

บทที่ 2

กฎของเกาส์

General Physics II

01420112

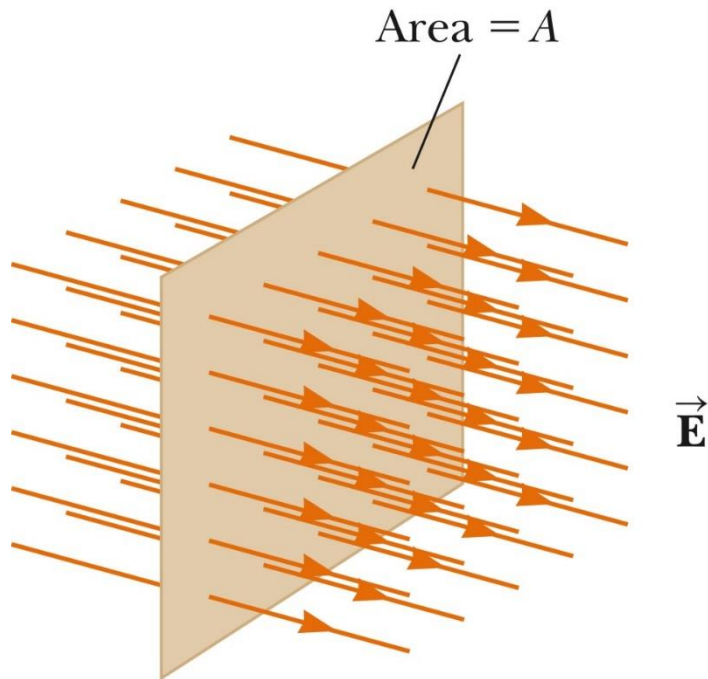
รองศาสตราจารย์ ดร.ธนิศร์ ตั้งเจริญ

กฎของเกาส์

(Gauss's Law)

- ใช้เป็นอีกหนึ่ทางเลือกในการคำนวณหาสนามไฟฟ้า
- อยู่บนพื้นฐานของพฤติกรรมกำลังสองผกผันของแรงไฟฟ้าระหว่างกลุ่มประจุจุด
- เหมาะสมกับการคำนวณหาสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการกระจายตัวของประจุที่มีความสมมาตรสูง
- เป็นพื้นฐานสำคัญที่ทำให้เข้าใจสมบัติต่างๆ ของตัวนำในสถานะสมดุลไฟฟ้าสถิต

ฟลักซ์ไฟฟ้า



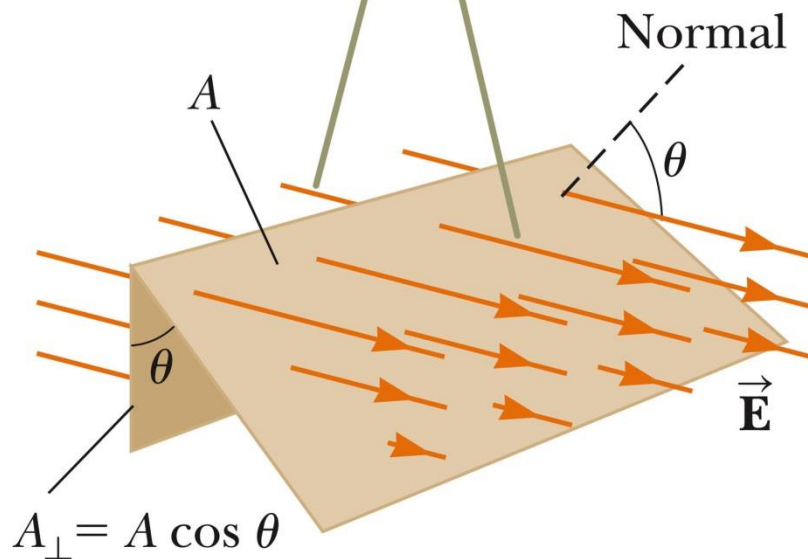
- ฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric Flux; Φ_E) คือ ปริมาณทางไฟฟ้าชนิดหนึ่งที่เกิดขึ้นจาก ผลคูณของความเข้มของสนามไฟฟ้า E กับพื้นที่ผิว A ที่ตั้งฉากกับสนามไฟฟ้านั้นดัง สมการ

$$\Phi_E = EA$$

มีหน่วยคือนิวตัน-เมตร²/คูลอมบ์ $N \cdot m^2/C$

ฟลักซ์ไฟฟ้า

The number of field lines that go through the area A_{\perp} is the same as the number that go through area A .

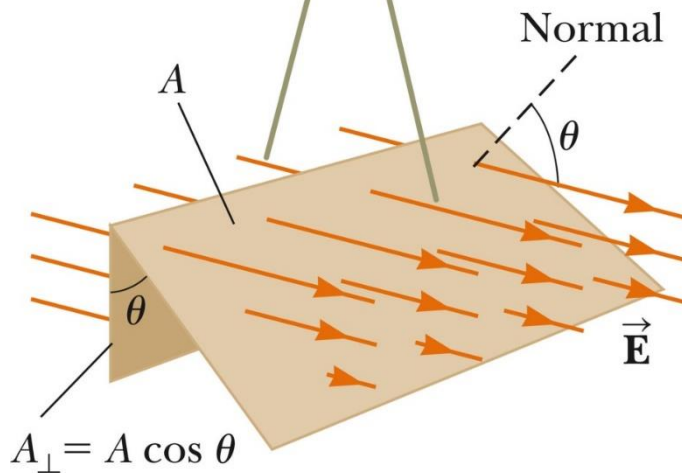


- ขนาดของฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric Flux; Φ_E) แปรผันตรงกับเส้นแรงไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับพื้นผิว ถ้าเส้นแรงไฟฟ้าเอียงทำมุม θ กับเส้นปกติ (normal line) ที่ตั้งฉากกับพื้นผิว จะได้ว่า

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

ฟลักซ์ไฟฟ้า

The number of field lines that go through the area A_{\perp} is the same as the number that go through area A .



