**1. Предмет и методы механики сплошной среды. Основные гипотезы. Статистический и феноменологический подходы к изучению материальных тел. Гипотеза сплошности. Понятие континуума. Арифметизация пространства и времени.**

МСС – раздел механики, изучающий движение деформируемых тел (газообразных, жидких, твердых)[1], то есть материальных тел, заполняющих пространство сплошным, непрерывным образом, и расстояния между точками которых может меняться со временем.

Таким образом, в область МСС попадают проблемы воздействия жидкости и газа на движущиеся в них тела, движения жидкости и газа по трубам и вообще внутри различных машин, фильтрации, равновесия жидкостей и тел (гидростатика), распространения волн в сплошных средах, турбулентных движений газов и жидкостей… включая даже метеорологию (или по-простому – прогноз погоды☺).

Теория МСС во многом полагается на математический аппарат, стараясь свести механические задачи к математическим, т.е. к задачам об отыскании некоторых чисел или числовых функций с помощью различных математических операций…

Как говорил Бабецкий, приходишь к математику, даешь ему задачу, он её решает, но он же не знает, что с ней дальше делать… Тут снова появляется физик… В общем, зачастую решить задачу в общем виде не удается, тогда приходится видоизменять постановки задач, переходить к приближенным задачам, искать аналогии в других областях физики и механики, строить некоторые дополнительные гипотезы и предположения на основе общих предположений о физике явлений, допущений механики и прочих соображений удобства и целесообразности☺

При изучении сплошных сред все-таки приходится возвращаться на Землю и вспоминать о том, что реальным средам присущи некоторые конкретные физические свойства. Атомы… Молекулы… Сравнение объемов частиц и объемов тел, их содержащих, приводит к выводу, что, по сути, вещество состоит в основном из пустоты, однако в любом не слишком малом объеме (малом – сравнимом с размерами частиц) имеется достаточно большое число частиц.

Естественно, частицы между собой как-то взаимодействуют… столкновения, силы притяжения/отталкивания… Собственно, именно эти взаимодействия обеспечивают прочность, упругость тел.

При движении материальных тел, вообще говоря, надо учитывать различные изменения, происходящие в телах… вроде конденсации пара, испарения, плавления, затвердевания, полимеризации, перекристаллизации и т.д. (короче, фазовые переходы). Естественно, это выходит за рамки «изученного» курса, но вполне вероятно, что кому-то все предстоит это изучать☺.

Помимо всего этого для материальных тел приходится вводить в рассмотрение внутренние напряжения, для жидкостей и газов обуславливающих свойство вязкости, да и вообще много всяких других заморочек☺.

Ну и что же механики делают со всей этой… системой… Выделяют два основных подхода, как следует из заголовка – статистический и феноменологический.

Статистический, как и подобает, использует методы тервера, матстата и прочих наук, которые нам усиленно проповедует 804 кафедра☺. Короче, берут… суммируют, усредняют. Как и следовало ожидать, эти методы сопутствуют с введение дополнительных гипотез о свойствах частиц, их взаимодействий и с упрощением этих свойств и взаимодействий. Очень похоже на введение дополнительных усложненностей.

Феноменологический подход основывается на общих, добытых из опыта закономерностях и гипотезах. Со слов Седова, «макроскопические теории (это про феноменологический подход) является эффективным средством решения практически важных задач, и добытые с их помощью сведения согласуются с опытом». В общем, наблюдениям и физике отдельный респект.

Одним из ключевых понятий МСС является понятие сплошной среды (еще бы☺). С целью избежать лишних проблем (да и вообще всегда приятно использовать уже проверенные и разработанные инструменты) в МСС тела рассматриваются как целиком заполняющие некоторую область пространства непрерывным образом, то беж континуум. Естественно, это идеализация, Седов об этом так и говорит: «мы хотим при исследовании деформируемых тел использовать аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления». (Это все о гипотезе сплошности☺.)

Пространство считается евклидовым, время абсолютным. Первое обозначает в свете МСС возможность введения в пространстве единой декартовой системы координат и, таким образом, расстояния между точками. Второе – что время для всех одинаково, то есть не учитываются последствия теории относительности☺

[1] Ср. теормех. – движения материальных точек, систем материальных точек, абсолютно твердых тел.

**2. Кинематика[2] сплошной среды. Системы координат, используемые в механике сплошной среды. Задание движения континуума с помощью переменных Эйлера и переменных Лагранжа. Переход от одной формы задания движения к другой, их эквивалентность. Скорость и ускорение частицы сплошной среды.**

Как известно, системы координат бывают разные. В общем случае это криволинейная система координат.

Для криволинейной системы вводятся обозначения координат $x^1$, $x^2$, $x^3$, для ортогональной декартовой системы координат также $x, y, z$. Время – $t$.

Движение точки задается функциями изменения координат

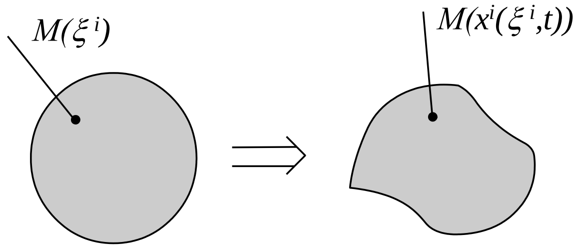
$$x^i = f^i(t), (i = 1, 2, 3)$$

Сплошная среда представляется собой непрерывную совокупность точек, таким образом, движение сплошной среды задается совокупностью движений её точек.

Пусть в фиксированный (начальный) момент времени точки имеют координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \left(\xi^j\right)$, то есть каждой комбинации $\xi^j$ из некоторой области соответствует некоторая определенная точка. Тогда координаты $x^i$ любой точки среды с начальными координатами $\xi^j$ в любой момент времени $t$ есть функции четырех переменных:

$$x^i = x^i\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right) = x^i\left(\xi^j, t\right),\ i = 1, 2, 3$$

Данные функции определяют движение сплошной среды и называются законом движения континуума, а индивидуализирующие координаты $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ - *лагранжевыми* координатами, а вместе со временем $t$ называются *лагранжевыми* переменными.




Естественно, функции полагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми (иначе как использовать «аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления»☺).

Рассмотрим некоторый момент времени $\tilde{t} = const$. Тогда из предположения непрерывности среды следует, что функции $x^i = x^i(\xi^j, \xi^2, \xi^3, \tilde{t})$ являются взаимнооднозначными по своим переменным $\xi^1, \xi^2, \xi^3$. В этом случае якобиан преобразования должен быть отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

При этом существуют обратные функции, которые также будут непрерывными

$$\xi^j = \xi^j\left(x^i, t\right)$$

[2] Кинематика - раздел механики, изучающий геометрические свойства движения тел без учета их масс и действующих на них сил

Таким образом, в любой момент времени, зная данные функции, мы можем определить, какая точка среды находится в данной точке пространства. Координаты $x^1, x^2, x^3$ называются координатами Эйлера, а вместе со временем $t$ – *эйлеровыми* переменными.

Стоит также отметить, что система эйлеровых координат образует систему отсчета наблюдателя, в то время как система лагранжевых координат привязана в деформируемой среде и называется *сопутствующей* системой координат, которая в общем случае является подвижной, деформируемой и криволинейной, то есть изменяется (искривляется) с течением времени.

При этом относительно сопутствующей системы координат координаты точек среды остаются постоянными.

Понятия скорости и ускорения точки вводятся точно так же, как и в прочих разделах механики и физики – как первая и вторая производные радиус вектора точки по времени (для конкретной точки ее лагранжевы координаты считаются постоянными, то есть $\xi^j = const$ ). Таким образом,

$$\vec{r} = \left(x^1, x^2, x^3\right)^T = \vec{r}\left(\xi^j, t\right)$$

$$\vec{v}\left(\xi^j, t\right) = \left.\frac{d\vec{r}\left(\xi^j, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{r}\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}$$

$$\vec{a}\left(\xi^j, t\right) = \left.\frac{d\vec{v}\left(\xi^j, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{v}\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}$$

Стоит отметить, что скорость и ускорение считаются относительно системы отсчета наблюдателя, в то время как скорость и ускорение относительно сопутствующей системы (привязанной к телу) считаются равными нулю. То есть речь идет о некоторой «вмороженности» точек среды относительно сопутствующей системы координат, для каждой точки её лагранжевы координаты постоянны, однако со временем меняется сама система координат (во загнул☺...).

В случае использования эйлеровых координат $x^i$ скорость и ускорение выражаются следующим образом[3]

$$\vec{v}\left(x^i, t\right) = \left.\frac{d\vec{r}\left(x^i, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{r}\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{r}\left(x^i, t\right)}{\partial x^k} \left.\frac{\partial x^k\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{r}\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{r}\left(x^i, t\right)}{\partial x^k} v^k$$

$$\vec{a}\left(x^i, t\right) = \left.\frac{d\vec{v}\left(x^i, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{v}\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{v}\left(x^i, t\right)}{\partial x^k} \left.\frac{\partial x^k\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial \vec{v}\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \vec{v}\left(x^i, t\right)}{\partial x^k} v^k$$

или

$$\vec{v}\left(x^i, t\right) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad\ \vec{r}$$

$$\vec{a}\left(x^i, t\right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad\ \vec{v}$$

[3] В Седове сказано, что формулы верны только для декартовой системы координат☺

**3. Скалярные и векторные поля и их характеристики. Индивидуальная и местная производные по времени. Конвективная производная. Установившиеся и неустановившиеся движения. Траектория частиц и линии тока. Потенциальные поля.**

Поле – совокупность значений некоторой величины, заданной в каждой точке определенной области пространства. В частности, выделяют скалярное и векторное поля. В первом случае в каждой точке области пространства рассматриваемая величина определяется одним числом (как правило, действительным), например, поле температуры, поле плотности. Во втором случае в каждой точке области пространства эта величина определяется некоторым вектором, например, это может быть поле скоростей или поле ускорений.

Частным случаем векторного поля является потенциальное поле, то есть такое поле некоторой векторной величины $\vec{F}$, что существует скалярная функция $U$ такая, что $\vec{F} = grad\, U$.

Если от точки к точке области пространства рассматриваемая величина не изменяется, то поле называется однородным в данной области.

Рассмотрим скалярное поле некоторой величины $\Theta$, которая может быть задана как с точки зрения Лагранжа – $\Theta\left(\xi^j, t\right)$, так и с точки зрения Эйлера – $\Theta\left(x^i, t\right)$.

Если распределение величины $\Theta$ задано с точки зрения Лагранжа, то её изменение определяется производной по времени в каждой точке, то есть при фиксированных $\xi^j$

$$\left.\frac{d\Theta\left(\xi^j, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial\Theta\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}$$

В случае определения $\Theta$ через эйлеровы переменные будем иметь

$$\left.\frac{d\Theta\left(x^i, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{x^k} \left.\frac{\partial x^k\left(\xi^j, t\right)}{\partial t}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{x^k} v^k$$

или

$$\left.\frac{d\Theta\left(x^i, t\right)}{dt}\right|_{\xi^j = const} = \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad\ \Theta$$

Производную $\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{\xi^j = const}$ называют индивидуальной (субстанциональной, материальной, полной) производной величины $\Theta$ по времени. Смысл названия определяется тем, что рассматривается изменение производной для каждой конкретной частицы среды (субстанции).

