บทที่ 3

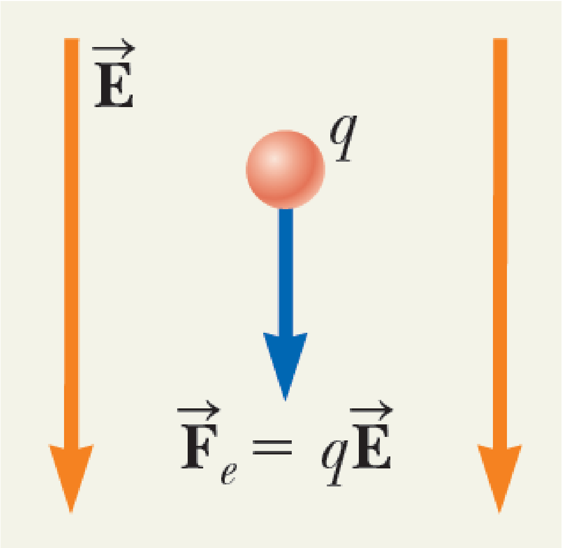
ศักย์ไฟฟ้า

General Physics II

01420112

รองศาสตราจารย์ ดร.ธณิศร์ ตั้งเจริญ

ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์



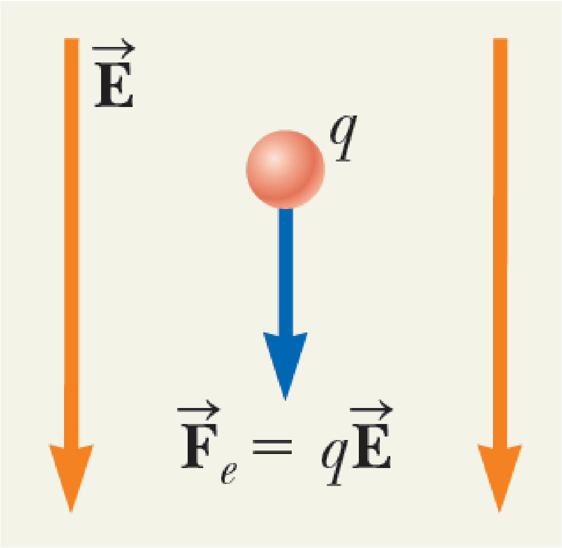
- เมื่อวางประจุทดสอบ q ไว้ในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้า E ที่กระจายตัวอยู่ในบริเวณนั้น จะมีแรงไฟฟ้า qE กระทำต่อประจุ
- ในกรณีที่ประจุ q ที่อยู่ในสนามไฟฟ้าที่มีการกระจัดเล็กๆ dS งานที่กระทำในระบบประจุ-สนามที่เกิดจากสนามไฟฟ้ากระทำบนประจุ q

$$W_{\text{int}} = \vec{F}_e \cdot d\vec{S} = q\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- เนื่องจากงานที่กระทำในระบบจะมีค่าเท่ากับค่าลบของการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ของระบบดังสมการ

$$W_{\text{int}} = -\Delta U$$

ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์



- ดังนั้นเมื่อประจุ q เกิดการกระจัด พลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบประจุ-สนามจะมีการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดเป็น

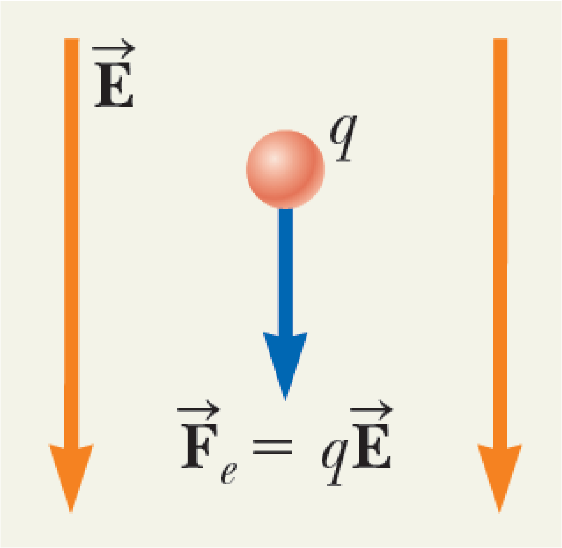
$$dU = -W_{\text{int}} = -q\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- สำหรับการกระจัดที่ทราบค่าของประจุจากจุด A ไปยังจุด B การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบคือ

$$\Delta U = -q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- การอินทิเกรตจะกระทำตลอดช่วงที่ประจุ q เคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B

ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์

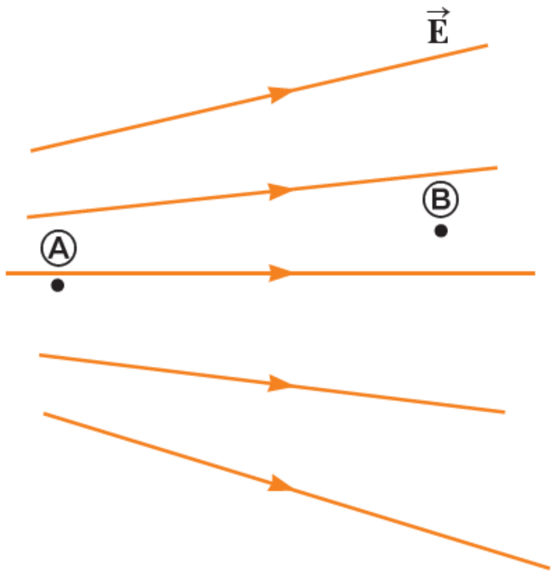


- เมื่อหารพลังงานศักย์ด้วยประจุจะได้ปริมาณทางฟิสิกส์ที่ขึ้นอยู่กับการกระจายตัวของประจุแหล่งกำเนิดสนามไฟฟ้าดังกล่าวเพียงอย่างเดียวและมีค่าเท่ากับทุกจุดในสนามไฟฟ้านั้น ซึ่งเรียกว่า **"ศักย์ไฟฟ้า (Electric Potential; V)"**

$$V = \frac{U}{q}$$

- เพราะว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้า U เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าจึงเป็นปริมาณสเกลาร์ด้วยเช่นกัน และมีหน่วยคือโวลต์ V (หรือจูลล์ต่อคูลอมบ์ J/C)

