Finite State Machines

Kuliah Teori Bahasa dan Automata
Program Studi Ilmu Komputer
Fasilkom UI

Prepared by:
Suryana Setiawan

Revised by:
Maya Retno Ayu S.

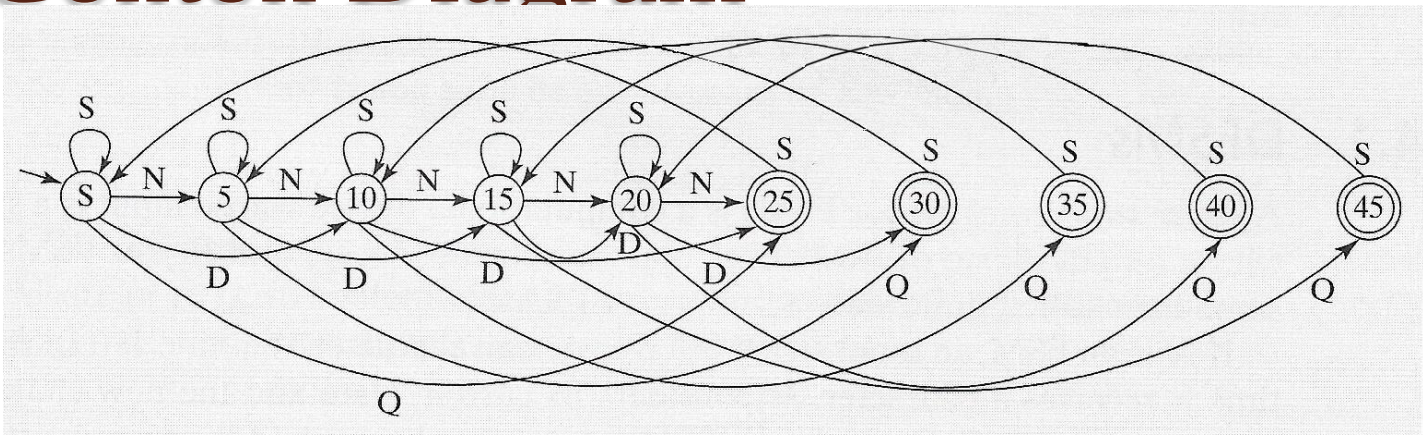
Deskripsi Intuitif FSM

- FSM adalah model mesin komputasi yang paling sederhana dan efisien.
- FSM terdefinisi dalam sejumlah status.
- FSM bekerja dengan berubah dari satu status ke status lainnya dari sejumlah kemungkinan berhingga status sesuai dengan masukan yang diterimanya.
- Mesin-mesin demikian di sekeliling kita:
  - Mesin jahit
  - Mesin kendaraan
  - Senapan
  - Kunci pintu
  - Switch lampu, dll

Contoh FSM: Vending Machine

- Mesin menjual minuman seharga @ 25 sen, dan koin yang ada 5 sen (N), 10 sen (D), 25 sen (Q).
- Mesin menerima koin-koin satu demi satu sebagai masukan.
- Mesin dapat berada dalam status-status yang menyatakan nilai total koin yang sudah dimasukkan:
  q_0 (atau S), q_5, q_{10}, q_{15}, q_{20}, q_{25}, q_{30}, q_{40} dan q_{45}.
- Mesin hanya akan mengeluarkan minuman jika tombol *S* ditekan sementara mesin berada pada **dispensing state**, lalu diikuti perubahan
  - Status semula q_x, kemudian menjadi $q_{(x\text{-}25)}$
- **Non-dispensing states**: menyatakan mesin tidak bisa mengeluarkan minuman meskipun sudah masuk koin.

Contoh Diagram



- Status q_x digambarkan sebagai lingkaran berlabel bilangan *x*
  - *Dispensing states* ➔ *double circle* dan
  - *Non-dispensing states* ➔ *single circle*.
- Input N, D, Q, dan S digambarkan pada panah berlabel input tsb
- Jika status semula *x* dan *non-dispensing*, pemasukan koin berharga q_y *mengubah* status menjadi q_{x+y}.
- Penekanan S pada non-dispensable tidak mengubah status (self-loop).
- Penekanan S pada dispensable mengubah q_x menjadi $q_{x\text{-}25}$.
- Catatan: mesin ini belum cukup lengkap. Carilah fitur apa saja yang bisa ditambahkan dan ubahlah diagram tsb.