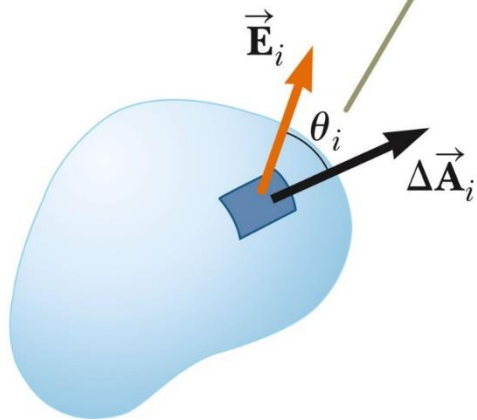
$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

- ฟลักซ์ไฟฟ้าจะมี **ค่าสูงสุด** เมื่อพื้นผิว **ตั้งฉาก** กับสนามไฟฟ้า $\theta = 0^\circ$
- ฟลักซ์ไฟฟ้าจะมี **ค่าต่ำสุด** เมื่อพื้นผิว **ขนาน** กับสนามไฟฟ้า $\theta = 90^\circ$

- ในกรณีที่สนามไฟฟ้ามีค่าไม่คงที่ทั่วทั้งพื้นผิว สมการข้างต้นจะเป็นจริงสำหรับพื้นที่ผิวในส่วนเล็กๆ เท่านั้น

ฟลักซ์ไฟฟ้า

The electric field makes an angle θ_i with the vector $\Delta\vec{A}_i$, defined as being normal to the surface element.



- พิจารณาส່วณย่อยที่มีพื้นที่ ΔA_i บนพื้นผิวใดๆ ที่มีสนามไฟฟ้า \vec{E}_i เคลื่อนที่ผ่านโดยทำมุม θ_i กับเวกเตอร์ $\Delta\vec{A}_i$

$$\Delta\phi_E = E_i \Delta A_i \cos \theta_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

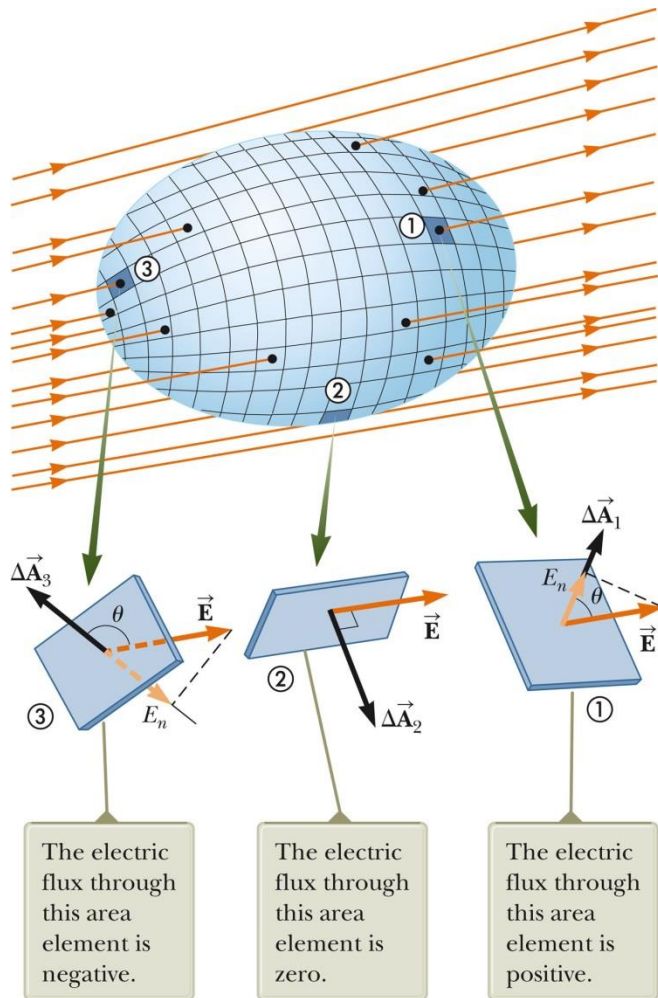
ในกรณีทั่วไปจะกลายเป็น

$$\phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum E_i \cdot \Delta A_i$$