Производную $\left.\frac{d\Theta}{dt}\right|_{x^i = const} = \frac{\partial\Theta\left(x^i, t\right)}{\partial t}$ называют местной (локальной) производной величины $\Theta$ по времени. В отличие от полной производной, локальная показывает изменение рассматриваемой величины в некоторой области пространства, не привязываясь к точкам среды.

$\vec{v} \cdot grad\,\Theta$ называется конвективной[4] производной величины $\Theta$ по времени. Конвективная производная показывает изменение со временем приращения рассматриваемой величины при перемещении частицы среды из одной точки пространства в другую с учетом скорости (величина и направление) этого изменения.

Действительно,

$$\vec{v} \cdot grad\,\Theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \cdot grad\,\Theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s \left( grad\,\Theta \right)_s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta \Theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta t}.$$

Таким образом, полная производная $\Theta$ складывается из локальной и конвективной, что в свою очередь означает, что изменение со временем величины $\Theta$ для данной частицы определяется изменением этой величины в данной точке пространства (в которой находится частица) и характером изменения поля в направлении движения (скорости) частицы.

Пусть в данный момент времени $\tilde{t}$ величина $\Theta$ распределена некоторым образом в заданной области пространства. Тогда можно рассмотреть совокупность точек пространства, в которых это величина равна некоторой заданной константе, то есть

$$\left\{ x^i : \Theta\left( x^i, \tilde{t} \right) = C = const \right\}$$

Такая совокупность точек образует некоторую поверхность, которая называется поверхностью равного уровня или эквипотенциальной поверхностью.

Выбрав, некоторую такую поверхность, рассмотрим, как меняется заданная величина при движении из точек поверхности в заданном направлении $\vec{s}$.

Тогда производной величины $\Theta$ по направлению $\vec{s}$ будем называть

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \lim_{\Delta \vec{s} \to 0} \frac{\Delta \Theta}{\Delta s}$$

Ясно, что если направление $\vec{s}$ совпадает с касательной к выбранной поверхности, то производная по этому направлению равна 0. Это следует из того, что заданная величина не меняется вдоль эквипотенциальной поверхности.

Если ввести в рассмотрение нормаль к поверхности $\vec{n}$, то любое направление $\vec{s}$ связано с нормалью через угол $\alpha$ между ними, т.е. $n = s\cos\alpha$ и $\Delta n = \Delta s\cos\alpha$, тогда

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\partial \Theta}{\partial n}\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что наибольшее значение производной достигается при движении в направлении нормали к поверхности.

Понятие градиента, уже использованное выше в вопросе о конвективной производной ☺, неразрывно связано с производной по направлению, по определению

$$grad\,\Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial n}\vec{n}^0,$$

где $\vec{n}^0$ вектор единичной нормали $\vec{n}$.

Из определения следует, что проекция градиента $\Theta$ на произвольное направление совпадает с производной величины $\Theta$ по этому направлению, то есть

$$\left( grad\,\Theta \right)_s = \frac{\partial \Theta}{\partial s}$$

Движение (процесс, поле) называется установившимся, если оно не изменяется со временем, а зависит только от рассматриваемых точек пространства, другими словами, если это движение (процесс, поле) описывается некоторыми функциями через эйлеровы переменные, то время явно не входит в эти функции.

[4] Конвекция - вид теплопередачи, при котором тепло передается благодаря перемешиванию достаточно больших объемов вещества. Конвекция наблюдается в жидкостях и газах.

Стоит отметить, однако, что понятие установившегося движения относительно и зависит от наблюдателя и системы отсчета.

Траектория частицы – кривая в пространстве, описываемая заданной частицей. Траектория частицы задается функциями $x^i\left(\xi^j,t\right)$, определяющими положение частицы с течением времени, либо в случае задания поля скоростей как решение системы дифференциальных уравнений[5]

$$\frac{dx^i}{dt}=v^i,\ x^i\left(t_0\right)=\xi^i$$

Линии тока в заданный момент времени – семейство кривых в пространстве, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению со скоростями частиц среды, находящихся в этих точках. Уравнения линий тока определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{d\lambda}=v^i,$$

где $\lambda$ - параметр, меняющийся вдоль линии тока, производная берется при фиксированном времени.

При стационарном движении линии тока и траектории движения частиц совпадают.

[5] Тут еще надо учесть форму задания поля скоростей – через эйлеровы или лагранжевы координаты☺

**4. Элементы тензорного исчисления. Криволинейные координаты в трехмерном пространстве. Основной и взаимный векторные локальные базисы. Контравариантные и ковариантные компоненты вектора. Связь между контравариантными и ковариантными компонентами вектора.**

Рассмотрим некоторую криволинейную систему координат. Координатными линиями называются кривые, вдоль которых меняется только одна из криволинейных координат, а остальные остаются фиксированными. Тогда через каждую точку пространства проходит три координатные линии $x^1, x^2, x^3$.

Возьмем в данной точке пространства пределы приращений радиус вектора $\Delta\vec{r}$ и длин дуг вдоль координатных линий $x^i$ – $\Delta x^i$, обозначим эти пределы следующим образом

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{\text{э}}_i$$

Векторы $\vec{\text{э}}_i$ образуют, вообще говоря, неортогональный базис, меняющийся от точки к точке. Из геометрических соображений следует, что полученные базисные векторы направлены по касательным к соответствующим координатным кривым.

Если $x^i$ – декартова система координат, то базис $\vec{\text{э}}_i$ постоянен для всех точек пространства и совпадает со стандартным ортонормированным базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Как известно[6], любой вектор $\vec{r}$ может быть единственным образом разложен[7] по векторам данного базиса

$$\vec{r} = r^1\vec{\text{э}}_1 + r^2\vec{\text{э}}_2 + r^3\vec{\text{э}}_3 = r^i\vec{\text{э}}_i$$

Базис $\vec{\text{э}}_i$ называется основным, а координаты $r^i$ вектора $\vec{r}$ в основном базисе – контравариантными[8].

Для данного основного базиса $\vec{\text{э}}_i$ существует единственный взаимный базис $\vec{\text{э}}^{\,j}$, определяемый из условий

$$\vec{\text{э}}_i \cdot \vec{\text{э}}^{\,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},$$

где $\delta_i^j$ – символ Кронекера.

Из определения следует, что вектор $\vec{\text{э}}^1$ взаимного базиса ортогонален плоскости векторов $\vec{\text{э}}_2, \vec{\text{э}}_3$ основного базиса, $\vec{\text{э}}^2$ ортогонален плоскости векторов $\vec{\text{э}}_3, \vec{\text{э}}_1$, $\vec{\text{э}}^3$ ортогонален плоскости векторов $\vec{\text{э}}_1, \vec{\text{э}}_2$, верно и обратное, то есть каждый вектор основного базиса ортогонален плоскости векторов взаимного базиса – с несовпадающими индексами.

«Взаимным» для взаимного базиса является рассматриваемый основной базис. Круг замкнулся☺.

Если система координат декартова, то основной и взаимный базис совпадают между собой и таким образом совпадают с базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Точно так же, как и в случае основного базиса, произвольный вектор $\vec{r}$ может быть единственным образом разложен по векторам взаимного базиса

$$\vec{r} = r_1\vec{\text{э}}^1 + r_2\vec{\text{э}}^2 + r_3\vec{\text{э}}^3 = r_j\vec{\text{э}}^{\,j}$$

Координаты $r_j$ вектора $\vec{r}$ во взаимном базисе называются ковариантными[9].

---

[6] Из курса линейной алгебры и аналитической геометрии

[7] В разных разложениях вектор остается одним и тем же, различаются только координаты вектора в различных базисах.

[8] Смысл названия будет объяснен дальше. Контравариантный – противоположно изменяющийся.

[9] Смысл названия будет объяснен дальше. Ковариантный – согласованно изменяющийся.

Рассмотрим вопрос о непосредственном вычислении координат вектора в основном и взаимном базисе, а также их связь.

Пусть

$$\vec{r} = r^i \vec{\text{Э}}_i \text{ и } \vec{r} = r_j \vec{\text{Э}}^j .$$

Умножим скалярно первое равенство на $\vec{\text{Э}}^j$, а второе на $\vec{\text{Э}}_i$, учитывая далее взаимосвязь основного и взаимного базисов, получим

$$\vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}^j = r^i \vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}^j = r^i \delta_i^j = r^j \text{ и } \vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}_i = r_j \vec{\text{Э}}^j \cdot \vec{\text{Э}}_i = r_j \delta_i^j = r_i$$

Таким образом

$$r^j = \vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}^j \text{ и } r_i = \vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}_i$$

Подставляя эти выражения в формулы разложения вектора $\vec{r}$ в основном и взаимном базисах, будем иметь[10]

$$\vec{r} = \left(\vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}^i\right) \vec{\text{Э}}_i \text{ и } \vec{r} = \left(\vec{r} \cdot \vec{\text{Э}}_j\right) \vec{\text{Э}}^j$$

Подставляя теперь наоборот: формулы разложения вектора $\vec{r}$ в основном и взаимном базисах в выражения для вычисления координат этих разложений, получим

$$r^j = r_i \vec{\text{Э}}^i \cdot \vec{\text{Э}}^j = r_i \left(\vec{\text{Э}}^i \cdot \vec{\text{Э}}^j\right) \text{ и } r_i = r^j \vec{\text{Э}}_j \cdot \vec{\text{Э}}_i = r^j \left(\vec{\text{Э}}_j \cdot \vec{\text{Э}}_i\right)$$

Введем следующие обозначения[11]

$$g_{ij} = \vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}_j \text{ и } g^{ij} = \vec{\text{Э}}^i \cdot \vec{\text{Э}}^j .$$

Тогда

$$r^j = g^{ij} r_i \text{ и } r_i = g_{ij} r^j .$$

Подставляя в формулы Гиббса векторы основного и взаимного базиса, получим

$$\vec{\text{Э}}^j = \left(\vec{\text{Э}}^j \cdot \vec{\text{Э}}^i\right) \vec{\text{Э}}_i = g^{ij} \vec{\text{Э}}_i \text{ и } \vec{\text{Э}}_i = \left(\vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}_j\right) \vec{\text{Э}}^j = g_{ij} \vec{\text{Э}}^j$$

Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся матриц $\left\| g_{ij} \right\|$ и $\left\| g^{ij} \right\|$. Прежде всего, покажем, что они взаимно обратны. Умножим скалярно равенство $\vec{\text{Э}}^j = g^{ij} \vec{\text{Э}}_i$ на $\vec{\text{Э}}_k$

$$\vec{\text{Э}}^j \cdot \vec{\text{Э}}_k = \delta_k^j = g^{ij} \vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}_k = g^{ij} g_{ik} \Rightarrow g^{ij} g_{ik} = \delta_k^j$$

Таким образом, произведение матриц представляет собой единичную матрицу, следовательно, матрицы $\left\| g_{ij} \right\|$ и $\left\| g^{ij} \right\|$ взаимно обратны.