Finite State Machine

- Vending machine merupakan contoh dari suatu finite state machine.
  - Istilah “finite state” mengacu pada himpunan berhingga status!
  - Mesin hanya “mengingat” berdasarkan keberadaannya pada status-status yang berhingga itu.
  - Mesin selalu mulai dari satu status khusus (**Start state**).
- Dua varian Utama: **Deterministic FSM (DFSM)** dan **Nondeterministic FSM (NDFSM)**
  - Note: Vending Machine sebelumnya adalah salah satu contoh DFSM.
- Sejumlah varian lainnya: **Finite State Transducer** (FSM dengan output), **Büchi Automata** (bisa mulai dari status mana saja).

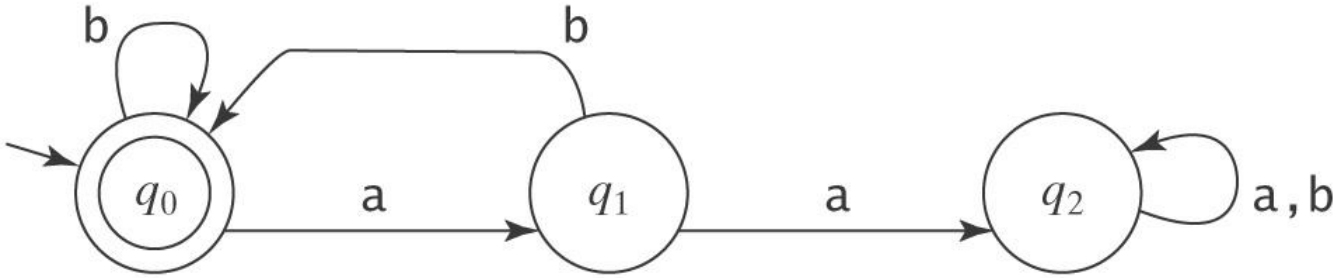
Definisi Formal FSM

Deterministc FSM M adalah kuintupel (K, Σ, δ, s, A) dengan:

- K adalah himpunan berhingga status-status.
- Σ: alfabet input
- $s \in K$, adalah status mulai (*start state*)
- $A \subseteq K$, adalah himpunan status menerima (*accepting states*)
- δ: **fungsi transisi** yang memetakan

  $K \times \Sigma \rightarrow$ K

Contoh-1 DFSM



- Mesin mengenal $L = \{w \in \{a, b\}^* :$ setiap a segera diikuti oleh b$\}$

  $K = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $S = q_0$, $A = \{q_0\}$,

  $\delta = \{((q_0, a), q_1), ((q_0, b), q_0), ((q_1, a), q_2), ((q_1, b), q_0),$
  $((q_2, a), q_2), ((q_2, b), q_2)\}$

- Note: q_2 disebut dead state! Apa itu?

Konfigurasi dari DFSM

- Saat DFSM *M* melakukan komputasi untuk suatu input string *w*, mesin akan berada pada satu konfigurasi dan kemudian berpindah ke konfigurasi berikutnya.
- Konfigurasi adalah element dari $K \times \Sigma^*$.
  - *K* adalah current state.
  - Σ^* adalah sisa string yang belum diproses.
- Konfigurasi awal (*initial configuration*) untuk string masukan *w* adalah (s_M, *w*) dimana s_M adalah status mulai dari *M*.
  - Contoh: jika mesin pada Contoh 1 akan memproses string *abbabab*, konfigurasi awalnya adalah (q_0, *abbabab*)

Relasi Yields-in-One-Step

- Relasi *yields-in-one-step* $\vdash_M$ mendefinisikan perubahan suatu konfigurasi ke konfigurasi berikutnya dalam satu langkah transisi sbb:

  $$(q_1, cw) \vdash_M (q_2, w) \textbf{ iff } ((q_1, c), q_2) \in \delta.$$

- Contoh: Deretan perubahan konfigurasinya sbb:
  - $(q_0, abbabab) \vdash_M (q_1, bbabab) \vdash_M (q_0, babab)$ $\vdash_M (q_0, abab) \vdash_M (q_1, bab) \vdash_M (q_0, ab)$ $\vdash_M (q_1, b) \vdash_M (q_0, \varepsilon)$

Relasi $yields \vdash^*_M$

- Relasi $yields \vdash^*_M$ secara intuitif adalah yield in n steps termasuk $n = 0$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, abbabab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_1, bbabab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, babab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, abab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_1, bab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, ab)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_1, b)$
  - $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, \varepsilon)$
- Relasi $yields \vdash^*_M$ bersifat *reflexive*, jika $n = 0$, *dan* bersifat *transitive closure* dari $\vdash_M$ untuk n lainnya $(n > 0)$