$$\phi_E = \int_{\text{surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

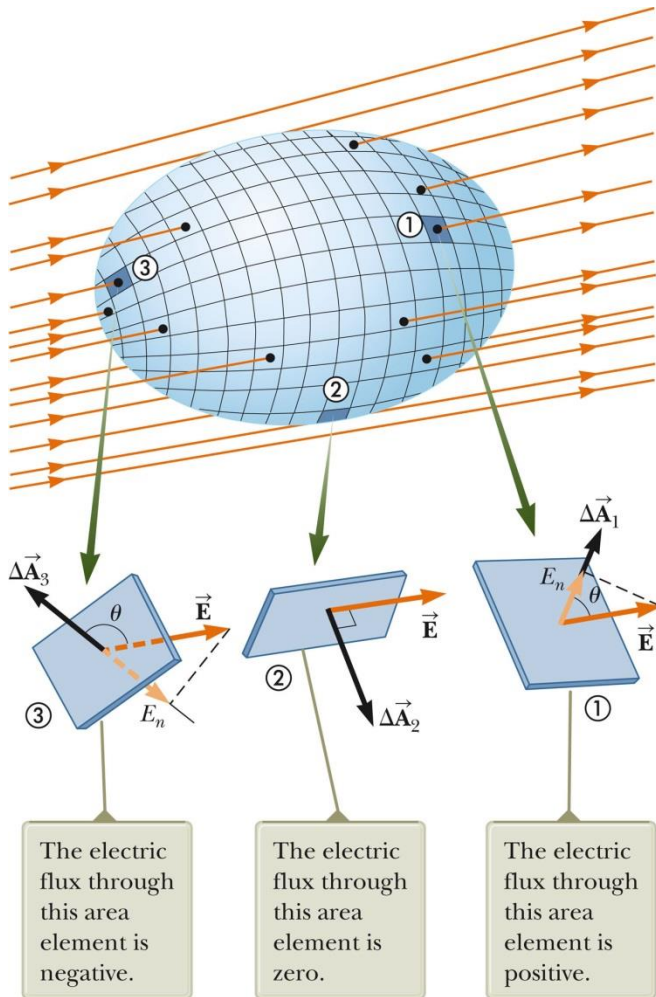
- แม้ว่าสมการข้างต้นจะเป็นการอินทิเกรตทั่วทั้งพื้นผิวเพื่อหาค่าฟลักซ์ไฟฟ้า แต่ในความเป็นจริงค่าดังกล่าวจะขึ้นอยู่กับทั้งรูปแบบของสนามไฟฟ้าและทิศทางของพื้นผิวในแต่ละอาณาบริเวณด้วย

ฟลักซ์ไฟฟ้า



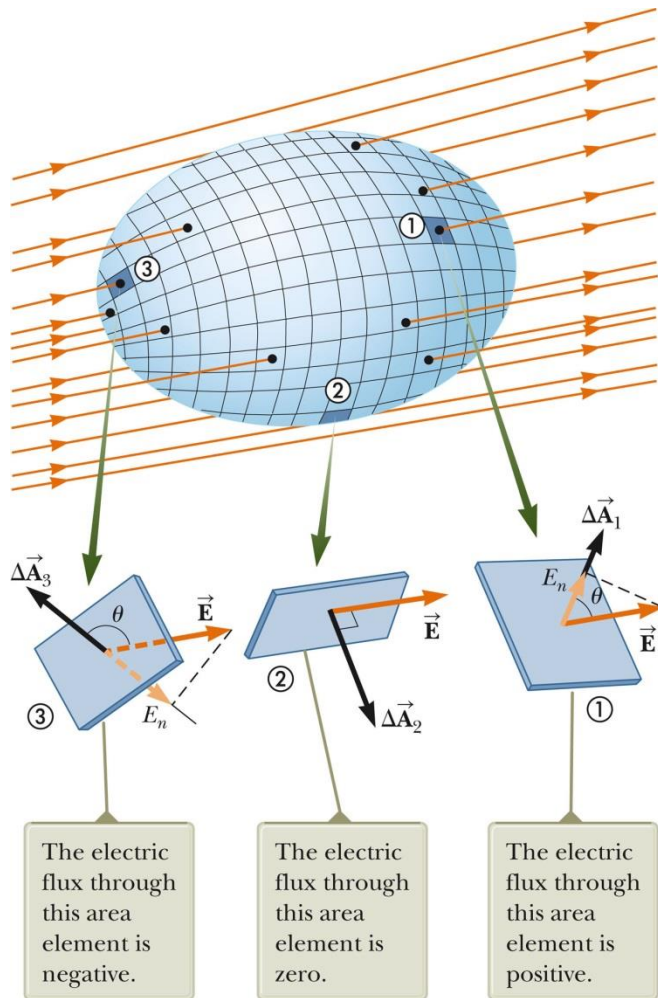
- พิจารณาวัตถุสามมิติ **ผิวปิด (closed surface)** ทรงรีดังรูปซึ่งมีสนามไฟฟ้าเคลื่อนที่ทะลุผ่านพื้นผิวตลอดทั่วทั้งก้อนของวัตถุดังกล่าว
- แม้ว่าเวกเตอร์ $\Delta\vec{A}_i$ ของส่วนย่อยทั้ง 3 ส่วนจะตั้งฉากกับพื้นผิวของตัวเองแต่กลับชี้ไปในทิศทางที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน

ฟลักซ์ไฟฟ้า



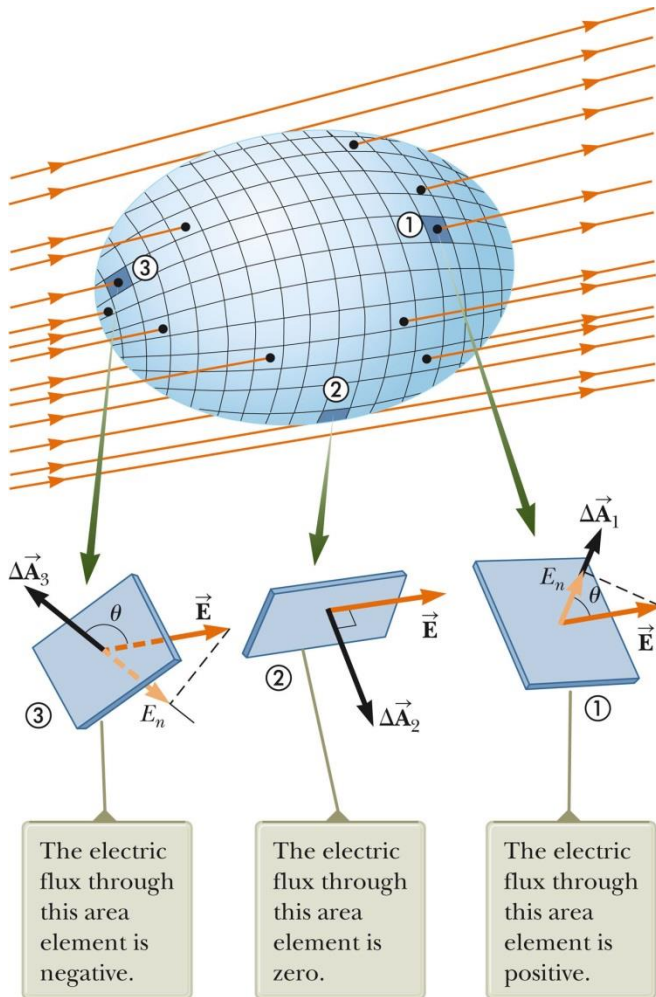
- **ส่วนย่อยที่ 1** เส้นสนามไฟฟ้า E จะตัดผ่านพื้นผิวจากด้านในสู่ด้านนอกด้วยมุม $\theta < 90^\circ$ จึงมีค่าฟลักซ์ไฟฟ้า Φ เป็นค่าบวก
- **ส่วนย่อยที่ 2** เส้นสนามไฟฟ้า E จะเคลื่อนที่เฉียดไปกับพื้นผิวด้วยมุม $\theta = 90^\circ$ จึงมีค่าฟลักซ์ไฟฟ้า Φ เท่ากับศูนย์
- **ส่วนย่อยที่ 3** เส้นสนามไฟฟ้า E จะตัดผ่านพื้นผิวจากด้านนอกสู่ด้านในด้วยมุม $180^\circ > \theta > 90^\circ$ จึงมีค่าฟลักซ์ไฟฟ้า Φ เป็นค่าลบ

ฟลักซ์ไฟฟ้า



- ค่าฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่พุ่งผ่านพื้นผิวนี้จะแปรผันตรงกับจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งออกจากพื้นผิวลบด้วยจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งเข้าสู่พื้นผิว
- ถ้าจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าพุ่งออกมาพื้นผิวมีมากกว่าเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งเข้า ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิจะมีค่าเป็นบวก ในทางกลับถ้าจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าพุ่งเข้าสู่พื้นผิวมีมากกว่าเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งออก ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิจะมีค่าเป็นลบ

ฟลักซ์ไฟฟ้า

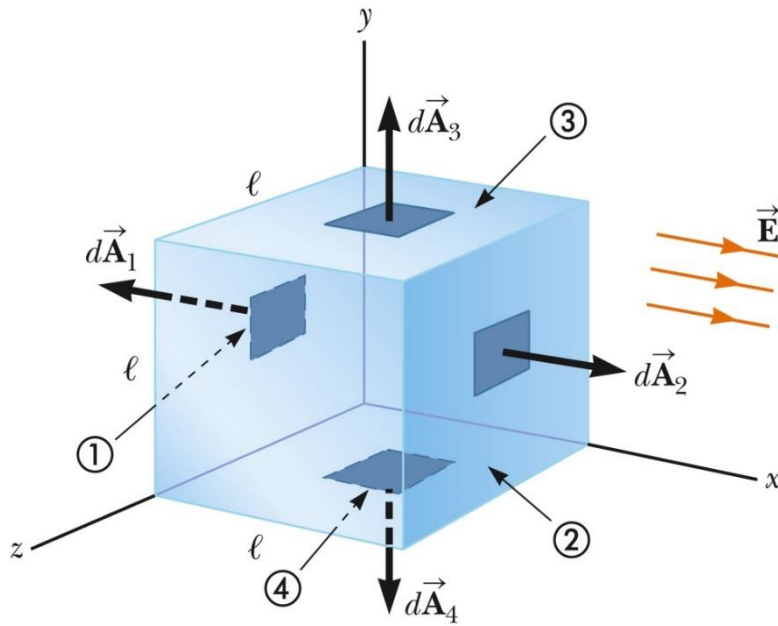


- จะใช้สัญลักษณ์ \oint แทนการอินทิเกรตตลอดทั่วทั้งผิวปิด และสามารถแสดงฟลักซ์ไฟฟ้า Φ_E ที่พุ่งผ่านผิวปิดได้ดังสมการ

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E_n dA$$

เมื่อ E_n แทนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าที่ตั้งฉากกับผิว

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่พุ่งผ่านพื้นผิวของลูกบาศก์ดังรูป เมื่อกำหนดให้พื้นผิวของลูกบาศก์แต่ละด้านมีความยาว ℓ และถูกนำไปวางในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้า \vec{E} ที่มีทิศทางการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x



กฎของเกาส์



Karl Friedrich Gauss

(1777-1855)