ศักย์ไฟฟ้าและความต่างศักย์



- **ความต่างศักย์** (Potential difference; ΔV) ระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในสนามไฟฟ้า มีนิยามคือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบ เมื่อประจุ q เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยมีการกระจัด dS หารด้วยประจุนั้น (มีหน่วยคือนิวตันต่อคูลอมบ์ N/C) ดังสมการ

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

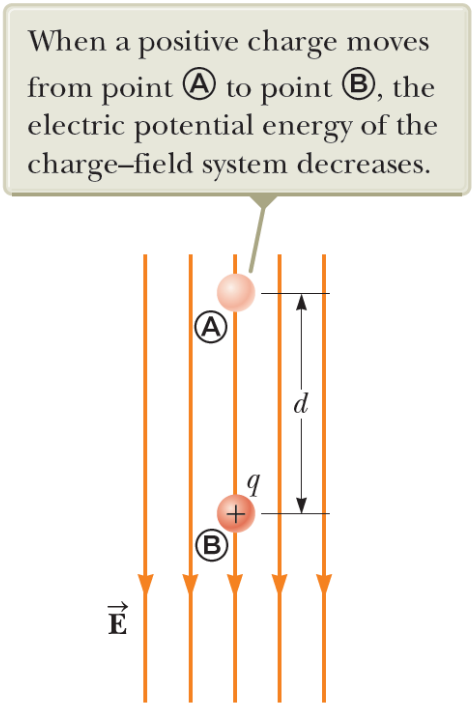
- ดังนั้นงานที่กระทำโดยปัจจัยภายนอกในการเคลื่อนย้ายประจุ q ที่อยู่ในสนามไฟฟ้าด้วยความเร็วคงที่ (ไม่ทำให้พลังงานจลน์ของประจุเปลี่ยนแปลง) คือ

$$W = q\Delta V$$

ความต่างศักย์ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

$$\Delta U = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{S} \qquad \Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

- แม้ว่าสองสมการข้างต้นจะสามารถใช้ได้กับสนามไฟฟ้าทุกรูปแบบไม่ว่าสนามไฟฟ้านั้นจะเป็นสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอหรือสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงไม่คงที่ แต่สนามไฟฟ้าเหล่านั้นสามารถทำให้การคำนวณง่ายขึ้นได้ในกรณีที่สนามไฟฟ้ามีความสม่ำเสมอและมีทิศทางที่ชัดเจนดังรูป



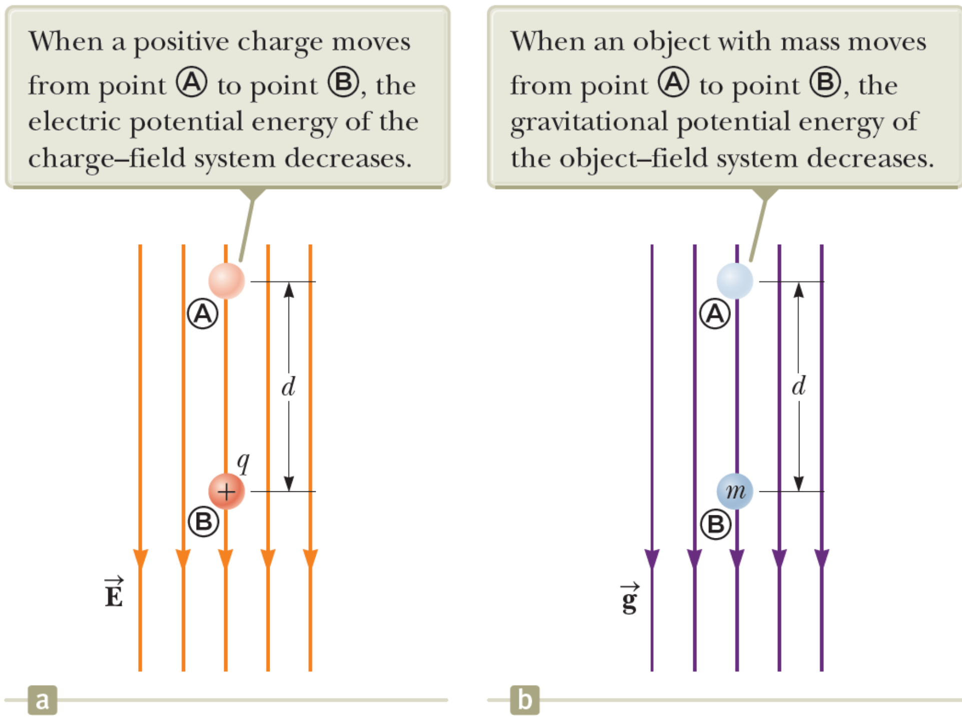
- ความต่างศักย์ระหว่างจุด A และ B ซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง d เมื่อเวกเตอร์ของการกระจัด S ชี้จากจุด A ไปยังจุด B และวางตัวขนานกับเส้นสนามไฟฟ้า จะมีค่าดังสมการ

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int_A^B EdS\left(\cos 0^\circ\right) = -\int_A^B EdS$$