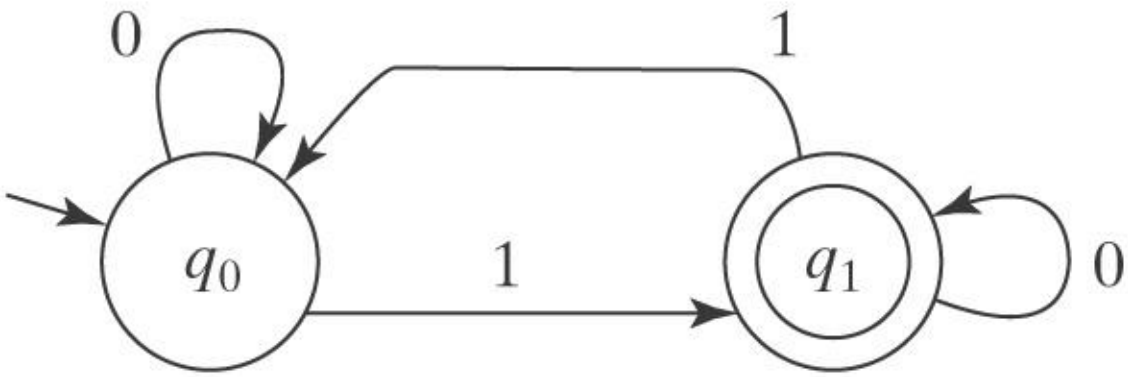
Komputasi oleh *M*

- Suatu komputasi oleh M adalah suatu deret berhingga dari configurasi $C_0, C_1, \ldots, C_n$ untuk setiap $n \geq 0$ dimana:
  - C_0 adalah konfigurasi awal
  - C_n dalam bentuk (q, ε), untuk status $q \in K_M$ (artinya setiap simbol dari input string telah dibaca), sehingga
  - $C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n$
- Contoh: komputasi oleh mesin dalam Contoh-1 untuk string *abbabab* adalah:
  $(q_0, abbabab), (q_1, bbabab), (q_0, babab),$
  $(q_0, abab), (q_1, bab), (q_0, ab), (q_1, b)$, dan (q_0, ε)

Accepting dan Rejecting

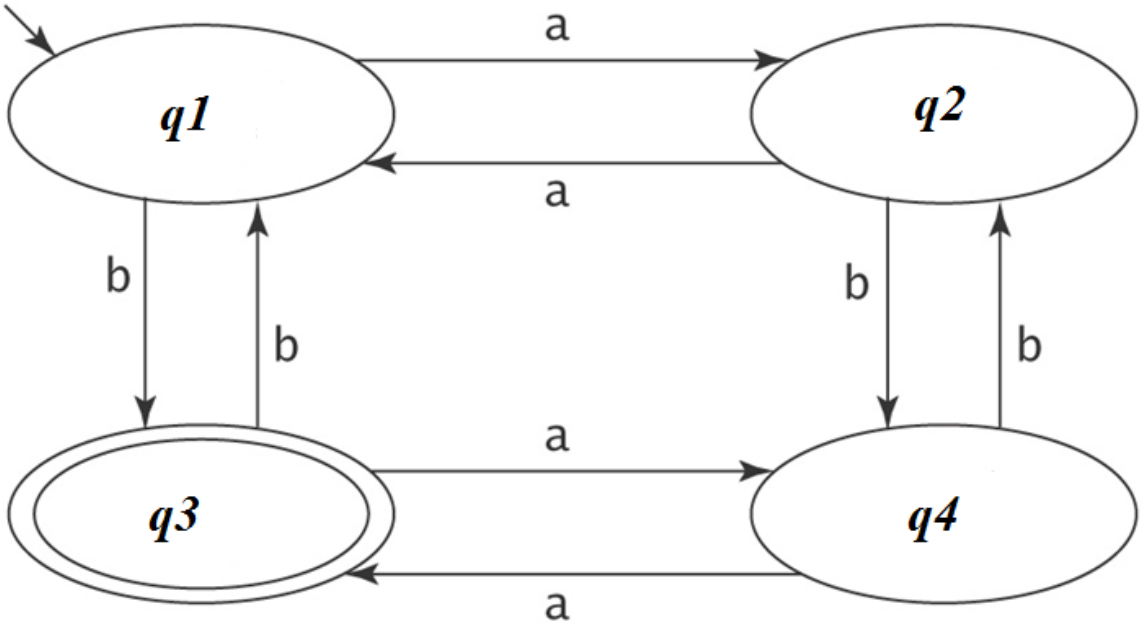
- Dengan input $w \in \Sigma^*$, kita akan menyatakan:
  - M **menerima (*accept*)** w **iff** $(s, w) \vdash^*_M (q, \varepsilon)$, untuk setiap $q \in A$ dan (q, ε) disebut **accepting configuration** dari M.
    - Contoh: M Contoh-1 menerima $abbabab$ karena $(q_0, abbabab) \vdash^*_M (q_0, \varepsilon)$
  - M **menolak (*reject*)** w **iff** $(s, w) \vdash^*_M (q, \varepsilon)$, untuk setiap $q \notin A$ dan (q, ε) disebut **rejecting configuration** *dari* M.
    - Contoh: M Contoh-1 menolak $abaab$ karena $(q_0, abaab) \vdash^*_M (q_2, \varepsilon)$ dan $q_2 \notin A$
- Bahasa yang diterima M ditulis $L(M)$ adalah himpunan semua string yang diterima oleh M.

