l_{11}, l_{21}, l_{22}, u_{12}$ - невідомі досі числа. Для знаходження цих чисел маємо систему рівнянь:

$$l_{11} = a_{11}; l_{11}u_{12} = a_{12}; l_{21} = a_{21}; l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22},$$

яка має єдиний розв'язок

$$l_{11} = a_{11}; u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}; l_{21} = a_{21}; l_{22} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}}.$$

За припущенням теореми $a_{11} \neq 0; a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, тобто елементи l_{11} та l_{22} відмінні від нуля.

Подальше доведення здійснимо методом математичної індукції. Нехай твердження справедливе для матриць порядку $k-1$; доведемо, що воно вірне і для матриць порядку k .

Подамо матрицю A порядку K у вигляді

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} \\ \hline a_{k1} & \dots & a_{k,k-1} & a_{kk} \end{array} \right) \quad (2.25)$$

та позначимо

$$A_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}; \quad a_{k-1} = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{k-1,k} \end{pmatrix},$$

$$b_{k-1} = (a_{k1} \quad \dots \quad a_{k,k-1}).$$

Згідно з умовами теореми ($A_{k-1} \neq 0$ і тоді за припущеннями індукції існує розклад матриці A_{k-1} ;

$$A_{k-1} = L_{k-1} U_{k-1},$$

де L_{k-1} , U_{k-1} - відповідно нижня і верхня трикутні матриці, які мають зазначені у теоремі властивості. Будемо шукати розклад матриці (2.25) у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} L_{k-1} & \bar{0} \\ l_{k-1} & l_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{k-1} & u_{k-1} \\ \bar{0}^T & 1 \end{pmatrix},$$

(2.26)

де $l_{k-1} = (l_{k1} l_{k2} \dots l_{k,k-1})$; $u_{k-1} = (u_{1k} u_{2k} \dots u_{k-1,k})^T$ - невідомі досі вектори.

Помножимо матриці в правій частині рівняння (2.26) і, враховуючи (2.25), приходимо до системи рівнянь

$$L_{k-1} u_{k-1} = a_{k-1}; \quad (2.27)$$

$$l_{k-1} U_{k-1} = b_{k-1}; \quad (2.28)$$

$$l_{k-1} u_{k-1} + l_{kk} = a_{kk}; \quad (2.29)$$

З припущення індукції випливає існування матриць L_{k-1}^{-1} ; U_{k-1}^{-1} . Тому з (2.27) і (2.28) одержуємо

$$u_{k-1} = L_{k-1}^{-1} a_{k-1}; \quad l_{k-1} = b_{k-1} U_{k-1}^{-1}$$

і, далі, з (2.29)

$$l_{kk} = a_{kk} - l_{k-1} u_{k-1}.$$

Таким чином, LU -розклад матриці A існує. З розкладу (2.26) випливає, що

$$(A) = (L_{k-1} (l_{kk} (U_{k-1} = (L_{k-1} (l_{kk}.$$

За умовами теореми ($A \neq 0$, а за припущеннями індукції ($L_{k-1} \neq 0$, і тому $l_{kk} \neq 0$.

Тим самим індукція завершена і доведено можливість шуканого розкладу.

Доведемо тепер, що такий розклад єдиний. Припустимо, що матрицю A можна розкласти двома способами

$$A = L_1 U_1 = L_2 U_2.$$

Тоді

$$L_2 = L_1 U_1 U_2^{-1} \text{ і } U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2. \quad (2.30)$$

Матриця у лівій частині рівняння (2.30) є верхньою трикутною, а в правій частині - нижньою трикутною. Така рівність можлива лише у випадку, якщо матриці $U_1 U_2^{-1}$ і $L_1^{-1} L_2$ є діагональними. Але на діагоналі матриці $U_1 U_2^{-1}$ (а тому і на матриці $L_1^{-1} L_2$) знаходяться одиниці, отже ці матриці є одиничними

$$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = E.$$

Звідси одержуємо $U_1 = U_2$; $L_1 = L_2$, тобто розклад (2.24) єдиний. Теорему повністю доведено.

Зауважимо, якщо хоча б один з кутових мінорів матриці A дорівнював нулеві, то зазначений LU - розклад неможливий. Це видно на прикладі матриць другого порядку.

Висновок. Метод Гаусса можна використовувати тоді, і лише тоді, коли всі кутові мінори матриці A відмінні від нуля.

Було зазначено, що метод Гаусса зумовлює розклад вихідної матриці у добуток двох трикутних. Детальніше описати структуру цих трикутних матриць можна за допомогою так званих елементарних трикутних матриць.

Матриця L_j називається елементарною нижньою трикутною матрицею, якщо вона має вигляд

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & l_{jj} & & 0 \\ 0 & l_{j+1,j} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & l_{mj} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

У матриці L_j усі елементи головної діагоналі окрім l_{jj} дорівнюють одиниці. З решти елементів відмінними від нуля можуть бути лише елементи j -го стовпця, що розташовані нижче l_{jj} . Оберненою до L_j є елементарна нижня трикутна матриця

$$L_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & 1/l_{jj} & & 0 \\ 0 & -l_{j+1,j}/l_{jj} & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & -l_{mj}/l_{jj} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо спочатку для наочності систему $Ax = f$, яку складено з трьох рівнянь:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= f_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= f_3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Після першого кроку виключення за методом Гаусса перетворена система набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 &= \frac{f_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= f_2 - \frac{a_{21}f_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}\right)x_3 &= f_3 - \frac{a_{31}f_1}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Звідси видно, що матрицю A_1 системи (2.32) одержують з вихідної матриці A шляхом множення A зліва на елементарну матрицю

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

так, що $A_1 = L_1 A$. При цьому систему (2.32) можна записати у вигляді

$$L_1 Ax = L_1 f.$$

Матрицю (2.33) будемо називати елементарною трикутною матрицею, яка відповідає першому кроку виключення методу Гаусса.

Перепишемо систему (2.32) у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= f_3^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Здійснимо другий крок методу Гаусса, тобто виключимо невідому x_2 з останнього рівняння, тоді одержимо систему вигляду

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 &= y_1, \\ x_2 + c_{23}x_3 &= y_2, \\ a_{33}^{(2)}x_3 &= f_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Можна переконатися, що перехід від (2.34) до (2.35) здійснюють завдяки множенню системи (2.34) на елементарну трикутну матрицю

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Таким чином, після другого кроку виключення одержимо систему

$$L_2 L_1 A x = L_2 L_1 f, \quad (2.37)$$

де матриці L_1 і L_2 означені згідно (2.33), (2.36).

Нарешті, перемножуючи (2.37) на матрицю

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

одержимо систему

$$L_3 L_2 L_1 A x = L_3 L_2 L_1 f, \quad (2.38)$$

матриця якої $U = L_3 L_2 L_1 A$ є верхньою трикутною матрицею з одиничною головною діагоналлю.

Звідки випливає, зокрема, що $A = LU$, де $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$ -нижня трикутна матриця. Таким чином, LU - розклад матриці A може бути одержано за допомогою елементарних трикутних матриць: спочатку будують матриці L_1, L_2, L_3 та обчислюють $U = L_3 L_2 L_1 A$, а потім знаходять $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$. Зазначимо, що матриці L_k^{-1} мають простий вигляд

$$\begin{aligned} L_1^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}; \quad L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}; \\ L &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}^{(1)} & 0 \\ a_{31} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

причому на діагоналі матриці розташовані ведучі елементи методу виключення.

Запис методу Гаусса у вигляді (2.38) детально описує процес виключення.

Усі вище зазначені перетворення виконуємо для системи рівнянь довільного порядку (2.18).

Процес виключення можна записати за формулою

$$L_m L_{m-1} \cdots L_1 A x = L_m L_{m-1} \cdots L_1 f, \quad (2.39)$$

де елементарна нижня трикутна матриця L_k на k -му кроці виключення має вигляд

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & & 1/a_{kk}^{(k-1)} & & 0 \\ 0 & & -a_{k+1,k}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} & 1 & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & -a_{mk}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця L_k здійснює виключення невідомого x_k з рівнянь з номерами $k+1, k+2, \dots, m$.

Матриці L_k^{-1} існують і мають вигляд

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ 0 & & a_{kk}^{(k-1)} & & \\ 0 & & a_{k+1,k}^{(k-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 1 \\ 0 & & a_{mk}^{(k-1)} & & 1 \end{pmatrix}$$

2.3. Метод Гаусса з вибором головного елемента

1. *Основна ідея методу.* Може статися, що система

$$Ax = f \quad (2.40)$$

має єдиний розв'язок, хоча якийсь з кутових мінорів матриці A дорівнює нулеві. У цьому разі звичайний метод Гаусса виявляється непридатним, але можливо може бути застосований метод Гаусса з вибором головного елемента.

Основна ідея методу полягає у тому, щоб на черговому кроці вибирається не наступне за номером невідоме, а те невідоме, коефіцієнт при якому є найбільшим за модулем. Таким чином, як ведучий елемент тут береться *головний*, тобто *найбільший за модулем елемент*, тим самим, якщо $|A| \neq 0$, то у процесі обчислень не буде з'являтися ділення на нуль.

Різні варіанти методу Гаусса з вибором головного елемента покажемо на прикладі системи з двох рівнянь

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1, \quad (2.41)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Припустимо, що $|a_{12}| > |a_{11}|$. Тоді на першому кроці будемо виключати змінну x_2 . Такий спосіб еквівалентний тому, що система (2.41) переписується у вигляді

$$a_{12}x_2 + a_{11}x_1 = f_1, \quad (2.42)$$

$$a_{22}x_2 + a_{21}x_1 = f_2,$$

то до (2.42) застосовується перший крок звичайного методу Гаусса. Зазначений спосіб виключення називається *методом Гаусса з вибором елемента по рядку*. Він є еквівалентним звичайному методу Гаусса до системи, у якій на кожному кроці виключення здійснюється відповідна перенумерація змінних.

Застосовується також метод Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем. Припустимо, що $|a_{12}| > |a_{11}|$. Перепишемо систему (2.41) у вигляді

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

та к новій системі застосуємо на першому кроці звичайний метод Гаусса. Отже, *метод Гаусса з вибором головного елемента по стовпцю* еквівалентний застосуванню звичайного методу Гаусса до системи, у якій на кожному кроці виключення здійснюється відповідна перенумерація рівнянь.

Іноді застосовується *метод Гаусса з вибором головного елемента по всій матриці*, коли як ведучий вибирається максимальний за модулем елемент поміж усіх елементів матриці системи.

2. *Матриці переставлення*. Вище було показано, що звичайний метод Гаусса можна записати у вигляді

$$L_m L_{m-1} \dots L_1 A x = L_m L_{m-1} \dots L_1 f,$$

де $L_k, k = \overline{1, m}$, - елементарні нижні трикутні матриці. Щоб одержати аналогічний запис методу Гаусса з вибором головного елемента, необхідно розглянути переставлення.

Означення 1. Матрицею переставлення P називається квадратна матриця, у якій у кожному рядку і в кожному стовпці тільки один елемент відрізняється від нуля і дорівнює одиниці.

Означення 2. Елементарною матрицею переставлення P_{kl} називається матриця, що одержана з одиничної матриці переставленням k -го і l -го рядка.

Наприклад, елементарними матрицями переставлення третього порядку є матриці

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна відзначити такі властивості елементарних матриць переставлення, що впливають безпосередньо з їх означення.

1. Добуток двох (а отже і довільної кількості) елементарних матриць переставлення є матрицею переставлення (не обов'язково елементарна).

2. Для довільної квадратної матриці A матриця $P_{kl}A$ відрізняється від A переставленням k -го і l -го рядка.

3. Для довільної квадратної матриці A матриця AP_{kl} відрізняється від A переставленням k -го і l -го стовпця.

Застосування елементарних матриць переставлення для опису методу Гаусса з вибором головного елемента за стовпцю можна пояснити на такому прикладі системи третього порядку :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= f_1, \\ 2x_1 + x_3 &= f_2, \\ 5x_2 + x_3 &= f_3. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Система має вигляд (2.40), де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Максимальний елемент першого стовпця матриці A знаходиться у другому рядку. Тому необхідно змінити місцями перший та другий рядок і перейти до еквівалентної системи

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad \quad x_3 &= f_2, \\ x_1 + \quad x_2 + x_3 &= f_1, \\ 5x_2 + \quad x_3 &= f_3. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Систему (2.45) можна записати у вигляді

$$P_{12}Ax = P_{12}f, \quad (2.46)$$

тобто вона одержується з системи (2.43) шляхом множення на матрицю переставлення

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі, до системи (2.45) потрібно застосувати перший крок звичайного методу Гауса. Цей крок є еквівалентним множенню системи (2.46) на елементарну нижню трикутну матрицю

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, від системи (2.46) перейдемо до еквівалентної системи

$$L_1 P_{12} A x = L_1 P_{12} f, \quad (2.47)$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} x_1 + \quad \quad \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2}f_2, \\ x_2 + \quad \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{1}{2}f_2, \\ 5x_2 + \quad 3x_3 &= f_3. \end{aligned} \quad (2.48)$$

З останніх двох рівнянь системи (2.48) необхідно тепер виключити змінну x_2 . Оскільки максимальний елемент першого стовпця скороченої системи

$$\begin{aligned} x_2 + \quad \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{1}{2}f_2, \\ 5x_2 + \quad 3x_3 &= f_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

є елементом другого рядка, робимо у (2.49) переставлення рядків і від системи (2.48) переходимо до еквівалентної системи

$$\begin{aligned} x_1 + \quad \quad \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2}f_2, \\ 5x_2 + \quad 3x_3 &= f_3, \\ x_2 + \quad \frac{1}{2}x_3 &= f_1 - \frac{1}{2}f_2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

яку можна записати у матричному вигляді як

$$P_{23}L_1P_{12}Ax = P_{23}L_1P_{12}f. \quad (2.51)$$

Отже, система (2.51) одержана з (2.47) застосуванням елементарної матриці переставлення

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі до системи (2.50) треба застосувати другий крок виключення звичайного методу Гаусса. Це еквівалентно множенню системи (2.50) на елементарну нижню трикутну матрицю

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, одержуємо систему

$$L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_2P_{23}L_1P_{12}f \quad (2.52)$$

або

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2}f_2, \\ x_2 + \frac{3}{5}x_3 &= \frac{1}{5}f_3, \\ -\frac{1}{10}x_3 &= f_1 - \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{5}f_3. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Гаусса полягає в заміні останнього рівняння системи (2.53) рівнянням

$$x_3 = -10(f_1 - \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{5}f_3),$$

що є еквівалентним множенню (2.52) на елементарну нижню трикутну матрицю

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Отже, для розглянутого прикладу процес виключення Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем записується у вигляді

$$L_3L_2P_{23}L_1P_{12}Ax = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}f. \quad (2.54)$$

За побудовою матриця

$$U = L_3L_2P_{23}L_1P_{12}A \quad (2.55)$$

є верхньою трикутною матрицею з одиничною діагоналлю.

Відмінність від звичайного методу Гаусса полягає у тому, що множниками у (2.55) поряд з елементарними трикутними матрицями L_k можуть бути елементарні матриці переставлення P_{kl} .

Покажемо ще, що з (2.55) виходить розклад

$$PA = LU, \quad (2.56)$$

де L - нижня трикутна матриця, що має обернену, P - матриця переставлення.