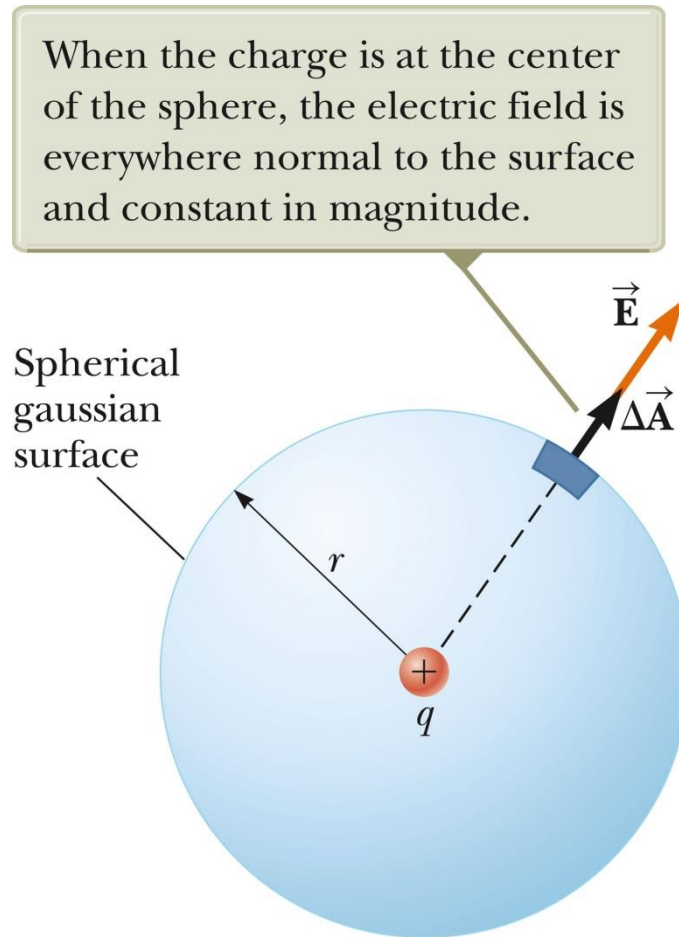
■ คาร์ล ฟรีดริช เกาส์

นักคณิตศาสตร์และนักดาราศาสตร์ชาวเยอรมัน มีผลงานเกี่ยวกับแม่เหล็กไฟฟ้า ทฤษฎีตัวเลข สติติ เรขาคณิต และกลศาสตร์ของวงโคจรของดาวหาง

■ กฎของเกาส์ (Gauss's Law)

ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ทั่วไประหว่างฟลักซ์สุทธิที่พุ่งผ่านผิวปิด (นิยมเรียกว่าผิวเกาส์ gaussian surface) กับประจุไฟฟ้าที่ผิวเกาส์ล้อมรอบ

กฎของเกาส์



- พิจารณาประจุบวก q อยู่ที่จุดกึ่งกลางของทรงกลมรัศมี r ดังรูป จากสมการในบทที่แล้วทำให้ทราบว่าขนาดของสนามไฟฟ้าที่ทุกๆ จุดบนผิวทรงกลมมีค่าเป็น

$$E = k_e q / r^2$$

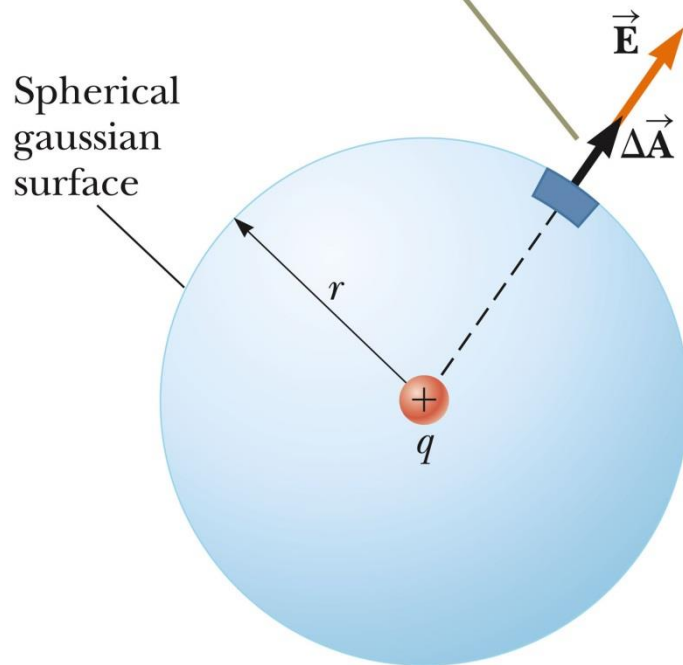
- ฟลักซ์สุทธิที่พุ่งผ่านผิวเกาส์คือ

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \oint dA$$

สามารถนำ E ออกนอกเครื่องหมายอินทิเกรตได้เพราะความสมมาตรและมีค่าคงที่ทุกจุดบนผิวทรงกลม

กฎของเกาส์

When the charge is at the center of the sphere, the electric field is everywhere normal to the surface and constant in magnitude.



ϵ_0 คือสภาพยอมในสุญญากาศ (permittivity of free space) ซึ่งมีค่าเท่ากับ $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$

$$\Phi_E = E \oint dA$$

- นำค่าของ E จากสมการก่อนหน้าและเนื่องจากผิวเป็นผิวทรงกลมจึงส่งผลทำให้ $\oint dA = A = 4\pi r^2$ ดังนั้นฟลักซ์สุทธิที่พุ่งผ่านผิวเกาส์คือ

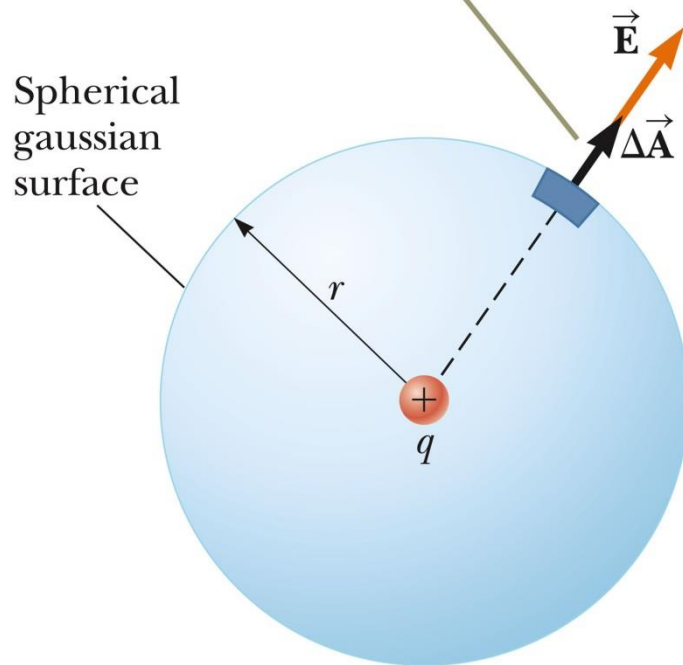
$$\Phi_E = k_e \frac{q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

- เนื่องจาก $k_e = 1/4\pi \epsilon_0$ สมการข้างต้นจึงกลายเป็น

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

กฎของเกาส์

When the charge is at the center of the sphere, the electric field is everywhere normal to the surface and constant in magnitude.