- เนื่องจากสนามไฟฟ้า E มีค่าคงที่ จึงสามารถนำออกมานอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้ ซึ่งจะได้

$$\Delta V = -E\int_A^B dS = -Ed$$

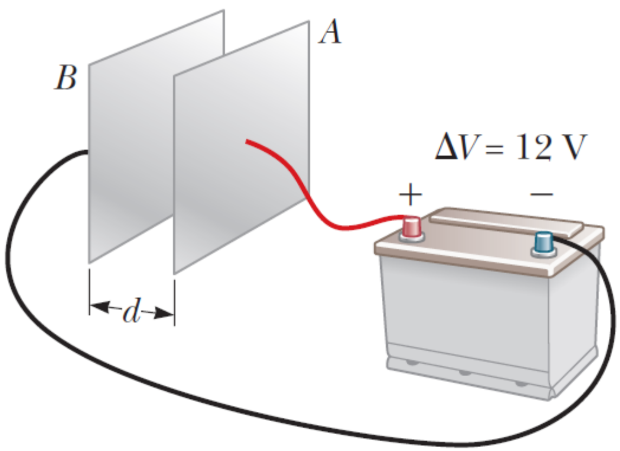
ความต่างศักย์ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ



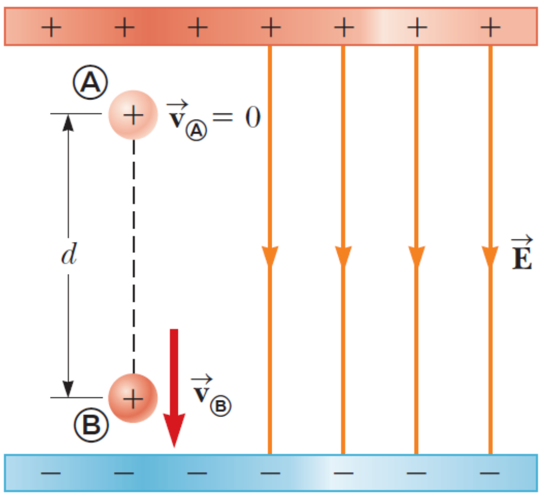
- ดังนั้นถ้ามีประจุ q เคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B จะสามารถคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ของระบบประจุ-สนามได้ดังสมการ

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd$$

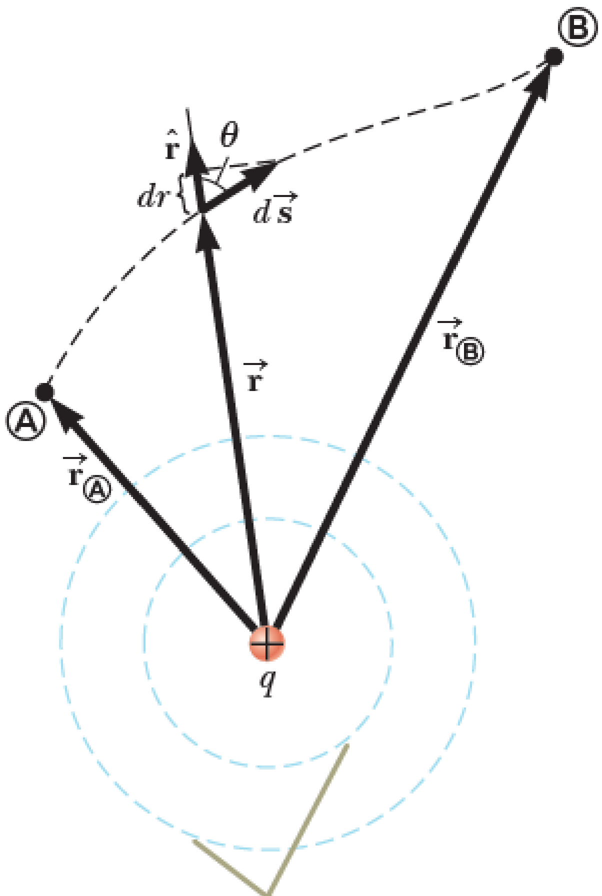
ตัวอย่างที่ 3.1 จงหาขนาดของสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำสองแผ่นที่วางห่างกัน 0.3 cm และต่อเข้ากับแบตเตอรี่ 12 V ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3.2 จงหาอัตราเร็วของโปรตอนหลังจากถูกผลักให้เคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง A ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอที่มีขนาดเท่ากับ 8 x 10^4 V/m จนเกิดการกระจัดเท่ากับ 0.5 m ณ จุด B ดังรูป โดยมีทิศทางการเคลื่อนที่ขนานกับสนามไฟฟ้าดังกล่าว



ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุจุด



The two dashed circles represent intersections of spherical equipotential surfaces with the page.

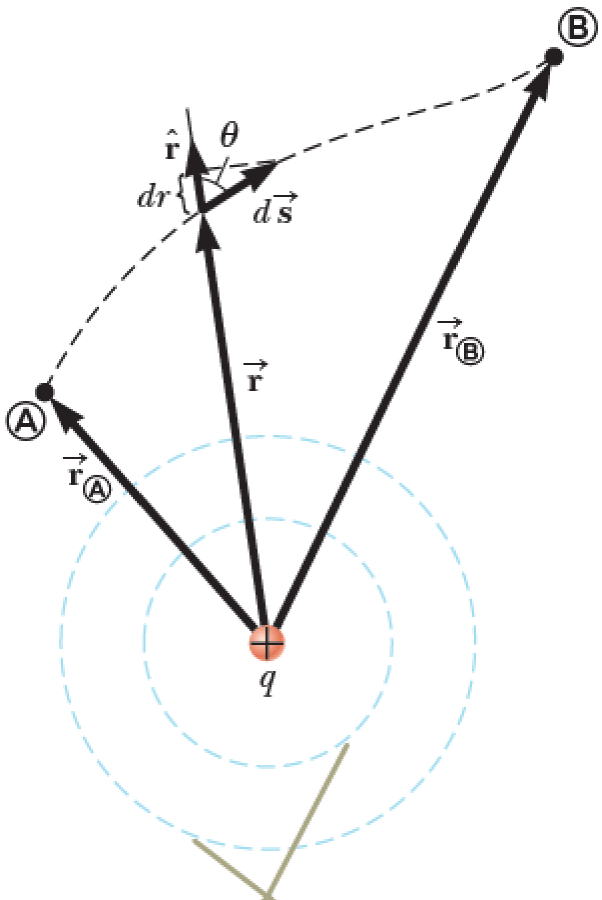
- ประจุจุด q ที่วางอยู่อย่างโดดเดี่ยวจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้ากระจายพุ่งออกจากประจุในแนวรัศมี เพื่อหาศักย์ไฟฟ้าที่จุดใดๆ ที่อยู่ห่างจากประจุเป็นระยะ r ต้องเริ่มด้วยการหาค่าความต่างศักย์ก่อนดังสมการ

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- เมื่อ A และ B คือจุดใดๆ สองจุดแสดงดังรูป ที่จุดใดๆ สนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุจุดคือ $\vec{E} = (k_e q/r^2)\hat{r}$ เมื่อ $\vec{r}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้ออกจากประจุในแนวรัศมี ดังนั้นปริมาณ $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S}$$

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุจุด



The two dashed circles represent intersections of spherical equi-potential surfaces with the page.