Для цього відшукаємо матрицю

$$\tilde{L}_1 = P_{23}L_1P_{23}. \quad (2.57)$$

За властивістю (2) матриця $P_{23} L_1$ одержується з матриці L_1 переставленням другого та третього рядка,

$$P_{23} L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця \tilde{L}_1 згідно з властивістю (3) одержується з $P_{23} L_1$ переставленням другого та третього стовпця

$$\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де \tilde{L}_1 - нижня трикутна матриця, що має обернену.

З виразу (2.57), враховуючи рівність $P_{23}^{-1} = P_{23}$, одержуємо

$$\tilde{L}_1 P_{23} = P_{23} L_1. \quad (2.58)$$

Звідси та з (2.55) видно, що

$$U = L_3 L_2 L_1 \tilde{P}_{23} P_{12} A = L^{-1} P A, \quad (2.59)$$

де позначимо $P = P_{23} P_{12}$, $L = \tilde{L}_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$. Оскільки P - матриця переставлення та L – нижня трикутна матриця, властивість (2.56) доведена. Вона означає, що метод Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем еквівалентний звичайному методу Гаусса, застосованому до матриці PA , тобто до системи, що одержується з вихідної системи переставленням деяких рівнянь.

3. *Загальний висновок*. Результат, одержаний раніше для найпростішого окремого прикладу, вірний і у випадку загальної системи рівнянь (2.40). А саме, метод Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем можна записати у вигляді

$$L_m L_{m-1} P_{m-1, jm-1} L_{m-2} \dots L_2 P_{2, j2} L_1 P_{1, j1} A = L_m L_{m-1} P_{m-1, jm-1} L_{m-2} \dots L_2 P_{2, j2} L_1 P_{1, j1} f, \quad (2.60)$$

де $P_{k, jk}$ – елементарні матриці переставлення такі, що $k \leq j_k \leq m$ та L_k – елементарні нижні трикутні матриці.

Звідси, використовуючи співвідношення переставлення, аналогічні (2.58), можна показати, що метод Гаусса з вибором головного елемента дає така теорема.

Теорема 1. Якщо $|A| \neq 0$, то існує матриця переставлення P така, що матриця PA має відмінні від нуля кутові мініори.

Доведення у п.4.

Висновок. Якщо $|A| \neq 0$, то існує матриця переставлення P така, що є вірним розклад

$$PA = LU, \quad (2.61)$$

де L – нижня трикутна матриця з відмінними від нуля діагональними елементами та U – верхня трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі. У цьому разі для розв'язання системи (2.40) можна застосувати метод Гаусса з вибором головного елемента.

4. *Доведення теореми 1*. Доведемо теорему індукцією за числом m - порядком матриці A .

Нехай $m=2$, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Якщо $a_{11} \neq 0$, то твердження теореми виконується при $P=E$, де E - одинична матриця другого порядку. Якщо $a_{11}=0$, то $a_{21} \neq 0$, оскільки $|A| \neq 0$. При цьому у матриці

$$P_{12}A = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

всі кутові мінори відмінні від нуля.

Нехай твердження теореми вірне для довільних квадратних матриць порядку $m-1$, що мають визначник відмінний від нуля. Покажемо, що воно вірне і для матриць порядку m з $|A| \neq 0$. Розіб'ємо матрицю A порядку m на блоки

$$A = \begin{pmatrix} A_{m-1} & a_{m-1} \\ b_{m-1} & a_{mm} \end{pmatrix},$$

де

$$A_{m-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{pmatrix}, \quad a_{m-1} = \begin{pmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-1,m} \end{pmatrix},$$

$$b_{m-1} = (a_{m1} \ a_{m2} \ \dots \ a_{m,m-1}).$$

Достатньо розглянути два випадки: $|A_{m-1}| \neq 0$ і $|A_{m-1}| = 0$. У першому випадку за припущенням індукції існує матриця переставлення P_{m-1} порядку $m-1$ така, що $P_{m-1}A_{m-1}$ має відмінні від нуля кутові мінори.

Тоді для матриці переставлення

$$P = \begin{pmatrix} P_{m-1} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

маємо

$$PA = \begin{pmatrix} P_{m-1}A_{m-1} & P_{m-1}a_{m-1} \\ b_{m-1} & a_{mm} \end{pmatrix},$$

причому $|PA| = \pm |A| \neq 0$. Тобто всі кутові мінори матриці PA відмінні від нуля.

Розглянемо другий випадок, коли $|A_{m-1}| = 0$. Оскільки $|A| \neq 0$, відшукається хоча б один відмінний від нуля мінор порядку $m-1$ матриці A , одержаний викреслюванням останнього стовпця і деякого рядка. Нехай, наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,m-1} \\ a_{l+1,1} & \dots & a_{l+1,m-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,m-1} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ де } l \neq m. \quad (2.62)$$

Переставляючи у матриці A рядки з номерами l і m , одержимо матрицю $P_{lm}A$, у якої кутовий мінор порядку $m-1$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,m-1} \\ a_{l+1,1} & \dots & a_{l+1,m-1} \\ \dots & & \dots \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix}$$

та відрізняється від (2.62) тільки переставленням рядків. Отже цей мінор не дорівнює нулеві і ми приходимо до розглянутого вище випадку. Теорема доведена.

2.4. Обчислення визначника методом Гаусса з вибором головного елемента

Одночасно з розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = f$$

можна обчислити визначник матриці A .

Нехай у процесі виключення знайдено розклад

$$PA = LU,$$

тобто побудовані матриці L і U . Тоді

$$|PA| = |L| \cdot |U| = |L| = l_{11} l_{22} \dots l_{mm},$$

і, таким чином, добуток діагональних елементів матриці L (ведучих, головних елементів методу виключення) дорівнює визначнику матриці PA . Оскільки матриці PA і A відрізняються тільки переставленням рядків, визначник матриці PA може відрізнятися від визначника матриці A тільки знаком.

А саме,

$$|A| = \begin{cases} |PA|, & \text{коли кількість переставлень парна,} \\ -|PA|, & \text{коли кількість переставлень непарна.} \end{cases}$$

Отже, для обчислення визначника необхідно знати, скільки переставлень було здійснено у процесі виключення.

Коли матриця A вироджена, то у разі використання методу Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем на деякому кроці виключення k усі елементи k -го стовпця, що знаходяться нижче головної діагоналі та на ній, будуть дорівнювати нулеві. При цьому подальше виключення стає неможливим і програма має видати інформацію про те, що визначник матриці дорівнює нулеві.

2.5. Обернення матриць

Обчислення матриці, оберненої до матриці A , еквівалентно до розв'язання матричного рівняння

$$AX = E, \quad (2.63)$$

де E - одинична матриця, X - шукана квадратна матриця.

Рівняння (2.63) можна записати у вигляді системи m^2 рівнянь

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, m}, \quad (2.64)$$

де $\delta_{ij} = 1$ при $i=j$, та $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Можна відзначити, що система (2.64) розпадається на m незалежних систем рівнянь з однією і тією самою матрицею A , але з різними правими частинами. Ці системи мають вигляд (фіксуємо j):

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, j = \overline{1, m}, \quad (2.65)$$

де $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^T$, у вектора - стовпця $\delta^{(j)}$ дорівнює одиниці j -та компонента і дорівнюють нулеві інші компоненти.

Наприклад, для матриці другого порядку система (2.64) розпадається на дві незалежні системи:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0, \end{cases} \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1. \end{cases}$$

Для розв'язання систем (2.65) використовується метод Гаусса (звичайний або з вибором головного елемента).

Розглянемо застосування методу Гаусса без вибору головного елемента. Оскільки усі системи (2.65) мають однакову матрицю A , достатньо один раз провести прямий хід методу Гаусса, тобто одержати розклад $A=LU$ та запам'ятати матриці L і U .

Зворотний хід здійснюється завдяки розв'язанню систем рівнянь

$$\begin{aligned} Ly^{(j)} &= \delta^{(j)}, y^{(j)} = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})^T, \\ Ux^{(j)} &= y^{(j)}, j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

з трикутними матрицями L та U .

При здійсненні зворотного ходу можна скоротити кількість дій, враховуючи спеціальний вигляд правих частин системи (2.66).

Запишемо докладніше перші $j-1$ рівнянь системи (2.66):

$$\begin{aligned} l_{11}y_{1j} &= 0, \\ l_{21}y_{1j} + l_{22}y_{2j} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ l_{j-1,1}y_{1j} + l_{j-1,2}y_{2j} + \dots + l_{j-1,j-1}y_{j-1,j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Враховуючи невинудженність матриці L (тобто $l_{ii} \neq 0, i = \overline{1, m}$) звідси одержуємо

$$y_{1j} = y_{2j} = \dots = y_{j-1,j} = 0. \quad (2.68)$$

При цьому інші рівняння системи (2.66) мають вигляд

$$\begin{aligned} l_{jj}y_{jj} &= 1, \\ l_{ij}y_{jj} + l_{i,j+1}y_{j+1,j} + \dots + l_{ii}y_{ij} &= 0, i = \overline{j+1, m}. \end{aligned}$$

Звідси послідовно знаходяться невідомі y_{ij} за формулами:

$$\begin{aligned} y_{jj} &= 1/l_{jj}, \\ y_{ij} &= -\sum_{k=j}^{i-1} l_{ik} y_{kj} / l_{ii}, i = \overline{j+1, m}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Можна показати, що загальна кількість дій множення і ділення, необхідних для обернення матриці зазначеним способом, порядку m^3 . Тим самим обернення матриці потребує не набагато більше часу, ніж розв'язання системи рівнянь.

2.6. Метод прогону

Ми розглянули ряд методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ay = f$$

з матрицею $A = \|a_{ij}\|$ загального вигляду. Для деяких задач, які будуть розглянуті пізніше, становить інтерес розв'язання систем рівнянь з матрицями A спеціального вигляду. Зокрема, при розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку, при побудові інтерполяційних сплайнів, нам буде необхідно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею

$A = \|a_{ij}\|$, тобто з матрицею, у якій всі елементи, що не розташовані на головній та двох побічних діагоналях, дорівнюють нулеві ($a_{ij} = 0$) при $j > i + 1$ та $j < i - 1$).

У загальному випадку систему лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею можна подати у вигляді

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, j = \overline{1, N-1}, \quad (2.70)$$

$$y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1, y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2. \quad (2.71)$$

Для чисельного розв'язання систем з тридіагональною матрицею застосовується *метод прогону*, що являє собою варіант методу послідовного виключення невідомих.

Матриця A для системи (2.70), (2.71) має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ідея методу прогону полягає у наступному. Розв'язок системи шукається у вигляді

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, j = \overline{0, N-1}, \quad (2.72)$$

де $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ - невідомі коефіцієнти, які послідовно відшукуються від α_1, β_1 до α_N, β_N (*прямий прогон*), а потім послідовно обчислюються y_N, y_{N-1}, \dots, y_0 (*зворотний прогон*).

Виведемо формули для обчислення $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$. З (2.72) можна одержати

$$\begin{aligned} y_{j-1} &= \alpha_j y_j + \beta_j = \alpha_j (\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \\ &= \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + (\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j), j = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Підставляючи вирази для y_j, y_{j-1} до рівняння (2.70), приходимо при $j = \overline{1, N-1}$ до рівняння $[\alpha_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + b_j] y_{j+1} + [\beta_{j+1}(a_j \alpha_j - c_j) + a_j \beta_j + f_j] = 0$.

Останнє рівняння буде виконуватись, коли коефіцієнти $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ узяти такими, щоб вирази у квадратних дужках дорівнювали б нулеві.

А саме, достатньо покласти

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - \alpha_j a_j}, \beta_{j+1} = \frac{a_j b_j + f_j}{c_j - \alpha_j a_j}, j = \overline{1, N-1}. \quad (2.73)$$

Для обчислення всіх α_j, β_j достатньо задати значення α_1, β_1 . Ці початкові значення знайдемо з вимоги еквівалентності умови (2.72) при $j = 0$, тобто умови $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$, першому з рівнянь (2.71).

Отже, одержуємо

$$\alpha_1 = \chi_1, \beta_1 = \mu_1. \quad (2.74)$$

Обчислення коефіцієнтів $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$ за формулами (2.73), (2.74) називається *прямим прогоном*. Після того, як прогоночні коефіцієнти $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, j = \overline{0, N-1}$, знайдені, розв'язок системи (2.70), (2.71) відшукується за рекурентною формулою

(2.72), починаючи з $j = N - 1$. Для початку обчислення за цією формулою потрібно знайти y_N , яке можна визначити з рівнянь

$$y_N = \chi_2 y_{N-1} + \mu_2, y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N.$$

Очевидно, воно дорівнює

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N}.$$

Обчислення y_i за формулами

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, j = \overline{N-1, 0}, \quad (2.75)$$

$$y_N = \frac{\chi_2 \beta_N + \mu_2}{1 - \chi_2 \alpha_N} \quad (2.76)$$

називається *оберним прогоном*. Алгоритм розв'язку системи (2.70), (2.71) за формулами (2.73)-(2.75) називається *методом прогонки*.

Метод прогону можна використовувати, коли знаменники у виразах (2.73), (2.75) не дорівнюють нулеві.

Доведемо, що для можливості застосування методу прогону достатньо вимагати, щоб коефіцієнти системи (2.70), (2.71) задовольняли умови

$$\alpha_j \neq 0, b_j \neq 0, |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, j = \overline{1, N-1}, \quad (2.77)$$

$$|\chi_1| \leq 1, |\chi_2| < 1.$$

Спочатку доведемо за індукцією, що за умов (2.76), (2.77) модулі прогоночних коефіцієнтів $\alpha_j, j = \overline{1, N}$ не перевищують одиниці. Згідно з виразами (2.74), (2.77) маємо $|\alpha_1| = |\chi_1| \leq 1$. Припустимо, що $|\alpha_j| \leq 1$ для деякого j та доведемо, що $|\alpha_{j+1}| \leq 1$.

Передусім для довільних двох чисел a та b доведемо нерівність

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

За нерівністю трикутника маємо

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Звідки

$$|a - b| \geq |a| - |b|.$$

Повернемося до доведення $|\alpha_{j+1}| \leq 1$, коли $|\alpha_j| \leq 1$. Згідно з доведеною нерівністю маємо оцінку

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq |c_j| - |\alpha_j| |a_j| \geq |c_j| - |a_j|,$$

та, використовуючи (2.76), одержуємо

$$|c_j - \alpha_j a_j| \geq |b_j| > 0,$$

тобто знаменники виразів (2.73) не дорівнюють нулеві.

Більш того,

$$|\alpha_{j+1}| = \frac{|b_j|}{|c_j - \alpha_j a_j|} \leq 1.$$

Таким чином, $|\alpha_j| \leq 1, j = \overline{1, N}$.

Далі, враховуючи другу з умов (2.77) та й тільки що доведену нерівність $|\alpha_N| \leq 1$, маємо

$$|1 - \chi_2 \alpha_N| \geq 1 - |\chi_2| |\alpha_N| \geq 1 - |\chi_2| > 0,$$

тобто не дорівнює нулеві і знаменник у виразі для y_N .

До аналогічного висновку можна дійти і в тому разі, коли умови (2.76), (2.77) замінюються умовами

$$a_j \neq 0; \beta_j \neq 0; |c_j| > |a_j| + |b_j|; j = \overline{1, N-1}, \quad (2.78)$$

$$|\chi_1| \leq 1; |\chi_2| \leq 1. \quad (2.79)$$

Отже, у разі виконання умов (2.76), (2.77) (або умов (2.78), (2.79)) система (2.70), (2.71) є еквівалентною системі (2.73)-(2.75). Тому ці умови гарантують існування та єдиність розв'язку системи (2.70), (2.71) та можливість обчислення цього розв'язку методом прогону.