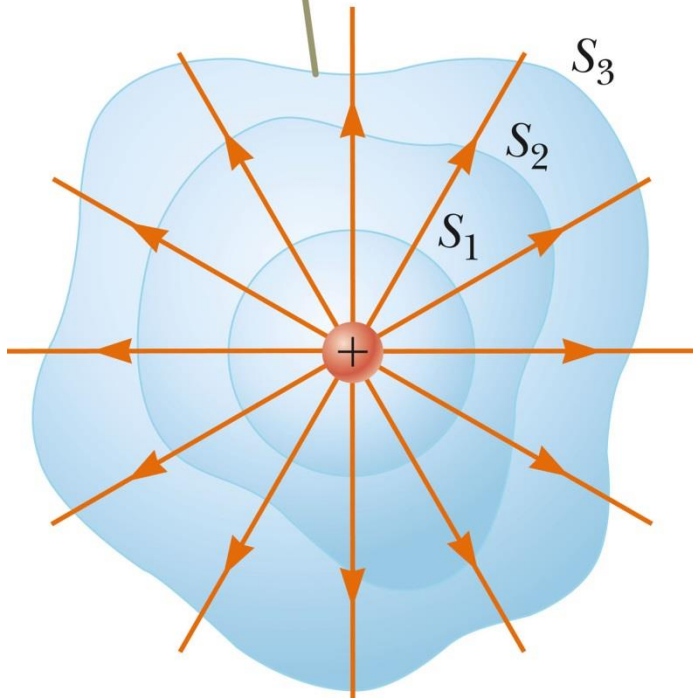
$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

“ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่พุ่งผ่านผิวปิดใดๆ ที่ล้อมรอบประจุจุด q มีค่าเท่ากับ q/ϵ_0 และไม่ขึ้นกับรูปร่างของผิวนั้น”

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

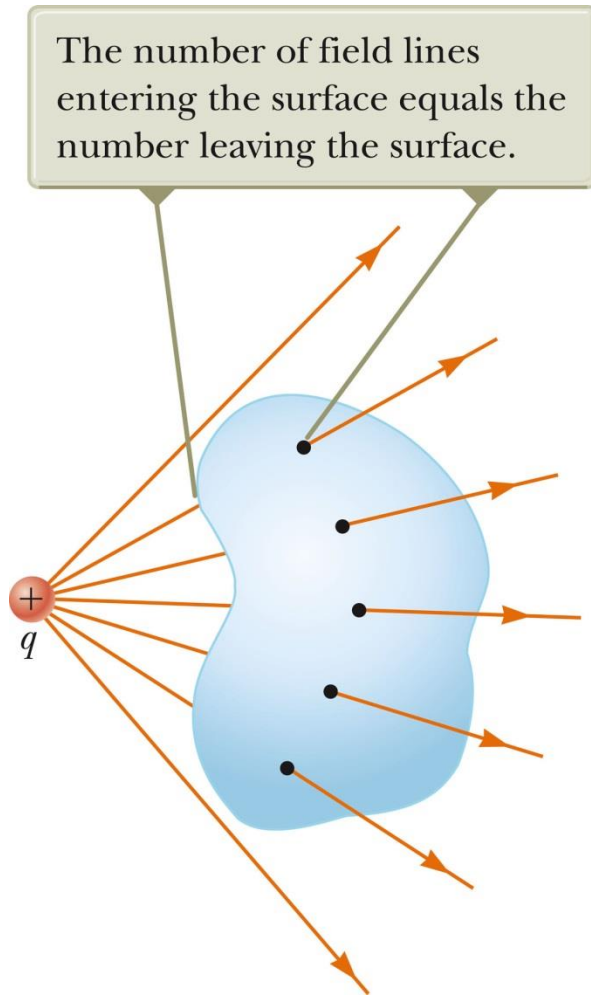
กฎของเกาส์

The net electric flux is the same through all surfaces.



