Возможность использования искусственных нейронных сетей для решения задач математической физики

Кузнецов Игорь Александрович

13 июня 2023 г.

Определение 1.

$$f(z,\theta) = h\left(\sum_{j=1}^{p} w_j z^j + b\right) = h(wz + b),$$

Определение 2.

$$q^{(l,n)} = h\left(\sum_{i=1}^{N} w_i^{(l,n)} q^{(l-1,i)} + b^{(l,n)}\right), n = 1, ..., N,\ l = 1, ..., L-1$$

$$q^{(L)} = \sum_{i=1}^{N} w_i^{(L)} q^{(L-1)} + b^{(L)},$$

PINN

Система уравнений

$$F_j(z, u, \lambda_j) = F_j(z, u, u'_{z^1}, u''_{z^1}, ..., \lambda_j) = 0, z \in \Omega, j = \overline{1, N},$$

Граничные условия

$$B_k(z_0, u, u'_{z^1}, u''_{z^1}, ...) = 0, z_0 \in \partial\Omega, k = \overline{1, K},$$

Функция потерь

$$\begin{aligned} MSE &= MSE_f + MSE_b \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{N_b} \sum_{b=1}^{N_b} (\bar{u}(z_b) - u_b)^2 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} F_j^2(z_i, \bar{u}(z_i), \lambda_j). \end{aligned}$$

Распределение тепла в кольце

Уравнение

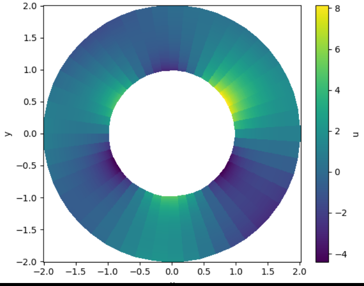
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

Граничные условия

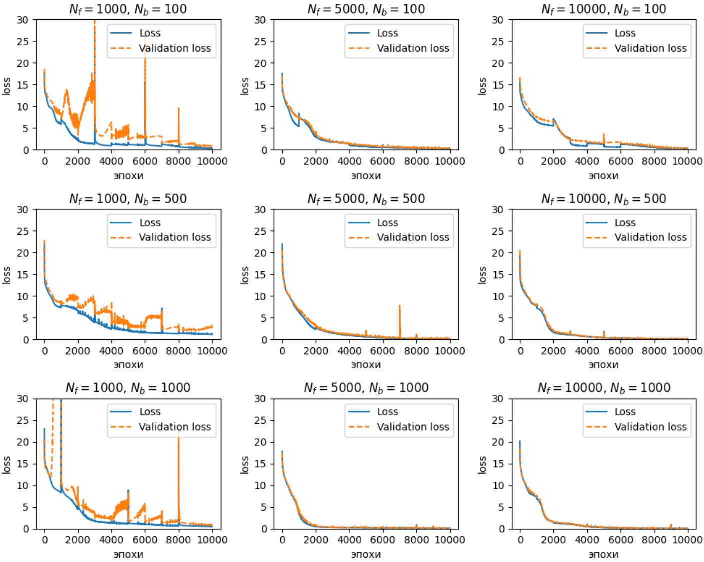
$$u(1,\phi) = \cos\phi + \sin\phi + \sin(2\phi) + 5\sin(3\phi) + 1,$$
$$u(2,\phi) = \sin(2\phi) + \sin(3\phi) + \cos(4\phi).$$

Аналитическое решение

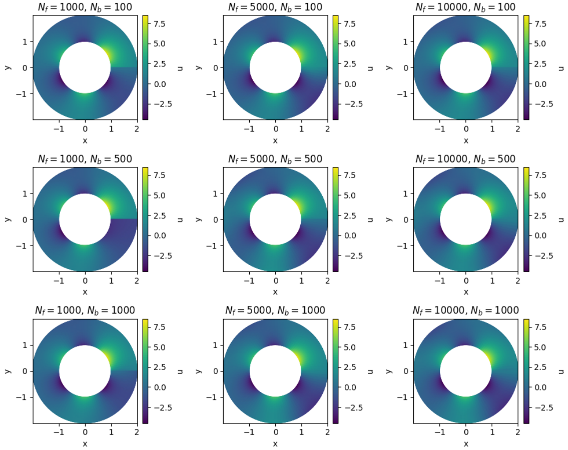
$$u(r,\phi) = 1 - \frac{\ln r}{\ln 2} + \left(\frac{-r}{3} + \frac{4}{3r}\right)\sin(\phi)$$
$$+ \left(\frac{-r}{3} + \frac{4}{3r}\right)\cos(\phi) + \left(\frac{r^2}{5} + \frac{4}{5r^2}\right)\sin(2\phi)$$
$$+ \left(\frac{3r^3}{63} + \frac{312}{64r^3}\right)\sin(3\phi) + \left(\frac{16r^4}{255} - \frac{16}{255r^4}\right)\cos(4\phi).$$



Обучение PINN



Решение PINN



Задача электрокинетики

Система

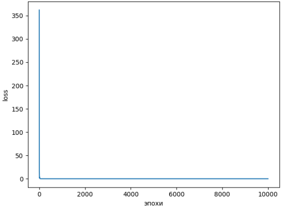
$$
\begin{aligned}
\vec{j} &= -D\nabla c - \xi zec\nabla\Phi + cv,\\
\partial_t c &= -\nabla \cdot \vec{j},\\
\nabla^2\Phi &= -4\pi l_{\mathrm{B}} k_{\mathrm{B}} T zc,\\
\rho\big(\partial_t v + (v\cdot\nabla)v\big) &= -\nabla p_H + \eta\nabla^2 v - (k_{\mathrm{B}}T\nabla c + zec\nabla\Phi),\\
\nabla\cdot v &= 0.
\end{aligned}
$$

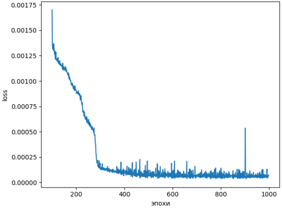
Граничные условия

$$
\begin{aligned}
&c(t, X_l) = 0.01, c(t, X_r) = 0.01, c(0, X) = 0.002\\
&v(t, X_l) = 0, v(t, X_r) = 0, v(0, X) = 0\\
&\Phi(t, X_l) = -0.05, \Phi(t, X_r) = -0.05, \Phi(0, X) = -0.009x^2 + 2.
\end{aligned}
$$

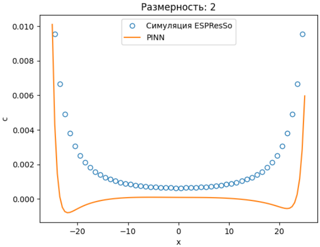
Двухмерный случай

Обучение





Результат



Трёхмерный случай