Contoh-2.1



Bahasa-bahasa apa yang diterima mesin ini?

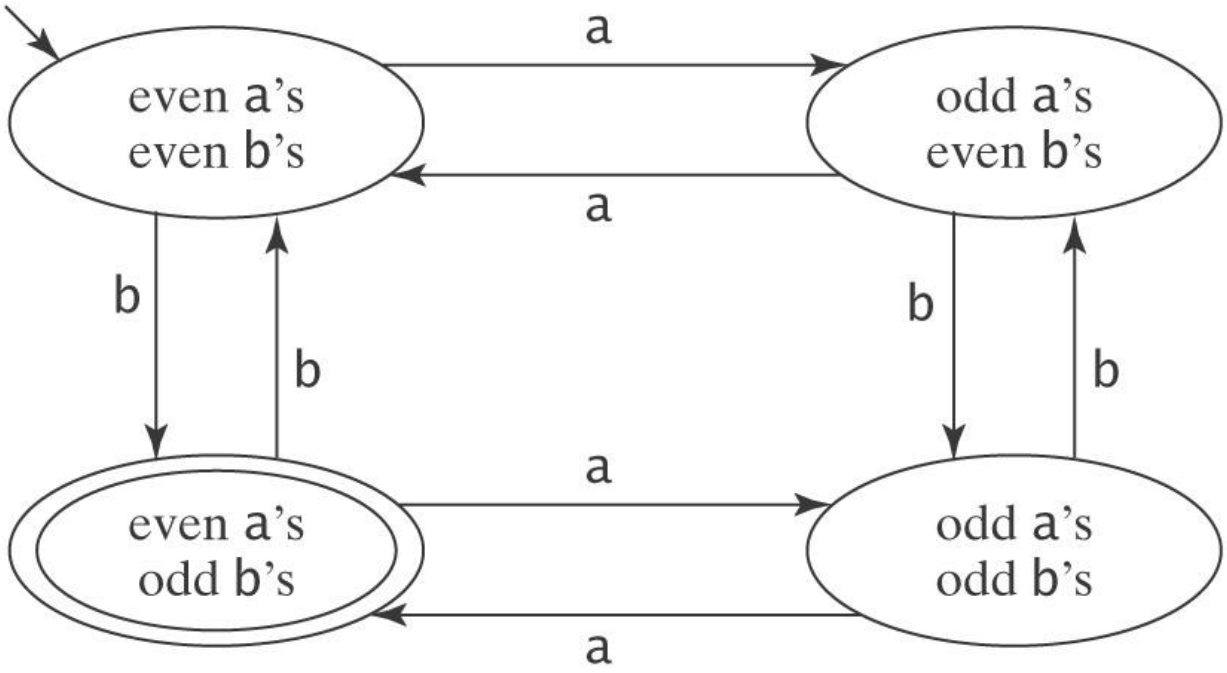
Contoh 2.2



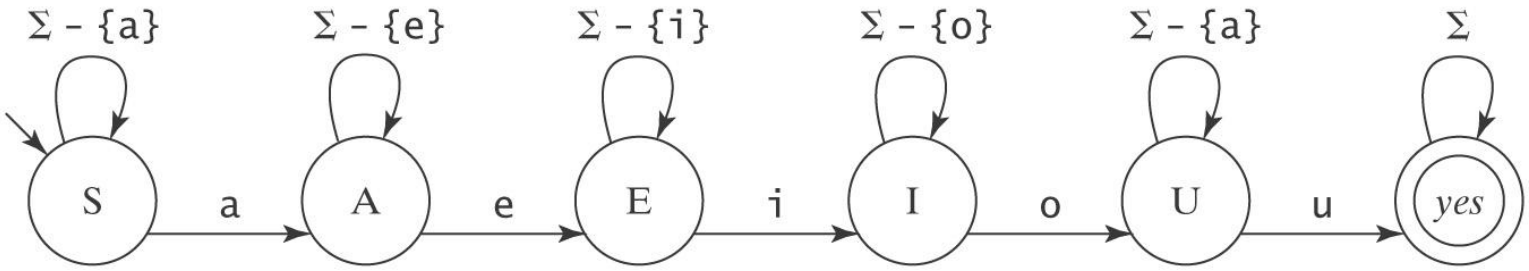
Bahasa-bahasa apa yang diterima mesin ini?

Jika accepting state berubah ke q1, bahasa apa yang diterima oleh mesin tersebut?

Contoh 2.2


even a's
even b's
a
odd a's
even b's
a
b
b
b
b
even a's
odd b's
a
odd a's
odd b's
a

Contoh 2.3



Bahasa-bahasa apa yang diterima mesin ini?

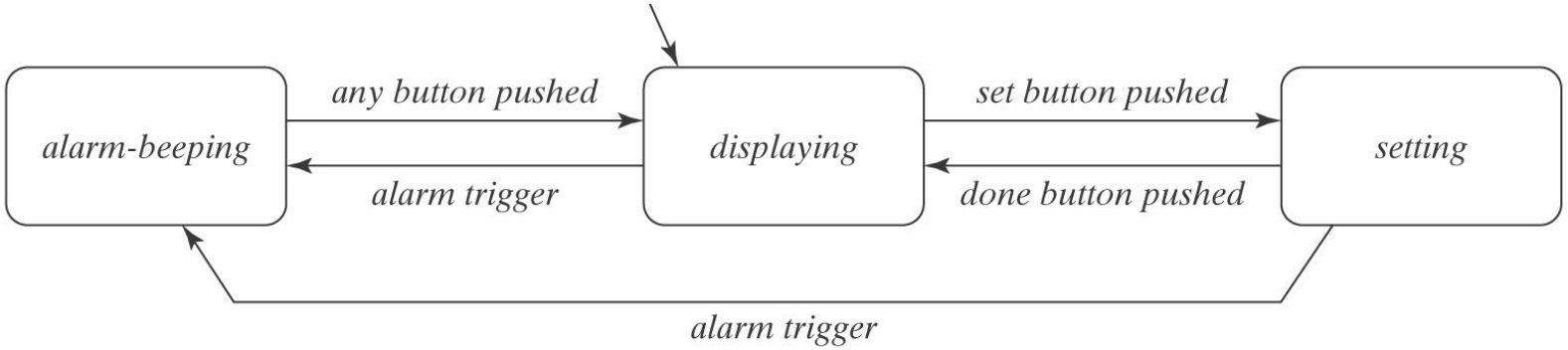
Latihan

Buatlah FSM yang menerima bahasa:

$L = \{w \in \{a, b\}^* : w$ tidak mengandung *substring* `aab`$\}$

Hint: Bisa diawali dengan membuat mesin yang menerima $\neg L$.

Representasi Finite State pada Software Engineering



A high-level state chart model untuk jam digital

Nondeterminisme

- Jika terdapat pilihan sejumlah aksi untuk dijalankan
  choose(aksi1;; aksi2 ;; …; aksi n),
  - Yang mana masing-masing **aksi** akan mengembalikan harga **sukses** atau harga **false**.
- Nondeterminisme dari **choose** akan menjalankan :
  - Mengembalikan harga **sukses** ketika terdapat **sekurangnya satu** yang **sukses**.
  - Jika **tidak ada** satupun yang **sukses**, choose akan
    - **Halt** dan mengembalikan **false,** jika setiap pilihan halt. atau
    - **Gagal halt** jika semua pilihan aksi **gagal halt**.