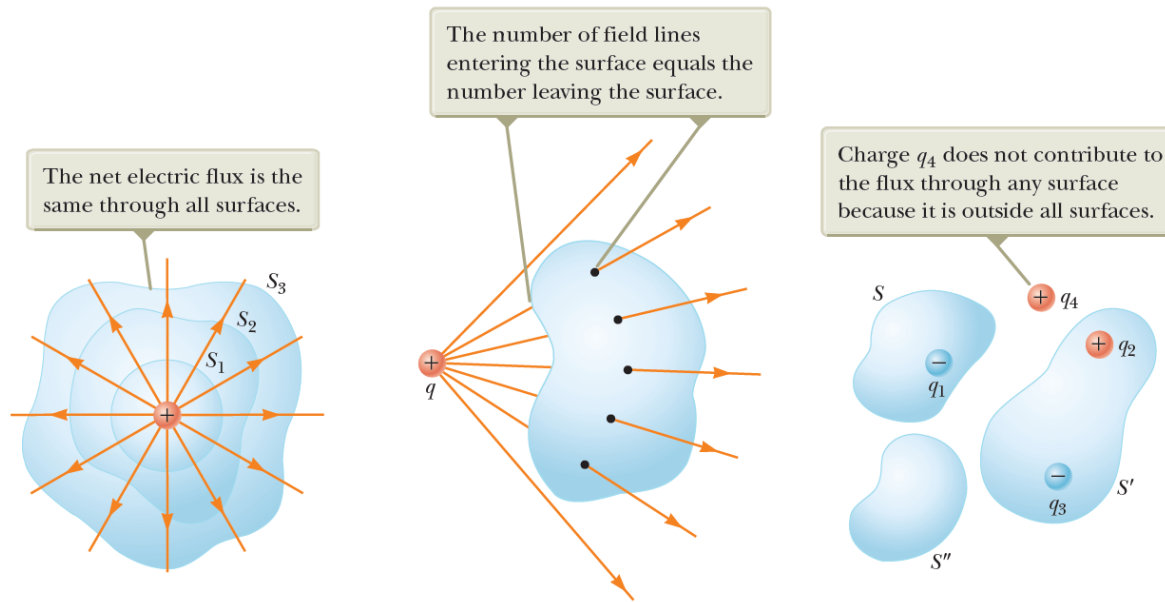
- พิจารณาผิวปิดหลายๆ ผิวที่ล้อมรอบประจุ q ดังรูป ผิว S_1 เป็นทรงกลมแต่ผิว S_2 และ S_3 ไม่ใช่ทรงกลม
- จากกฎของเกาส์ทำให้ทราบว่าฟลักซ์ที่พุ่งผ่านผิว S_1 มีค่าเท่ากับ q/ϵ_0 และเนื่องจากฟลักซ์แปรผันตรงกับจำนวนของเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งผ่านผิว ดังนั้นจากรูปจึงพบว่าจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งผ่าน S_1 มีค่าเท่ากับจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งผ่านผิวที่ไม่ใช่ทรงกลม S_2 และ S_3 ซึ่งเป็นสิ่งยืนยันว่าฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิมีค่าเท่ากับ q/ϵ_0 และไม่ขึ้นกับรูปร่างของผิว

กฎของเกาส์



- พิจารณาประจุจุดที่อยู่ภายนอกผิวปิดรูปร่างใดๆ ดังรูป จะพบว่าเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งเข้าผิวปิดด้านหนึ่งจะพุ่งออกจากผิวปิดอีกด้านหนึ่ง จำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งเข้าสู่ผิวปิดมีค่าเท่ากับจำนวนเส้นสนามไฟฟ้าที่พุ่งออกจากผิวปิด ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิของผิวปิดที่ไม่ได้ล้อมรอบประจุจึงมีค่าเป็นศูนย์

กฎของเกาส์



- จึงสามารถขยายข้อสรุปข้างต้นออกไปเป็นกรณีทั่วไปสองกรณีคือ (1) สำหรับประจุจุดหลายๆ ตัว และ (2) สำหรับประจุจุดที่กระจายอย่างต่อเนื่อง จะใช้หลักการรวมกันแบบซ้อนทับอีกครั้ง ซึ่งกล่าวว่า สนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุหลายๆ ตัวคือผลรวมแบบเวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุแต่ละตัว ดังนั้นฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่านผิวปิดสามารถแสดงได้ดังสมการ

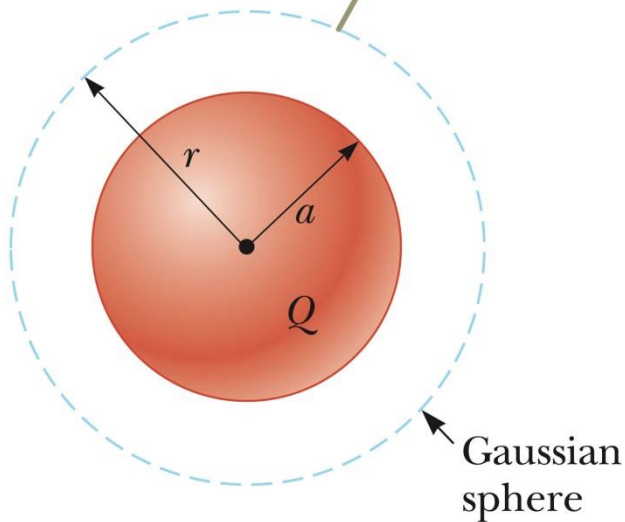
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) d\vec{A}$$

การประยุกต์ใช้กฎของเกาส์

- กฎของเกาส์เหมาะสำหรับคำนวณหาสนามไฟฟ้าเมื่อประจุมีการกระจายอย่างสม่ำเสมอและมีความสมมาตรสูง แต่อย่างไรก็ตามในการใช้กฎของเกาส์ในการคำนวณหาสนามไฟฟ้าของพื้นผิวใดๆ พื้นผิวนั้นควรต้องมีคุณลักษณะอย่างน้อย 1 ใน 4 ข้อดังต่อไปนี้
 - 1) ค่าของสนามไฟฟ้าสามารถประมาณได้ว่ามีค่าคงที่เนื่องจากความสมมาตรในพื้นที่บริเวณนั้น
 - 2) ผลคูณดอทในสมการ $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ สามารถแสดงได้ในรูปง่ายๆ ของผลคูณ $E dA$ เพราะว่า \vec{E} และ $d\vec{A}$ ขนานกัน
 - 3) ผลคูณดอทในสมการที่ $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$ มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่า \vec{E} และ $d\vec{A}$ ตั้งฉากกัน
 - 4) สนามไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์ทั่วทั้งบริเวณพื้นผิวนั้น

กระจายตัวของประจุที่มีความสมมาตรทรงกลม

For points outside the sphere, a large, spherical gaussian surface is drawn concentric with the sphere.