Окрім того, доведені нерівності $|\alpha_j| \leq 1, j = \overline{1, N}$ забезпечують стійкість обчислення за рекурентними формулами (2.75). Останнє означає, що похибка, одержана на якомусь кроці обчислень, не буде збільшуватися при переході до наступних кроків.

Дійсно, нехай у формулі (2.75) при $j = j_0 + 1$ замість y_{j_0+1} обчислена величина $\tilde{y}_{j_0+1} = y_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}$.

Тоді на наступному кроці обчислень, тобто при $j = j_0$, замість $y_{j_0} = \alpha_{j_0+1} y_{j_0+1} + \beta_{j_0+1}$ одержимо величину $\tilde{y}_{j_0} = \alpha_{j_0+1} (y_{j_0+1} + \delta_{j_0+1}) + \beta_{j_0+1}$ та похибка буде дорівнювати

$$\delta_{j_0} = \tilde{y}_{j_0} - y_{j_0} = \alpha_{j_0+1} \delta_{j_0+1}.$$

Звідси отримуємо, що $|\delta_{j_0}| = |\alpha_{j_0+1}| |\delta_{j_0+1}| \leq |\delta_{j_0+1}|$, тобто похибка не збільшується.

Підрахуємо число арифметичних дій, що їх потребує розв'язок задачі (2.70), (2.71) методом прогону. За формулами (2.73), що реалізуються за допомогою шести арифметичних дій, обчислення здійснюються $N-1$ разів, за формулою (2.75) виконується 5 арифметичних дій, нарешті, за формулою (2.72), що потребує всього дві дії, обчислення виконуються N разів. Отож у методі прогону всього виконується

$$Q = 6(N-1) + 5 + 2N = 8(N+1) - 9$$

арифметичних дій, тобто кількість дій зростає лінійно відносно кількості невідомих $N+1$.

Нагадаємо, що при розв'язанні довільної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса кількість дій пропорційна кубу кількості невідомих.

2.7. Ітераційні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглядається система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$Ax = f, \quad (2.80)$$

де $A = \|a_{ij}\|_m^m$ - квадратна матриця вимірності $m \times m$, $|A| \neq 0$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ - вектор - стовпець правих частин системи, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ - вектор-стовпець невідомих.

Ідея найпростіших ітераційних методів розв'язання системи (2.80) полягає у наступному. За допомогою еквівалентних перетворень система (2.80) зводиться до системи вигляду

$$x = \beta x + b, \quad (2.81)$$

де $\beta = \|\beta_{ij}\|$ - квадратна матриця $m \times m$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ - відомий вектор.

Потім задається деяке початкове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})^T$ (наприклад, як $x^{(0)}$ береться вектор b , або деякий розв'язок системи (2.80), який одержується іншим методом з деякою похибкою). Інші наближення послідовно знаходяться за рекурентною формулою

$$x^{(n+1)} = \beta x^{(n)} + b, n \geq 0, \quad (2.82)$$

доки на деякому кроці не буде досягнута задана точність ε обчислення значення невідомого вектора x .

Виникає питання, за яких умов на β послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається (у певному розумінні) до точного розв'язку x .

Не зупиняючись на подробицях (див. спецкурс "Додаткові розділи чисельного аналізу"), дамо деякі достатні умови, за яких $x^{(n)} \rightarrow x$:

$$1) \quad \alpha = \max_i \sum_{j=1}^m |\beta_{ij}| < 1, \quad (2.83)$$

або

$$2) \quad \alpha = \max_j \sum_{i=1}^m |\beta_{ij}| < 1, \quad (2.84)$$

або

$$3) \quad \alpha = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^2 < 1. \quad (2.85)$$

Швидкість збіжності оцінюється нерівністю

$$\rho(x^{(n)}, x) \leq \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha},$$

де $\rho(y, z)$ - відстань між векторами Y та Z , що може бути заданою:

$$\rho(y, z) = \max_i |z_i - y_i|,$$

коли виконується умова (2.83);

$$\rho(y, z) = \sum_{i=1}^m |z_i - y_i|,$$

коли виконується умова (2.84);

$$\rho(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2},$$

коли виконується умова (2.85).

Задаючи потрібну точність ε можна з рівності

$$\varepsilon = \rho(x^{(0)}, x^{(1)}) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}$$

одержати необхідну кількість ітерацій n , щоб досягти задане ε .

Наведені умови є достатніми для збіжності методу ітерацій, але аж ніяк не необхідними. Необхідні і достатні умови збіжності методу ітерацій дає така теорема, яку сформулюємо без доведення.

Теорема. Нехай система (2.81) має єдиний розв'язок. Послідовні наближення (2.82) збігаються до розв'язку системи (2.81) за довільного початкового наближення $x^{(0)}$ тоді та й тільки тоді, коли всі власні значення матриці β за модулем менше від одиниці.

Повернемося зараз до способів зведення (2.80) до форми (2.81). Запишемо (2.80) у розгорнутій формі

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = f_i, i = \overline{1, m}. \quad (2.86)$$

Якщо $a_{ii} \neq 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$, то можна (2.86) зобразити у вигляді

$$x_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, m}. \quad (2.87)$$

Звідси два найпростіших ітераційних метода.

Метод Якобі, який задається рекурентним співвідношенням:

$$x_i^{(n+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, m}. \quad (2.88)$$

Метод Зейделя, де вже знайдені компоненти беруться у правій частині співвідношення з $(n+1)$ -го наближення, а інші - з n -го наближення:

$$x_i^{(n+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j=i+1}^m \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1, m}. \quad (2.89)$$

Можна дати матричну форму методів Якобі і Зейделя.

Нехай матрицю A наведено у вигляді:

$$A = A_1 + D + A_2,$$

де A_1 - нижня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю; D - діагональна матриця з a_{ii} на головній діагоналі; A_2 - верхня трикутна матриця з нульовою головною діагоналлю.

За припущенням $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1, m}$, існує D^{-1} .

Тоді зображенню у формі (2.87) відповідає

$$x = -D^{-1}A_1x - D^{-1}A_2x + D^{-1}f,$$

або

$$x = -D^{-1}(A_1 + A_2)x + D^{-1}f.$$

Отже, методу Якобі відповідає ітераційна процедура

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^{(n)} + D^{-1}f.$$

Методу Зейделя відповідає

$$x^{(n+1)} = -D^{-1}A_1x^{(n+1)} - D^{-1}A_2x^{(n)} + D^{-1}f.$$

Використовуючи сформульовані раніш достатні умови збіжності $x^n \rightarrow x$, самостійно переконайтесь, що достатніми умовами збіжності методу Якобі є

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|; i = \overline{1, m}$$

або

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|; j = \overline{1, m},$$

тобто діагональне переваження матриці A .

Можна довести, що за зазначених умов збігається і метод Зейделя.

Покажемо, що до форми (2.81), що задовольняє умови збіжності, може бути зведена довільна система (2.80) з $|A| \neq 0$.

Дійсно, візьмемо матрицю $C = A^{-1} - \varepsilon$, де $\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}\|_m^m$ - матриця з достатньо малими за модулем елементами. Множачи (2.80) зліва на C маємо

$$(A^{-1} - \varepsilon)Ax = (A^{-1} - \varepsilon)f,$$

$$x = \varepsilon Ax + (A^{-1} - \varepsilon)f,$$

тобто одержали форму (2.81) з $\beta = \varepsilon A, b = (A^{-1} - \varepsilon)f$.

За рахунок вибору достатньо малих $|\varepsilon_{ij}|$ можна задовольнити умови збіжності.

Процес ітерації, що збігається, має властивість стійкості, тобто окрема похибка у обчисленнях не позначається на кінцевому результаті, тому що хибне наближення можна розглядати як новий початковий вектор.

3. ПРОБЛЕМА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ МАТРИЦЬ

Велика кількість задач математики та фізики потребує відшукування власних значень та власних векторів матриць, тобто відшукування таких значень λ , для яких існують нетривіальні розв'язки однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$Ax = \lambda x, \quad (3.1)$$

та відшукування цих нетривіальних розв'язків.

Тут $A = \|a_{ij}\|_m^m$ - квадратна матриця порядку m , $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ - невідомий вектор - стовпець.

З курсу алгебри відомо, що нетривіальний розв'язок системи (3.1) існує тоді та й тільки тоді, коли

$$D(\lambda) = |A - \lambda E| = 0, \quad (3.2)$$

де E - одинична матриця. Якщо розкрити визначник $|A - \lambda E|$, одержуємо алгебраїчне рівняння ступеня m відносно λ . Отже, задача визначення власних значень зводиться до проблеми розкриття визначника $|A - \lambda E|$ за ступенями λ та наступного розв'язання алгебраїчного рівняння m -го ступеня.

Визначник

$$D(\lambda) = |A - \lambda E|$$

називається *характеристичним (або віковим) визначником*, а рівняння (3.2) називається *характеристичним (або віковим) рівнянням*.

Відрізняють *повну проблему власних значень*, коли необхідно відшукати всі власні значення матриці A та відповідні власні вектори, і *часткову проблему власних значень*, коли необхідно відшукати тільки деякі власні значення, наприклад, максимальне за модулем власне значення.

Розглянемо тільки повну проблему власних значень і тільки один метод розв'язання цієї проблеми, пов'язаний з розгортанням характеристичного визначника $D(\lambda)$, тобто обчисленням коефіцієнтів при ступенях λ у відповідного характеристичного багаточлена.

3.1. Метод Данилевського розгортання вікового визначника

Означення. Квадратна матриця P порядку m називається *подібною* до матриці A , якщо вона може бути подана у вигляді

$$P = S^{-1}AS,$$

де S - невироджена квадратна матриця порядку m .

Теорема. Характеристичний визначник вихідної та подібної матриці збігаються.

Доведення. Очевидні рівності

$$\begin{aligned} |P - \lambda E| &= |S^{-1}AS - \lambda E| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda ES| = \\ &= |S^{-1}(A - \lambda E)S| = |S^{-1}| |A - \lambda E| |S| = |A - \lambda E|. \end{aligned}$$

Ідея методу Данилевського полягає у тому, що матриця A подібним перетворенням зводиться до так званої *нормальної форми Фробеніуса*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що характеристичне рівняння для матриці P має простий вигляд

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & \dots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m (\lambda^m - p_1 \lambda^{m-1} - p_2 \lambda^{m-2} - \dots - p_{m-1} \lambda - p_m) = 0,$$

тобто коефіцієнти при ступенях λ характеристичного полінома безпосередньо виражаються через елементи першого рядка матриці P .

Зведення матриці A до нормальної форми Фробеніуса P здійснюється послідовно по рядкам, починаючи з останнього рядка.

Зведемо матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} \end{pmatrix}$$

подібним перетворенням до вигляду

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,m-1}^{(1)} & a_{1m}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2,m-1}^{(1)} & a_{2m}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1}^{(1)} & a_{m-1,2}^{(1)} & \dots & a_{m-1,m-1}^{(1)} & a_{m-1,m}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $a_{m,m-1} \neq 0$. Можна перевірити, що такий вигляд має матриця A_1 , яка дорівнює

$$A_1 = M_{m-1}^{-1} A M_{m-1},$$

де

$$M_{m-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{m1}}{a_{m,m-1}} & -\frac{a_{m2}}{a_{m,m-1}} & \dots & \frac{1}{a_{m,m-1}} & -\frac{a_{mm}}{a_{m,m-1}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наступний крок - зведення матриці A_1 подібним перетворенням до вигляду A_2 , де і другий знизу рядок має одиницю у $(m-2)$ -му стовпці, а всі інші елементи рядка дорівнюють нулеві:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1,m-2}^{(2)} & a_{1,m-1}^{(2)} & a_{1m}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2,m-2}^{(2)} & a_{2,m-1}^{(2)} & a_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коли $a_{m-1,m-2}^{(1)} \neq 0$, то можна перевірити, що такий вигляд має матриця A_2 :
 $A_2 = M_{m-2}^{-1} A_1 M_{m-2}$, де

$$M_{m-2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1}^{(1)} & a_{m-1,2}^{(1)} & \dots & a_{m-1,m-2}^{(1)} & a_{m-1,m-1}^{(1)} & a_{m-1,m}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{m-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_{m-1,1}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & -\frac{a_{m-1,2}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & \dots & \frac{1}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & -\frac{a_{m-1,m-1}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} & -\frac{a_{m-1,m}^{(1)}}{a_{m-1,m-2}^{(1)}} \\ a_{m-1,m-2}^{(1)} & a_{m-1,m-2}^{(1)} & \dots & a_{m-1,m-2}^{(1)} & a_{m-1,m-2}^{(1)} & a_{m-1,m-2}^{(1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$A_2 = M_{m-2}^{-1} M_{m-1}^{-1} A M_{m-1} M_{m-2}.$$

Далі процедура аналогічна, коли на кожному кроці елемент чергового рядка, на місці якого подібним перетворенням потрібно отримати одиницю, не дорівнює нулеві.

У цьому разі (будемо називати його *регулярним*) нормальна формула Фробеніуса буде одержана за $(m-1)$ крок і буде мати вигляд

$$P = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{m-2}^{-1} M_{m-1}^{-1} A M_{m-1} M_{m-2} \dots M_2 M_1.$$

Розглянемо *нерегулярний* випадок, коли матриця, що одержується внаслідок подібних перетворень, зведена вже до вигляду

$$A_{m-k} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(m-k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(m-k)} & a_{1k}^{(m-k)} & \dots & a_{1,m-1}^{(m-k)} & a_{1m}^{(m-k)} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{k-1,1}^{(m-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(m-k)} & a_{k-1,k}^{(m-k)} & \dots & a_{k-1,m-1}^{(m-k)} & a_{k-1,m}^{(m-k)} \\ a_{k1}^{(m-k)} & \dots & a_{k,k-1}^{(m-k)} & a_{kk}^{(m-k)} & \dots & a_{k,m-1}^{(m-k)} & a_{km}^{(m-k)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ і елемент } a_{k,k-1}^{(m-k)} = 0.$$

Отже, звичайна процедура методу Данилевського не підходить через необхідність ділення на нуль.

У цій ситуації можливі два випадки. У першому випадку у k -му рядку лівіше елемента $a_{k,k-1}^{(m-k)}$ є елемент $a_{k,l}^{(m-k)} \neq 0$, $l < k-1$. Тоді помножуючи матрицю A_{m-k} зліва та справа на елементарну матрицю переставлення $P_{l,k-1}$, одержуємо матрицю

$$A'_{m-k} = P_{l,k-1} A_{m-k} P_{l,k-1},$$

у якої на відміну від матриці A_{m-k} переставлені l -й та $(k-1)$ -й рядок і l -й та $(k-1)$ -й стовпець. Внаслідок на необхідному нам місці одержуємо ненульовий елемент $a_{kl}^{(m-k)}$, вже перетворена частина матриці не змінюється, можна застосувати звичний крок методу Данилевського до матриці A'_{m-k} . Вона подібна до матриці A_{m-k} (а тому і до вихідної матриці A), оскільки елементарна матриця переставлення збігається із своєю оберненою, тобто $P_{l,k-1}^{-1} = P_{l,k-1}$.