Definisi Formal Nondeterministic FSM (DFSM)

Nondeterministc FSM M adalah kuintupel (K, Σ, Δ, s, A) dengan:

- K adalah himpunan berhingga status-status.
- Σ: alfabet input
- $s \in K$, adalah status mulai (*start state*)
- $A \subseteq K$, adalah himpunan status menerima (*accepting states*)
- Δ : **relasi transisi** yang merupakan subset dari

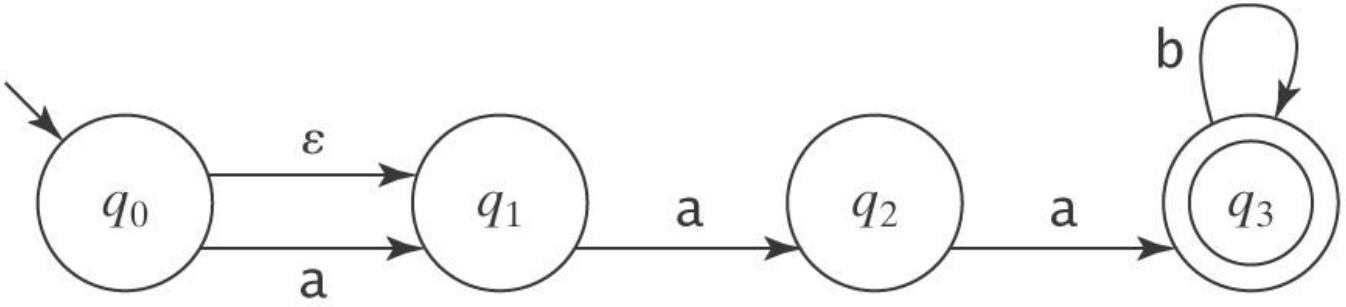
  $(K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})) \times K$

  Setiap elemen Δ berisikan pasangan (status, simbol masukan atau ε), serta satu status baru.

Nondeterminisme dengan NDFSM

- Pada setiap konfigurasi
  - DFSM memiliki **tepat satu pilihan transisi** selama masih ada simbol masukan, tetapi
  - NDFSM bisa **0, 1, atau lebih kemungkinan pilihan transisi**. Jika 0 pilihan, maka NDFSM halt.
- Suatu konfigurasi NDFSM dapat dicapai melalui lebih dari satu kemungkinan langkah.
- Transisi NDFSM dapat dilakukan tanpa membaca simbol masukan (disebut **transisi ε**, karena panah diberi label ε).
- Hasil NDFSM mengikuti prinsip nondeterminisme.

Contoh 3



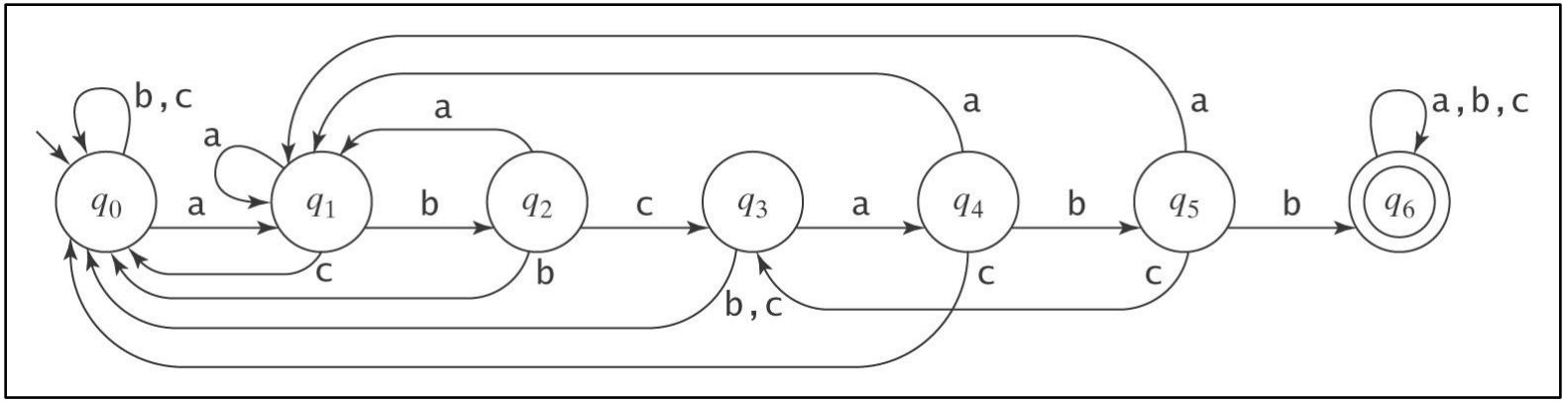
- Mesin menerima *aa* atau *aaa*, kemudian diikuti sederetan simbol *b* dengan panjang 0 atau lebih.
- Input *aaab* akan menghasilkan dua pilihan