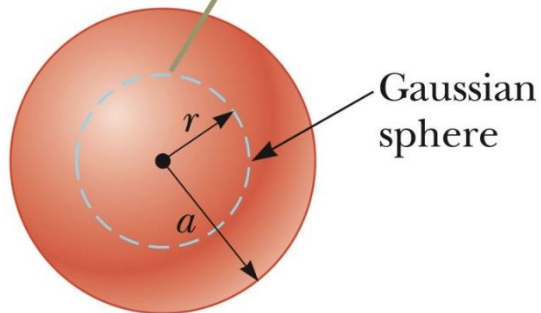
เมื่อ $r > a$

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

กระจายตัวของประจุที่มีความสมมาตรทรงกลม

For points inside the sphere, a spherical gaussian surface smaller than the sphere is drawn.



เมื่อ $r < a$

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

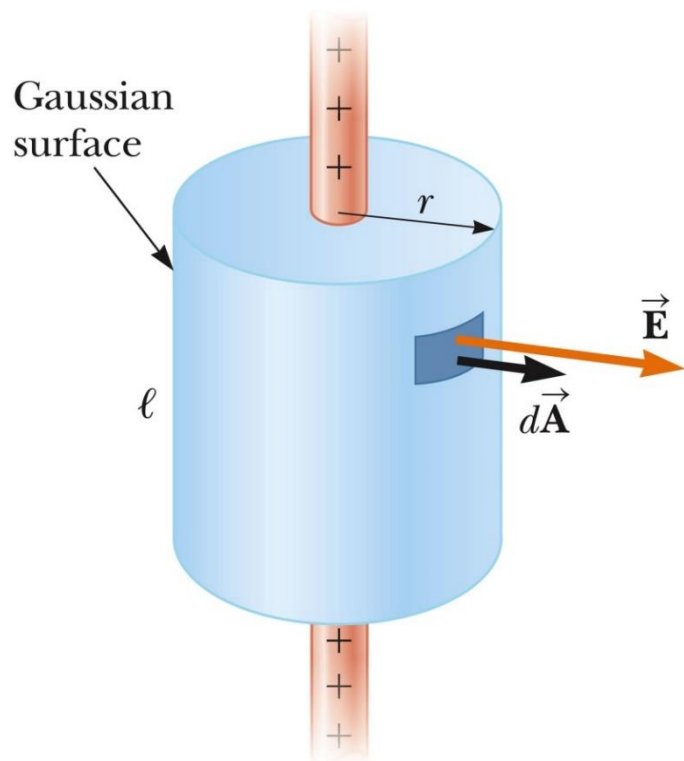
$$\text{เนื่องจาก } q_{in} = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$\text{ดังนั้น } E = \frac{q_{in}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

$$\text{แทนค่า } \rho = Q / \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right) \text{ และ } \epsilon_0 = 1 / 4\pi k_e$$

$$E = \frac{Q / \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)}{3(1/4\pi k_e)} r = k_e \frac{Q}{a^3} r$$

กระจายตัวของประจุที่มีความสมมาตรเป็นรูปทรงกระบอก



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

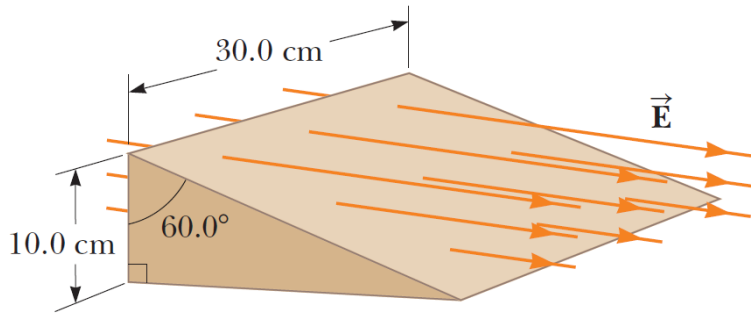
พื้นที่ผิวของผิวโค้งทรงกระบอก $A = 2\pi r\ell$

$$\text{ดังนั้น } E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

การบ้านครั้งที่ 2

ข้อที่ 1 จงหาขนาดของฟลักซ์ไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ผ่าน ก) พื้นผิวสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนวตั้งสูง 10 cm และ ข) พื้นเอียงทำมุม 60° ของกล่องทรงสามเหลี่ยมปิดดังรูป เมื่อกำหนดให้ความเข้มของสนามไฟฟ้า E ที่พุ่งผ่านมีค่าเท่ากับ $7.8 \times 10^4 \text{ N/C}$



ข้อที่ 2 จงหาขนาดของฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่เคลื่อนที่ผ่านผนังของภาชนะทรงกลมปิดชนิดหนึ่งที่ภายในมีประจุขนาด $5.0 \mu\text{C}$, $-9.0 \mu\text{C}$, $27.0 \mu\text{C}$, และ $-84.0 \mu\text{C}$ บรรจุอยู่

ข้อที่ 3 จงหาขนาดของสนามไฟฟ้า ณ ระยะห่าง ก) 0 cm ข) 10 cm ค) 40 cm และ ง) 60 cm จากจุดศูนย์กลางของทรงกลมผิวปิดตันที่มีรัศมี 40 cm ซึ่งมีประจุบวกขนาด $26.0 \mu\text{C}$ กระจายตัวอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้งปริมาตร