Розглянемо другий нерегулярний випадок, коли у матриці A_{m-k} елемент $a_{k,k-1}^{(m-k)} = 0$ і всі елементи цього рядка, що знаходяться лівіше його, теж дорівнюють нулеві. У цьому разі характеристичний визначник матриці A_{m-k} може бути подано у вигляді

$$|A_{m-k} - \lambda E| = |B_{m-k} - \lambda E_{k-1}| |C_{m-k} - \lambda E_{m-k+1}|,$$

де E_{k-1} і E_{m-k+1} - одиничні матриці відповідної вимірності, а квадратні матриці B_{m-k} та C_{m-k} мають вигляд:

$$B_{m-k} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(m-k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(m-k)} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a_{k-1,1}^{(m-k)} & \dots & a_{k-1,k-1}^{(m-k)} \end{pmatrix},$$

$$C_{m-k} = \begin{pmatrix} a_{kk}^{(m-k)} & \dots & a_{k,m-1}^{(m-k)} & a_{km}^{(m-k)} \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звернемо увагу на те, що матриця C_{m-k} вже має нормальну форму Фробеніуса, і тому співмножник $|C_{m-k} - \lambda E_{m-k+1}|$ просто розгортається у вигляді багаточлена з коефіцієнтами, що дорівнюють елементам першого рядка.

Співмножник $|B_{m-k} - \lambda E_{k-1}|$ є характеристичним визначником матриці B_{m-k} . Для його розгортання можна знову застосувати метод Данилевського, зводячи матрицю B_{m-k} подібними перетвореннями до нормальної форми Фробеніуса.

Припустимо тепер, що матриця A подібним перетворенням $P = S^{-1}AS$ вже зведена до нормальної форми Фробеніуса. Розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\lambda^m - p_1\lambda^{m-1} - p_2\lambda^{m-2} - \dots - p_{m-1}\lambda - p_m = 0,$$

відшукуємо одним з відомих методів його корені $\lambda_i, i = \overline{1, m}$, які є власними значеннями матриці P та вихідної матриці A .

Тепер маємо задачу відшукати власні вектори, що відповідають цим власним значенням, тобто вектори $x^{(i)}, i = \overline{1, m}$, такі, що

$$Ax^{(i)} = \lambda_i x^{(i)}, i = \overline{1, m}.$$

Розв'яжемо її таким чином: відшукаємо власні вектори матриці P , а потім за допомогою одного співвідношення перерахуємо власні вектори матриці A . Це співвідношення дає така теорема.

Теорема. Нехай λ_i є власне значення, а $y^{(i)}$ є відповідний власний вектор матриці P , що подібна до матриці A , тобто

$$P = S^{-1}AS, Py^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}.$$

Тоді $x^{(i)} = Sy^{(i)}$ є власний вектор матриці A , що відповідає власному значенню λ_i .

Доведення. Тривіально виходить з того, що

$$S^{-1}ASy^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}.$$

Після множення лівої і правої частини цієї рівності зліва на S , отримаємо

$$A(Sy^{(i)}) = \lambda_i (Sy^{(i)}).$$

А це і означає, що $Sy^{(i)}$ - власний вектор матриці A , що відповідає власному значенню λ_i . Відшукаємо власний вектор матриці P , яка має нормальну форму Фробеніуса та подібна до матриці A . Запишемо $Py^{(i)} = \lambda_i y^{(i)}$ у розгорнутій формі

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{m-1} & p_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ y_2^{(i)} \\ \vdots \\ y_m^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i y_1^{(i)} \\ \lambda_i y_2^{(i)} \\ \vdots \\ \lambda_i y_m^{(i)} \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} p_1 y_1^{(i)} + p_2 y_2^{(i)} + \dots + p_m y_m^{(i)} = \lambda_i y_1^{(i)}, \\ y_1^{(i)} = \lambda_i y_2^{(i)}, \\ \dots\dots\dots \\ y_{m-1}^{(i)} = \lambda_i y_m^{(i)}. \end{cases}$$

У цій системі одна з змінних може бути зроблена вільною і вона може набути довільного значення. Як таку візьмемо $y_m^{(i)}$ та покладемо $y_m^{(i)} = 1$.

Тоді послідовно одержуємо

$$y_m^{(i)} = 1, y_{m-1}^{(i)} = \lambda_i, y_{m-2}^{(i)} = \lambda_i^2, \dots, y_1^{(i)} = \lambda_i^{m-1},$$

тобто шуканий власний вектор матриці P має вигляд

$$y^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda_i^{m-1} \\ \lambda_i^{m-2} \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Коли процес зведення матриці A до форми P був регулярним, то

$$S = M_{m-1} M_{m-2} \dots M_1.$$

Згідно з теоремою власним вектором матриці A для власного значення λ_i буде вектор

$$x^{(i)} = S y^{(i)} = M_{m-1} M_{m-2} \dots M_1 y^{(i)}.$$

Отже, задача відшукування власних векторів матриці A розв'язана.

4. МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо деякі методи чисельного розв'язування рівнянь $f(x)=0$, де $f(x)$ - деяка функція дійсної змінної x ; зокрема, $f(x)$ може бути багаточленом степеню n від x . Відшукування наближених розв'язків цього рівняння передбачає вирішення деяких задач, головні з яких :

- 1) відокремлювання розв'язків, тобто відшукування достатньо малої області, у якій знаходиться один та й тільки один розв'язок рівняння;
- 2) обчислення розв'язку з заданою точністю.

Відокремлювання розв'язків рівнянь. Якщо шукається тільки дійсний розв'язок рівняння $f(x)=0$, то для знайдення грубих значень його можна побудувати графік функції $y = f(x)$ та знайти абсциси точок перетину графіку з віссю x (Рис. 2) (так званий графічний метод).

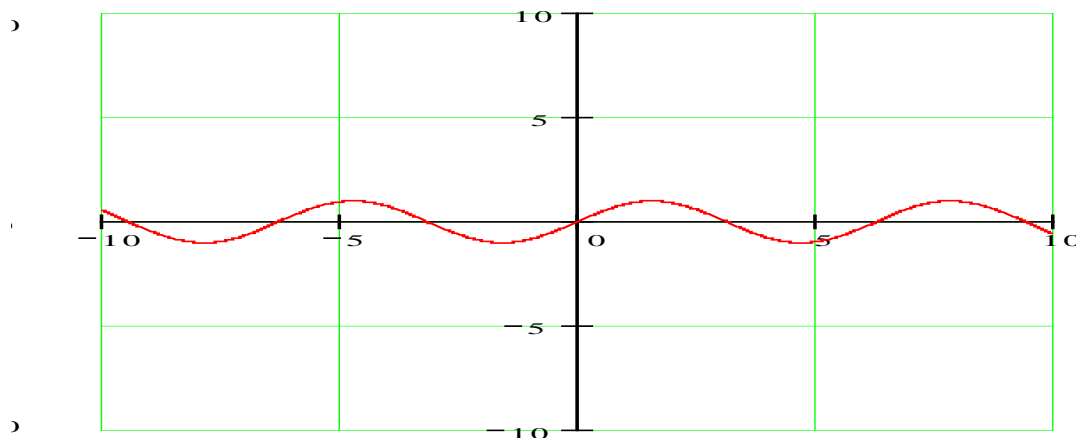


Рис. 2

Іноді рівняння $f(x)=0$ можна подати у вигляді $\psi(x)=g(x)$, де $\psi(x), g(x)$ - деякі функції, графіки яких будуються достатньо просто.

Тоді будуються графіки функцій $\psi(x)$, $g(x)$ і як наближені значення розв'язків рівняння $\psi(x)=g(x)$ беруться абсиси точок перетину графіків згаданих функцій (рис. 3).

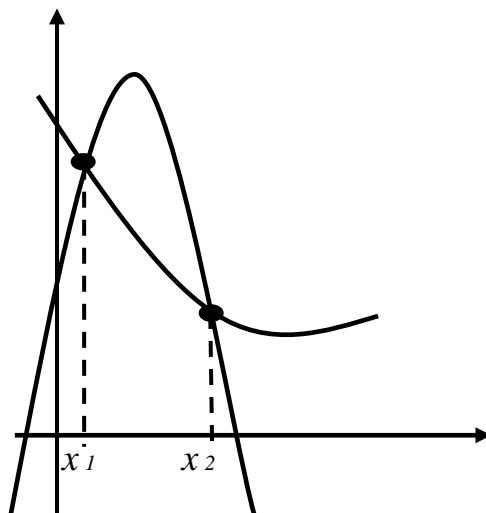


Рис. 3

Проте, у загальному випадку неясно на якому інтервалі $[a, b]$ будувати графік, з яким кроком обчислювати, наприклад, $f(x)$ щоб не минути деякий розв'язок (коли $f(x)$ дуже осцилює), скільки взагалі дійсних розв'язків має рівняння $f(x)=0$ і т. і. Задовільне вирішення цих питань може бути одержано тільки для деяких класів функцій $f(x)$, зокрема, для алгебраїчних багаточленів (на методах розв'язку алгебраїчних рівнянь зупинимось далі).

А у загальному випадку для відокремлювання проміжків, у яких знаходяться дійсні розв'язки рівняння $f(x)=0$, корисними можуть бути такі результати математичного аналізу.

1. Теорема Больцано -Коші (перша). Якщо функція $f(x)$ означена та неперервна на замкнутому проміжку $[a, b]$ та на кінцях цього проміжку одержує значення різних знаків, тоді поміж a та b знайдеться точка c , в якій функція одержує нульове значення $f(c)=0$ ($a < c < b$), тобто на цьому проміжку рівняння $f(x)=0$ має хоча б один корінь.
2. Коли при цьому в середині проміжку $f(x)$ є першу похідну, що не змінює знака, то корінь єдиний.

Розглянемо декілька найпростіших методів розв'язання рівняння $f(x)=0$, припускаючи, що відрізок $[a, b]$, на якому знаходиться єдиний корінь цього рівняння, яким-небудь чином визначений.

4.1. Метод поділу відрізка навпіл (метод бісекції, діхотомії)

Він є найбільш простим та надійним алгоритмом пошуку кореня рівняння

$$f(x)=0. \quad (4.1)$$

Нехай $f \in C[a, b]$, $f(a) f(b) < 0$, тобто функція $f(x)$ одержує значення різних знаків на кінцях відрізка $[a, b]$; відомо також, що рівняння (4.1) має єдиний корінь $x^* \in [a, b]$.

Покладемо $a_0=a$, $b_0=b$, $c_0=(a_0+b_0)/2$, тобто c_0 -середина відрізка $[a_0, b_0]$. Обчислюємо $f(c_0)$. Коли $f(c_0)=0$, то $x^*=c_0$ і обчислення на цьому закінчується. Коли

* Больцано Бернارد(1781-1848)-чеський математик, філософ і логік.

$f(c_0) \neq 0$, то знак $f(c_0)$ збігається або із знаком $f(a_0)$, або із знаком $f(b_0)$, оскільки $f(a)f(b) < 0$.

Отже, на кінцях одного з двох відрізків $[a_0, c_0]$ або $[c_0, b_0]$ функція f має однакові знаки, а на кінцях іншого - протилежні. Зберігаємо відрізок, на кінцях якого f має протилежні знаки (за теоремою Больцмана-Коші він містить корінь (4.1)), а інший відрізок відкидаємо (там кореня немає, оскільки він єдиний на $[a, b]$ за припущенням). Відрізок, що залишився, позначимо $[a_1, b_1]$, де

$$a_1 = \begin{cases} c_0, \text{signf}(a_0) = \text{signf}(c_0); \\ a_0, \text{signf}(a_0) \neq \text{signf}(c_0); \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, \text{signf}(b_0) = \text{signf}(c_0); \\ b_0, \text{signf}(b_0) \neq \text{signf}(c_0); \end{cases}$$

Очевидно, $\text{signf}(a_1) = \text{signf}(a_0)$ та $\text{signf}(b_1) = \text{signf}(b_0)$. Тому $f(a_1)f(b_1) < 0$. Шуканий корінь x^* міститься тепер на вдвічі меншому відрізку $[a_1, b_1]$.

Далі робимо аналогічно. Припустимо, що вже знайдено деякий відрізок $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, на кінцях якого функція f має протилежні знаки ($f(a_k)f(b_k) < 0$), і тому він містить шуканий корінь x^* . Знайдемо середину відрізка $[a_k, b_k]$:

$$c_k = (a_k + b_k)/2. \quad (4.2)$$

Обчислюємо $f(c_k)$. Коли $f(c_k) = 0$, то $x^* = c_k$ і обчислення закінчується. Якщо $f(c_k) \neq 0$, то покладемо

$$a_{k+1} = \begin{cases} c_k, \text{signf}(c_k) = \text{signf}(a_k); \\ a_k, \text{signf}(c_k) \neq \text{signf}(a_k); \end{cases} \quad (4.3)$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} c_k, \text{signf}(c_k) = \text{signf}(b_k); \\ b_k, \text{signf}(c_k) \neq \text{signf}(b_k); \end{cases}$$

і т. д.

Цей процес може бути скінченим, коли середина відрізка, одержаного на деякому кроці, збігається з шуканим коренем x^* , або він нескінченний.

Коли цей процес доведено до k -го кроку, то як наближене значення кореня x^* істотно узяти c_k . При цьому має місце очевидна оцінка похибки

$$|x^* - c_k| \leq (b - a)/2^{k+1}. \quad (4.4)$$

Якщо задана точність ε обчислення x^* , можна підрахувати кількість кроків k , що забезпечує цю точність:

$$k = \lceil (\ln(b-a) - \ln \varepsilon) / \ln 2 \rceil + 1,$$

де $\lceil (\ln(b-a) - \ln \varepsilon) / \ln 2 \rceil$ позначає цілу частину числа.

Наведений метод є типово машинним, оскільки обчислення за формулами (4.3) дуже прості і циклічні. Він має достатньо швидку збіжність. На кожному кроці права частина оцінки похибки (3) зменшується вдвічі.

4.2. Метод простої ітерації (послідовних наближень)

Метод простої ітерації є одним із найпопулярніших методів розв'язання рівняння

$$f(x)=0. \quad (4.5)$$

Замінімо це рівняння еквівалентним йому рівнянням

$$x=\varphi(x). \quad (4.6)$$

Це можна зробити багатьма способами, наприклад, якщо покласти

$$\varphi(x)=x-f(x)g(x),$$

де $g(x)$ - довільна неперервна знакопостійна функція.

Суть методу послідовних наближень полягає у наступному. Обирається деяке нульове наближення $x_0 \in [a, b]$ кореня рівняння (4.6) і підставляється у праву частину. Одержуємо число $x_1 = \varphi(x_0)$. Наступні наближення обчислюються за формулами

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n=0, 1, \quad (4.7)$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається, тобто існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$, то переходячи до границі у (4.7), одержуємо для неперервної функції $\varphi(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n), \text{ або } x^* = \varphi(x^*)$$

Отже, границя x^* є коренем рівняння (4.6).

Дослідимо питання про збіжність ітераційного процесу (4.7). Припустимо, що рівняння (4.6) має коренем $x = x^*$ і в колі $R = \{x: |x - x^*| \leq r\}$ функція $\varphi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця^{*}: існує $0 \leq k < \infty$ таке, що

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq k |x' - x''|, \quad (4.8)$$

для довільних $x', x'' \in R$.

Має місце теорема.

Теорема. Яке б не було $x_0 \in R$, послідовність (4.7) збігається до x^* , як тільки $\varphi(x)$ у колі R задовольняє умови Ліпшиця зі сталою $k < 1$, причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$|x_n - x^*| \leq k^n |x_0 - x^*|, \quad (4.9)$$

(без доведення).

