

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

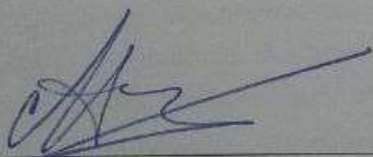
Кафедра высокопроизводительных компьютерных технологий ФГАОУ ВО
УрФУ.

**ВОЗМОЖНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ
СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Направление подготовки 01.03.01 «Математика»

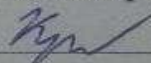
Зав. кафедрой:

д. ф. - м. н., доц. М. Ю. Филимонов



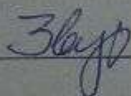
Выпускная квалификационная
работа бакалавра

**Кузнецова Игоря
Александровича**



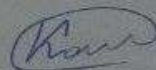
Нормоконтролер:

к. ф. - м. н.,
В. С. Зверев



Научный руководитель:

к. ф. - м. н.,
А. А. Кошелев



Екатеринбург
2023

РЕФЕРАТ

Кузнецов Игорь александрович «Возможность использования искусственных нейронных сетей для решения задач математической физики»: работа содержит: страниц 25, иллюстраций 11, таблиц 2, использованных источников 12

Ключевые слова: PINN, дифференциальные уравнения, нейронные сети, Python

PINN (Physics-Informed Neural Networks) - это метод, который сочетает в себе преимущества нейронных сетей и физических моделей для решения задач научного моделирования. В данном дипломном проекте исследуется применение метода PINN для решения задачи установившегося распределения тепла в кольце и задачу электрокинетики. В работе проводится анализ эффективности точности и скорости метода PINN. Также исследуется влияние различных параметров на точность решения задачи и высказаны идеи по улучшению полученных результатов. Результаты исследования показывают, что метод PINN может решить простую задачу с кольцом, однако более сложная задача электрокинетики, решается плохо. Для решения задачи были использованы следующие технологии:

- 1) язык программирования Python
- 2) библиотека для работы с глубокими нейронными сетями Tensorflow

Содержание

РЕФЕРАТ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	5
1 Постановка задачи	5
1.1 Цель работы	5
1.2 Описание задачи	5
2 Обзор литературы	5
3 Способы и методы решения задачи	6
3.1 Нейронные сети	6
3.2 Автоматическое дифференцирование	8
3.3 Теоретическое описание PINN	8
3.4 Техническая реализация	10
3.4.1 Используемые технологии	10
3.4.2 Программная реализация PINN	10
4 Результаты и их обсуждение	11
4.1 Установившееся распределение тепла в кольце	11
4.2 Задача электрокинетики	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	23
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ	24

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы нейронные сети получили широкое распространение, они используются для анализа и генерации изображений и видео, обработки естественных языков (перевод, чат-боты), медицинской диагностики, финансовых прогнозах и так далее.

Одним из перспективных направлений в этой области являются так называемые PINN – Physics-Informed Neural Networks, физически-информированные нейронные сети. Классические нейронные сети используют большую выборку реальных данных, однако в естественно-научных областях, таких как физика, химия, биология и т.д. зачастую может просто не хватать нужного объёма данных для обучения. PINN способны обойти это ограничение, используя в обучении знания законов физики, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных. Это позволяет использовать неполные и зашумленные данные, что делает их полезными в реальных научных задачах. Однако, вычислительная сложность PINN выше, чем у классических нейронных сетей, что требует большого количества вычислительных мощностей.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Постановка задачи

1.1 Цель работы

Рассмотреть задачу распределения тепла в диске и задачу электрокинетики, решить их с помощью PINN и сравнить полученные данные с решениями, полученными другими способами, оценить целесообразность применения PINN к задаче.

1.2 Описание задачи

Создать нейросеть, которой на вход подаются пространственные координаты. На выходе хотим значение физической величины в данной точке. Обучить данную нейросеть используя методику PINN. Провести оценку результатов обучения: скорость, точность ответа.

2 Обзор литературы

Одна из первых работ, посвященных PINNs, была опубликована в 2019 году Мазьяром Райсси и его коллегами [1]. В этой работе авторы представили метод, который позволяет использовать уравнения в частных производных в качестве ограничений для обучения нейронной сети. Они показали, что этот метод может быть использован для решения широкого спектра задач, включая уравнения Навье-Стокса, уравнения Максвелла и тому подобное.

В настоящее время PINN широко применяются моделировании, анализе широкого спектра физических явлений:

В статье [2] рассматривается задача симуляции циклической вольтаметрии, исследователями было рассмотрено несколько случаев: одномерная вольтаметрия на дисковом электроде с полубесконечными или тонкослойными граничными условиями, двумерная вольтаметрия на микрополосковом электроде и наконец вольтаметрия на края квадратного электрода,

количественно определяя неравномерное распределение тока вблизи угла электрода. Для моделирования был использован перцептрон использующий от трёх до шести скрытых слоёв, и гиперболический тангенс в качестве функции активации. Полученные исследователями данные хорошо согласуются с решениями этих же задач, полученными другими способами.

Так же PINN применяются для: анализа литий-ионных батарей [3, 4], для моделирование теплопереноса в системах со сложной геометрией [5, 6], решения уравнения Навье-Стокса для моделирования турбулентности [7], химической кинематике [8, 9], для решения задач оптимизации с ограничениями, таких как задачи оптимизации формы [10]. Для изучения биологических процессов существует разновидность PINN – BINN (Biologically-informed neural network) [11]

3 Способы и методы решения задачи

3.1 Нейронные сети

Задачу решения системы дифференциальных уравнений можно рассматривать как задачу регрессии, то есть задачу нахождения непрерывного соотношения между зависимой переменной u и одной или несколькими независимыми переменными $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)^T$ по обучающей выборке $T = \{z_i, u_i\}_{i=1}^{N_f}$ (в нашем случае начальным и граничным условиям). Следовательно нашей задачей является поиск функции $\bar{u} = \bar{u}(z, \theta)$, аппроксимирующей истинную функцию $u(z)$ для любых значений z . В качестве \bar{u} обычно выступает нелинейная функция, определяемая соответствующим методом регрессии и зависящая от своего набора параметров $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)^T$. Набор параметров θ подбирается таким образом, что бы

$$\theta = \min_{\theta} \|\bar{u}(z_i, \theta)\|, i = \overline{1, N_f}. \quad (1)$$

Процесс подбора этих параметров называется обучением модели.