Пусть $g = \det \left\| g_{ij} \right\|$, тогда детерминант матрицы $\left\| g^{ij} \right\|$, обратной матрице $\left\| g^{ij} \right\|$, равен

$$\det \left\| g^{ij} \right\| = \frac{1}{g}$$

---

[10] Формулы Гиббса. Д.У. Гиббс (1839-1903) – американский физик-теоретик ☺

[11] Можно еще добавить $g_i^j = \vec{\text{Э}}_i \cdot \vec{\text{Э}}^j = \delta_i^j$. Видимо, несколько более подробное рассмотрение матриц $\left\| g_{ij} \right\|, \left\| g^{ij} \right\|, \left\| g_i^j \right\|$ относится к другому разделу, так что отложим эту задачу на потом ☺.

**5. Скалярное произведение векторов в криволинейных координатах. Формулы для определения длины вектора и углов между направлениями векторов. Определение расстояния между двумя точками пространства. Фундаментальная квадратичная форма. Физические компоненты вектора. Компоненты векторного произведения в криволинейных координатах.**

В принципе (☺) скалярное произведение двух векторов определяется следующим образом

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=\left(\vec{r},\vec{s}\right)=\left|\vec{r}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\varphi,$$

где $\varphi$ - угол между $\vec{r}$ и $\vec{s}$.

Пусть задан некоторый базис $\vec{Э}_i$, разложим в нем векторы $\vec{r}$ и $\vec{s}$ и подставим эти разложения в формулу для скалярного произведения

$$\vec{r}=r^i\vec{Э}_i=r_i\vec{Э}^i,\ \vec{s}=s^j\vec{Э}_j=s_j\vec{Э}^j$$

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=r^i\vec{Э}_i\cdot s^j\vec{Э}_j=\left(\vec{Э}_i\cdot\vec{Э}_j\right)r^is^j=g_{ij}r^is^j$$

Аналогично, используя разложение во взаимном базисе, получим

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=r_i\vec{Э}^i\cdot s_j\vec{Э}^j=\left(\vec{Э}^i\cdot\vec{Э}^j\right)r_is_j=g^{ij}r_is_j$$

Для смешанных базисов будем иметь

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=r^i\vec{Э}_i\cdot s_j\vec{Э}^j=\left(\vec{Э}_i\cdot\vec{Э}^j\right)r^is_j=g_i^jr^is_j=r^is_i$$

$$\vec{r}\cdot\vec{s}=r_i\vec{Э}^i\cdot s^j\vec{Э}_j=\left(\vec{Э}^i\cdot\vec{Э}_j\right)r_is^j=g_i^jr_is^j=r_is^i$$

Длину вектора можно определить через скалярное произведение

$$\left|\vec{r}\right|^2=\vec{r}\cdot\vec{r}$$

Отсюда

$$\left|\vec{r}\right|^2=\vec{r}\cdot\vec{r}=g_{ij}r^ir^j=g^{ij}r_ir_j=r_ir^i$$

Если в качестве вектора взять вектор приращения $d\vec{r}$, то получим

$$\left|d\vec{r}\right|^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=g_{ij}dx^idx^j$$

Данная квадратичная формула называется *фундаментальной квадратичной формой*[12].

Из формулы скалярного произведения можно определить угол между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\left|\vec{r}\right|\left|\vec{s}\right|}=\frac{g_{ij}r^is^j}{\sqrt{g_{ij}r^ir^j}\sqrt{g_{ij}s^is^j}}$$

Расстояние между двумя точками с радиус векторами $\vec{r}$ и $\vec{s}$ равно

$$\left|\vec{r}-\vec{s}\right|^2=\left(\vec{r}-\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{r}-\vec{s}\right)=\vec{r}\cdot\vec{r}-2\vec{r}\cdot\vec{s}+\vec{s}\cdot\vec{s}$$

Подставляя формулы для скалярных произведений, получим

[12] Задает метрику. Метрика - расстояние между двумя близкими точками

$$\left|\vec{r}-\vec{s}\right|^2 = g_{ij}r^i r^j - 2g_{ij}r^i s^j + g_{ij}s^i s^j = g_{ij}\left(r^i r^j - 2r^i s^j + s^i s^j\right)$$

Рассмотрим разложение некоторого вектора $\vec{r}$ в заданном базисе $\vec{э}_i$

$$\vec{r} = r^i \vec{э}_i = r^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{э}_i = \left(r^i \sqrt{g_{ii}}\right)\frac{\vec{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = r^i_{физ}\vec{e}_i\,,$$

где[13] $r^i_{физ} = r^i\sqrt{g_{ii}}$ – физические компоненты вектора $\vec{r}$ ,

$\vec{e}_i = \dfrac{\vec{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \dfrac{\vec{э}_i}{\sqrt{\vec{э}_i \cdot \vec{э}_i}} = \dfrac{\vec{э}_i}{\left|\vec{э}_i\right|}$ – единичные векторы.

Векторное произведение векторов $\vec{r}$ и $\vec{s}$ можно выразить аналогично скалярному через разложение векторов по базису

$$\vec{r}\times\vec{s} = r^i\vec{э}_i \times s^j\vec{э}_j = \left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right) r^i s^j$$

Пусть

$$\square = \vec{э}_1 \cdot \left(\vec{э}_2 \times \vec{э}_3\right) = \vec{э}_2 \cdot \left(\vec{э}_3 \times \vec{э}_1\right) = \vec{э}_3 \cdot \left(\vec{э}_1 \times \vec{э}_2\right),$$

тогда для векторов взаимного базиса справедливы формулы

$$\vec{э}^1 = \frac{\vec{э}_2 \times \vec{э}_3}{\square},\ \vec{э}^2 = \frac{\vec{э}_3 \times \vec{э}_1}{\square},\ \vec{э}^3 = \frac{\vec{э}_1 \times \vec{э}_2}{\square}$$

При этом[14]

$$\vec{э}^1 \cdot \left(\vec{э}^2 \times \vec{э}^3\right) = \vec{э}^2 \cdot \left(\vec{э}^3 \times \vec{э}^1\right) = \vec{э}^3 \cdot \left(\vec{э}^1 \times \vec{э}^2\right) = \frac{1}{\square}$$

и

$$\vec{э}_1 = \square\,\vec{э}^2 \times \vec{э}^3,\ \vec{э}_2 = \square\,\vec{э}^3 \times \vec{э}^1,\ \vec{э}_3 = \square\,\vec{э}^1 \times \vec{э}^2$$

[13] без суммирования по $i$

[14] $\vec{э}^1 \cdot \left(\vec{э}^2 \times \vec{э}^3\right) = \dfrac{\vec{э}_2 \times \vec{э}_3}{\square} \cdot \left(\dfrac{\vec{э}_3 \times \vec{э}_1}{\square} \times \dfrac{\vec{э}_1 \times \vec{э}_2}{\square}\right) = \dfrac{1}{\square^3}\left(\vec{э}^2 \times \vec{э}^3\right)\left(\vec{э}_1 \cdot \left[\left(\vec{э}_3 \times \vec{э}_1\right)\cdot \vec{э}_2\right] - \vec{э}_2 \cdot \left[\left(\vec{э}_3 \times \vec{э}_1\right)\cdot \vec{э}_1\right]\right) = \dfrac{1}{\square^3}\square^2 = \dfrac{1}{\square}$

**6. Преобразование координат. Матрицы прямого и обратного преобразований. Преобразование векторов базиса. Преобразование компонент вектора. Аналитическое определение вектора.**

Пусть происходит некоторое преобразование координат. Тогда можно говорить об изменении в каждой точке пространства базиса, вводимого так же, как и раньше[15].

Теперь… пусть у нас имеются два базиса[16] – $\vec{Э}_i$ и $\vec{Ы}_i$ [17], а также взаимные к ним – $\vec{Э}^j$ и $\vec{Ы}^i$.

Рассмотрим вопросы прямого и обратного переходов от базиса к базису и преобразования координат векторов при таких переходах.

Разложим векторы базиса $\vec{Ы}_i$ по векторам базиса $\vec{Э}_i$

$$\vec{Ы}_i = \alpha_i^j \vec{Э}_j$$

и наоборот – векторы базиса $\vec{Э}_i$ по векторам базиса $\vec{Ы}_i$

$$\vec{Э}_i = \beta_i^j \vec{Ы}_j$$

Так как преобразования базисов взаимно обратны, то и матрицы этих преобразований взаимно обратны, то есть $\left\|\alpha_i^j\right\|\left\|\beta_i^j\right\| = E$. Матрица $\left\|\alpha_i^j\right\|$ называется матрицей прямого преобразования, а матрица $\left\|\beta_i^j\right\|$ матрицей обратного преобразования.

Покажем, что переход от старого взаимного базиса к новому осуществляется с помощью матрицы обратного преобразования, а от нового взаимного к старому – с помощью прямого, т.е.

$$\vec{Ы}^i = \beta_j^i \vec{Э}^j ,$$
$$\vec{Э}^i = \alpha_j^i \vec{Ы}^j .$$

Пусть

$$\vec{Ы}^i = \tilde{\beta}_j^i \vec{Э}^j ,$$
$$\vec{Э}^i = \tilde{\alpha}_j^i \vec{Ы}^j .$$

Умножим скалярно равенство $\vec{Ы}_i = \alpha_i^j \vec{Э}_j$ на $\vec{Э}^k$, а равенство $\vec{Э}^i = \tilde{\alpha}_j^i \vec{Ы}^j$ на $\vec{Ы}_k$

$$\vec{Ы}_i \cdot \vec{Э}^k = \alpha_i^j \vec{Э}_j \cdot \vec{Э}^k = \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_i^k$$
$$\vec{Э}^i \cdot \vec{Ы}_k = \tilde{\alpha}_j^i \vec{Ы}^j \cdot \vec{Ы}_k = \tilde{\alpha}_j^i \delta_k^j = \tilde{\alpha}_k^i$$

Поменяв местами[18], например, в первом равенстве индексы $i$ и $k$, получим[19]

$$\vec{Ы}_k \cdot \vec{Э}^i = \alpha_k^i$$
$$\vec{Э}^i \cdot \vec{Ы}_k = \tilde{\alpha}_k^i$$

[15] см. пункт 4.
[16] старый и новый
[17] это именно «Ы». По предложению Вовчика.
[18] переобозначив
[19] первую формулу можно использовать для определения элементов матрицы $\left\|\alpha_i^j\right\|$ по заданным базисам. Аналогично можно определить и матрицу $\left\|\beta_i^j\right\|$.

Отсюда $\left\|\alpha_i^j\right\| = \left\|\tilde{\alpha}_i^j\right\|$. Аналогично, $\left\|\beta_i^j\right\| = \left\|\tilde{\beta}_i^j\right\|$.