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = k_e\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{S}$$

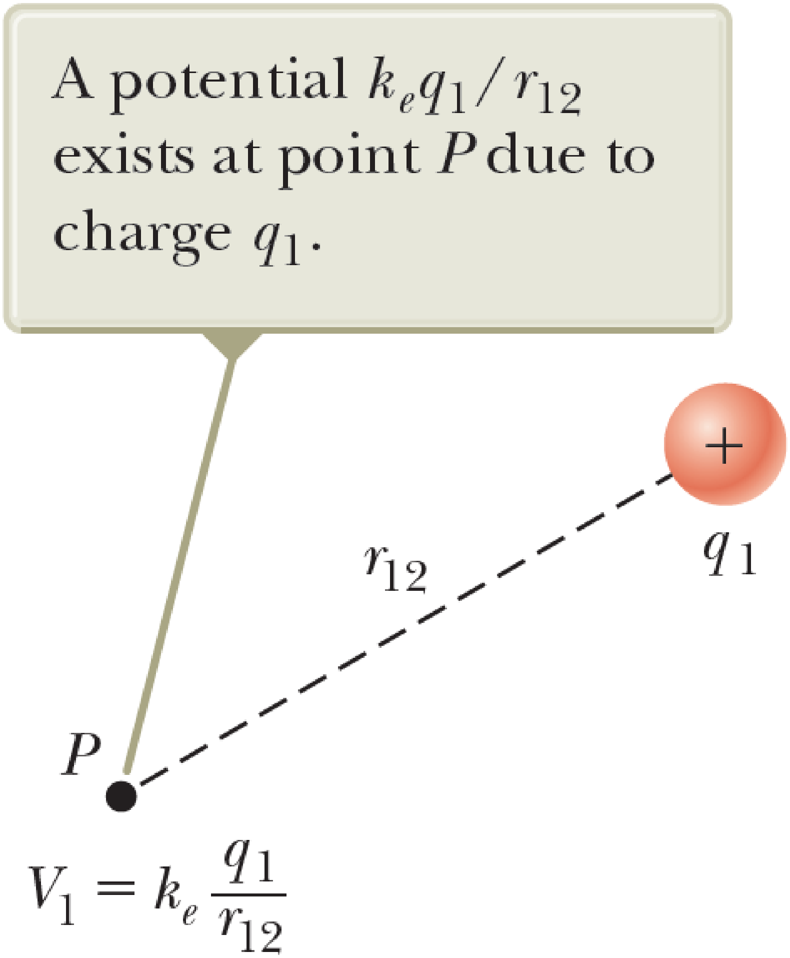
- ภายหลังจากการแทนเงื่อนไขบางประการที่เกี่ยวข้องลงไป สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$V_B - V_A = k_e q\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

- ถ้าเลือกจุดอ้างอิงของศักย์ไฟฟ้าสำหรับประจุจุดให้มีค่า V เท่ากับ 0 ที่ตำแหน่ง $r_A = \infty$ ซึ่งการเลือกจุดอ้างอิงที่ตำแหน่งนี้จะทำให้ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากประจุจุดที่ระยะห่าง r ใดๆ จากประจุสามารถหาค่าได้ดังสมการ

$$V = k_e\frac{q}{r}$$

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุจุด

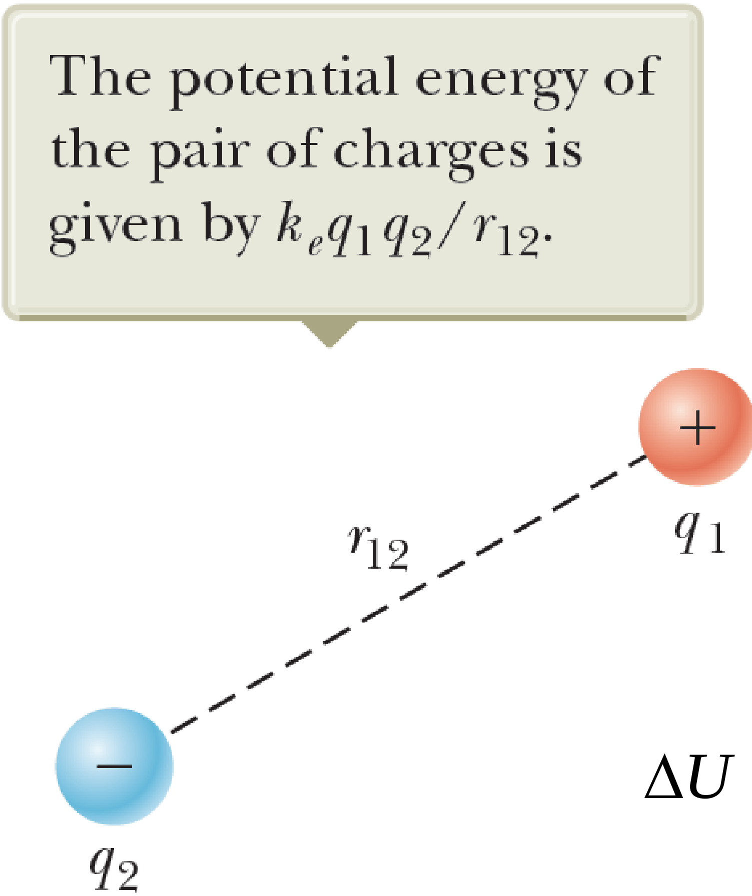


$$V = k_e \frac{q}{r}$$

- นอกจากนั้นศักย์ไฟฟ้ารวมทั้งหมดที่จุด P ที่เกิดจากประจุจุดมากกว่าหนึ่งประจุคือผลรวมของศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากประจุแต่ละตัว ซึ่งสำหรับกลุ่มของประจุจุดจะสามารถแสดงศักย์ไฟฟ้ารวมที่จุด P ได้เป็น