Определение 1. Определим функцию регрессии f следующим обра-

ЗОМ:

$$f(z, \theta) = h\left(\sum_{j=1}^p w_j z^j + b\right) = h(wz + b), \quad (2)$$

где h – функция активации (обычно берётся сигмоида, \tanh или ReLu), $w = (w_1, w_2, \dots, w_p)$ – веса, b – смещение, w и b вместе являются параметрами θ функции \bar{u} , $\theta = (w_1, w_2, \dots, w_p, b)^T$.

Определение 2. Искусственной нейронной сетью называют последовательность нескольких функций из определения 1. Сеть с L скрытыми слоями и N нейронами на слой может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} q^{(l,n)} &= h\left(\sum_{i=1}^N w_i^{(l,n)} q^{(l-1,i)} + b^{(l,n)}\right), n = 1, \dots, N, l = 1, \dots, L-1 \\ q^{(L)} &= \sum_{i=1}^N w_i^{(L)} q^{(L-1,i)} + b^{(L)}, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь $q^{(0,i)} = z^i$. Вся искусственная нейронная сеть может быть записана как

$$\bar{u} = q^{(L)}. \quad (4)$$

Для описанной выше нейронной сети справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Нейронная сеть, описанная в определении 2, имеющая по крайней мере один скрытый слой и сигмоидную функцию активации может аппроксимировать любую непрерывную функцию со сколь угодно большой точностью.

Данная теорема хотя и утверждает, что мы можем приблизить любую непрерывную функцию сколь угодно точно, это может потребовать большого количества обучающих данных и а так же большого количества нейронов, что приводит к большому размеру множества параметров θ . Более того в теореме ничего не сказано о том как находить параметры θ искомой нейронной сети, следовательно данный результат скорее теоретический чем практический. Как же в таком случае искать эти параметры.

Как было показано в уравнение (1) мы хотим подобрать параметры таким образом что бы расстояние между предсказанным решением и ис-

тинным решением на обучающих данных было минимизировано по какой то норме. Мы будем использовать один из наиболее распространённых вариантов – среднеквадратичную ошибку:

$$MSE(\theta, T) = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} (\bar{u}(z, \theta) - u_i)^2. \quad (5)$$

Одним из простейших методов поиска минимума $MSE(\theta, T)$ является градиентный спуск, записать его можно следующим образом:

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - \gamma(\nabla_{\theta} MSE(\theta^{(i)}, T)), \quad (6)$$

здесь γ – длина шага градиентного спуска или же скорость обучений. На основе данного метода был создан Adam, его мы и будем использовать.

3.2 Автоматическое дифференцирование

Для задания уравнений в частных производных нам понадобится уметь находить частные производные нейронной сети \bar{u} по входам x . Для этой цели мы воспользуемся автоматическим дифференцированием. Автоматическое дифференцирование использует тот факт, что любая функция является последовательностью элементарных операций (сложение, умножение и т.д.) совмещённых с элементарными функциями (синус, экспонента, логарифм и т.д.). Используя правило дифференцирования сложных функций и известные производные элементарных функций мы можем вычислить интересующую нас производную. Частным случаем автоматического дифференцирования является обратное распространение ошибки.

3.3 Теоретическое описание PINN

Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$F_j(z, u, \lambda_j) = F_j(z, u, u'_{z^1}, u''_{z^1}, \dots, \lambda_j) = 0, z \in \Omega, j = \overline{1, N}, \quad (7)$$

с граничными условиями

$$B_k(z_0, u, u'_{z^1}, u''_{z^1}, \dots) = 0, z_0 \in \partial\Omega, k = \overline{1, K}, \quad (8)$$

здесь $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)$ – независимые переменные из \mathbb{R}^n , Ω – некоторая область в пространстве \mathbb{R}^n , $\partial\Omega$ – её граница, $u(z)$ – искомая функция описывающая интересующие нас свойства системы (скорость, концентрация, потенциал и т.п.), λ_j – векторы постоянных параметров системы, такие как плотность вещества, заряд частиц, теплопроводность материала, температура окружающей среды и тому подобное.

Пусть $\bar{u}(z, \theta)$ – нейронная сеть, аппроксимирующая истинное решение $u(z)$. Для тренировки нейронной сети у нас имеется некоторое количество обучающих данных $T = \{z_b, u_b\}_{b=1}^{N_b}$, полученных из граничных условий. На данном этапе наша функция потерь выглядит следующим образом:

$$MSE_b = \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} (\bar{u}(z_b) - u_b)^2. \quad (9)$$

Теоретически мы можем приблизиться к решению u сколь угодно близко, если T достаточно велика. Однако решение может быть крайне сложным и следовательно требовать большого количества обучающих данных.

Что бы преодолеть это ограничение включим уравнение системы 7 в функцию потерь следующим образом

$$MSE_f = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_j^2(z_i, \bar{u}(z_i), \lambda_j). \quad (10)$$

Считать эту метрику мы будем на множестве $C = \{z_i\}_{i=1}^{N_f}$ – равномерно распределённый по области Ω набор точек коллокации.

Тогда итоговая функция потерь примет следующий вид:

$$\begin{aligned} MSE &= MSE_f + MSE_b \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} (\bar{u}(z_b) - u_b)^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_j^2(z_i, \bar{u}(z_i), \lambda_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Так как физические законы, описываемые (7) напрямую включены в функцию потерь данную нейронную сеть можно назвать physics informed neural network (PINN).

3.4 Техническая реализация

3.4.1 Используемые технологии

Для разработки будем использовать язык Python 3.10.6 – высокоуровневый язык программирования общего назначения, один из наиболее популярных языков в области машинного обучения и Tensorflow – библиотеку для создания и обучения нейронных сетей. Выбор данной библиотеки обусловлен простотой создания нейронных сетей с помощью Keras API, высокой производительностью, а так же встроенным автоматическим дифференцированием, которое и позволит нам обучить нейросеть дифференциальным уравнениям в частных производных.