Таким образом, будем иметь

$$\vec{ы}_i = \alpha_i^j \vec{э}_j\,,\ \vec{ы}^i = \beta_j^i \vec{э}^j\,,\ \vec{э}_i = \beta_i^j \vec{ы}_j\,,\ \vec{э}^i = \alpha_j^i \vec{ы}^j\,.$$

Рассмотрим теперь вопрос преобразования компонент произвольного вектора $\vec{r}$ при переходе от одного базиса к другому.

Пусть

$$\vec{r} = r^i \vec{э}_i = r_i \vec{э}^i\,,$$

тогда по формулам Гиббса

$$r^i = \vec{r} \cdot \vec{э}^i,\ r_i = \vec{r} \cdot \vec{э}_i\,.$$

Аналогично

$$\vec{r} = \rho^i \vec{ы}_i = \rho_i \vec{ы}^i\,,$$
$$\rho^i = \vec{r} \cdot \vec{ы}^i,\ \rho_i = \vec{r} \cdot \vec{ы}_i\,.$$

Отсюда

$$\rho^i = \vec{r} \cdot \vec{ы}^i = \vec{r} \cdot \beta_j^i \vec{э}^j = \beta_j^i \left(\vec{r} \cdot \vec{э}^j\right) = \beta_j^i r^j$$
$$\rho_i = \vec{r} \cdot \vec{ы}_i = \vec{r} \cdot \alpha_i^j \vec{э}_j = \alpha_i^j \left(\vec{r} \cdot \vec{э}_j\right) = \alpha_i^j r_j$$

Делаем выводы.

Ковариантные компоненты $r_j$ вектора $\vec{r}$ при переходе к новому базису преобразуются с помощью матрицы прямого преобразования, то есть согласованно (отсюда название «ковариантные»).

Контравариантные компоненты $r^j$ вектора $\vec{r}$ при переходе к новому базису преобразуются с помощью матрицы обратного преобразования, то есть несогласованно, противоположно (отсюда название «контравариантные»).

Аналогично, получим, что

$$r^i = \alpha_j^i \rho^j$$
$$r_i = \beta_i^j \rho_j$$

Инвариантность вектора при преобразовании координат позволяют аналитически определить вектор как математический объект, задаваемый тремя числами (в трехмерном пространстве), преобразуемый при переходе к новому базису (новой системе координат) посредством указанных выше формул.[20]

[20] Можно считать это введением в тензоры, так как тут прослеживается некоторая аналогия. ☺

**7. Полиадные произведения векторов базиса. Диады. Формулы преобразования полиадных произведений при преобразовании координат. Определение тензора. Ранг и строение тензора. Метрический (фундаментальный тензор). Симметрический и антисимметрический тензоры II ранга.**

Проникнувшись идеей «считать вектор математическим объектом с определенными[21] свойствами», авторы теории решили ввести похожие объекты, тока «посложнее» ☺, чтобы они также были инвариантны относительно преобразований координат.

Начали они с того, что ввели в рассмотрение базисные диады – «произведения[22]» векторов базиса[23]

$$\vec{э}_i\vec{э}_j,\ \vec{э}^i\vec{э}^j,\ \vec{э}_i\vec{э}^j,\ \vec{э}^i\vec{э}_j$$

Базисные диады[24] образуют базис диадного пространства ☺. Диадное пространство образуется совокупностью диад (произведений векторов). Каждая диада $T$ может быть разложена в диадном базисе[25]

$$T = \vec{a}\vec{b} = a^i\vec{э}_i b^j\vec{э}_j = \left(a^i b^j\right)\vec{э}_i\vec{э}_j = T^{ij}\vec{э}_i\vec{э}_j .$$

Таким образом, аналитически каждая диада в данном базисе может быть задана матрицей

$$\left\|T^{ij}\right\| = \left\|a^i b^j\right\|$$

Естественно, диаду можно разложить и по взаимному или смешанным базисам

$$T = \vec{a}\vec{b} = a_i\vec{э}^i b_j\vec{э}^j = \left(a_i b_j\right)\vec{э}^i\vec{э}^j = T_{ij}\vec{э}^i\vec{э}^j$$
$$T = \vec{a}\vec{b} = a_i\vec{э}^i b^j\vec{э}_j = \left(a_i b^j\right)\vec{э}^i\vec{э}_j = T_{i\cdot}^{\cdot j}\vec{э}^i\vec{э}_j$$
$$T = \vec{a}\vec{b} = a^i\vec{э}_i b_j\vec{э}^j = \left(a^i b_j\right)\vec{э}_i\vec{э}^j = T^{i\cdot}_{\cdot j}\vec{э}_i\vec{э}^j$$

Рассмотрим, для примера диадный базис $\vec{э}_i\vec{э}_j$, если разложить каждую диаду базиса по самому базису, то мы получим следующие матрицы разложения

$$\vec{э}_1\vec{э}_1 \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \vec{э}_1\vec{э}_2 \to \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ldots,\ \vec{э}_3\vec{э}_3 \to \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Таким образом, матрицу разложения произвольной диады можно представить следующим образом

$$\left\|T^{ij}\right\| = T^{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + T^{12}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \ldots + T^{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Пусть теперь совершается переход от базиса $\vec{э}_i$ к базису $\vec{ю}_i$ с помощью матрицы $\alpha_i^j$, тогда

$$\vec{ю}_i\vec{ю}_j = \left(\alpha_i^p\vec{э}_p\right)\left(\alpha_j^q\vec{э}_q\right) = \alpha_i^p\alpha_j^q\vec{э}_p\vec{э}_q$$

---

[21] Инвариантность при переходе от базиса к базису. Вектор задается в каждом базисе тремя числами.

[22] Смысл «произведения» так и остался загадкой, похоже, векторы просто пишут рядом друг с дружкой☺

[23] Произведения некоммутативные, то есть, например, $\vec{э}_i\vec{э}_j \neq \vec{э}_j\vec{э}_i \quad \left(i \neq j\right)$.

[24] Тут, видимо, каждая совокупность однотипных базисных диад образует базис ☺, то есть, например, $\vec{э}_i\vec{э}_j$ образуют базис, $\vec{э}^i\vec{э}^j$ образуют базис, $\vec{э}_i\vec{э}^j$ образуют базис и $\vec{э}^i\vec{э}_j$ также образуют базис.

[25] Из определения следует, что диадное произведение линейно.

Теперь требуем, чтобы при смене координат (базисов) объект (диада) $T$ оставался инвариантным, то есть а новом базисе представлялся аналогичным образом

$$T = \tilde{T}^{ij} \vec{\text{ю}}_i \vec{\text{ю}}_j$$

И получаем таким образом тензор второго ранга или валентности[26].

На основе определения выведем формулу преобразования компонент тензора[27] (второго ранга) при смене базиса

$$T = \tilde{T}^{ij} \vec{\text{ю}}_i \vec{\text{ю}}_j = \tilde{T}^{ij} \alpha_i^p \alpha_j^q \vec{\text{э}}_p \vec{\text{э}}_q = T^{pq} \vec{\text{э}}_p \vec{\text{э}}_q$$

Отсюда

$$T^{pq} = \tilde{T}^{ij} \alpha_i^p \alpha_j^q \text{ и } \tilde{T}^{pq} = T^{ij} \beta_i^p \beta_j^q ,$$

где $\left\| \beta_i^j \right\|$ - матрица обратного преобразования базисов.

Совершенно аналогично вводятся полиадные произведения базисных векторов

$$\vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k ,\ \vec{\text{э}}^i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k ,\ \ldots,\ \vec{\text{э}}^i \vec{\text{э}}^j \ldots \vec{\text{э}}^k$$

и тензоры соответствующих рангов

$$T = T^{ij\ldots k} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k = T_{i\cdot\ldots\cdot}^{\cdot j\ldots k} \vec{\text{э}}^i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k = \ldots = T_{ij\ldots k} \vec{\text{э}}^i \vec{\text{э}}^j \ldots \vec{\text{э}}^k ,$$

координаты которых при переходе к новому базису преобразуются по правилам

$$\tilde{T}^{pq\ldots r} = T^{ij\ldots k} \beta_i^p \beta_j^q \ldots \beta_j^r ,\ \tilde{T}_{p\cdot\ldots\cdot}^{\cdot q\ldots r} = T_{i\cdot\ldots\cdot}^{\cdot j\ldots k} \alpha_p^i \beta_j^q \ldots \beta_j^r ,\ \ldots,\ \tilde{T}_{pq\ldots r} = T_{ij\ldots k} \alpha_p^i \alpha_q^j \ldots \alpha_r^k$$

Стоит отметить, что тензор равен нулю, если все его компоненты равны нулю (хотя бы в каком-то базисе, в остальных они автоматически тоже будут равняться нулю).

В качестве примера рассмотрим метрический (фундаментальный) тензор.

Ранее[28] были введены матрицы $\left\| g_{ij} \right\|, \left\| g^{ij} \right\|, \left\| g_i^j \right\|$. Покажем, что они задают некоторый тензор, который мы и назовем метрическим[29], или фундаментальным, тензором.

При переходе к новому базису

$$\tilde{g}_{pq} = \vec{\text{ю}}_p \cdot \vec{\text{ю}}_q = \alpha_p^i \vec{\text{э}}_i \cdot \alpha_q^j \vec{\text{э}}_j = \alpha_p^i \alpha_q^j \left( \vec{\text{э}}_i \cdot \vec{\text{э}}_j \right) = \alpha_p^i \alpha_q^j g_{ij}$$
$$\tilde{g}^{pq} = \vec{\text{ю}}^p \cdot \vec{\text{ю}}^q = \beta_i^p \vec{\text{э}}^i \cdot \beta_j^q \vec{\text{э}}^j = \beta_i^p \beta_j^q \left( \vec{\text{э}}^i \cdot \vec{\text{э}}^j \right) = \beta_i^p \beta_j^q g^{ij}$$
$$\tilde{g}_{q}^{p} = \vec{\text{ю}}^p \cdot \vec{\text{ю}}_q = \beta_i^p \vec{\text{э}}^i \cdot \alpha_q^j \vec{\text{э}}_j = \beta_i^p \alpha_q^j \left( \vec{\text{э}}^i \cdot \vec{\text{э}}_j \right) = \beta_i^p \alpha_q^j g_j^i$$

---

[26] Ранг (валентность) тензора – число индексов его компонент. Число нижних индексов определяет ковариантность, верхних – контравариантность. Это накладывает поправки на используемые матрицы при переходе к новому базису: для ковариантных индексов используется матрица прямого преобразования, для контравариантных – обратного (в общем-то, все аналогично векторам, а вектор – тензор первого ранга).

[27] На самом деле зачастую тензор определяют как математический (геометрический) объект, обладающий тем свойством, что при преобразовании координат его координаты (компоненты разложения в базисе) преобразуются указанным способом (с поправкой на ранг и некоторые дополнительные слова в определении)

[28] Надо полистать немного назад ☺

[29] Название следует из того, что компоненты $g_{ij}$ задают фундаментальную квадратичную форму, определяющую метрику пространства.