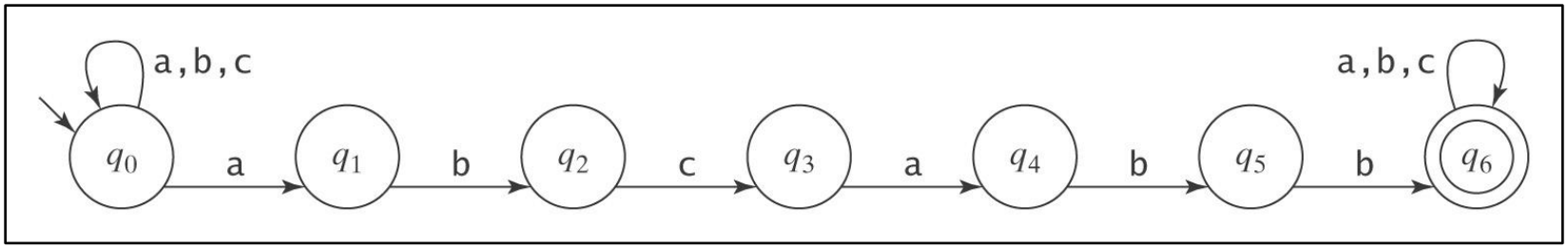
  $(q_0, aaab) \vdash^*_M (q_1, aaab) \vdash^*_M (q_2, aab) \vdash^*_M (q_3, ab)$ gagal

  $(q_0, aaab) \vdash^*_M (q_1, aab) \vdash^*_M (q_2, ab) \vdash^*_M (q_3, b) \vdash^*_M (q_3, \varepsilon)$ sukses
- Pilihan pertama dengan transisis ε berakhir tanpa berhasil mencapai accepting configuration (q_3, ε) sementara pilihan kedua berhasil.
- Karena ada satu yang sukses maka mesin menerima string *aaab*.