3.4.2 Програмная реализация PINN

Общая архитектура сети $\bar{u}(z)$, аппроксимирующей функцию $u(z)$ была описана в разделе 3.1, в качестве функции активации слоя будем использовать \tanh . Для создания нейронной сети \bar{u} воспользуемся классом `tensorflow.keras.Model`, слоёв классом `tensorflow.keras.layers.Dense`. Для удобства использования вынесем вычисление производных и функцию потерь в отдельную нейросеть-обёртку $f(\bar{u}, z)$. На вход сети f подаём N_f точек для системы (7) и N_b точек для граничных условий (8). Для этих точек вычисляем значения \bar{u} , а так же её частные производные с помощью автоматического дифференцирования, реализуемого классом `tensorflow.GradientTape`. Затем составляем из них и параметров λ_j систему уравнений (7) и граничные условия (8), они и будут являться выходами нейронной сети f . Функцией потерь у f будет (11). Именно эту сеть мы будем обучать, при этом так как она включает в себя \bar{u} , то одновременно будет происходить и её обучение. Как уже было сказано в разделе 3.1 в качестве оптимизатора будем использовать Adam, а в качестве метрики MSE.

4 Результаты и их обсуждение

Все расчёты производились на процессоре 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12400 2.50 GHz.

4.1 Установившееся распределение тепла в кольце

Рассмотрим для начала относительно простую задачу: определить распределение тепла, установившееся в кольце $1 < r < 2$. $0 < \phi < 2\pi$, с граничными условиями:

$$\begin{aligned} u(1, \phi) &= \cos \phi + \sin \phi + \sin(2\phi) + 5 \sin(3\phi) + 1, \\ u(2, \phi) &= \sin(2\phi) + \sin(3\phi) + \cos(4\phi). \end{aligned} \tag{12}$$

Установившееся распределение тепла описывается уравнением Пуассона, учитывая что внутренних источников тепла нет получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta u = 0. \tag{13}$$

Для полярных координат оно принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \tag{14}$$

Данная задача имеет аналитическое решение:

$$\begin{aligned} u(r, \phi) &= 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} \\ &+ \left(\frac{-r}{3} + \frac{4}{3r} \right) \sin(\phi) + \left(\frac{-r}{3} + \frac{4}{3r} \right) \cos(\phi) \\ &+ \left(\frac{r^2}{5} + \frac{4}{5r^2} \right) \sin(2\phi) \\ &+ \left(\frac{3r^3}{63} + \frac{312}{64r^3} \right) \sin(3\phi) \\ &+ \left(\frac{16r^4}{255} - \frac{16}{255r^4} \right) \cos(4\phi). \end{aligned} \tag{15}$$

Для одной итерации обучения возьмём N_f внутренних точек для урав-

нения (15) и N_b точек для внутреннего и внешнего условий, обозначим их количество как N_i и N_o соответственно, всего $N_f + 2N_b$ точек. В данном случае функция потерь будем выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
MSE = & \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r}(r_i, \phi_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}(r_i, \phi_i) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}(r_i, \phi_i) \right)^2 + \\
& \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} (u(1, \phi_i) - \cos \phi + \sin \phi + \sin(2\phi_i) + 5 \sin(3\phi_i) + 1)^2 + \quad (16) \\
& \frac{1}{N_o} \sum_{i=1}^{N_o} (u(2, \phi_i) - \sin(2\phi_i) + \sin(3\phi_i) + \cos(4\phi_i))^2.
\end{aligned}$$

Возьмём за основу архитектуры сеть из [1], но в место 8 слоёв оставим 4 слоя по 20 нейронов и проведём вычисления при различных значениях для N_f и N_b . Эпох 10000. Валидацию будем проводить следующим образом: для уравнения (15) разобьём область на радиальную сетку, с числом узлов N_f , для граничных условий (16) равномерно расположим на $[0, 2\pi]$ N_b точек.

По графикам обучения, изображённым на рисунке 4.1 видно, что при малом количестве внутренних точек N_f значения функции потерь на валидационной выборке в несколько раз больше значений функции потерь на обучающей выборке, с увеличением N_f же значения функции потерь на обучающей и валидационной выборках практически совпадают.

Время обучения, указанное в таблице 4.1 практически не зависит от количества точек для граничных условий N_b , вероятно потому что с ними не производится вычисление производных, а так же потому что их в целом меньше. В целом время обучения получается достаточно большим, возможным решением данной проблемы может быть изменение числа слоёв и количества нейронов в слоях.