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุจุด

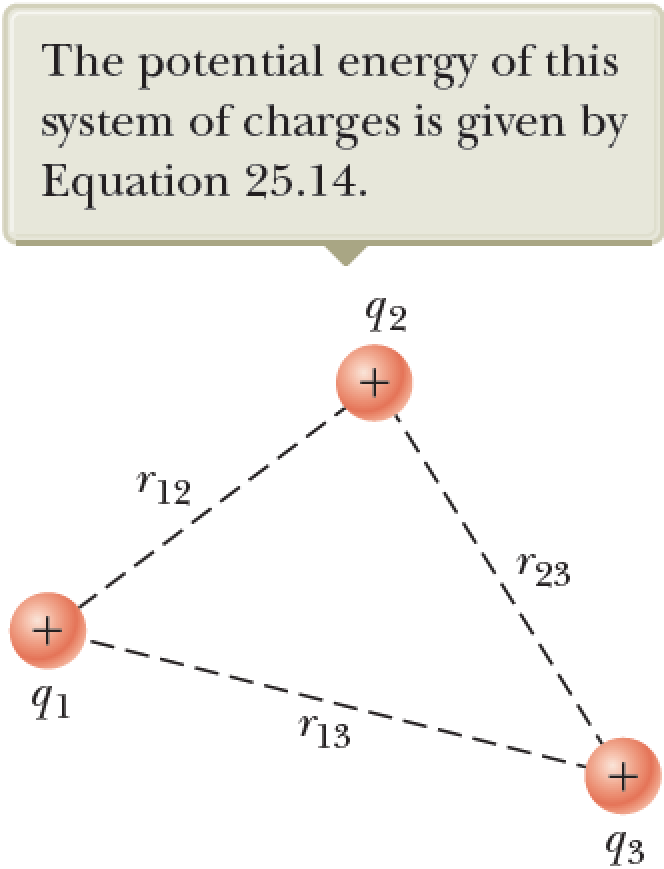


- ถ้าย้ายประจุ q_2 จากระยะอนันต์มาไว้ที่จุด P จะเกิดงานที่ต้องกระทำในการเคลื่อนย้ายประจุนี้ดังสมการ $W = q_2 \Delta V$ ซึ่งงานนี้คือการถ่ายโอนพลังงานข้ามผ่านรอยต่อของระบบประจุทั้งสองเข้าไปในระบบ และพลังงานที่เกิดขึ้นในระบบคือพลังงานศักย์ U เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ห่างกันเป็นระยะ r_{12} พลังงานศักย์ไฟฟ้าของคู่ประจุจุดจะแสดงได้ดังสมการ

$$\Delta U = W = q_2 \Delta V \rightarrow U - 0 = q_2 \left(k_e \frac{q_1}{r_{12}} - 0 \right)$$

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

ศักย์ไฟฟ้าและพลังงานศักย์ที่เกิดจากประจุจุด



$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

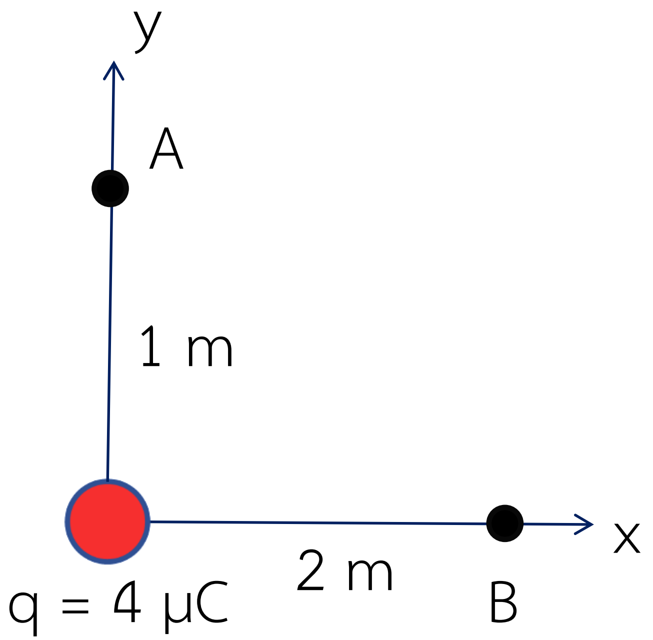
- ถ้าระบบประกอบด้วยประจุมากกว่าสองตัวจะสามารถคำนวณหาพลังงานศักย์ทั้งหมดของระบบได้โดยการคำนวณหา U สำหรับประจุทุกๆ คู่ และหาผลรวมของพลังงานศักย์ทั้งหมดด้วยการบวกแบบพีชคณิตของพลังงานศักย์ของประจุทุกคู่ เช่น พลังงานศักย์รวมของระบบที่ประกอบด้วยประจุสามตัวดังรูปมีค่าเท่ากับ