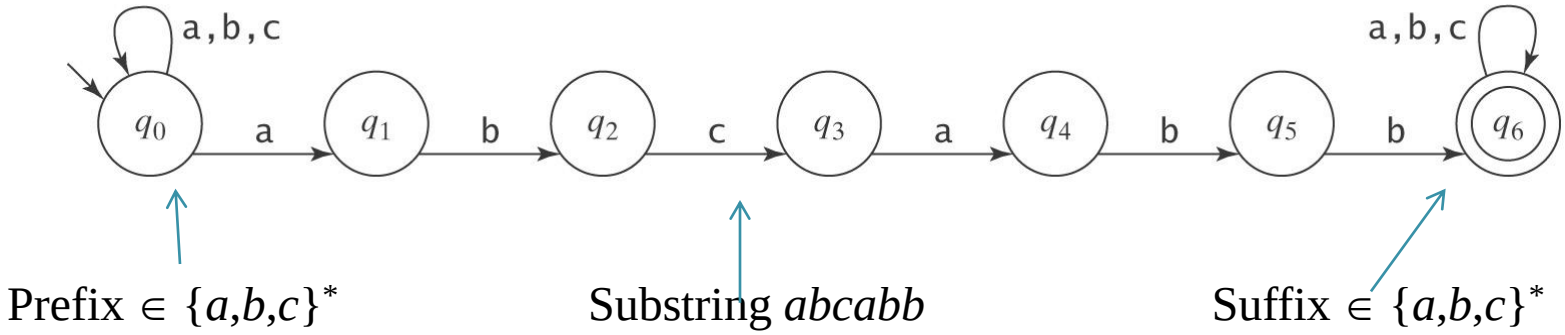
DFSM vs NDFSM

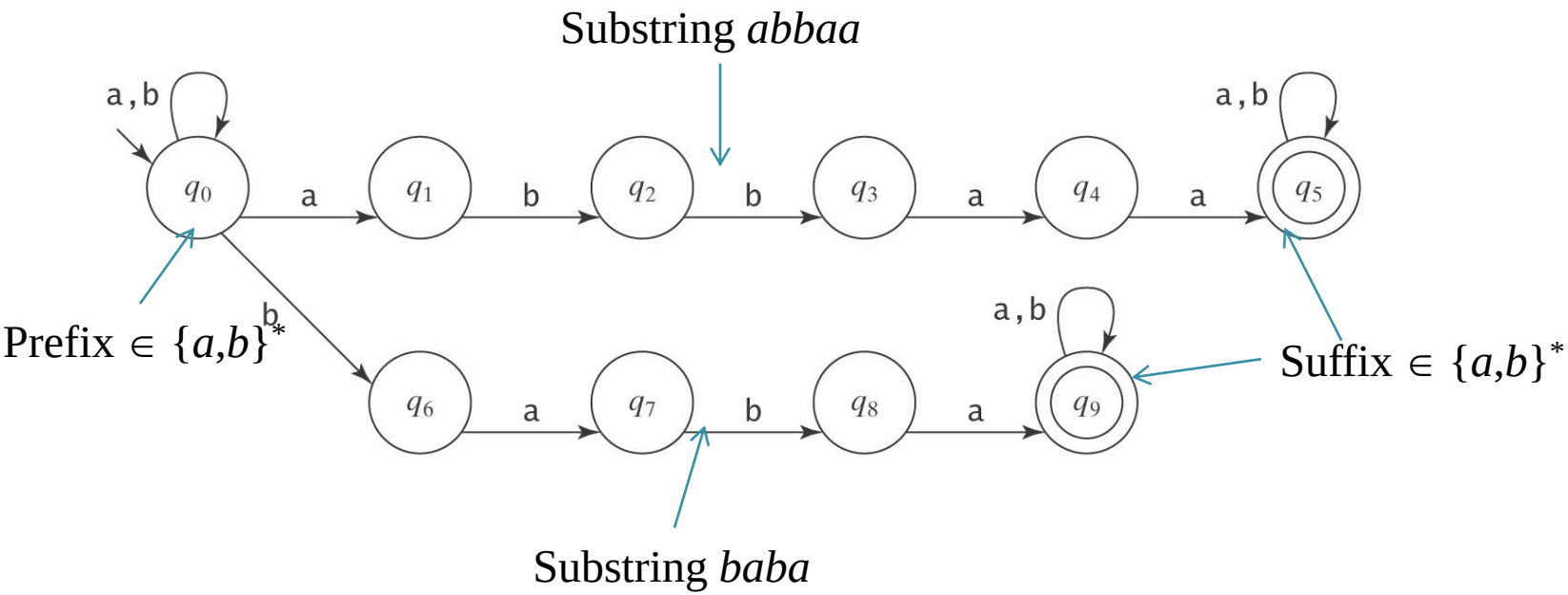
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* : \exists x,y \in \{a, b, c\}^* (w = xabcabby)\}$
- FSM yang menerima L





Substring Searching





Reachable States akibat Transisi ε

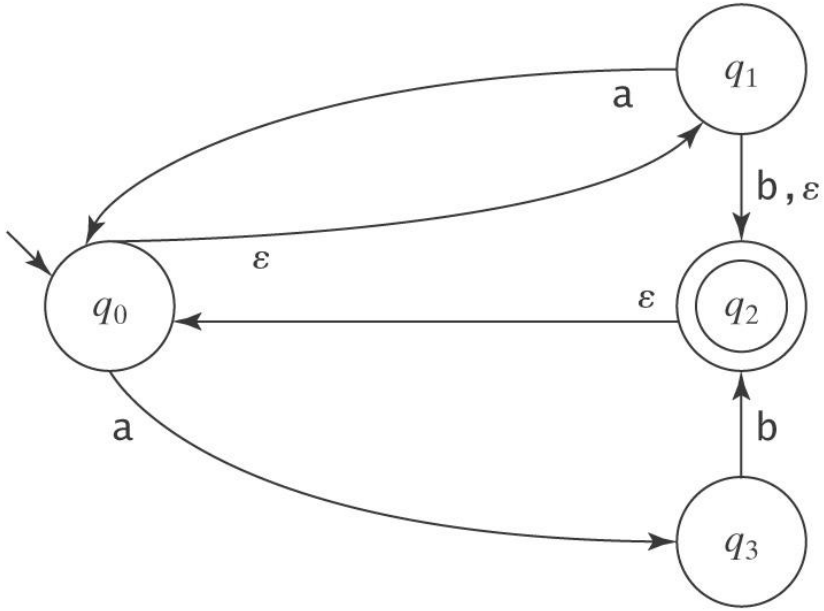
- Transisi ε dari status q_i ke $\{q_j, q_k, \ldots\}$ membentuk kelompok status yang reachable dari q_i walaupun tidak langsung dari q_i
  - jika konfigurasi saat ini adalah (q_i, w_i), yield berikut berangkat dari setiap status di dalam kelompok tersebut.
- Fungsi $eps(q)$ mendefinisikan reachability ini sbb.

  $$eps(q)\ \{p \in K : (q, w) \vdash^*_M (p, w)\}$$
- Algoritma menghitung fungsi $eps(q)$:

  1. result = $\{q\}$
  2. Untuk setiap $p \in$ result, dan terdapat transisi (p, ε, r),

     result += $\{r\}$
  3. Return result

Contoh-4



$eps(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$eps(q_1) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$eps(q_2) = \{q_0, q_1, q_2\}$
$eps(q_3) = \{q_3\}$