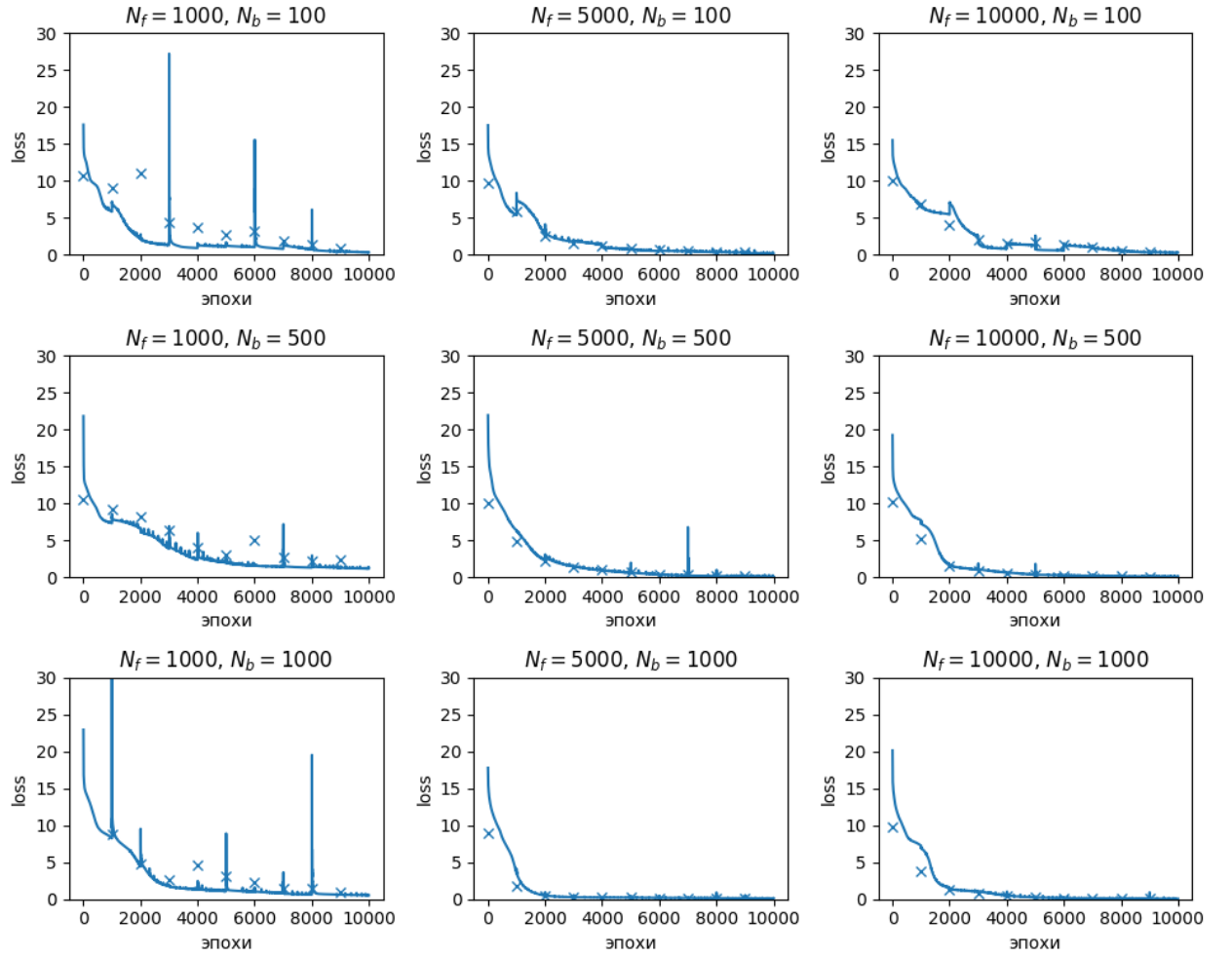


Рисунок 4.1 – Графики функций потерь для различных сочетаний N_f и N_b , крестиками изображаются результаты валидации в определённые моменты времени

$N_b \backslash N_f$	1000	5000	10000
100	311.65	1108.51	3494.39
500	314.31	1112.09	3487.54
1000	312.27	1109.55	3472.66

Таблица 4.1 – Время обучения в секундах для различных сочетаний N_f и N_b

Выполнение граничных условий при различных N_b изображено на рисунках 4.2, 4.3, 4.4. Для всех случаев характерно то, что внутренне условие при $r = 1$ выполняется почти идеально, исключение составляет случай $N_f = 1000, N_b = 500$, у которого изгибается конец. Внешнее условие однако

выполняется относительно плохо. Связанно такое различие вероятнее всего с тем, что разброс величин у внутреннего условия больше – от -4 до 8, в то время как у внешнего в два раза меньше от -3 до 2, для решения данной проблемы в дальнейшем можно попробовать внести весовой коэффициент для граничного условия равный $\frac{1}{\max_{\phi} u(r_0, \phi)}$.

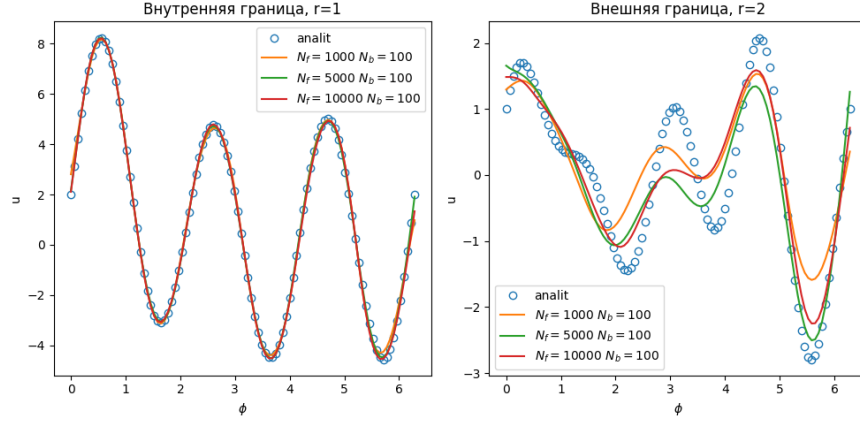


Рисунок 4.2 – Граничные условия для случая $N_b = 100$

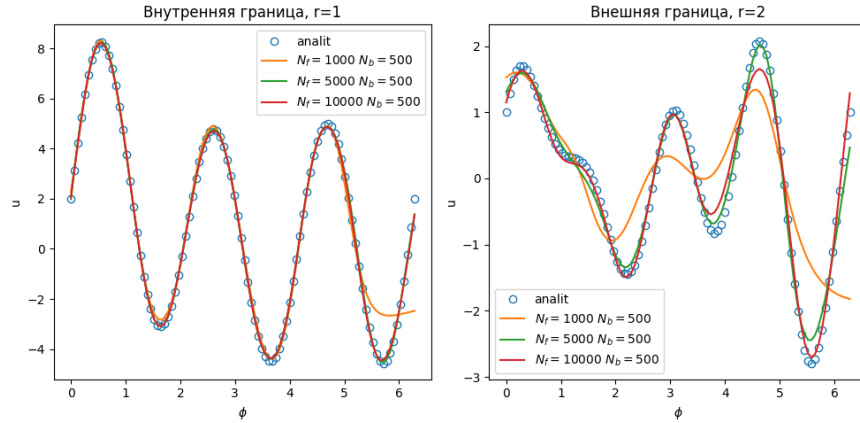


Рисунок 4.3 – Граничные условия для случая $N_b = 500$

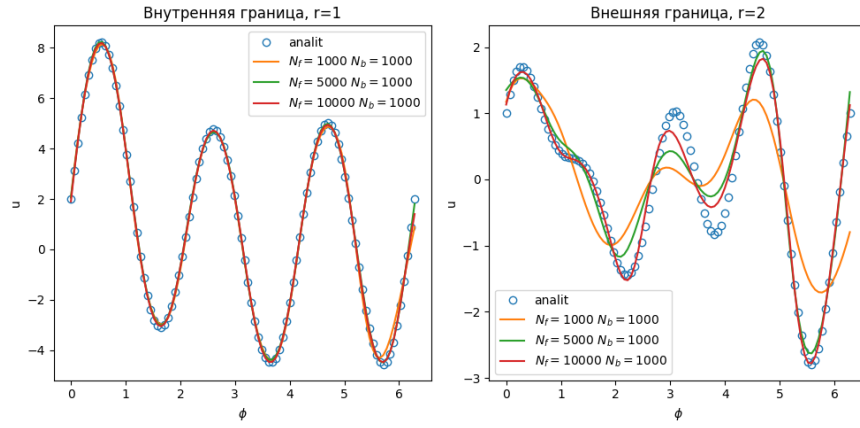


Рисунок 4.4 – Граничные условия для случая $N_b = 1000$

Наконец посмотрим на решение в целом. Точное решение изображено на графике 4.5, решение при различных N_f и N_b изображено на графике 4.6, ошибка между аналитическим решением и предсказаниями нейросети на графике 4.7. В целом графики достаточно хорошо совпадают в области. Расхождения наблюдаются в основном на стыке, где $\phi = 0$. Что бы решить данную проблему можно попробовать добавить условие равенства $u(r, 0) = u(r, \phi)$, такому условию будет соответствовать следующая функция потерь:

$$MSE_s = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} (u(r_i, 0) - u(r_i, 2\pi))^2, \quad (17)$$

здесь $\{r_i\}_{i=0}^{N_s}$ – точки для данного условия, N_s – их количество.

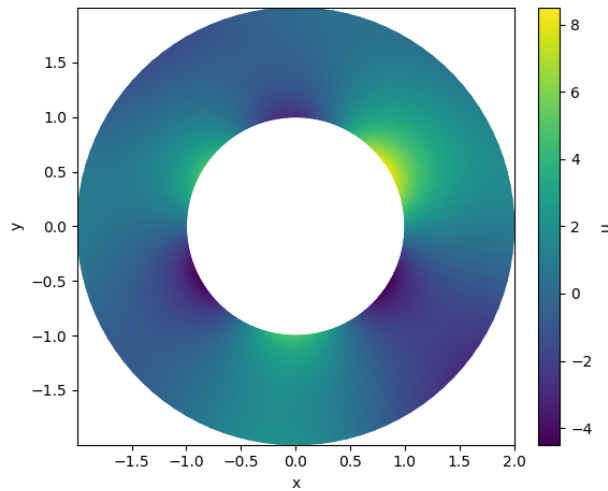


Рисунок 4.5 – Аналитическое решение

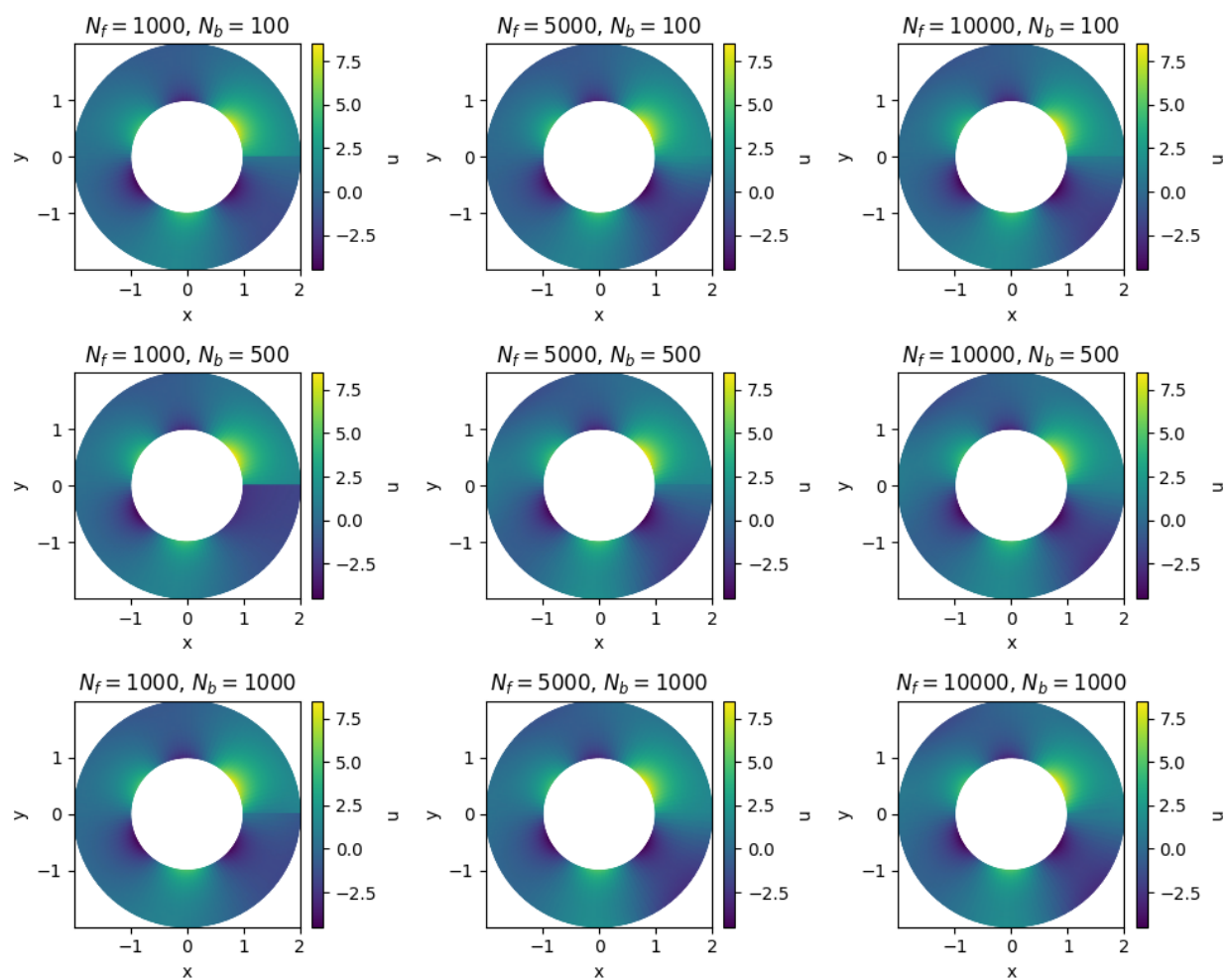


Рисунок 4.6 – Решение при различных N_f и N_b

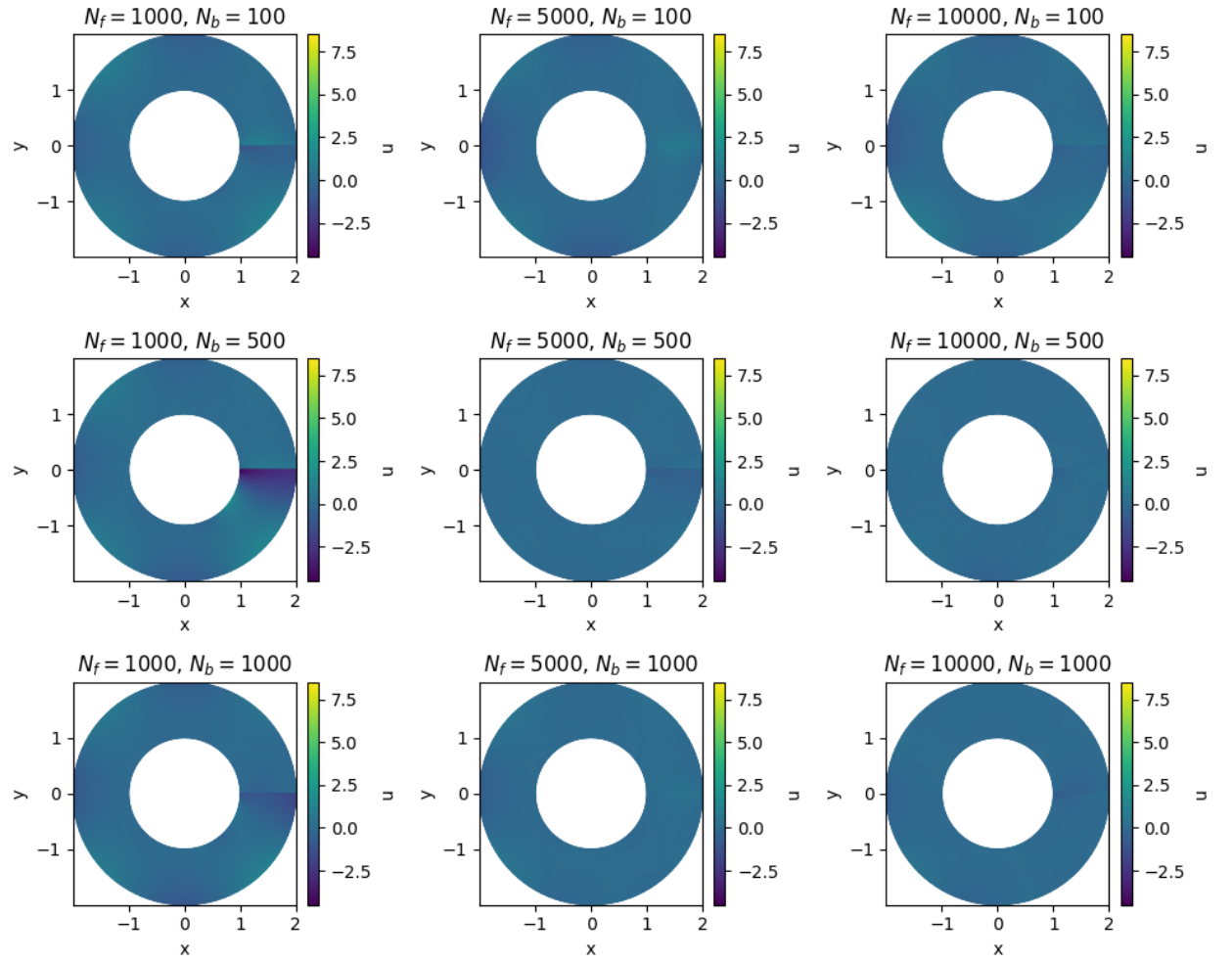


Рисунок 4.7 – Разница между аналитическим решением и решением нейросети при различных N_f и N_b

4.2 Задача электрокинетики

В качестве второго примера возьмём систему из [12]. Она описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned}
 \vec{j} &= -D\nabla c - \xi z e c \nabla \Phi + c v, \\
 \partial_t c &= -\nabla \cdot \vec{j}, \\
 \nabla^2 \Phi &= -4\pi l_B k_B T z c, \\
 \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) &= -\nabla p_H + \eta \nabla^2 v - (k_B T \nabla c + z e c \nabla \Phi), \\
 \nabla \cdot v &= 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

здесь c – концентрация ионных частиц, j – поток плотности, \vec{v} – адвективная скорость жидкости, e – заряд электрона z – валентность частиц, Φ – электростатический потенциал, ξ – подвижность частиц, D – коэффициент диффузии частиц, l_B – длина