Таким образом,

$$G = g^{ij}\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j = g_{ij}\vec{\ni}^i\vec{\ni}^j = g_i^j\vec{\ni}^i\vec{\ni}_j$$

является тензором второго ранга.

Важными частными случаями тензоров являются симметричные и антисимметричные[30] тензоры.

Тензор $T$ называется симметричными по двум индексам[31], если при перестановке местами этих индексов значения компонент тензора не меняются. Например, если

$$T = T^{ij\ldots k}\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j\ldots\vec{\ni}_k \text{ и } T^{ij\ldots k} = T^{ji\ldots k},$$

то данный тензор является симметричным по первому и второму индексам.

Аналогично, тензор $T$ называется антисимметричными по двум индексам, если при перестановке местами этих индексов значения компонент тензора меняются на противоположные. Например, если

$$T = T^{ij\ldots k}\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j\ldots\vec{\ni}_k \text{ и } T^{ij\ldots k} = -T^{ji\ldots k},$$

то данный тензор является антисимметричным по первому и второму индексам.

Отметим, что в силу правил преобразования компонент тензора при переходе к новому базису свойства симметрии и антисимметрии сохраняются.

По данному произвольному тензору всегда можно построить тензоры, симметричные или антисимметричные по заданным индексам. Операции построения таких тензоров носят названия симметрирования и альтернирования соответственно. Для простоты[32] рассмотрим произвольный тензор второго ранга

$$T = T^{ij}\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j$$

Построим новый тензор $T_0$ согласно следующему правилу

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right)\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j$$

Легко проверить, что

$$T_0^{ij} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(T^{ji} + T^{ij}\right) = T_0^{ji}$$

Таким образом, мы построили новый тензор, симметричный по первому и второму индексам.

Аналогично рассмотрим тензор $T_1$, построенный согласно правилу

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right)\vec{\ni}_i\vec{\ni}_j$$

Легко проверить, что

$$T_1^{ij} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right) = -\frac{1}{2}\left(T^{ji} - T^{ij}\right) = -T_1^{ji}$$

Таким образом, мы построили новый тензор, антисимметричный по первому и второму индексам.

---

[30] Другое наименование - кососимметрические

[31] Здесь рассмотрены тензоры, симметричные или антисимметричные по верхним индексам, совершенно аналогично вводятся понятия симметрии и антисимметрии по нижним и смешанным индексам.

[32] Чтобы избежать лишних нагромождений индексов ☺

**8. Операции тензорной алгебры (перестановка индексов, сложение и умножение тензоров, свертывание, опускание и поднятие тензоров). Инварианты тензора. Тензорная поверхность. Главные оси и главные компоненты тензора.**

Рассмотрим некоторые операции, применимые к тензорам.

Продолжим[33] изучение перестановки индексов. Нам ничто не мешает переставлять индексы в произвольном тензоре ☺. При перестановке пары индексов в тензоре мы получим *сопряженный по данной паре индексов* новый тензор.

Возвращаясь к вопросам симметрирования и альтернирования, укажем лишь, что любой тензор может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Действительно, по данному тензору[34] можно построить симметричный и антисимметричный тензоры[35]

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(T^{ijk\ldots l} + T^{jik\ldots l}\right)\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\vec{\jmath}_k\ldots\vec{\jmath}_l \text{ и } T_1 = \frac{1}{2}\left(T^{ijk\ldots l} - T^{jik\ldots l}\right)\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\vec{\jmath}_k\ldots\vec{\jmath}_l$$

Ясно, что их сумма даст исходный тензор $T = T^{ijk\ldots l}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\vec{\jmath}_k\ldots\vec{\jmath}_l$.

Кстати, к вопросу о суммировании и вычитании тензоров. Складывать и вычитать можно только тензоры одного типа, то есть с совпадающим числом ковариантных (нижних) и контравариантных (верхних) индексов. При этом компоненты нового тензора определяются как сумма соответствующих компонент исходных тензоров

$$S = T \pm R = T^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k \pm R^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k = \left(T^{ij\ldots k} \pm R^{ij\ldots k}\right)\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k = S^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k$$
$$S^{ij\ldots k} = T^{ij\ldots k} \pm R^{ij\ldots k}$$

При умножении тензора на число на это число умножаются его компоненты.

$$S = \alpha T = \alpha T^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k = \left(\alpha T^{ij\ldots k}\right)\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k = S^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k$$
$$S^{ij\ldots k} = \alpha T^{ij\ldots k}$$

Тензоры можно и перемножать[36] между собой. Произведением двух тензоров называется тензор, компоненты которого равны всевозможным произведениям компонент исходных тензоров. Для примера рассмотрим тензоры с контравариантными индексами

$$T = T^{ij\ldots k}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_k,\ R = R^{ij\ldots l}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\ldots\vec{\jmath}_l$$

Тогда

$$S = TR = \left(T^{ij}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\right)\left(R^{kl}\vec{\jmath}_k\vec{\jmath}_l\right) = T^{ij}R^{kl}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\vec{\jmath}_k\vec{\jmath}_l = S^{ijkl}\vec{\jmath}_i\vec{\jmath}_j\vec{\jmath}_k\vec{\jmath}_l$$
$$S^{ijkl} = T^{ij}R^{kl}$$

Из примера видно, что ранг нового тензора является суммой рангов исходных, причем с учетом количества контравариантных и контравариантных индексов, то есть число верхних индексов в новом тензоре равно сумме числа верхних индексов в исходных. Число нижних индексов в новом тензоре равно сумме числа нижних индексов в исходных.

Для к тензору, у которого есть по крайней мере один ковариантный (нижний) и один контравариантный (верхний) индексы, можно применять операцию свёртки по одному из верхних и одному из нижних индексов. В результате получается тензор с рангом на 2 единицы меньше.

Пусть дан тензор с компонентами

$$T_{i\ldots jkl\ldots m}^{p\ldots qrs\ldots t}$$

---

[33] Коротенечко☺

[34] Для удобства будем рассматривать разложения тензоров в ковариантном базисе (с нижними индексами).

[35] По первому и второму индексам

[36] Тензорное произведение не коммутативно. $TR \neq RT$

Предположим мы хотим провести свёртку по индексам $r$ и $k$. Для этого для всех возможных значений остальных индексов проведем суммирование по заданным индексам[37]

$$S_{i\ldots jl\ldots m}^{p\ldots qs\ldots t} = \sum_n T_{i\ldots jnl\ldots m}^{p\ldots qns\ldots t} = T_{i\ldots jnl\ldots m}^{p\ldots qns\ldots t}$$

Термин «свёртывание тензоров[38]» применяют также и в следующем смысле. Положим, например, у нас есть два тензора, у компонент первого из которых имеется, по крайней мере, один верхний индекс $k$, а у компонент второго – по крайней мере, один нижний индекс $i$.

Составим произведение этих тензоров и осуществим свертку нового тензора по верхнему индексу $k$ и нижнему $i$[39]. В итоге мы получим «свёртку тензоров по индексам $k$ и $i$».

Отметим, что ранг свёртки двух тензоров на две единицы меньше суммы рангов этих тензоров.

Если суммирование проводить по двум парам индексов сразу, то мы получим операцию двойной свертки (или согласно нотации Прудникова «двойного скалярного произведения»), а на выходе – тензор с рангом на 4 единицы меньше.

Аналогично переходам в разложении векторов от нижних к верхним индексам и наоборот, операции поднятия и опускания индексов можно применять и к компонентам тензоров. Для этого применяется рассмотренный ранее метрический тензор $G$.

Прежде всего, покажем, что в результате свёртки заданного тензора $T$ с метрическим тензором снова получается тот же тензор $T$. Пусть

$$T = T_{lm\ldots n}^{ij\ldots k} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \vec{\text{э}}^m \ldots \vec{\text{э}}^n$$

Тогда в результате  умножения данного тензора на метрический получим тензор

$$S = TG = T_{lm\ldots n}^{ij\ldots k} g^{pq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \vec{\text{э}}^m \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_p \vec{\text{э}}_q = S_{lm\ldots n}^{ij\ldots kpq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \vec{\text{э}}^m \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_p \vec{\text{э}}_q$$

Проведем теперь свёртку тензора $S$ по одному из нижних индексов – $m$ и верхнему индексу $p$

$$R_{l\ldots n}^{ij\ldots kq} = S_{lr\ldots n}^{ij\ldots krq}$$

Тогда, разворачивая назад[40] проделанные операции, получим

$$R = R_{l\ldots n}^{ij\ldots kq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_q = S_{lr\ldots n}^{ij\ldots krq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_q = T_{lr\ldots n}^{ij\ldots k} g^{rq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_q$$

С учетом

$$g^{rq} \vec{\text{э}}_q = \vec{\text{э}}^r$$

будем иметь

$$R = T_{lr\ldots n}^{ij\ldots k} g^{rq} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}_q = T_{lr\ldots n}^{ij\ldots k} \vec{\text{э}}_i \vec{\text{э}}_j \ldots \vec{\text{э}}_k \vec{\text{э}}^l \ldots \vec{\text{э}}^n \vec{\text{э}}^r = T\,.$$

Таким образом, скалярное умножение[41] на метрический тензор не изменяет исходного тензора.

Теперь рассмотрим вопрос о поднятии (опускании) индексов.

Пусть[42]

---

[37] После второго равенства используем «соглашение» о суммировании. Интересно как? ☺
[38] В методичке Прудникова оно также называется скалярным произведение тензоров
[39] Видимо, с учетом переобозначения индексов ☺
[40] Стоило огород городить… ☺
[41] Свёртка

$$T = T^{ij\ldots k}\vec{\partial}_i\vec{\partial}_j\ldots\vec{\partial}_k = T_{i\cdot\ldots\cdot}^{\cdot\, j\ldots k}\vec{\partial}^i\vec{\partial}_j\ldots\vec{\partial}_k$$

Как следует из описанного выше[43]

$$T = G\cdot T = g_{rq}T^{rj\ldots k}\vec{\partial}^q\vec{\partial}_j\ldots\vec{\partial}_k = T_{i\cdot\ldots\cdot}^{\cdot\, j\ldots k}\vec{\partial}^i\vec{\partial}_j\ldots\vec{\partial}_k$$

Приравнивая коэффициенты, получим

$$T_{i\cdot\ldots\cdot}^{\cdot\, j\ldots k} = g_{rq}T^{rj\ldots k}$$

Аналогично рассматриваются вопросы о поднятии остальных индексов, в том числе в самом общем виде. Отметим, что операции поднятия или опускания индексов можно применять несколько раз.

Понятие тензора вводилось с учетом разложения в некотором базисе и на основе правила преобразования компонент разложения при переходе к новому базису (новой системе координат). При этом мы говорили, что сам тензор как некоторый математический объект остается инвариантным.

Далее ставится вопрос: а можно ли указать какую-либо функцию от компонент тензора, которая также будет инвариантной к преобразованию компонент тензора при переходе к новому базису?

В Седове рассматриваются в этом плане только тензоры второго порядка, так что мы, наверно, тоже ограничимся только ими в этом вопросе ☺.

