CENTRO DE CIÊNCIAS EXATA DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

Probabilidade

Julyana Tavares

Junho, 2018

O que vamos estudar?

Espaço amostral e eventos

Definição clássica de probabilidade

Probabilidade Condicional

Teorema de Bayes

Eventos independentes

Motivação

Conta de energia

Tempo de permanência de pacientes

Ocorrência de Terremotos

Inflação

Relações entre conjuntos

União: Sejam A e B conjuntos quaisquer, a união entre A e B é dada pelos elementos que pertencem a A ou a B

Intersecção: Sejam A e B conjuntos os quaisquer, a intersecção entre A e B é dada pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e a B

Complementação: Sejam A e B conjuntos tais que A ⊂ B, então, o evento complementar $\bar{A}$ de A, em relação à B, é dado pelos elementos de B que não pertencem a A, ou seja, $A \cup \bar{A}$ = B.

Relações entre conjuntos

Conjuntos disjuntos: Sejam A e B conjuntos os quaisquer, são considerado disjuntos se a intersecção entre eles for fazia, ou seja, $A \cap B = \emptyset$

Partição amostral: Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ formam um partição de Ω se são disjuntos dois-a-dois e se a união entre eles é igual a Ω, ou seja:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$

2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

Relações entre conjuntos

Lei de Morgan:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Espaço Amostral e Eventos

Experimento aleatório

São aqueles onde o processo de experimentação está sujeito a influências de fatores casuais que conduzem a resultados incertos. Denotamos por €

.

Espaço amostral

Espaço Amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis para um experimento aleatório. É denotado por Ω.

Espaço amostral

Eventos

Evento

é um subconjunto de Ω, associado a um experimento. É denotado por letras maiúsculas: A, B, E, . . .

Conceitos de Probabilidade:

Clássico: Seja Ω um espaço **amostral finito** uniforme e seja A um evento qualquer desse espaço. A probabilidade de que A ocorra, denotada por P(A), é dada por:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Onde: $\#(\Omega)$ é o número de resultados possíveis do experimento
$\#(A)$ é o número de resultados favoráveis de evento A.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Conceitos de Probabilidade:

Conceito frequentista de probabilidade: Suponha que o experimento foi repetido n vezes, sempre sob as mesmas condições, e que o evento A ocorreu m vezes entre n realizações do experimento. Então, se o número de n de repetições for bastante grande, a fração m/n é uma boa aproximação para probabilidade de A. (Pinheiro,2012)

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Experimento que pode ser aplicado essa teoria : A peças fabricadas diariamente em uma linha de produção podem ser classificada como "perfeitas" e "defeituosas". Uma peça é extraída da Linha de produção, a classe a qual pertence é anotada.

Conceitos de probabilidade

Definição axiomática: Seja Ω um espaço associado a um experimento aleatório, A um evento qualquer desse espaço amostral de A e P(A) um número real, denominado probabilidade do evento A, no qual os seguintes axiomas são obedecidos:

1)$0 \leq P(A) \leq 1$

2)$P(\Omega) = 1$

3)Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, P(AUB)=P(A)+P(B)

4)Se $A_1, A_2, \ldots A_n$ é uma sequência de eventos, tomados dois a dois e mutuamente exclusivos,

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Propriedades da Probabilidade

1) $P(\emptyset) = 0$
2) Para todo evento A, $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P(A)}$
3) Para quaisquer dois eventos A e B, $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4) Se A e B são eventos tais que $A \subset B\, , então\ P(A) \leq P(B)$

Probabilidade condicional:

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Define-se a probabilidade de que o evento B ocorra quando se sabe que o evento A ocorreu é calculada por:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Onde: $P(A) \neq 0$

Teorema da Multiplicação

$$P(A \cap B) = P(B/A) * P(A)$$

EXEMPLO:

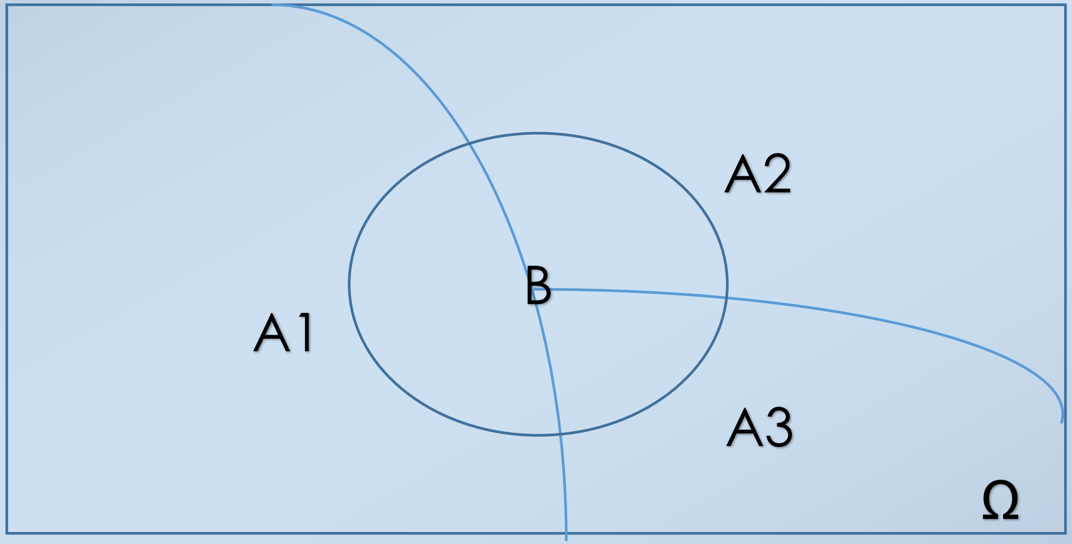
Questão 2: Num processo produtivo de uma empresa são utilizadas diariamente duas unidades de um certo insumo. As diferentes formulações desse insumo podem afetar o rendimento do processo bem como o nível de poluição ambiental. Num determinado dia, a empresa conta com 40 unidades desse insumo em estoque, e elas podem ser classificadas segundo a tabela a seguir:

a) Sorteando uma unidade ao acaso, qual é a probabilidade dessa unidade acelerar o processo produtivo?

b) Sorteando duas unidades ao acaso, sabendo que a primeira foi poluente, qual a probabilidade da segunda não acelerar o processo produtivo?

Acelera o processo produtivo?	**Polui o ambiente?**		**Total**
	Sim	Não	
Sim	8	12	20
Não	2	18	20
Total	10	30	40

Teorema da Probabilidade Total



$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(A_i/B)$$

Teorema de Bayes

- Se os eventos $A_1, A_2 \ldots A_n$ formam uma partição amostral do espaço de Ω . Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas tal que $P(B) > 0, então$:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) * P(A_j/B}{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) * P(A_i/B)}$$

A formula acima é conhecida como teorema de Bayes. Foi obtido pelo Reverendo Thomas Bayes e publicado em 1763, sendo um dos teoremas de grande valia da teoria estatística.

Exemplos

(Tovar)Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fabricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados “defeituosos” e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica. No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

a) Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?

b) Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Eventos independentes

Sejam dois eventos A e B, com probabilidades maiores que zero, tais que a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência de do segundo, então esses eventos são ditos **independentes.**

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Exemplos

Cada dia, de segunda a sexta-feira, chega à determinada instalação de inspeção um lote de componen- tes enviado por um fornecedor. Duas vezes por semana, chega um lote de um segundo fornecedor. Oi- tenta por cento de todos os lotes do fornecedor 1 passam na inspeção, assim como 90% dos lotes do fornecedor 2. Qual é a probabilidade de, em um dia selecionado aleatoriamente, dois lotes passarem na inspeção? Vale ressaltar que os lotes se comportam de forma independente.

Conclusão

- A teoria da probabilidade serve para modelar incertezas.
- É necessário dominar a teoria dos conjuntos para estudar os conceitos de probabilidade.
- Para calcular a probabilidade é necessário identificar o tipo de espaço amostral.

Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes (A, B, C, D e E). Registros anteriores indicam que dos pedidos de deter- minado tipo de processamento, realizados através de uma consulta, cerca de 10% vem do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Se o pedido não for feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente, ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0,5% do cliente C, 2% do cliente D e 8% do cliente E.

a) Qual é a probabilidade de o sistema apresentar erro?
b) Qual é a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E, sabendo-se que apresentou erro?

Exemplos

Uma empresa de exploração de petróleo possui dois projetos ativos, um na Ásia e outro na Europa. Considere A o evento em que o projeto da Ásia tem sucesso e B o evento em que o projeto da Europa tem sucesso. Suponha que A e B sejam eventos independentes com P(A) = 0,4 e P(B)= 0,7.

a. Se o projeto da Ásia não obtiver sucesso, qual é a probabilidade de o projeto da Europa também não obtê-lo?

b. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos dois projetos ter sucesso?

Referências

Campos, Marcilia Andrade: Métodos probabilísticos e estatísticos com aplicações em engenharias e ciências exatas / Marcilia Andrade Campos, Leandro Chaves Rêgo, André Feitoza de Mendonça. - 1. ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2017.

Fogo, J.C. Notas de Aulas de Probabilidade 1. Acesso: http://www.ufscar.br/jcfogo/ProbA/arquivos/Probabilidade_1.pdf

Gupta,C.Bhisham. Estatística e probabilidade com aplicações para engenheiros e cientistas / Bhisham C. Gupta, Irwin Guttman ; tradução Ana Maria Lima de Farias, Vera Regina Lima de Farias e Flores. - 1. ed. - Rio de Janeiro : LTC, 2017.

James, B. R. Probabilidade: Um curso Intemediário. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1981;

Obrigada!