Бьеррума, $l_B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon k_B T}$ k_B – постоянная Больцмана, T – температура, ρ – плотность жидкости p_H – гидродинамическое давление. Первое уравнение в системе описывает поток плотности, второе электростатику, третье гидродинамику с помощью уравнения Навье-Стокса, четвёртое уравнение несжимаемости жидкости. В данном случае $z = (t, X)$ t – время, X – пространственные координаты.

Размерности для величин так же возьмём из [12]:

Величина	Единица симуляции в единицах СИ
Длина	1нм
Энергия	$4.14 \cdot 10^{-21}$ Дж
Масса	$3.28 \cdot 10^{-26}$ кг
Время	$3.04 \cdot 10^{-12}$ с
Заряд	$1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл

Таблица 4.2 – Единицы измерения симуляции в единицах измерения СИ

Рассмотрим систему щелевых пор, состоящую из двух одноимённо заряженных бесконечных пластин. Выпишем для такой системы граничные условия

$$\begin{aligned}
c(t, X_l) &= 0.01 \\
c(t, X_r) &= 0.01 \\
c(0, X) &= 0.002 \\
v(t, X_l) &= 0 \\
v(t, X_r) &= 0 \\
v(0, X) &= 0 \\
\Phi(t, X_l) &= -0.05 \\
\Phi(t, X_r) &= -0.05 \\
\Phi(0, X) &= -0.009x^2 + 2,
\end{aligned} \tag{19}$$

здесь t – время, X_l – пространственные координаты, соответствующие левой стенке, X_r – правой, x в формул для $\Phi(0, X)$ соответствует оси, перпендикулярной пластинам.