Возьмем произвольный тензор второго ранга

$$T = T^{ij}\vec{\partial}_i\vec{\partial}_j = T_{\cdot j}^{i\cdot}\vec{\partial}_i\vec{\partial}^j$$

Рассмотрим свертку по обоим индексам данного тензора с метрическим тензором

$$T^{ij}g_{ij} = T_{\cdot i}^{i\cdot} = T_{\cdot 1}^{1\cdot} + T_{\cdot 2}^{2\cdot} + T_{\cdot 3}^{3\cdot}$$

При преобразовании координат мы получим компоненты тензора в новом базисе

$$\tilde{T}_{\cdot j}^{i\cdot} = \beta_p^i\alpha_j^q T_{\cdot q}^{p\cdot}$$

Отсюда с учетом взаимной обратности матриц прямого и обратного преобразований

$$\tilde{T}_{\cdot i}^{i\cdot} = \beta_p^i\alpha_i^q T_{\cdot q}^{p\cdot} = \left(\beta_p^i\alpha_i^q\right)T_{\cdot q}^{p\cdot} = \delta_p^q T_{\cdot q}^{p\cdot} = T_{\cdot p}^{p\cdot}$$

Таким образом, мы получили первый[44] инвариант тензора второго ранга – $T^{ij}g_{ij}$.

Рассмотрим двойную свертку заданного произвольного тензора $T$ с самим собой

$$\begin{aligned} T_{\cdot j}^{i\cdot}T_{\cdot i}^{j\cdot} &= T_{\cdot 1}^{1\cdot}T_{\cdot 1}^{1\cdot} + T_{\cdot 1}^{2\cdot}T_{\cdot 2}^{1\cdot} + T_{\cdot 1}^{3\cdot}T_{\cdot 3}^{1\cdot} + T_{\cdot 2}^{1\cdot}T_{\cdot 1}^{2\cdot} + T_{\cdot 2}^{2\cdot}T_{\cdot 2}^{2\cdot} + T_{\cdot 2}^{3\cdot}T_{\cdot 3}^{2\cdot} + T_{\cdot 3}^{1\cdot}T_{\cdot 1}^{3\cdot} + T_{\cdot 3}^{2\cdot}T_{\cdot 2}^{3\cdot} + T_{\cdot 3}^{3\cdot}T_{\cdot 3}^{3\cdot} = \\ &= \left(T_{\cdot 1}^{1\cdot}\right)^2 + \left(T_{\cdot 2}^{2\cdot}\right)^2 + \left(T_{\cdot 3}^{3\cdot}\right)^2 + 2T_{\cdot 1}^{2\cdot}T_{\cdot 2}^{1\cdot} + 2T_{\cdot 1}^{3\cdot}T_{\cdot 3}^{1\cdot} + 2T_{\cdot 2}^{3\cdot}T_{\cdot 3}^{2\cdot} \end{aligned}$$

Аналогично при переходе к новому базису будем иметь

$$\tilde{T}_{\cdot j}^{i\cdot} = \beta_p^i\alpha_j^q T_{\cdot q}^{p\cdot}$$

Отсюда

[42] Возможно «обобщение» в самом общем виде, но это опять же громоздко ☺

[43] С использованием обозначения для свертки, эквивалентного обозначению скалярного произведения

[44] Линейный

$$\tilde{T}^{i\cdot}_{\cdot j}\tilde{T}^{j\cdot}_{\cdot i} = \beta^i_p\alpha^q_j T^{p\cdot}_{\cdot q}\beta^j_r\alpha^s_i T^{r\cdot}_{\cdot s} = \left(\beta^i_p\alpha^s_i\right)\left(\alpha^q_j\beta^j_r\right)T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{r\cdot}_{\cdot s} = \delta^s_p\delta^q_r T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{r\cdot}_{\cdot s} = T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{q\cdot}_{\cdot p}$$

Таким образом, мы получили второй[45] инвариант тензора второго ранга – $T^{i\cdot}_{\cdot j}T^{j\cdot}_{\cdot i}$

Проделаем теперь свёртку куба тензора по трем парам индексов[46]

$$T^{i\cdot}_{\cdot j}T^{j\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot i}$$

Аналогично при переходе к новому базису будем иметь

$$\tilde{T}^{i\cdot}_{\cdot j} = \beta^i_p\alpha^q_j T^{p\cdot}_{\cdot q}$$

Отсюда

$$\tilde{T}^{i\cdot}_{\cdot j}\tilde{T}^{j\cdot}_{\cdot k}\tilde{T}^{k\cdot}_{\cdot i} = \beta^i_p\alpha^q_j T^{p\cdot}_{\cdot q}\beta^j_r\alpha^s_k T^{r\cdot}_{\cdot s}\beta^k_t\alpha^u_i T^{t\cdot}_{\cdot u} = \left(\beta^i_p\alpha^u_i\right)\left(\beta^j_r\alpha^q_j\right)\left(\beta^k_t\alpha^s_k\right)T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{r\cdot}_{\cdot s}T^{t\cdot}_{\cdot u} =$$
$$= \left(\beta^i_p\alpha^u_i\right)\left(\beta^j_r\alpha^q_j\right)\left(\beta^k_t\alpha^s_k\right)T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{r\cdot}_{\cdot s}T^{t\cdot}_{\cdot u} = \delta^u_p\delta^q_r\delta^s_t T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{r\cdot}_{\cdot s}T^{t\cdot}_{\cdot u} = T^{p\cdot}_{\cdot q}T^{q\cdot}_{\cdot s}T^{s\cdot}_{\cdot p}$$

Таким образом, мы получили третий[47] инвариант тензора второго ранга – $T^{i\cdot}_{\cdot j}T^{j\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot i}$

Как, по идее, будет показано дальше, для симметричного тензора второго ранга все остальные скалярные инварианты тензора будут функциями указанных трех.

К вопросу о тензорной поверхности. Рассмотрим произвольную точку $O$ и точку $M$ из её малой окрестности. Пусть в точке $O$ у нас проведены координатные линии $x^1, x^2, x^3$ и, таким образом, заданы векторы локального базиса

$$\vec{\text{Э}}_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = dx^i\vec{\text{Э}}_i$

и произвольный симметричный тензор $T = T^{ij}\vec{\text{Э}}_i\vec{\text{Э}}_j = T_{ij}\vec{\text{Э}}^i\vec{\text{Э}}^j$

Тогда[48] выражение $T_{ij}dx^i dx^j$

является инвариантом и мы можем положить $T_{ij}dx^i dx^j = c$

В малой окрестности точки $O$ последнее уравнение при фиксированном $c$ и значениях $T_{ij}$, взятых в точке $O$, определяет поверхность второго порядка[49], которая и называется тензорной поверхностью. При этом дифференциалы $dx^i$ рассматриваются как координаты точек этой поверхности.

Как известно, с помощью некоторых преобразований квадратичную форму, можно привести к каноническому виду, перейдя к ортогональной системе координат, при этом уравнение поверхности примет вид

$$T_{11}\left(dx^1\right)^2 + T_{22}\left(dx^2\right)^2 + T_{33}\left(dx^3\right)^2 = c$$

В этом случае недиагональные компоненты тензора будут равны нулю. Оси координат при этом называются *главными осями* тензора, сама система координат – *главной системой координат*, а соответствующие компоненты тензора $T_{ii}$ – *главными компонентами*[50] тензора.

---

[45] Квадратичный

[46] Расписывать по компонентам лень. Честно ☺

[47] Кубический

[48] Очевидно по Седову. Для нас же…

$$\tilde{T}_{ij}d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \alpha^p_i\alpha^q_j T_{pq}\beta^i_r dx^r\beta^j_s dx^s = \left(\alpha^p_i\beta^i_r\right)\left(\alpha^q_j\beta^j_s\right)T_{pq}dx^r dx^s = \delta^p_r\delta^q_s T_{pq}dx^r dx^s = T_{pq}dx^p dx^q$$

[49] А само уравнение можно рассматривать как квадратичную форму

$$\Phi = \frac{1}{2}T_{ij}dx^i dx^j$$

[50] В ортогональной системе координат ковариантный и контравариантный базисы совпадают, поэтому разница между контравариантными, ковариантными и смешанными компонентами пропадает

Вернемся временно к нашим инвариантам. В главной системе координат они запишутся следующим образом

$$I_1 = T^{ij} g_{ij} = T_1 + T_2 + T_3$$
$$I_2 = T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot i} = (T_1)^2 + (T_2)^2 + (T_3)^2$$
$$I_2 = T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot k} T^{k\cdot}_{\cdot i} = (T_1)^3 + (T_2)^3 + (T_3)^3$$

Из записи инвариантов видно, что они независимы и зависят только от трёх компонент тензора. То есть данная система однозначно разрешима относительно главных компонент и, таким образом, любая функция компонент тензора является функцией трех инвариантов.

Рассмотрим вопрос вычисления главных компонент и главных векторов тензора. Квадратичная форма для тензорной поверхности задается в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} T_{ij} dx^i dx^j$$

Если вместо бесконечно малого вектора приращения $d\vec{r}$ использовать коллинеарный ему конечный вектор

$$\vec{r} = r^i \vec{Э}_i$$

то форма примет вид

$$\Phi = \frac{1}{2} T_{ij} r^i r^j$$

Тогда для поверхности $T_{ij} r^i r^j = c$ вектор

$$T \cdot \vec{r} = T_{ij} r^j \vec{Э}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \vec{Э}^i = grad\ \Phi$$ [51]

Как известно из курса линейной алгебра и аналитической геометрии ☺ для поверхности второго порядка существуют, по крайней мере, три[52] направления вектора $\vec{r}$, для которых касательные поверхности перпендикулярны $\vec{r}$ и соответственно вектор $\vec{r}$ параллелен градиенту к поверхности в этой точке, то есть

$$T \cdot \vec{r} = \lambda \vec{r}$$

Таким образом, мы приходим к задаче на собственные значения и собственные векторы. При этом[53] собственные векторы как искомые направления совпадают с главными направлениями, а собственные значения с главными компонентами тензора $T$.

Так как тензор симметричен, то симметрична и матрица его компонент, отсюда, как известно, следует, что все собственные значения будут действительными.

Отметим, что при решении задачи на собственные значения мы придем к уравнению вида

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0,$$

где $J_1 = T^{i\cdot}_{\cdot i} = I_1,\ J_2 = \frac{1}{2}\left[ \left(T^{i\cdot}_{\cdot i}\right)^2 - T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot i} \right] = \frac{1}{2}\left[ (I_1)^2 - I_2 \right],\ J_3 = \det \left\| T^{i\cdot}_{\cdot j} \right\|$ [54]

Так вот… зачастую инвариантами тензора называют именно $J_1, J_2, J_3$. Для нас же важно лишь то, что эти и введенные ранее инварианты выражаются одни через другие.

---

$$T_{ii} = T^{ii} = T^i_i = T_i$$

[51] Практически по определению ☺

[52] В общем случае их три, но например, для сферы таких систем координат можно вводить бесконечно много ☺

[53] Вспоминаем из курса линейки, что с помощью собственный векторов осуществляется переход к ортогональной системе координат в которой матрица квадратичной формы будет диагональной, а по диагонали будут стоять собственные значения.