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

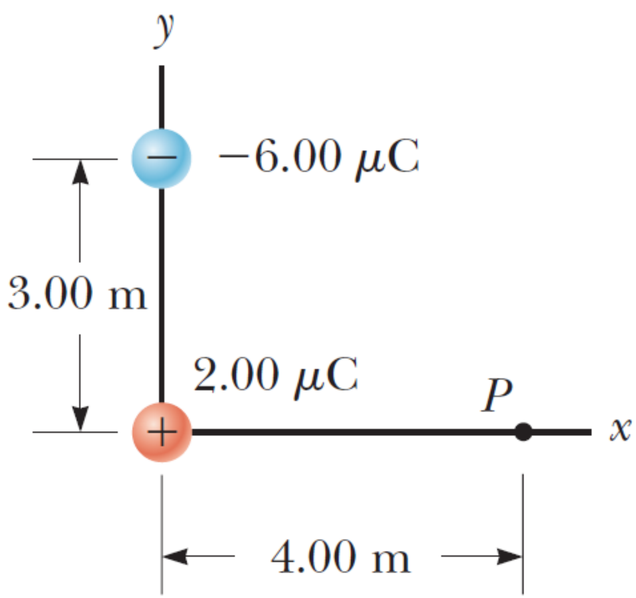
ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาพลังงานศักย์ของการพาประจุ q_1 = +q nC จากระยะอนันต์มายังตำแหน่งที่ห่างจากประจุ q_2 = +2q nC เป็นระยะทาง 0.9 cm

ตัวอย่างที่ 3.4 จงหาพลังงานศักย์ของการพาประจุ q_1 = +q nC จากตำแหน่งที่ห่าง 20 cm จากประจุ q_2 = +2q nC ให้เข้ามาใกล้จนเหลือระยะห่างเพียง 10 cm

ตัวอย่างที่ 3.5 จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุด A และจุด B รวมทั้งงานที่ใช้ในการเคลื่อนประจุขนาด 2 μC จากจุด B ไปยังจุด A



ตัวอย่างที่ 3.6 จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุด P



การหาค่าสนามไฟฟ้าจากศักย์ไฟฟ้า

- สนามไฟฟ้า E และศักย์ไฟฟ้า V มีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- จากสมการข้างต้น ความต่างศักย์ dV ระหว่างจุดสองจุดที่มีระยะห่างกัน dS สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- ถ้าสนามไฟฟ้ามีเพียงองค์ประกอบเดียวคือ E_X จะได้ $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_x dx$ ดังนั้นสมการข้างต้นจึงกลายเป็น

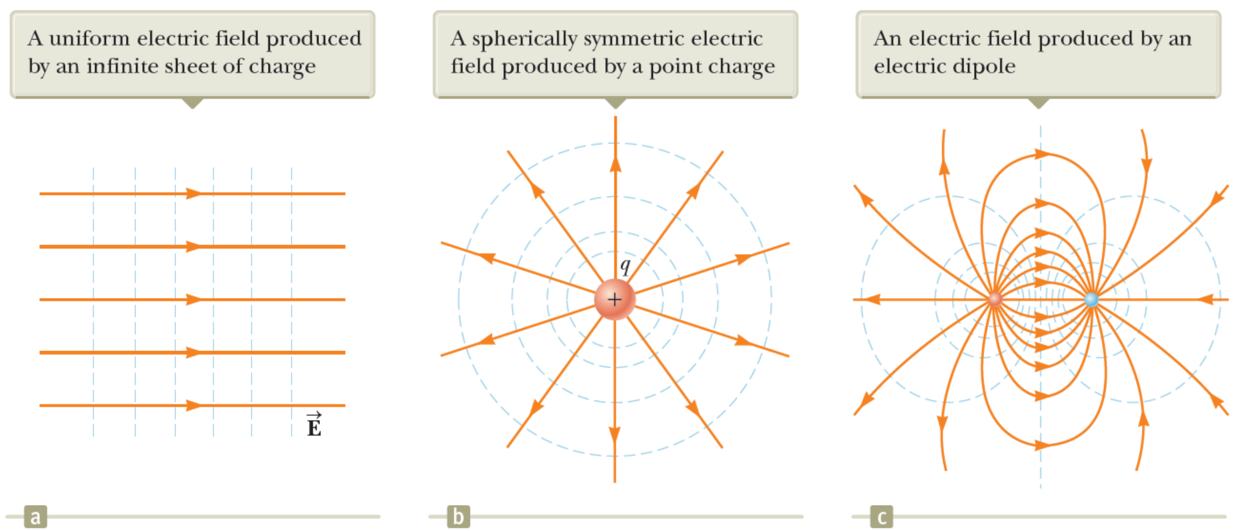
$$dV = -E_x dx \rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$$

การหาค่าสนามไฟฟ้าจากศักย์ไฟฟ้า

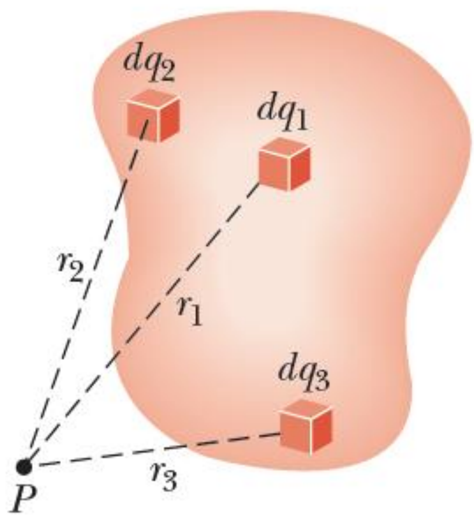
$$E_x = -\frac{dV}{dx}, E_y = -\frac{dV}{dy}, E_z = -\frac{dV}{dz}$$

- จากสมการข้างต้นบ่งบอกว่าองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน x มีค่าเท่ากับค่าลบของอนุพันธ์ของศักย์ไฟฟ้าเทียบกับ x ซึ่งในทำนองเดียวกันจะสามารถหาองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวแกน y และแกน z ได้เช่นกัน
- ถ้าประจุที่ให้กำเนิดสนามไฟฟ้ามีการกระจายตัวแล้วทำให้เกิดความสมมาตรทรงกลมโดยที่ความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรนั้นขึ้นกับระยะห่างในแนวรัศมี r เท่านั้น สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$



ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง



- หากต้องการคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่องจำเป็นต้องใช้วิธีที่แตกต่างไปจากเดิมคือต้องเริ่มพิจารณาศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากประจุย่อยส่วนเล็กๆ dq ก่อนดังรูป ซึ่งศักย์ไฟฟ้า dV ที่จุด P ที่เกิดจากส่วนย่อยของประจุ dq คือ

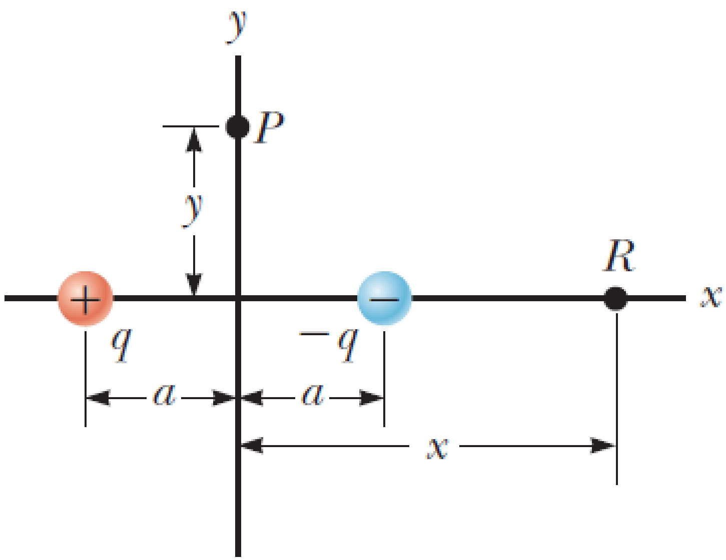
$$dV = k_e \frac{dq}{r}$$

- เมื่อ r คือระยะห่างระหว่างส่วนย่อยของประจุกับจุด P ดังนั้นเพื่อหาศักย์ไฟฟ้ารวมทั้งหมดที่จุด P จะอินทิเกรตสมการข้างต้นเพื่อรวบรวมส่วนย่อยของประจุทั้งหมดที่กระจายอยู่ โดยทั่วไปแล้วเนื่องจากแต่ละส่วนย่อยมีระยะห่างจากจุด P คงที่และค่า k_e ก็เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะสามารถแสดงค่า V ได้ดังนี้

$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง

- ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากคู่ขั้วไฟฟ้า (dipole)



$$V_P = k_e\left(\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2+y^2}}\right) = 0$$

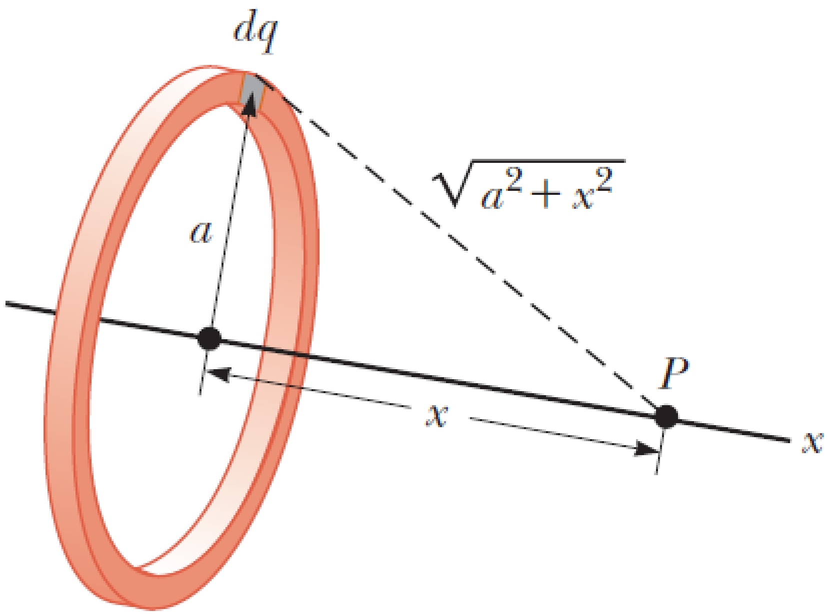
$$V_R = -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2}$$

$$V_x = -\frac{2k_e qa}{x^2} \qquad (x \gg a)$$

$$E_x = -\frac{4k_e qa}{x^3} \qquad (x \gg a)$$

ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง

- ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากจุดประจุที่กระจายตัวเป็นวงแหวน

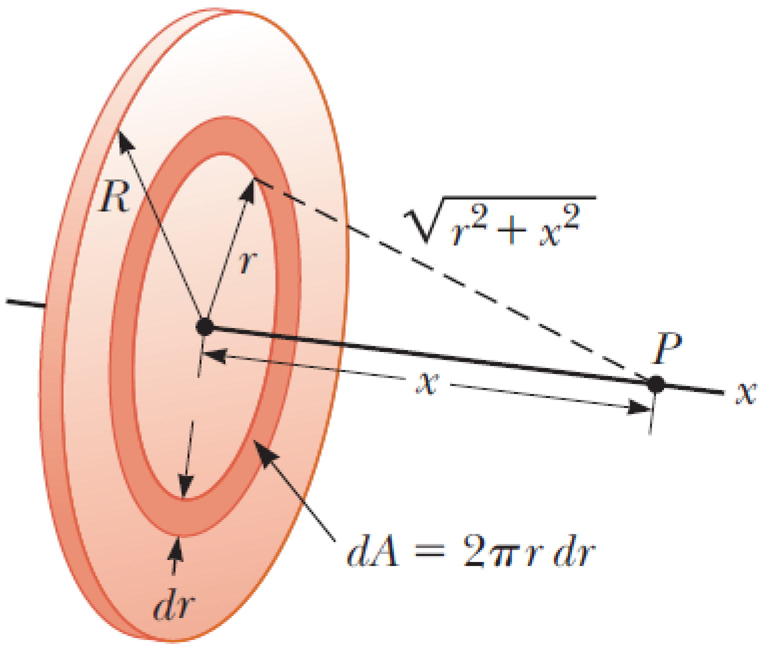


$$V = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$E_x = \frac{k_e x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}} Q$$

ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง

- ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากจุดประจุที่กระจายตัวเป็นรูปจานกลม

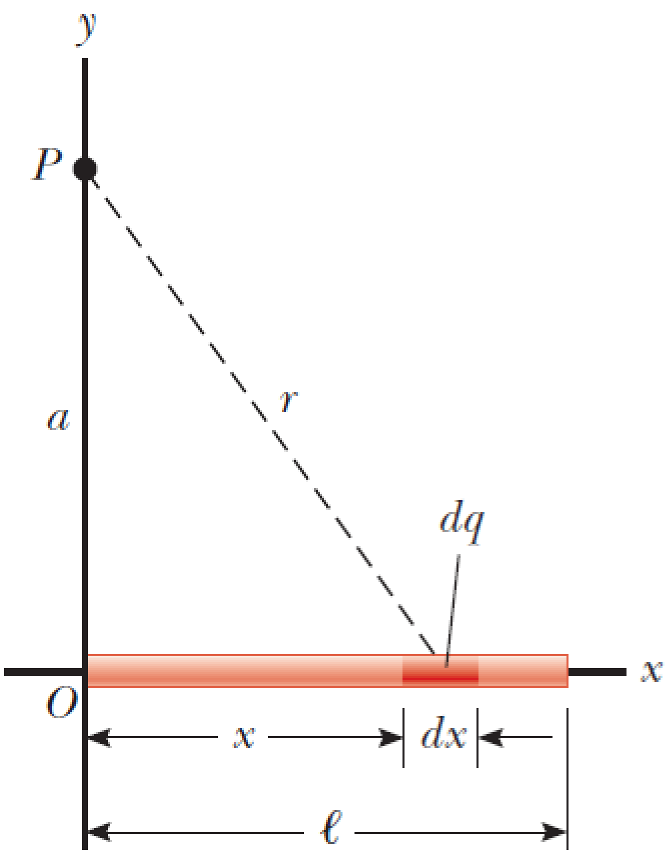


$$V = 2\pi k_e \sigma \left[\left(R^2 + x^2 \right)^{1/2} - x \right]$$

$$E_x = 2\pi k_e \sigma \left[1 - \frac{x}{\left(R^2 + x^2 \right)^{1/2}} \right]$$

ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายประจุอย่างต่อเนื่อง

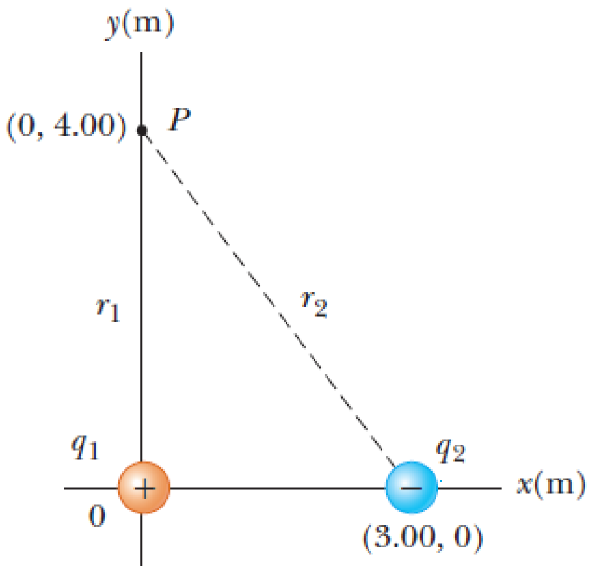
- ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากเส้นประจุยาวจำกัด



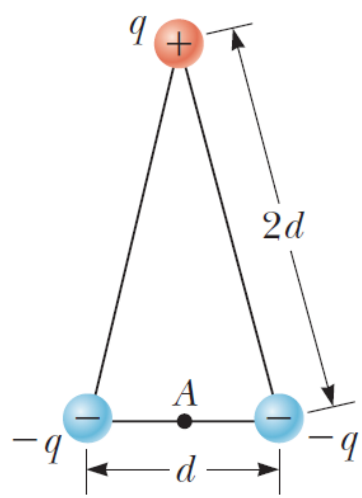
$$V = k_e \frac{Q}{l} \ln\left(\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right)$$

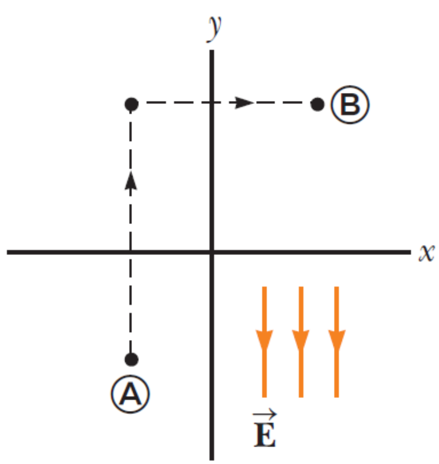
การบ้านครั้งที่ 3

ข้อที่ 1 จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุด P รวมทั้งงานที่ต้องใช้ในการเคลื่อนประจุขนาด 4 μC จากระยะอนันต์มายังจุด P เมื่อกำหนดให้ประจุ q_1 และ q_2 มีขนาด +5 μC และ -2 μC ตามลำดับ



ข้อที่ 2 จงหาศักย์ไฟฟ้าที่จุด A ของระบบอนุภาคมีประจุสามตัวดังรูปด้านขวา เมื่อกำหนดให้ประจุบวกมีขนาด +7 μC และประจุลบมีขนาด -7 μC ตามลำดับ





ข้อที่ 3 จงหาความต่างศักย์ระหว่างจุด B และจุด A ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าขนาด 325 V/m ซึ่งมีทิศทางตามแนวแกน –y ดังรูปด้านบน เมื่อกำหนดให้พิกัดของจุด A และจุด B คือ (-0.2, -0.3) และ (0.4, 0.5) ตามลำดับ