В данной системе мы имеем 3 неизвестные – концентрацию c , скорость v и потенциал Φ , соответственно наша сеть $\bar{u}(t, X)$ будет иметь три выхода $\bar{c}(t, X)$, $\bar{v}(t, X)$ и $\bar{\Phi}(t, X)$. Составим функцию потерь. Из системы (18) получаем:

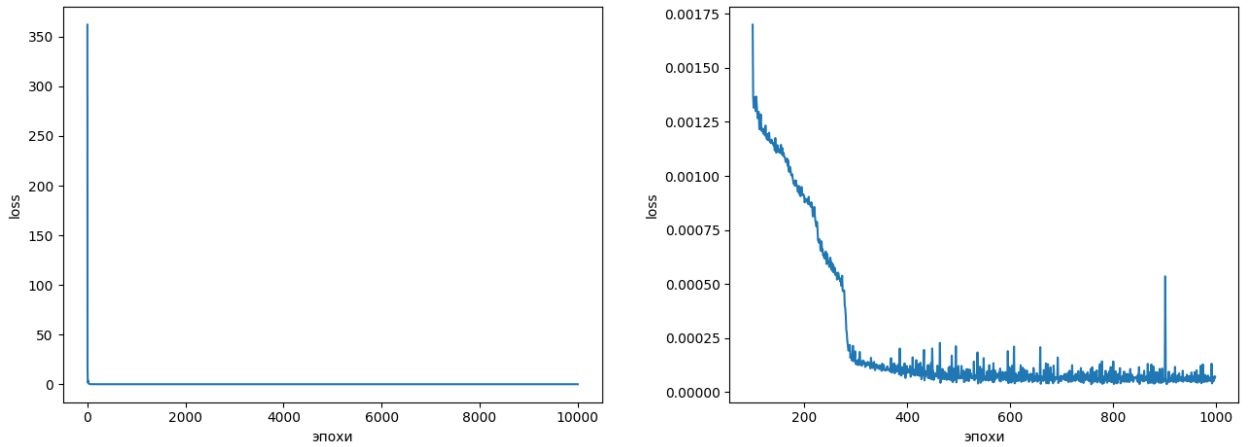
$$\begin{aligned}
MSE_f &= \sum_{i=1}^{N_f} [\partial_t \bar{c}_i + \nabla \cdot (-D \nabla \bar{c}_i - \xi z e \bar{c}_i \nabla \bar{\Phi}_i + \bar{c}_i \bar{v}_i)]^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{N_f} [\nabla^2 \bar{\Phi}_i + 4\pi l_B k_B T z \bar{c}_i]^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{N_f} [\rho(\partial_t \bar{v}_i + (\bar{v}_i \cdot \nabla) \bar{v}_i) + \nabla p_H - \eta \nabla^2 \bar{v}_i \\
&\quad + (k_B T \nabla \bar{c}_i + z e \bar{c}_i \nabla \bar{\Phi}_i)]^2 \\
&+ \sum_{i=1}^{N_f} [\nabla \cdot \bar{v}_i]^2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из граничных условий (19) получаем

$$MSE_b = \sum_{i=1}^{N_b} (\bar{c}_i - c_i)^2 + \sum_{i=1}^{N_b} (\bar{v}_i - v_i)^2 + \sum_{i=1}^{N_b} (\bar{\Phi}_i - \Phi_i)^2. \tag{21}$$

В формулах (20) и (21) $\bar{c}_i = \bar{c}(t_i, X_i)$, $\bar{v}_i = \bar{v}(t_i, X_i)$, $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}(t_i, X_i)$.

Рассмотрим в начале двумерный случай. Скрытые слои как и в прошлом примере будут четыре по 20, входной слой 4, один для концентрации, два для скорости и один для потенциала, функция активации \tanh (гиперболический тангенс). $N_f = 10000$ точек коллокации для (18), $N_b = 1000$ для каждого из граничных условий (19). Посмотрим на график обучения сети, изображённый на рисунке 4.8а, из него видно что 10000 эпох было явно много, рассмотрим участок с 100 по 1000 эпохи (рисунок 4.8b). Из участка явно видно, что обучение прекратилось в районе 500-ой эпохи.



(а) График обучения за все 10000 эпох

(б) График обучения с 100 по 1000 эпохи

Рисунок 4.8 – Графики обучения для двухмерного случая электрокинетики для всех эпох и для участка от 100 до 1000

Сравним значения для концентрации c полученные методом PINN и в ходе симуляции в [12] (рис. 4.9). Так как система приходит к стабильному состоянию, рассмотрим именно его. Судя по графику, нейросеть просто нашла нулевое решение, которое удовлетворяет системе (18), а на краях дотянула до граничных условий (19).

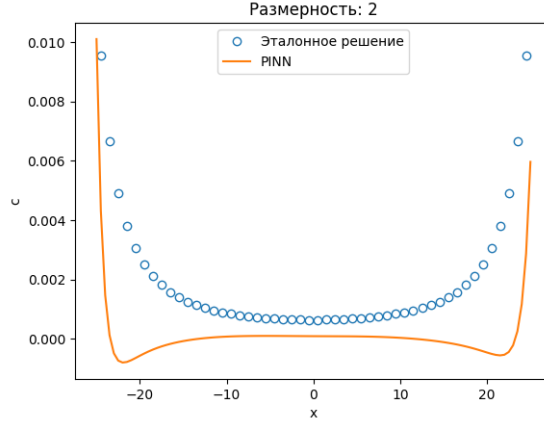
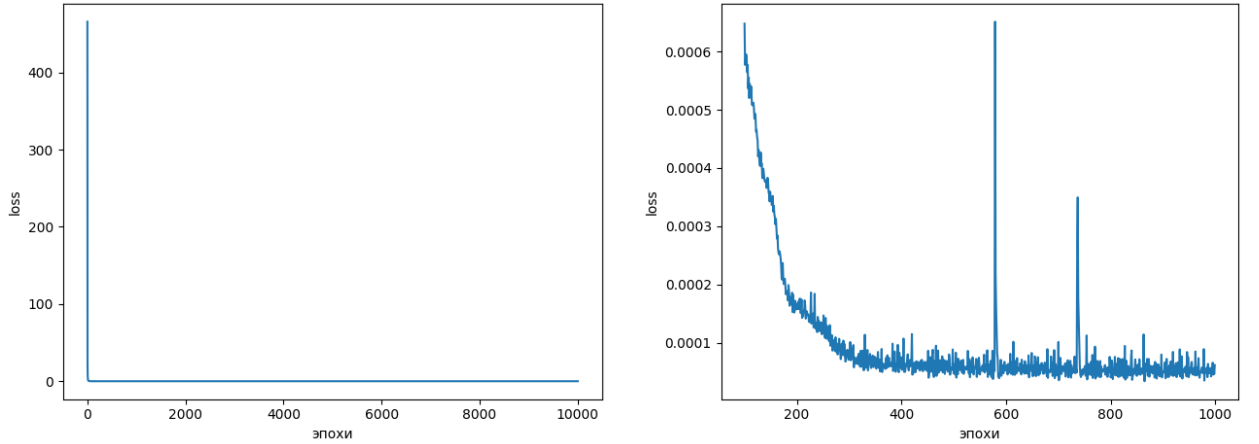