Умова Ліпшиця із сталою $k < 1$ виконується зокрема, коли у деякому околі R точки $x = x^*$ функція $\varphi(x)$ має похідну $\varphi'(x)$, що за модулем не перевищує деяке число, що менше від одиниці, тобто

$$\max_{x \in R} |\varphi'(x)| \leq k < 1.$$

Це виходить з формули Лагранжа скінченних приростів

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| = |\varphi'(c)| |x' - x''| \leq k |x' - x''|.$$

Очевидно, швидкість збіжності тим більша буде, чим менше значення k .

^{*} Ліпшиць Рудольф (1832-1903)- німецький математик, професор Бреславльського і Боннського університетів.

Для випадку, коли $\varphi(x)$ - дійсна функція змінної x , $x=x^*$ - дійсний корінь рівняння (4.6), метод ітерації (4.7) має добру геометричну інтерпретацію.

На рис. 4 зображено геометричну картину методу ітерацій для випадків, коли $0 < \varphi'(x) \leq k < 1$ та $-1 < -k \leq \varphi'(x) < 0$. У останньому випадку за двома послідовними наближеннями кореня можна робити висновок про досягнуту точність на кожному кроці, тобто відхилення x_n від x^* не перевищує $|x_{n-1} - x_n|$.

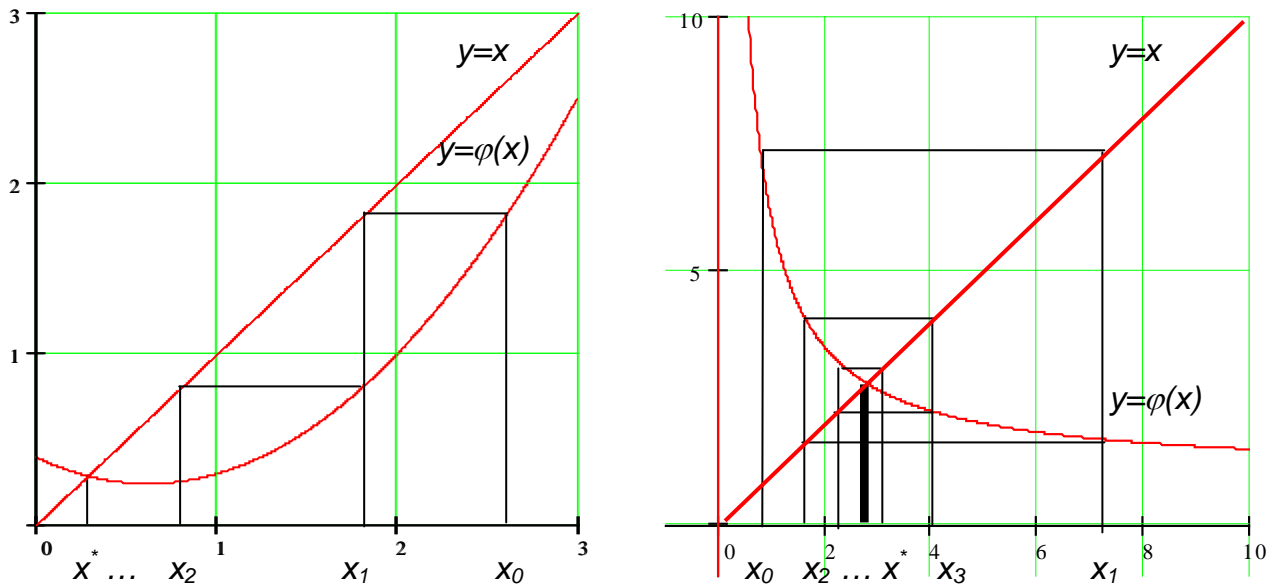


Рис. 4

При простішому практичному застосуванні методу ітерації для розв'язання рівняння $f(x)=0$, коли $f \in C[a,b]$, $x^* \in [a,b]$ та $f'(x)$ не змінює знаку на відрізку $[a,b]$, рівняння (4.5) зводиться до вигляду $x = \varphi(x)$ за формулою

$$\varphi(x) = x - f(x)/c,$$

причому c обирається так, щоб $|c| > M_1/2$, де $M_1 = \max_{[a,b]} |f'(x)|$, та знак c збігався би із знаком $f'(x)$ на $[a,b]$. При цьому $\varphi'(x) < 1$ на $[a,b]$, отже виповнюються умови теореми у деякому околу $R \subset [a,b]$.

Уточнення кореня обчислюється за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

де x_0 – значення, що взяті з R .

Можна показати, що точність обчислення можна визначити із співвідношення

$$|x_n - x_0| \leq (q^n / (1-q)) |x_1 - x_0|,$$

де $q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$.

Приклад: Відокремити корені рівняння графічно (рис. 5) та уточнити один з них методом ітерації з точністю 0,001. Рівняння має вигляд

$$2x + \lg(2x+3) = 1.$$

Рівняння подамо у вигляді

$$\lg(2x+3) = 1 - 2x.$$

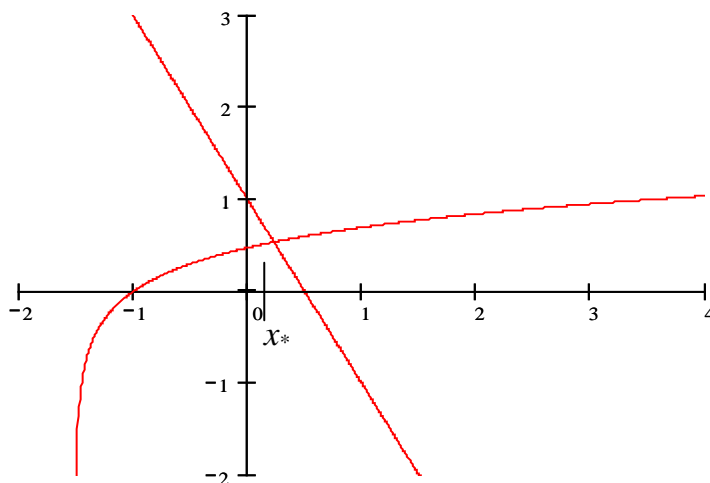


Рис. 5

З графіку бачимо, що рівняння має один корінь, що міститься у відрізку $[0;0,5]$. Для уточнення його зведемо рівняння до вигляду

$$x = x - f(x)/c,$$

де $|c| > M_1/2$ та c має той же знак, що й $f'(x)$ на відрізку $[0;0,5]$.

Знаходимо $f(x) = 2x + \lg(2x+3) - 1$; $f'(x) = 2 + 0,8686/(2x+3)$;

$$M_1 = \max_{x \in [0;0,5]} |f'(x)| = 2 + 0,8686/(2 \cdot 0 + 3) \approx 2,2895; f'(x) > 0, x \in [0;0,5].$$

Оберемо $c=2$, тоді рівняння набуде вигляду

$$x = x - f(x)/2 = x - x - \lg(2x+3)/2 + 1/2 = 1/2 - \lg(2x+3)/2.$$

За початкове наближення беремо $x_0=0$, усі інші наближення визначаємо з рівності

$$x_{n+1} = 1/2 - \lg(2x_n+3)/2.$$

Обчислення містить таблиця:

n	x_n	$2x_n+3$	$Lg(2x_n+3)$	$lg(2x_n+3)/2$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	3,5228	0,5469	0,2784
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304			

Відповідь: $x^* \approx 0,2304$.

4.3. Класичні ітераційні методи

Було показано, що коли рівняння $f(x) = 0$ має корінь $x = x_*$, а функція $g(x)$ не змінює знак у деякому околі $x = x_*$, то рівняння

$$x = \varphi(x) \equiv x - g(x) f(x) \quad (4.10)$$

також має корінь - $x = x_*$. При цьому функцію $g(x)$ вибирають такою, щоб ітераційний процес для рівняння (4.10) був збіжним. У одному з випадків методу простої ітерації як $g(x)$ ми обирали стали c .

Розглянемо два класичних методи, які можливо одержати іншим вибором функції $g(x)$.

4.4. Метод січних (хорд, лінійної інтерполяції)

Нехай $f(x)$ - дійсна функція дійсної змінної x , а $x = x_*$ - дійсний корінь рівняння $f(x) = 0$. Припустимо, що у деякому околі R точки $x = x_*$ функція $f(x) \in C_2(R)$, а $f'(x)$ та $f''(x)$ у цьому околі не змінюють знак. Це означає, що при переході через $x = x_*$ функція $f(x)$ змінює знак та має точку $x = x_*$ простим коренем. Нехай x_0 - точка цього околу, в якій $f(x_0) f''(x_0) > 0$. У виразі (4.1) як функцію $g(x)$ візьмемо функцію

$$g(x) \equiv \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Тоді рівняння

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x) = \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \quad (4.11)$$

також має корінь $x = x_*$.

За початкове наближення візьмемо довільну, достатньо наближену до x_* точку x_1 цього околу, в якій $f(x_1)$ має знак, протилежний знаку $f(x_0)$, а наступні наближення будемо звичайним способом:

$$x_n = \frac{x_0 f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_0)}{f(x_{n-1}) - f(x_0)}, n = 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

Далі у викладках враховуємо, що $f(x_*) = 0$. Тому що, з одного боку,

$$\varphi'(x_*) = \frac{[x_0 f'(x_*) - f(x_0)][f(x_*) - f(x_0)] - f'(x_*)[x_0 f(x_*) - x_* f(x_0)]}{[f(x_*) - f(x_0)]^2} = \frac{f(x_0) + (x_* - x_0) f'(x_*)}{f(x_0)},$$

а, з іншого боку, за формулою Тейлора*

$$f(x) = f(x_*) + (x - x_*) f'(x_*) + \frac{(x - x_*)^2}{2} f''(\xi),$$

де ξ міститься проміж x_* та x . То якщо покласти $x = x_0$, одержуємо

$$f(x_0) + (x_* - x_0) f'(x_*) = \frac{(x_0 - x_*)^2}{2} f''(\xi).$$

Отже,

$$\varphi'(x_*) = \frac{(x_0 - x_*)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f(x_0)} = \frac{(x_0 - x_*)}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi_1)},$$

тому що $f(x_0) = f(x_*) + (x_0 - x_*) f'(\xi_1)$, $\xi_1 \in (x_*, x_0)$.

При x_0 , достатньо близькому до $x = x_*$, $\varphi'(x_*)$ - незначна величина, і тому існує такий окіл $|\varphi'(x)| \leq k < 1$.

Якщо x_1 взяти з цього околу, то послідовність (3) буде збігатися до $x = x_*$.

Оскільки $f(x_n) = f(x_n) - f(x_*) = f'(\xi_2)(x_n - x_*)$, то позначивши $m = \min_{x \in [x_0, x_1]} |f'(x)|$,

будемо мати $|x_n - x_*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, що дає змогу на кожному кроці по значенням $f(x_n)$ стежити за досягнутою точністю.

* Тейлор Брук (1685-1731) - англійський математик і філософ, чл. Лондонського королівського товариства, його вчений секретар

Геометрично цей метод полягає у тому, що значення x_{n+1} є абсцисою точки перетину прямої, що проходить через точки $(x_0, f(x_0))$ та $(x_n, f(x_n))$, з віссю x (див. рис. 6, 7, 8, 9).

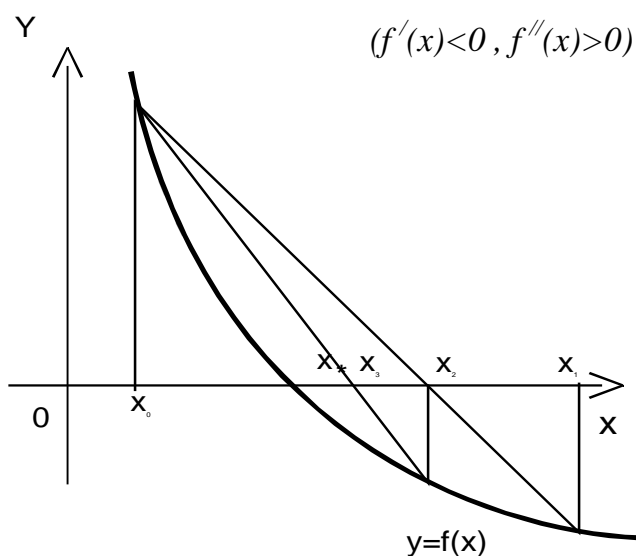


Рис. 6

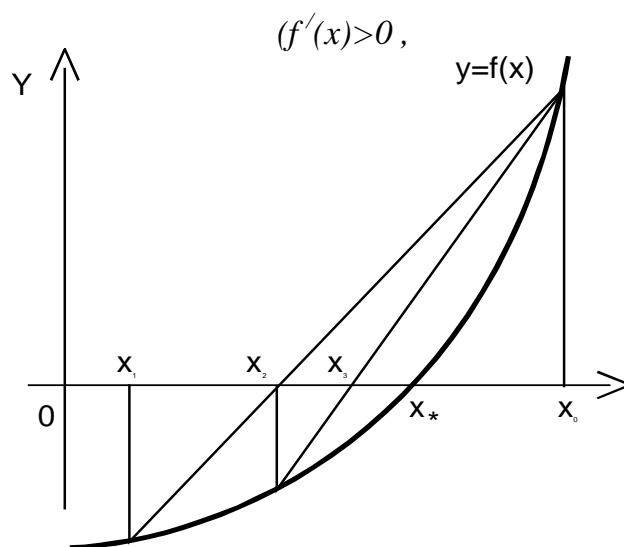


Рис. 7

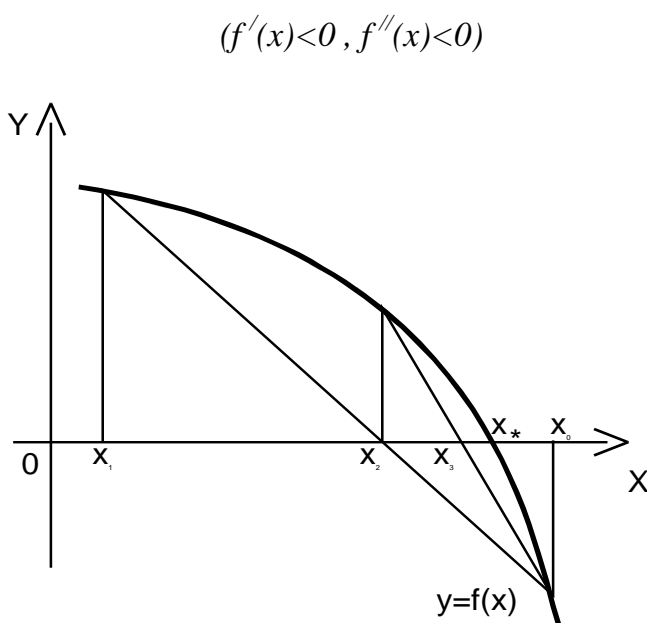


Рис. 8

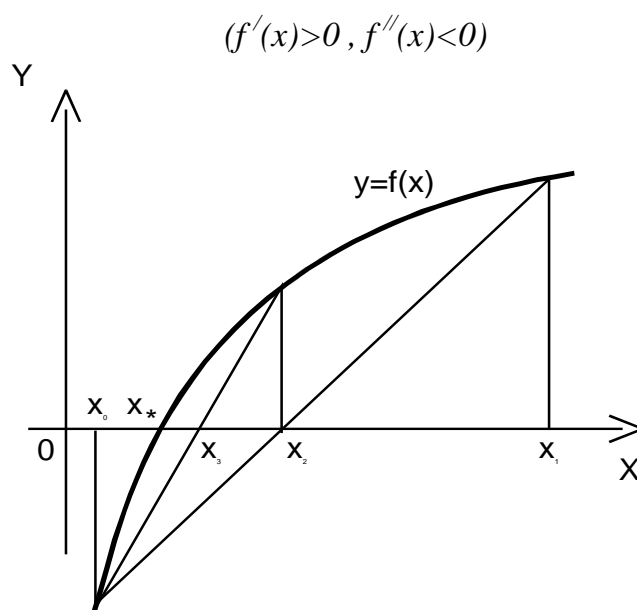


Рис. 9

Тому цей метод називають методом січних (хорд).