[54] А дальше лень выражать через $I_1, I_2, I_3$

**9. Тензорное поле. Ковариантное дифференцирование компонент векторов и тензоров. Символы Кристоффеля. Теорема Риччи. Формулы вычисления символов Кристоффеля в произвольных и ортогональных криволинейных координатах.**

Что такое тензорное поле, трудно сказать… Можно лишь предположить, что имеется в виду следующее...

Пусть в точке $O$ заданы некоторый симметричный тензор $T$ и некоторое направление $\vec{n}$ (единичный вектор), тогда вектором тензора $T$ в направлении $\vec{n}$ называется вектор

$$\vec{T}_n = T \cdot \vec{n}$$

Подобные векторы, видимо, и задают тензорное поле ☺.

Для вектора $\vec{T}_n$ можно вычислить нормальную и тангенсальную составляющие, то есть разложить его на сумму двух векторов $\vec{T}_{nn} \parallel \vec{n}$ и $\vec{T}_{n\tau} \perp \vec{n}$.

$$\vec{T}_{nn} = T_{nn}\vec{n} = \left(\vec{T}_n \cdot \vec{n}\right)\vec{n}$$

$$\vec{T}_{n\tau} = \vec{T}_n - \vec{T}_{nn}$$

Проведя некоторые нехитрые рассуждения, можно показать, что экстремальные[55] значения длины нормальной и тангенсальной составляющих вектора тензора принимают на главных направлениях тензора. При этом нормальные составляющие по длине равны главным значениям тензора, а тангенсальные равны нулю.

Максимальное значение касательных составляющих достигается на биссектрисах углов между главными направлениями.

Укажем примерный ход рассуждений. Пусть мы знаем главные оси тензора, а вектор направления задается в главной системе координат компонентами $n_1, n_2, n_3$.

Тогда длины векторов $\vec{T}_{nn}$ и $\vec{T}_{n\tau}$ с учетом ортогональности главных осей будут равны

$$\left|\vec{T}_{nn}\right| = T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_2 n_2^2$$

$$\left|\vec{T}_{n\tau}\right|^2 = \left|\vec{T}_n\right|^2 - \left|\vec{T}_{nn}\right|^2 = \left(T_1\right)^2 n_1^2 + \left(T_2\right)^2 n_2^2 + \left(T_3\right)^2 n_3^2 - \left(T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_2 n_2^2\right)^2$$

С учетом единичности вектора направления $\vec{n}$ будем иметь

$$n_1^2 = 1 - n_2^2 - n_3^2$$

Подставляя в формулу для вычисления длин векторов данное условие и дифференцируя по $n_2$ и $n_3$, получим, что

$$\frac{\partial\left|\vec{T}_{nn}\right|}{\partial n_2} = 2n_2\left(T_2 - T_1\right) = 0, \quad \frac{\partial\left|\vec{T}_{nn}\right|}{\partial n_2} = 2n_3\left(T_3 - T_1\right) = 0$$

Отсюда при $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ будем иметь, что $n_2 = n_3 = 0$ и, таким образом, одно из «экстремальных» направлений совпадает с первым главным направлением.

Аналогично определяется, что остальные направления совпадают с остальными главными значениями.

В случае, если какие главные направления тензора совпадают, надо использовать равенство нулю производных длины[56] тангенсальной[57] составляющей по соответствующим компонентам вектора направления, например

[55] Максимальное или минимальное
[56] Квадрата длины

$$\frac{\partial\left|\vec{T}_{n\tau}\right|}{\partial n_2}=0,\ \frac{\partial\left|\vec{T}_{n\tau}\right|}{\partial n_2}=0$$

При этом как было отмечено, если $n_2=n_3=0$, то тангенсальная составляющая вектора тензора равна нулю. Однако из этих же условий можно найти направления, на которых она принимает максимальное значение. Раскроем эти выражения с учетом $n_1^2=1-n_2^2-n_3^2$

$$\frac{\partial\left|\vec{T}_{n\tau}\right|^2}{\partial n_2}=2n_2\left(T_2-T_1\right)\left\{T_2+T_1-2\left[T_1+\left(T_2-T_1\right)n_2^2+\left(T_3-T_1\right)n_3^2\right]\right\}=0,$$
$$\frac{\partial\left|\vec{T}_{n\tau}\right|^2}{\partial n_3}=2n_3\left(T_3-T_1\right)\left\{T_3+T_1-2\left[T_1+\left(T_2-T_1\right)n_2^2+\left(T_3-T_1\right)n_3^2\right]\right\}=0$$

Полагая, например, $n_2=0,\ n_3\neq 0$, получим

$$T_3+T_1-2\left[T_1+\left(T_3-T_1\right)n_3^2\right]=0$$

Отсюда

$$n_3^2=\frac{1}{2},\ \ \vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{r}_1\pm\vec{r}_2\right),\left|T_{n\tau}\right|=\frac{\left|T_1-T_3\right|}{2}$$

Таким образом, обобщая рассуждения, максимальные значения тангенсальной составляющей достигаются на векторах

$$\vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{r}_i\pm\vec{r}_j\right),$$

где $\vec{r}_i$ - единичные векторы главных направлений

и равны они

$$\left|T_{n\tau}\right|=\frac{\left|T_i-T_j\right|}{2}$$

Величина нормальной составляющей при этом равна

$$\left|T_{nn}\right|=\frac{\left|T_i+T_j\right|}{2}$$

Ну… надо же было этот материал куда-то впихнуть☺

Вернемся к дифференцированию…

Рассмотрим вопрос дифференцирования вектора. Самое простое представление получается в случае, если система координат декартова, в этом случае базисные векторы постоянны и

$$\frac{\partial\vec{w}}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(w^k\vec{\mathfrak{Э}}_k\right)=\frac{\partial w^k}{\partial x^i}\vec{\mathfrak{Э}}_k$$

Однако в общем случае система координат является криволинейной и поэтому

---

[57] Она же касательная ☺

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\vec{Э}_k + w^k \frac{\partial \vec{Э}_k}{\partial x^i}$$

Разложим далее производные векторов базиса по самому базису

$$\frac{\partial \vec{Э}_k}{\partial x^i} = \Gamma^j_{ki}\vec{Э}_j$$

Величины[58] $\Gamma^j_{ki}$ называются символами Кристоффеля или коэффициентами связности.

С учетом введенного обозначения производную вектора можно переписать следующим образом

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\vec{Э}_k + w^k \Gamma^j_{ki}\vec{Э}_j$$

Меняя обозначения индексов во втором слагаемом $j$ на $k$ и $k$ на $j$, получим

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\vec{Э}_k + w^j \Gamma^k_{ji}\vec{Э}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} + w^j \Gamma^k_{ji}\right)\vec{Э}_k$$

Коэффициенты при $\vec{Э}_k$ обозначаются $\nabla_i w^k$ и называются ковариантными производными контравариантных компонент вектора $\vec{w}$. Таким образом,

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial x^i} + w^j \Gamma^k_{ji}$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \nabla_i w^k \vec{Э}_k$$

Рассмотрим некоторые свойства ковариантных производных $\nabla_i w^k$.

Прежде всего, в случае декартовой системы координат

$$\Gamma^k_{ji} = 0$$

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial x^i},$$

таким образом, ковариантная производная совпадает с обычной производной компонент вектора по координате.

Установим, что ковариантные производные являются ковариантными величинами и образуют тензор второго ранга.

При переходе к новым координатам $\xi^i$ будем иметь

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i}\alpha^i_k$$

Таким образом, производные по координате преобразуются как ковариантные величины. Поэтому

$$T = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i}\vec{Э}^i$$

[58] Они являются функциями координат ☺

представляет собой инвариантный объект и, подставляя $\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \nabla_i w^k \vec{\text{Э}}_k$, получим

$$T = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}^i = \nabla_i w^k \vec{\text{Э}}_k \vec{\text{Э}}^i ,$$

то есть $T$ - тензор второго ранга, смешанными компонентами которого, согласно определению, как раз и являются $\nabla_i w^k$.

Отметим, что тензор $T$ в данном случае также обозначается $T = \nabla \vec{w}$ и называется[59] градиентом вектора $\vec{w}$.
Попробуем теперь отыскать ковариантные производные тензора второго ранга. Пусть

$$H = H^{jk} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k ,$$

тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(H^{jk} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k\right) = \frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k + H^{jk} \frac{\partial \vec{\text{Э}}_j}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}_k + H^{jk} \vec{\text{Э}}_j \frac{\partial \vec{\text{Э}}_k}{\partial x^i}$$

Применяя введенные символы Кристоффеля, получим

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k + H^{jk} \Gamma^l_{ji} \vec{\text{Э}}_l \vec{\text{Э}}_k + H^{jk} \vec{\text{Э}}_j \Gamma^l_{ki} \vec{\text{Э}}_l$$

Аналогично случаю с вектором поменяем местами обозначения индексов во втором слагаемом – $l$ и $j$, в третьей – $l$ и $k$

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k + H^{lk} \Gamma^j_{li} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k + H^{jl} \vec{\text{Э}}_j \Gamma^k_{li} \vec{\text{Э}}_k = \left(\frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i} + H^{lk} \Gamma^j_{li} + H^{jl} \Gamma^k_{li}\right) \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k$$

Введем обозначение[60]

$$\nabla_i H^{jk} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial x^i} + H^{lk} \Gamma^j_{li} + H^{jl} \Gamma^k_{li} ,$$

тогда

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = \nabla_i H^{jk} \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k$$

Величины $\nabla_i H^{jk}$ образуют тензор третьего ранга, называемый также градиентом тензора второго ранга

$$\nabla H = \vec{\text{Э}}^i \frac{\partial H}{\partial x^i} = \nabla_i H^{jk} \vec{\text{Э}}^i \vec{\text{Э}}_j \vec{\text{Э}}_k$$

Отметим, что правила дифференцирования в ковариантном смысле совпадают с правилами дифференцирования в обычном смысле. В частности ковариантная производная суммы есть сумма ковариантных производных.

Пусть теперь вектор задан не контравариантными, а ковариантными компонентами. Попробуем его продифференцировать в ковариантном смысле. Итак, $\vec{w} = w_j \vec{\text{Э}}^j$

Тогда $\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \vec{\text{Э}}^j + w_j \frac{\partial \vec{\text{Э}}^j}{\partial x^i}$ ,

разложим[61] теперь $\frac{\partial \vec{\text{Э}}^j}{\partial x^i}$ по базису $\vec{\text{Э}}^k$

---

[59] По аналогии с градиентом скалярной функции. Причем стоит отметить, что для скаляра $\varphi$ ковариантные производные совпадают с обычными производными $\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$

[60] Это и есть ковариантные производные контравариантных компонент тензора второго ранга ☺

[61] В справедливости разложения можно убедиться, взяв скалярное произведение $\vec{\text{Э}}^j \cdot \vec{\text{Э}}_k = \delta^j_k$. Продифференцируем его по координате $x^i$

$$\frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} = -\Gamma_{ki}^j \vec{э}^k$$

и подставим это представление в верхнее равенство

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \vec{э}^j - w_j \Gamma_{ki}^j \vec{э}^k$$

Меняя местами во втором слагаемом индексы $j$ и $k$, получим

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \vec{э}^j - w_k \Gamma_{ji}^k \vec{э}^j = \left( \frac{\partial w_j}{\partial x^i} - w_k \Gamma_{ji}^k \right) \vec{э}^j$$

Таким образом, мы получили ковариантную производную от ковариантных компонент вектора

$$\nabla_i w_j = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} - w_k \Gamma_{ji}^k$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = \nabla_i w_j \vec{э}^j$$

Аналогично можно ввести ковариантные производные ковариантных компонент любого тензора.