Рисунок 4.9 – Концентрация c для двумерного случая

Рассмотрим теперь трёхмерный случай. Скрытые слои так же будут 4 по 20, входной слой 5, один для концентрации, три для скорости и один для потенциала, функция активации \tanh . $N_f = 10000$ точек коллокации для (18), $N_b = 1000$ для каждого из граничных условий (19). Посмотрим на график обучения сети, изображённый на рисунке 4.10а, из него видно что, как и в прошлом примере 10000 эпох было явно много, рассмотрим участок с 100 по 1000 эпохи (рисунок 4.10b). Из участка видно, что обучение так же прекратилось в районе 500-ой эпохи.



(а) График обучения за все 10000 эпох

(б) График обучения с 100 по 1000 эпохи

Рисунок 4.10 – Графики обучения для трёхмерного случая электрокинетики для всех эпох и для участка от 100 до 1000

Сравним значения для концентрации c полученные методом PINN и в ходе симуляции в [12] (рис. 4.11). Так как система приходит к стабильному состоянию, рассмотрим именно его. В трёхмерном случае так же ожидаемо

ен получилось получить хорошее приближение, вероятно как и в двумерном случае сеть нашла нулевое решение и застряла в нём.

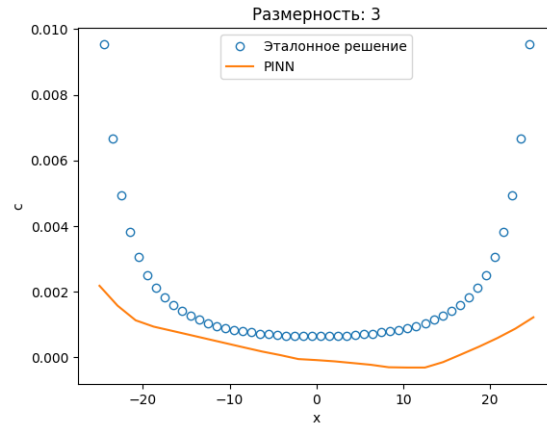


Рисунок 4.11 – Концентрация c для трёхмерного случая

Как можно видеть из двух примеров достаточно сложные системы на данный момент плохо поддаются решению с помощью PINN.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы мы написали, обучили и протестировали две PINN, для двух задач математической физики. Для первой задачи – распределение тепла в кольце нам удалось получить в целом достаточно хорошее решение, близкое к истинному. Во второй задаче с электрокинетикой у нас уже не получилось получить результаты, близкие к истинным.

Возможные улучшения:

- 1) Подобрать весовые коэффициенты для функций потерь
- 2) Поэкспериментировать с числом слоёв и нейронов в каждом слое
- 3) Добавить дополнительное условие, требующее равенства на границе при $\phi = 0, 2\pi$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Maziar Raissi, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis. Physics informed deep learning (part i): Data-driven solutions of nonlinear partial differential equations, 2017.
- 2 Haotian Chen, Enno Kätelhön, and Richard G. Compton. Predicting voltammetry using physics-informed neural networks. *The Journal of Physical Chemistry Letters*, 13(2):536–543, 2022. PMID: 35007069.
- 3 Muratahan Aykol, Chirranjeevi Balaji Gopal, Abraham Anapolsky, Patrick K. Herring, Bruis van Vlijmen, Marc D. Berliner, Martin Z. Bazant, Richard D. Braatz, William C. Chueh, and Brian D. Storey. Perspective-combining physics and machine learning to predict battery lifetime. *Journal of the Electrochemical Society*, 168(3), 2021.
- 4 Renato G. Nascimento, Matteo Corbetta, Chetan S. Kulkarni, and Felipe A. C. Viana. Hybrid physics-informed neural networks for lithium-ion battery modeling and prognosis. *Journal of Power Sources*, 1(513), 2021.
- 5 Navid Zobeiry and Keith D. Humfeld. A physics-informed machine learning approach for solving heat transfer equation in advanced manufacturing and engineering applications. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 101:104232, 2021.
- 6 Shengze Cai, Zhicheng Wang, Sifan Wang, Paris Perdikaris, and George Em Karniadakis. Physics-Informed Neural Networks for Heat Transfer Problems. *Journal of Heat Transfer*, 143(6), 04 2021. 060801.
- 7 Fabian Pioch, Jan Hauke Harmening, Andreas Maximilian Müller, Franz-Josef Peitzmann, Dieter Schramm, and Ould el Moctar. Turbulence modeling for physics-informed neural networks: Comparison of different rans models for the backward-facing step flow. *Fluids*, 8(2), 2023.

- 8 Weiqi Ji, Weilun Qiu, Zhiyu Shi, Shaowu Pan, and Sili Deng. Stiff-pinn: Physics-informed neural network for stiff chemical kinetics. *The Journal of Physical Chemistry A*, 125(36):8098–8106, 2021. PMID: 34463510.
- 9 Gabriel S. Gusmão, Adhika P. Retnanto, Shashwati C. da Cunha, and Andrew J. Medford. Kinetics-informed neural networks. *Catalysis Today*, 2022.
- 10 Riccardo Grazzi, Luca Franceschi, Massimiliano Pontil, and Saverio Salzo. On the iteration complexity of hypergradient computation, 2020.
- 11 John H. Lagergren, John T. Nardini, Ruth E. Baker, Matthew J. Simpson, and Kevin B. Flores. Biologically-informed neural networks guide mechanistic modeling from sparse experimental data, 2020.
- 12 Jean-Noël Grad. Electrokinetics. <https://github.com/espressomd/espresso/blob/python/doc/tutorials/electrokinetics/electrokinetics.ipynb>. (дата обращения: 14.05.2023).