4.5. Метод Ньютона (метод дотичних)

Другий класичний метод розв'язання рівняння $f(x)=0$ - метод Ньютона, одержуємо, якщо покладемо в (4.1)

$$g(x) \equiv \frac{1}{f'(x)},$$

тобто зведемо задачу відшукування кореня $x = x_*$ рівняння $f(x) = 0$ до пошуку кореня рівняння

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (4.13)$$

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$, де знаходиться єдиний корінь рівняння $f(x) = 0$, функція $f(x)$ має неперервні похідні $f'(x)$ та $f''(x)$, що не перетворюються у нуль на цьому відрізку.

У цьому разі

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \text{ та } \varphi'(x_*) = 0.$$

Це означає, що існує такий окіл точки $x = x_*$, що коли початкове наближення $x = x_0$ узятو з цього околу, то послідовність

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

буде збігатися до $x = x_*$. Початкове наближення x_0 доцільно обирати так, щоб було

$$f(x_0) f''(x_0) > 0. \quad (4.15)$$

Метод Ньютона може бути застосовано не тільки для відшукування дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$, але й комплексних коренів, тільки слід мати на увазі, що при відшуванні комплексного кореня у разі дійсної функції $f(x)$ початкове наближення x_0 необхідно брати комплексним числом, а не дійсним.

У разі, коли $x = x_*$ є дійсним коренем рівняння $f(x) = 0$, цей метод має просту геометричну інтерпретацію. Значення x_{n+1} є абсцисою точки перетину дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $x = x_n$ з віссю x . Тому метод Ньютона часто називають методом дотичних. Як бачимо з рис. 10, 11, 12, 13, послідовні наближення до дійсного кореня у методі Ньютона збігаються до нього монотонно, наближуючись з боку x_0 .

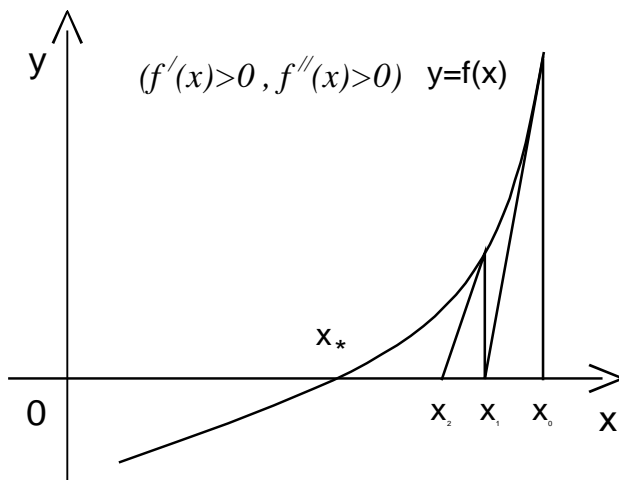


Рис. 10

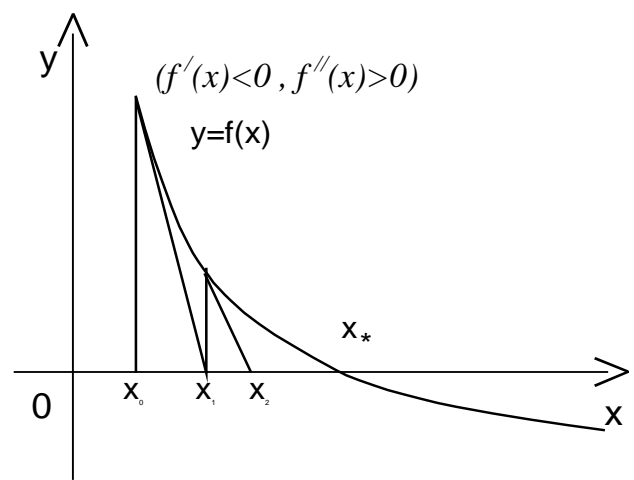


Рис. 11

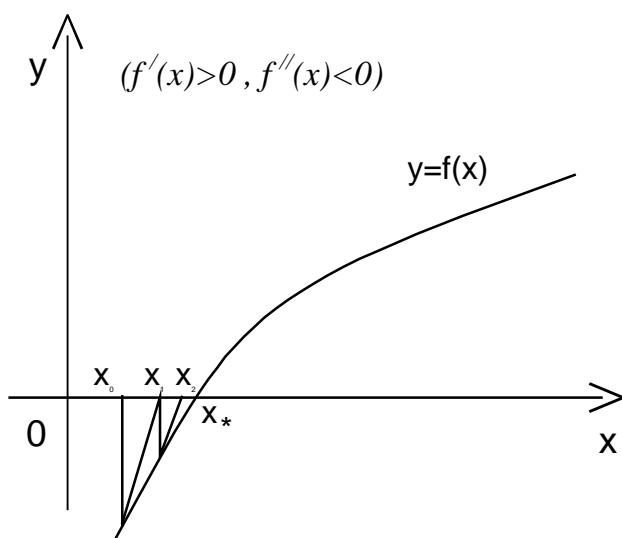


Рис. 12

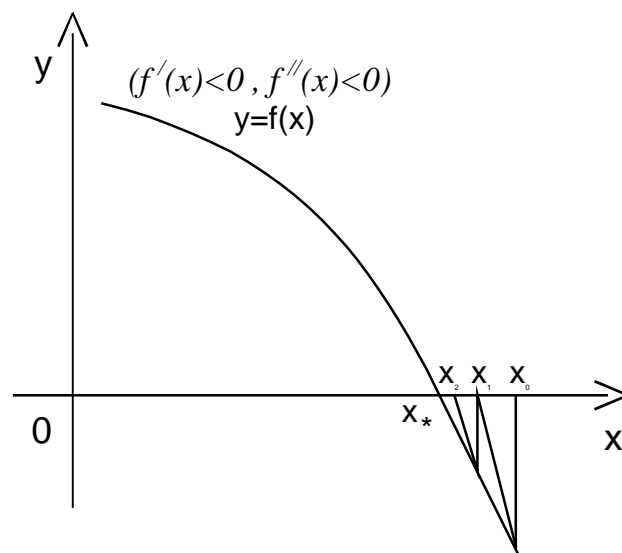


Рис. 13

Коли за початкове наближення у методі Ньютона взяти точку x_0 , де $f(x_0) f''(x_0) < 0$, то, як бачимо з рисунка, можна не дійти до кореня $x = x_*$, якщо тільки початкове наближення не дуже добре.

Швидкість збіжності методу Ньютона можна визначити так.
За формулою Тейлора

$$0 = f(x_*) = f(x_n) + f'(x_n)(x_* - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_* - x_n)^2, \xi \in (x_*, x_n).$$

Тоді

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_* - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} (x_* - x_n)^2.$$

Отже,

$$x_{n+1} - x_* = x_n - x_* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} (x_* - x_n)^2.$$

Якщо $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$, $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$, де $[a, b]$ - відрізок, що містить x_0 та x_* , на якому не змінює знак $f'(x)$ і $f''(x)$, то

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_*|^2.$$

Це свідчить про швидку збіжність методу Ньютона.

4.6. Комбінований метод

Комбінуючи метод січних і метод Ньютона, можна одержати метод відшукування дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$, перевага якого полягає у тому, що при попередніх припущеннях відносно $f'(x)$ і $f''(x)$ послідовні наближення x_n і x_{n+1} знаходяться по різні боки від кореня, і тому можна стежити у процесі обчислень за одержаною точністю, до того ж він збігається значно швидше методу січних.

Нехай на відрізку $[a, b]$ міститься єдиний корінь рівняння $f(x) = 0$, а $f'(x)$ та $f''(x)$ на цьому відрізку не змінюють знаки.

Якщо $f(a) f''(a) > 0$ (рис. 14, 15), то знаходимо x_0 і x_1 за формулами

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (4.16)$$

а наступні наближення знаходимо за формулами

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}. \quad (4.17)$$

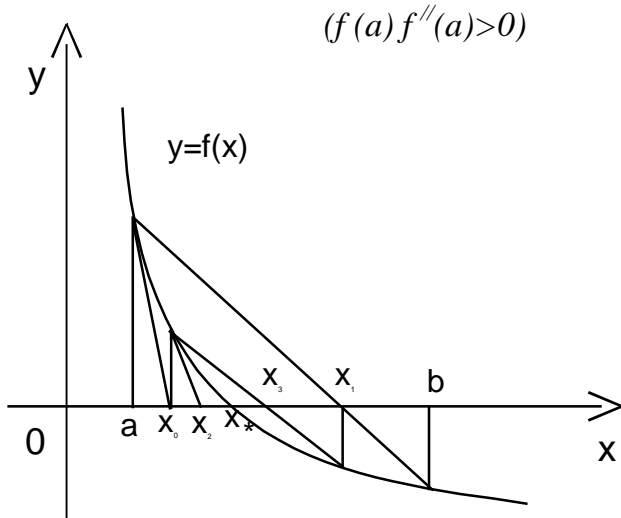


Рис. 14

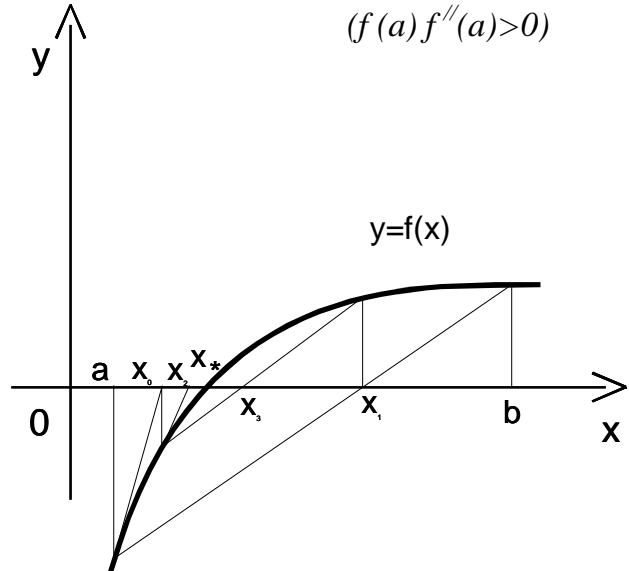


Рис.15

Коли ж $f(b)f''(b) > 0$ (рис. 16, 17), то x_0 і x_1 знаходимо за формулами

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (4.16')$$

а наступні наближення – за формулами (4.17).

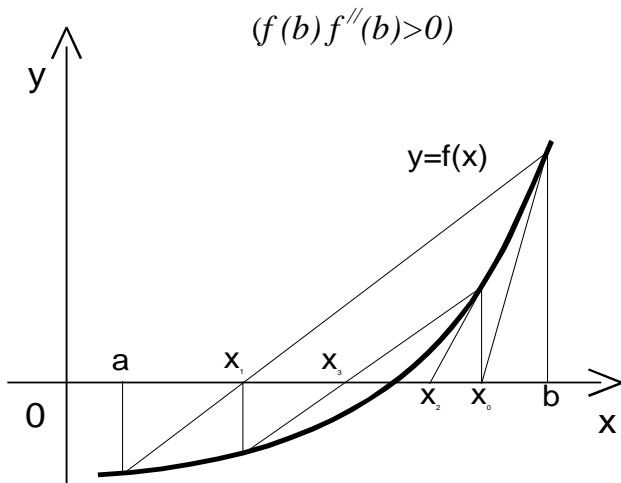


Рис. 16

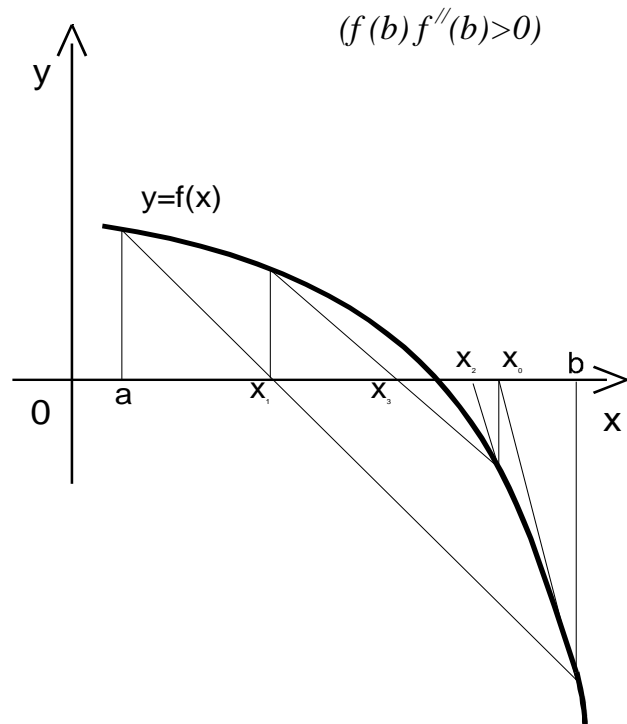


Рис. 17

Як бачимо з рисунків, послідовні наближення завжди містяться по різні боки від $x = x_*$, та перші знаки x_{2n} і x_{2n+1} , що збігаються, є вірними знаками для $x = x_*$.

4.7. Розв'язання алгебраїчних рівнянь

Означення. Рівняння вигляду

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (4.18)$$

де $a_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ - дійсні або комплексні числа, x - невідоме, зветься *алгебраїчним рівнянням*. Якщо $a_0 \neq 0$, то n зветься *степенем* рівняння, числа $a_i, i=0, 1, 2, \dots, n$ називаються *коефіцієнтами* рівняння.

З курсу алгебри відомо, що рівняння (4.18) при $a_0 \neq 0$ має точно n коренів (комплексних або дійсних). Для розв'язання рівняння (4.18), взагалі, можливо використовувати ті ж самі методи, які розглянуто вище для нелінійних рівнянь загального виду (наприклад, метод Ньютона).

Для відшукування меж області, у якій містяться всі корені рівняння (4.18), можуть бути корисними такі результати (доведення яких наведено у спецкурсі).

Нехай $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ і

$$a = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}, \quad a' = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}.$$

Теорема 1. Усі корені рівняння (4.18) (комплексні та дійсні) містяться у кільці

$$|a_n|/(a' + |a_n|) \leq |x| \leq 1 + a/|a_0|. \quad (4.19)$$

Припустимо тепер, що всі коефіцієнти рівняння (4.18) дійсні числа та $a_0 > 0$. Будемо цікавитися межами дійсних коренів цього рівняння. Очевидно, достатньо мати способи визначення меж додатних коренів, оскільки замінюючи x на $-x$ ми одержимо рівняння, корені якого відрізняються від коренів вихідного рівняння знаком.

Теорема 2 (Лагранжа). Позначимо через δ максимум абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів рівняння, та нехай перший від'ємний коефіцієнт у послідовності $a_0, a_1, \dots, a_n \in a_m$. Тоді всі додатні корені (4.18) менше за $1 + \sqrt[m]{\delta/a_0}$. Якщо від'ємних коефіцієнтів немає, то нема і додатних коренів.

4.8. Відшукування коренів алгебраїчних рівнянь методом вилучення множників

Розглянемо спеціалізовані методи розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих ступенів.

Відомо, що багаточлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (4.20)$$

з дійсними коефіцієнтами може бути зображений у вигляді добутку багаточленів степеню не вище двох також з дійсними коефіцієнтами.

Лінійні множники у такому зображенні відповідають дійсним кореням рівняння (4.18), а квадратичні - парам комплексно-спряжених коренів. Отже, якщо мати способи розкладання багаточлена на множники, то задача відшукування коренів рівняння (4.18) зводиться до розв'язання зовсім простих рівнянь. У зв'язку з цим розроблені методи вилучення дійсних множників $f(x)$.

При застосуванні методів вилучення множників доводиться багато разів виконувати ділення багаточлена на багаточлен, тобто знаходити частку та остачу.

Якщо дільник має перший ступінь, тоді це зручно виконувати за схемою Горнера^{*}. Нехай потрібно відшукати частку і остачу від ділення багаточлена (4.20) на багаточлен $x-r$. Позначимо остачу від ділення через R , а часткою нехай буде багаточлен

$$g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

Тоді R і b_i знаходиться за схемою Горнера

$$\begin{array}{r} a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{n-1} \ a_n \ |r \\ + \ b_0r \ b_1r \ b_2r \ \dots \ b_{n-2}r \ b_{n-1}r \\ \hline b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_{n-1} \ R, \end{array}$$

де $b_0=a_0$, а кожне наступне число нижнього рядка дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним.

Оскільки $R=f(r)$, тоді схему Горнера можна застосувати і для відшукування значень багаточлена $x=r$.

Для відшукування частки

$$g(x)=b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\dots+b_{n-3}x+b_{n-2}$$

і остачі

$$R(x)=c_0x+c_1$$

від ділення багаточлена (4.20) на x^2+px+q можна використовувати таку схему

$$\begin{array}{r} | \ a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{n-2} \ a_{n-1} \ a_n \\ -p \ | \ -pb_0 \ -pb_1 \ -pb_2 \ \dots \ -pb_{n-3} \ -pb_{n-2} \\ -q \ | \ -qb_0 \ -qb_1 \ \dots \ -qb_{n-4} \ -qb_{n-3} \ -qb_{n-2} \\ \hline b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_{n-2} \ c_0 \ c_1, \end{array}$$

де останній рядок одержується як сума перших трьох рядків.

4.9. Метод Ліна вилучення множників

Метод Ліна, або метод передостанньої остачі, вилучення множника $g_2(x)$ другого ступеня з багаточлена

$$f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_3 \quad (4.21)$$

полягає у наступному. За початкове наближення $g_{2,1}(x)$ беремо деякий багаточлен другого ступеня $g_{2,1}(x)=x^2+b_1^{(4.18)}x+b_2^{(4.18)}$ та здійснює ділення $f_n(x)$ на $g_{2,1}(x)$ доти, поки у остачі одержимо багаточлен другого ступеня - передостанню остачу. За наступне наближення $g_{2,2}(x)$ беремо цю остачу, що поділена на коефіцієнт при x^2 – зведена передостанню остачу. Далі процес повторюється, тобто якщо вже знайдене k -е наближення до $g_2(x)$

$$g_{2,k}(x)=x^2+b_1^{(k)}x+b_2^{(k)},$$

то $g_{2,k+1}(x)$ визначається як зведена передостання остача від ділення багаточлена $f_n(x)$ на $g_{2,k}(x)$. Процес продовжуємо доти, поки коефіцієнти двох послідовних наближень будуть збігається у межах заданої точності.

Ділення багаточлена $f_n(x)$ на трьохчлен $x^2+b_1^{(k)}x+b_2^{(k)}$ до одержання передостанньої остачі можна виконати за схемою (що аналогічна схемі Горнера)

$$\begin{array}{r} | \ 1 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{n-3} \ a_{n-2} \ a_{n-1} \ a_n \\ -b_1^{(k)} \ | \ -b_1^{(k)} \ -b_1^{(k)}c_1^{(k)} \ -b_1^{(k)}c_2^{(k)} \ \dots \ -b_1^{(k)}c_{n-4}^{(k)} \ -b_1^{(k)}c_{n-3}^{(k)} \\ -b_2^{(k)} \ | \ -b_2^{(k)} \ -b_2^{(k)}c_1^{(k)} \ \dots \ -b_2^{(k)}c_{n-5}^{(k)} \ -b_2^{(k)}c_{n-4}^{(k)} \ -b_2^{(k)}c_{n-3}^{(k)} \end{array}$$

^{*} Горнер Вільямс Джордж(1786-1837) - англійський математик, що працював у галузі алгебри.

$$\frac{1}{c_1^{(k)} c_2^{(k)} c_3^{(k)} \dots c_{n-3}^{(k)} d_0^{(k)} d_1^{(k)} d_2^{(k)},}$$

де останній рядок є сума перших трьох, при цьому $x^{n-2}+c_1^{(k)} x^{n-3}+\dots+c_{n-3}^{(k)}x$ – передостання частка, а $d_0^{(k)}x^2+d_1^{(k)}x+d_2^{(k)}$ – передостання остача.

Практично прийнятних критеріїв збіжності цього методу у загальному випадку не існує.

Остання частка є наближеним зображенням другого множника, що доповнює шуканий множник $g_2(x)$ до $f_n(x)$. Вона у загальному випадку має вигляд $x^{n-2}+c_1^{(k)} x^{n-3}+\dots+c_{n-3}^{(k)}x+d_0^{(k)}$.

4.10. Вилучення квадратичного множника за методом Хічкока

Задовільну збіжність при вдалому початковому наближенні дає наступний алгоритм вилучення квадратичного множника з багаточлена (4.21)

1. Береться початкове наближення $x^2+p^{(0)}x+q^{(0)}$ (наприклад, можна взяти $p^{(0)}=0$, $q^{(0)}=0$, тобто за початкове наближення береться x^2).

2. Знаходиться остача і частка від ділення $f_n(x)$ на $x^2+p^{(0)}x+q^{(0)}$, тобто знаходиться $P(p^{(0)}, q^{(0)})x+Q(p^{(0)}, q^{(0)})$ та $L(x)$ такі, що $f_n(x) = L(x) x^2+p^{(0)}x+q^{(0)} + P(p^{(0)}, q^{(0)})x+Q(p^{(0)}, q^{(0)})$.

3. Частка $L(x)$ знову ділиться на $x^2+p^{(0)}x+q^{(0)}$, знаходиться остача $R(p^{(0)}, q^{(0)})x+S(p^{(0)}, q^{(0)})$.

4. Знаходяться частинні похідні від P, Q, R, S з співвідношень

$$P_p'(p^{(0)}, q^{(0)})=p^{(0)} R(p^{(0)}, q^{(0)}) - S(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$$P_q'(p^{(0)}, q^{(0)})=-R(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$$Q_p'(p^{(0)}, q^{(0)})=q^{(0)} R(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$$Q_q'(p^{(0)}, q^{(0)})=-S(p^{(0)}, q^{(0)}).$$

5. Наступне наближення $x^2+p^{(4.18)}x+q^{(4.18)}$ знаходиться шляхом розв'язання системи рівнянь

$$P_p'(p^{(0)}, q^{(0)})[p^{(4.18)}-p^{(0)}]+P_q'(p^{(0)}, q^{(0)})[q^{(4.18)}-q^{(0)}]=-P(p^{(0)}, q^{(0)}),$$

$$Q_p'(p^{(0)}, q^{(0)})[p^{(4.18)}-p^{(0)}]+Q_q'(p^{(0)}, q^{(0)})[q^{(4.18)}-q^{(0)}]=-Q(p^{(0)}, q^{(0)}).$$

6. Далі процес повторюється з заміною $p^{(0)}, q^{(0)}$ на $p^{(4.18)}, q^{(4.18)}$, а останніх на $p^{(4.19)}, q^{(4.19)}$ та обчислюються $p^{(4.19)}, q^{(4.19)}$. І так далі доти, поки коефіцієнти $p^{(k)}, q^{(k)}$ двох послідовних наближень будуть збігатися у межах заданої точності.

5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу розв'язання системи рівнянь

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, n}. \quad (5.1)$$

У найпростішій ситуації ($n=2$) - це система двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Наближені розв'язки (5.2) можна одержати, якщо на площині x_1, x_2 побудувати графіки $f_1(x_1, x_2)=0$ та $f_2(x_1, x_2)=0$ і знайти точки перетину цих графіків (див. рис. 18).

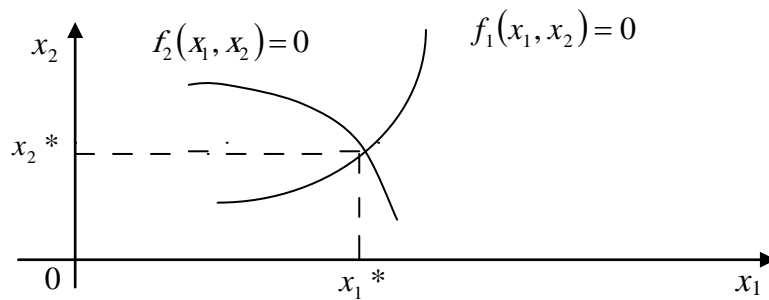


Рис. 18

Зрозуміло, що далі потрібен алгоритм уточнення цих наближених значень.

5.1. Метод ітерації розв'язання систем нелінійних рівнянь

Система рівнянь (5.1) еквівалентним перетворенням зводиться до вигляду

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.3)$$

Як це робиться в одному окремому випадку, далі наведено.

Нехай відомо, що система (5.3) у деякому околі простору x_1, x_2, \dots, x_n має єдиний розв'язок $x_i^*, i = \overline{1, n}$, а числа $x_i^{(o)}, i = \overline{1, n}$ - достатньо наближені до $x_i^*, i = \overline{1, n}$. При деяких обмеженнях на функції $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з цих наближених значень координат кореня рівнянь (5.3) (а тому й еквівалентних рівнянь (5.1)), шукаються наближені значення x_i^* з наперед заданою точністю за такою схемою.

По $x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}$ знаходиться наступне наближення за формулами

$$x_i^{(1)} = \varphi_i(x_1^{(o)}, x_2^{(o)}, \dots, x_n^{(o)}), \quad i = \overline{1, n}.$$

За одержаними значеннями шукаються наближені значення координат кореня на другому кроці за формулами

$$x_i^{(2)} = \varphi_i(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}), \quad i = \overline{1, n}.$$

Взагалі, якщо знайдене k -е наближення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, то $(k+1)$ -е наближення знаходиться за формулами

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.4)$$

Якщо при $k \rightarrow \infty$ $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^*$, тоді метод ітерації **збігається** до шуканого розв'язку. Для того, щоб одержати розв'язок з потрібною точністю, практично процес продовжують доти, поки два послідовних наближення будуть збігається з заданою точністю.

Питання, що пов'язані з умовами збіжності методу, визначеного рекурентними співвідношеннями (5.4), тут не розглядаються (відповідний матеріал докладно викладено у спецкурсі).

5.2. Метод Ньютона

Позначимо через $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, а через $f(x)$ - вектор-функцію

$$f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T. \quad (5.5)$$

Тоді система (5.1) може бути записана у вигляді одного векторного рівняння

$$f(x) = 0. \quad (5.6)$$

Припустимо, що у деякій опуклій області G , що містить розв'язок

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$$

системи (5.6), функції $f_i(x_1, \dots, x_n)$ неперервні, мають неперервні частинні похідні першого порядку та у точці $x=x^*$ матриця

$$f'_x(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

невироджена. Тоді у деякому околі $x=x^*$ вона буде мати обернену матрицю, яку позначимо $f_x^{-1}(x)$.

Очевидно, що розв'язок x^* системи (5.1) буде й розв'язком векторного рівняння

$$x = x - f_x^{-1}(x) f(x). \quad (5.8)$$

Якщо $x^{(0)} = (x^{(0)}_1, x^{(0)}_2, \dots, x^{(0)}_n)$ - деяке початкове наближення до розв'язку x^* , то для його відшукання можливо побудувати ітераційний процес

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f_x^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.9)$$

де $x^{(k)} = (x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_n)^T$ - k -е наближення до розв'язку x^* . Векторну рівність (5.9) можна переписати у вигляді

$$f_x(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

або у розгорнутій формі

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) = -f_i(x^{(k)}), \quad (5.11)$$

$$i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ітераційний метод, у якому послідовні наближення шукаються з співвідношення (5.9) або з систем (5.10), (5.11), називається **методом Ньютона** для розв'язання системи рівнянь (5.1).

Якщо для обчислення послідовних наближень використовується співвідношення (5.9), то на кожному кроці необхідно обчислювати обернену матрицю до матриці $f_x(x)$, у якій замість x береться попереднє наближення. Якщо використовується співвідношення (5.10), то на кожному кроці для відшукання поправок $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ до знайденого наближення $x^{(k)}$ необхідно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею $f_x(x^{(k)})$ і вектором правих частин $-f(x^{(k)})$.

Наведемо одну з теорем, що обґрунтовують метод Ньютона (без доведення).

Теорема. Якщо функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ неперервні разом з першими похідними в опуклій області G , що містить розв'язок x^* системи (5.1), при $x=x^*$ матриця (5.7) невиводжена, то існує такий окіл

$$R = \{x : \|x - x^*\| \leq \delta\},$$

що за довільного $x^{(0)} \in R$ послідовність $\{x^{(k)}\}$ у методі Ньютона збігається до розв'язку x^* системи (5.1).

Тут під нормою вектора $\|x\|$ розуміється, наприклад, $\|x\|_1 = \max_i |x_i|$.

При більш жорстких вимогах до функцій $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ доводиться існування та єдиність розв'язку системи (5.1) у деякій області, збіжність методу Ньютона до цього розв'язку, одержується оцінка швидкості збіжності методу (відповідні результати розглядаються у спецкурсі).

Метод Ньютона має істотні недоліки.

1. Для застосування методу Ньютона початкове наближення до шуканого розв'язку має бути "добрим" ($x^{(0)}$ має бути достатньо наближеним до x^*). Якщо воно задано грубо, то метод може розбігатись, або привести до іншого розв'язку.

2. На кожному кроці необхідно обчислювати елементи матриці $f_x(x)$ та шукати обернену до неї, а це потребує великого об'єму обчислювальної роботи (при великому n).

Але, якщо початкове наближення обрано добре, то він дуже швидко збігається і для одержання розв'язку з потрібною точністю необхідно зробити лише невелику кількість кроків.

У зв'язку з трудомісткістю методу Ньютона була запропонована його модифікація, за якої обернена матриця до $f_x(x)$ шукається тільки один раз. За цієї модифікації послідовні наближення шукаються за формулою

$$\tilde{X}^{(k+1)} = \tilde{X}^{(k)} - f_x^{-1}(x^{(0)}) f(\tilde{X}^{(k)}), k = 0, 1, 2 \dots$$

Зрозуміло, це накладає ще більш жорсткі обмеження на функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$ та початкове наближення $x^{(0)}$.

5.3. Інші методи розв'язання

Багато сучасних методів розв'язання системи (5.1) будуються на інших ідеях, ніж ті, що розглянуто вище.

А саме, велику популярність у наш час набули методи, що зводять розв'язання системи (5.1) до задачі відшукування екстремуму функції багатьох змінних.

Наприклад, розглянемо функцію

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ясно, що кожному розв'язку $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ системи (5.1) відповідає нульовий мінімум функції $\Phi(x)$ та, навпаки, кожна точка нульового мінімуму $\Phi(x)$ дає розв'язок системи (5.1). Отже, задача відшукування розв'язків системи (5.1) зводиться до задачі відшукування точок нульового мінімуму допоміжної функції $\Phi(x)$. Для розв'язання цієї задачі застосовуються градієнтні методи, методи покоординатного спуску і т. і. У цьому курсі не розглянуто ці методи, оскільки вони докладно будуть вивчатись у курсі "Математичні методи дослідження операцій" та супутніх спецкурсах, присвячених вивченню методів оптимізації.

6. ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

По кожному завданню звіт має містити такі пункти:

- 1) постановка задачі;
- 2) стисле викладання методу її розв'язання ;
- 3) обчислювальна схема методу(алгоритм);
- 4) текст відповідної програми на C++(бажано);
- 5) результат розрахунку;
- 6) оцінювання точності.

Звіт оформлюється за стандартною формою, що прийнята в університеті.

6.1. Завдання 1

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = f$ з точністю $\Delta=0,001$.
Обчислити визначник $|A|$ та обернену матрицю A^{-1} .

1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.6 & 5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.3 & 0.3 & 3.5 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.9 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 8 & 0.7 & 0.5 \\ 1 & 0.3 & 5.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.7 & 6 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.6 & 7 & 0.8 & 0.7 \\ 1.3 & 0.6 & 4 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 0.5 & 6 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1.4.

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 1.5 & 0.9 & 0.8 \\ -1 & 23 & 2.2 & 1.7 \\ 0.4 & 1.2 & 13 & 0.7 \\ 1.1 & 1.1 & 1.9 & 18 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1.3 & 0.5 & 0.2 \\ -0.6 & 14 & 1.1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 9.5 & 0.6 \\ 0 & 0.9 & 1.3 & 10 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0.7 & 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 11 & 3.4 & 1.3 \\ 1.5 & 1.2 & 5 & 0.3 \\ 1.5 & 0.3 & 0.7 & 10 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 0.7 & 0.4 \\ -1 & 19 & 16 & 1.1 \\ 0.2 & 0.6 & 12 & 1.7 \\ 0.3 & 1.1 & 1.7 & 14 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1.1 & 0.4 & 0.2 \\ -0.2 & 11 & 0.9 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 & 7.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 1 & 12 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 1.3 & 0.7 & 1.3 \\ -0.6 & 18 & 1.7 & 1.3 \\ 0.6 & 0.9 & 10.5 & 0.6 \\ 0.8 & 0.9 & 1.5 & 14 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1.10.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0.9 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 10 & 1.2 & 0.8 \\ 1.1 & 0.6 & 6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 0.8 & 8 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1.11.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1.1 & 0.6 & 0.6 \\ -0.2 & 15 & 1.5 & 1.2 \\ 0.9 & 0.9 & 8.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.7 & 1.2 & 1.2 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1.12.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 1.5 & 0.6 & 0.2 \\ -1 & 17 & 1.3 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 11.5 & 0.7 \\ -0.1 & 1.1 & 1.6 & 12 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1.13.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1.1 & 0.7 & 0.8 \\ -0.2 & 17 & -0.6 & 1.5 \\ 1 & 1.2 & 9 & 0.5 \\ 1.3 & 0.7 & 1.3 & 14 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

1.14.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1.3 & 0.6 & 0.4 \\ -0.6 & 16 & 1.4 & 1 \\ 0.5 & 0.6 & 10 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 & 1.4 & 12 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 13 \\ 18 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1.15.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1.3 & 0.8 & 0.8 \\ -1.2 & 20 & 2 & 1.6 \\ 0.7 & 1.2 & 11 & 0.6 \\ 1.2 & 0.9 & 1.6 & 16 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1.16.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1.1 & 0.5 & 0.4 \\ -0.2 & 10 & 1.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 8 & 0.5 \\ 0.5 & 0.7 & 1.1 & 10 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.17.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1.5 & 0.8 & 0.6 \\ -1 & 21 & 1.9 & 1.4 \\ 0.3 & 0.9 & 12.5 & 0.7 \\ 0.7 & 1.1 & 1.8 & 16 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ -9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1.18.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \\ 0.2 & 14 & 1.8 & 1.4 \\ 1.3 & 1.2 & 7 & 0.4 \\ 1.4 & 0.5 & 1 & 16 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1.19.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.7 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 9 & 1.1 & 1 \\ 1.5 & 0.9 & 4.5 & 0.3 \\ 1.1 & 0.3 & 0.6 & 8 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1.20.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0.9 & 0.5 & 0.6 \\ 0.2 & 12 & 1.3 & 1.1 \\ 1.2 & 0.9 & 6.5 & 0.4 \\ 1 & 0.5 & 0.9 & 10 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

1.21.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2.3 & 1.2 & 0.4 \\ 0.3 & 5 & 1.5 & 0.1 \\ 1 & 0.5 & 7 & 0.7 \\ 0.2 & 0.6 & 1.3 & 9 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

1.22.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2.6 & 0.3 & 1.1 \\ 0.6 & 7 & 1.2 & 0.5 \\ 1.3 & 0.1 & 8 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0.4 & 5 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

1.23.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0.5 & 1.7 & 0.9 \\ 0.2 & 4 & 0.9 & 1.1 \\ 1.4 & 0.7 & 11 & 1.8 \\ 0.5 & 0.3 & 2.1 & 5 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

1.24.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.25.

$$A = \begin{pmatrix} 7.9 & 5.6 & 5.7-7.2 \\ 8.5-4.8 & 0.8 & 3.5 \\ 4.3 & 4.2 & -3.2 & 9.3 \\ 3.2 & -1.4 & -8.9 & 3.3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 6.7 \\ 9.9 \\ 8.6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.26.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.27.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.28.

$$A = \begin{pmatrix} 1.8 & -3.8 & 0.7-3.7 \\ 0.7 & 2.1 & -2.6-2.8 \\ 7.3 & 8.1 & 1.7 & -4.9 \\ 1.9 & -4.3-4.9 & & -4.7 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.29.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.30.

$$A = \begin{pmatrix} 7.4 & 2.2 - 3.1 - 0.7 \\ 1.6 & 4.8 - 8.5 - 4.5 \\ 4.7 & 7.0 - 6.0 & 6.6 \\ 5.9 & 2.7 & 4.9 - 6.3 \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 1.2 \\ 2.6 \\ 1.7 \end{pmatrix}.$$

6.2. Завдання 2

Відшукати власні значення та власні вектори матриці з точністю $\Delta=0,001$.

2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 3 & 4 \\ 1.5 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1.5 \\ 4 & 2 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0.5 & 1.5 \\ 2 & 0.5 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 2 & 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1 & -1 & 1.5 \\ 0.5 & 1 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

2.4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1.5 & 2 & 2 & 1.5 \\ 3.5 & 2 & 1 & 1.5 \\ 4 & 1.5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & -1 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1 & 1.5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 1 & 2 \\ 0.5 & 1 & 0.8 & 1 \\ 2 & 0.8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 1 & 0.8 \\ 1.2 & 2 & 0.5 & 1.4 \\ 1 & 0.5 & 1 & 2 \\ 0.5 & 1.2 & 1 & 2.2 \end{pmatrix}.$$

2.8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0.5 & -1 \\ -1 & 2 & 1.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 0.8 & -1 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & -0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.10.

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.11.

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.5 & 2 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.6 & 2 \\ 2 & 0.6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.12.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.13.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2.5 & 0.6 & 0.8 \\ 2 & 2.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.14.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2.5 & 1.6 & 0.8 & 0.9 \\ 1 & 2.2 & 0.6 & 0 \\ 2 & 0.8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.15.

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 1.6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2.2 & 0.8 \\ 2 & 2.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.16.

$$A = \begin{pmatrix} 2.4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2.5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.17.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1.5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.18.

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1.5 & 1 & 2 \\ 1 & 1.5 & 2.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.19.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0.5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.20.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0.5 & 2 & 1.5 \\ -1 & 1.5 & -1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.21.

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1.5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1.5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

2.22.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1.5 & 1 \\ 2 & 0.5 & 2 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

2.23.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 2 & 0.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

2.24.

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 2 & 1.5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1.5 & 2 & 2 \\ 3.5 & 2 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

2.25.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.26.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.27.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.28.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.29.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2.5 & 3.5 \\ 1.5 & 1 & 2 & 1.6 \\ 2.5 & 2 & 1 & 1.7 \\ 3.5 & 1.6 & 1.7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 2 & 0.5 \\ 1.2 & 1 & 0.4 & 1.2 \\ 0 & 0.4 & 2 & 1.5 \\ 0.5 & 1.2 & 1.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3. Завдання 3

Відокремити розв'язки рівняння графічно або аналітично та обчислити один з точністю $\Delta=0,001$.

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 3.1. 1) $\ln x + (x+1)^3 = 0$; | 2) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$. |
| 3.2. 1) $2xx = 1$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$. |
| 3.3. 1) $\sqrt{x+1} = 1/x$; | 2) $x^3 - 2x + 2 = 0$. |
| 3.4. 1) $x - \cos x = 0$; | 2) $x^3 + 3x - 1 = 0$. |
| 3.5. 1) $3x + \cos x + 1 = 0$; | 2) $x^3 + x - 3 = 0$. |
| 3.6. 1) $x + \lg x = 0,5$; | 2) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$. |
| 3.7. 1) $2 - x = \ln x$; | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$. |
| 3.8. 1) $(x-1)^2 = 1/2ex$; | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$. |
| 3.9. 1) $(2-x)ex = 1$; | 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$. |
| 3.10. 1) $2,2x - 2x = 0$; | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$. |
| 3.11. 1) $x^2 + 4\sin x = 0$; | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$. |
| 3.12. 1) $2x - \lg x = 7$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$. |
| 3.13. 1) $5x - 8\lg x = 8$; | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$. |
| 3.14. 1) $3x - ex = 0$; | 2) $x^3 + 2x - 4 = 0$. |
| 3.15. 1) $x(x+1)^2 = 1$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$. |
| 3.16. 1) $x = (x+1)^3$; | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$. |
| 3.17. 1) $x^2 = \sin x$; | 2) $x^3 + 4x - 6 = 0$. |
| 3.18. 1) $x^3 = \sin x$; | 2) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$. |
| 3.19. 1) $x = \sqrt{\lg(x+2)}$; | 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$. |
| 3.20. 1) $x^2 = \ln(x+1)$; | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$. |
| 3.21. 1) $2x + \lg x = -0,5$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$. |
| 3.22. 1) $2x + \cos x = 0,5$; | 2) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$. |
| 3.23. 1) $\sin 0,5x + 1 = x^2$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$. |
| 3.24. 1) $0,5x + \lg(x-1) = 0,5$; | 2) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$. |
| 3.25. 1) $\sin(0,5+x) = 2x - 0,5$; | 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$. |
| 3.26. 1) $x^2 = \sin x + 1$; | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$. |
| 3.27. 1) $2\sin(x-0,6) = 1,5 - x$; | 2) $x^5 - 3x^2 - 1 = 0$. |
| 3.28. 1) $2x + \cos x = 1$; | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$. |
| 3.29. 1) $x^3 - \sin x = 3$; | 2) $x^3 - 4x^2 + 10x - 10 = 0$. |
| 3.30. 1) $2x + \lg x = -0,5$; | 2) $x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0$. |

6.4. Завдання 4

Знайти розв'язки систем нелінійних рівнянь з точністю $\Delta=0,001$. Початкове наближення визначити графічно.

4.1. $\sin x - y - 7x - 1,32 = 0;$
 $\cos y - x + 0,85 = 0.$

4.16. $\cos(0,4y + x^2) + x^2 + y^2 - 1,6 = 0;$
 $1,5x^2 - 2y^2 - 1 = 0.$

4.2. $2x^2 - y^2 - 1 = 0;$
 $xy^3 - y - 3 = 0;$

4.17. $\sin(x - y) - xy = -1;$
 $x^2 - y^2 = 3/4.$

4.3. $x^3 + y^3 - 7x + 3 = 0;$
 $x^3 - y^3 - 7y + 2 = 0.$

4.18. $\sin(x + y) - 1,5x = 0;$
 $x^2 + y^2 = 1.$

4.4. $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0;$
 $y - 0,5x^2 - 1 = 0.$

4.19. $5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0;$
 $2x + y - 10\lg y - 4 = 0.$

4.5. $\sin(x + 1) - y = 1;$
 $2x + \cos y = 2.$

4.20. $15x - 20y - 60\lg x - 6 = 0;$
 $4x - 5y - 20\lg y - 5 = 0.$

4.6. $\cos(x - 1) + y = 0,8;$
 $x - \cos y = 2.$

4.21. $2x - y - 6\lg x - 3 = 0;$
 $15x - 10y - 60\lg x - 6 = 0.$

4.7. $y - 0,5x^2 + x = 0,5;$
 $2x + y - 1/6y^3 = 1,6.$

4.22. $6x - 5y - 30\lg x - 12 = 0;$
 $3x - 3y + 30\lg x + 10 = 0.$

4.8. $\cos 1/3(x - y) - 2y = 0;$
 $\sin 1/3(x + y) - 2x = 0.$

4.23. $\operatorname{tg}(x + y) + 0,1 = x^2;$
 $0,6x^2 + 2y^2 = 1.$

4.9. $5x - 6y + 20\lg x + 16 = 0;$
 $2x + y - 10\lg y - 4 = 0.$

4.24. $(x + y)^2 + y^2 = 2;$
 $e^{xy} - x + y = 1,5.$

4.10. $3x^2y + y^2 - 1 = 0;$
 $x^4 + xy^3 - 1 = 0.$

4.25. $x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 + 10 = 0;$
 $x^4 - 8y + 1 = 0.$

4.11. $2x^3 - y^2 - 1 = 0;$
 $xy^3 - y - 4 = 0.$

4.26. $x + 3\lg x - y^2 = 0;$
 $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$

4.12. $x^7 + 5x^2y^4 + 1510 = 0;$
 $y^5 - 3x^4y - 105 = 0.$

4.27. $\sin(x - 2,2y) - xy + 1 = 0;$
 $x^2/1,75 - y^2 - 0,75 = 0.$

4.13. $x^2y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0;$
 $x^4 - 9y + 2 = 0.$

4.28. $\operatorname{tg}(y - x) + xy = 0,3;$
 $x^2 + y^2 = 1,5.$

4.14. $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0;$
 $y \sin y - x - 1 = 0.$

4.29. $e^{x+y} - x^2 + y = 2;$
 $(x + 0,5)^2 + y^2 = 1.$

4.15. $e^{xy} = x^2 - y + 1;$
 $(x + 0,5)^2 + y^2 = 1.$

4.30. $\operatorname{tg}(y - x) + xy = 0,3;$
 $x^2 + y^2 = 1,5.$

Список літератури

1. Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. - Численные методы. - М.: Наука, 1989.
3. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2т. Т.1 - М.: Наука, 1966; Т.2 - М.: Физмат, 1962.
5. Крылов В.И., Бобков В.В, Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т.1. - М.: Наука, 1976; Т.2.-М.: Наука, 1977.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: Наука, 1987.
7. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. - М.: Высш. шк., 1990.
8. Сборник задач по методам вычислений Под ред. Монастырного П. И. - М.: Наука, 1994.
9. Дьяконов В.П., Справочник по MathCAD PLUS 7.0 PRO. - М.: СК Пресс, 1998.
10. Фаронов В.В. Программирование на персональных ЭВМ в среде ТУРБО-Паскаль. - М.: МГТУ, 1992.
11. Зеленский К.Х., и др. Компьютерные методы прикладной математики. – К. Дизайн-В, 1999.