Заметим, что величины $\nabla_i w_j$ являются ковариантными, а $\nabla_i w^j$ смешанными компонентами одного и того же тензора второго ранга

$$T = \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \vec{э}^i = \nabla_i w^j \vec{э}_j \vec{э}^i = \nabla_i w_j \vec{э}^j \vec{э}^i$$

Так величины $\nabla_i w_j$ и $\nabla_i w^j$ являются ковариантными и смешанными компонентами одного и того же тензора и при этом связаны через компоненты метрического тензора

$$\nabla_i w^j = g^{jk} \nabla_i w_k,\ w^j = g^{jk} w_k \Rightarrow \nabla_i \left( g^{jk} w_k \right) = g^{jk} \nabla_i w_k\ ,$$

то с учетом правил дифференцирования

$$\nabla_i g^{jk} = 0\,.$$

Аналогично

$$\nabla_i g_{jk} = 0$$

Отсюда делаем первый вывод: градиент метрического тензора равен 0, то есть

$$\nabla G = 0\,.$$

И второй вывод – *теорема Риччи*: при ковариантном дифференцировании компоненты метрического тензора можно рассматривать как постоянные, то есть выносить из-под знака дифференцирования.
Рассмотрим теперь свойства символов Кристоффеля[62].

---

$$\frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} \cdot \vec{э}_k + \vec{э}^j \cdot \frac{\partial \vec{э}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} \cdot \vec{э}_k + \vec{э}^j \cdot \left( \Gamma_{ki}^l \vec{э}_l \right) = \frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} \cdot \vec{э}_k + \Gamma_{ki}^l \delta_l^j = \frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} \cdot \vec{э}_k + \Gamma_{ki}^j = 0$$

$$\frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} \cdot \vec{э}_k = -\Gamma_{ki}^j \Rightarrow \frac{\partial \vec{э}^j}{\partial x^i} = -\Gamma_{ki}^j \vec{э}^k$$

[62] Кстати, отметим, что введенные в рассмотрение символы Кристоффеля также называются символами Кристоффеля второго рода, так как еще существуют символы Кристоффеля первого рода, получающиеся при разложении производной векторов базиса по векторам взаимного базиса

$$\frac{\partial \vec{э}_k}{\partial x^i} = \Gamma_{j,ki} \vec{э}^j$$

Из соотношения

$$\frac{\partial \vec{э}_k}{\partial x^i} = \Gamma_{j,ki} \vec{э}^j = \Gamma_{ki}^j \vec{э}_j$$

получим

$$\Gamma_{ki}^j = g^{jl} \Gamma_{l,ki},\ \Gamma_{j,ki} = g_{jl} \Gamma_{ki}^l,$$

Прежде всего, отметим, что символы Кристоффеля не являются компонентами какого-либо тензора, так как в декартовой системе координат они все равны нулю и отличны от нуля в других, это противоречит инвариантности тензора и определению равенства тензора нулю.

Символы Кристоффеля[63] симметричны по нижним индексам $\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$

Действительно

$$\frac{\partial \vec{\text{э}}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k},$$

Тогда $\Gamma^j_{ki}\vec{\text{э}}_j = \frac{\partial \vec{\text{э}}_k}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k} = \Gamma^j_{ik}\vec{\text{э}}_j$

Символы Кристоффеля можно вычислить по компонентам метрического тензора $G$. Действительно, рассмотрим соотношение

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\vec{\text{э}}_i \cdot \vec{\text{э}}_j\right) = \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_j + \frac{\partial \vec{\text{э}}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_i$$

Отсюда

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_j = \frac{\partial \vec{\text{э}}_j}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_i = \Gamma^l_{jk}\vec{\text{э}}_l\cdot\vec{\text{э}}_i = \Gamma^l_{jk}g_{li}$$

Аналогично

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^j}\cdot\vec{\text{э}}_k = \frac{\partial \vec{\text{э}}_k}{\partial x^j}\cdot\vec{\text{э}}_i = \Gamma^l_{kj}\vec{\text{э}}_l\cdot\vec{\text{э}}_i = \Gamma^l_{kj}g_{li}$$

Сложив эти равенства, с учетом симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам и равенства

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\vec{\text{э}}_j \cdot \vec{\text{э}}_k\right) = \frac{\partial \vec{\text{э}}_j}{\partial x^i}\cdot\vec{\text{э}}_k + \frac{\partial \vec{\text{э}}_k}{\partial x^i}\cdot\vec{\text{э}}_j = \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^j}\cdot\vec{\text{э}}_k + \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_j$$

получим

$$2\Gamma^l_{jk}g_{li} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^k}\cdot\vec{\text{э}}_j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \vec{\text{э}}_i}{\partial x^j}\cdot\vec{\text{э}}_k = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma^l_{jk}g_{li} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

Свернув с $g^{is}$, будем иметь

$$\Gamma^l_{jk}g_{li}g^{is} = \Gamma^l_{jk}\delta^s_l = \Gamma^s_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

Таким образом,

$$\Gamma^s_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)$$

В случае ортогональной системы координат будем иметь $g^{ij} = 0, i \neq j$, отсюда

$$\Gamma^k_{ij} = 0 \ \left(i \neq j \neq k\right),\ \Gamma^k_{ii} = -\frac{1}{2}g^{kk}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k},\ \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$$

[63] И первого и второго рода ☺ Покажем на примере символов Кристоффеля второго рода.

**10. Дифференциальные операции векторного поля в произвольных и ортогональных криволинейных координатах (дивергенция, ротор, градиент скалярной функции). Символы Леви-Чевита (определение, применение).**

Понятия градиента скаляра, вектора и тензора были рассмотрены в вопросе о ковариантном дифференцировании.

Рассмотрим понятия дивергенции и ротора.

Дивергенцией вектора называется первый инвариант тензора-градиента этого вектора

$$div\,\vec{a} = J_1\left(\nabla\vec{a}\right) = J_1\left(\nabla_i a^k \vec{\mathrm{Э}}^i \vec{\mathrm{Э}}_k\right) = \nabla_i a^i$$

Раскрывая определение ковариантной производной, получим[64]

$$div\,\vec{a} = \nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^j \Gamma^i_{ji} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^j \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^j}$$

Переобозначим во второй сумме индекс $j$ на $i$

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial a^i \sqrt{g}}{\partial x^i}$$

В случае декартовой системы координат $g = const$, поэтому

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$$

Дивергенцией тензора $T$ называется тензор, полученный в результате свертывания по первым двум индексам градиента этого тензора $\nabla T$

Например, для тензора второго ранга $T = T^{ij}\vec{\mathrm{Э}}_i\vec{\mathrm{Э}}_j$ это будет

$$\nabla T = \nabla_k T^{ij} \vec{\mathrm{Э}}^k \vec{\mathrm{Э}}_i \vec{\mathrm{Э}}_j$$

$$div\,T = \nabla_i T^{ij}\vec{\mathrm{Э}}_j = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} + T^{lj}\Gamma^i_{li} + T^{il}\Gamma^j_{li}\right)\vec{\mathrm{Э}}_j = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}\vec{\mathrm{Э}}_j + \Gamma^i_{li}\left(T^{lj}\vec{\mathrm{Э}}_j\right) + T^{il}\left(\Gamma^j_{li}\vec{\mathrm{Э}}_j\right) =$$

$$= \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}\vec{\mathrm{Э}}_j + \Gamma^i_{li}\left(T^{lj}\vec{\mathrm{Э}}_j\right) + T^{il}\frac{\partial \vec{\mathrm{Э}}_l}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}\vec{\mathrm{Э}}_j + T^{ij}\frac{\partial \vec{\mathrm{Э}}_j}{\partial x^i}\right) + \Gamma^i_{li}\left(T^{lj}\vec{\mathrm{Э}}_j\right) = \frac{\partial T^{ij}\vec{\mathrm{Э}}_j}{\partial x^i} + \Gamma^l_{il}\left(T^{ij}\vec{\mathrm{Э}}_j\right)$$

Вводя обозначение

$$\vec{T}^i = T^{ij}\vec{\mathrm{Э}}_j,$$

получим

---

[64] Тут мы используем следующее свойство

$$\sqrt{g} = \vec{\mathrm{Э}}_1 \cdot \left(\vec{\mathrm{Э}}_2 \times \vec{\mathrm{Э}}_3\right)$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j} = \frac{\partial \vec{\mathrm{Э}}_1}{\partial x^j}\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{Э}}_2}{\partial x^j}\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\frac{\partial \vec{\mathrm{Э}}_3}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{1j}\vec{\mathrm{Э}}_k\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\Gamma^k_{2}\vec{\mathrm{Э}}_k\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\Gamma^k_{3j}\vec{\mathrm{Э}}_k\right) =$$

$$= \Gamma^1_{1j}\vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\Gamma^2_{2}\vec{\mathrm{Э}}_2\times\vec{\mathrm{Э}}_3\right) + \vec{\mathrm{Э}}_1\cdot\left(\vec{\mathrm{Э}}_2\times\Gamma^3_{3j}\vec{\mathrm{Э}}_3\right) = \Gamma^1_{1j}\sqrt{g} + \Gamma^2_{2j}\sqrt{g} + \Gamma^3_{3j}\sqrt{g} = \sqrt{g}\,\Gamma^i_{ij}$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^j}$$

$$div\, T = \frac{\partial \vec{T}^i}{\partial x^i} + \Gamma^l_{il}\vec{T}^i$$

Для декартовой системы координат символы Кристоффеля равны нулю, а базисные векторы не меняются, поэтому будем иметь

$$div\, T = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i}\vec{\ni}_j$$

Для определения ротора вектора рассмотрим антисимметричный тензор второго порядка, полученный в результате альтернирования градиента вектора

$$\nabla\vec{a} = \nabla_i a_k \vec{\ni}^i \vec{\ni}^k$$

$$\Omega = \Omega_{ij}\vec{\ni}^i\vec{\ni}^j,\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i a_k - \nabla_k a_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k}\right)$$

Ротором называется двойная свёртка тензора Леви-Чевита[65] с рассмотренным тензором

$$rot\ \vec{a} = \varepsilon_T : \Omega = \varepsilon^{kij}\Omega_{ji}\vec{\ni}_k$$

Как видно из определения ротор также является вектором. Покомпонентно

$$rot\ \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right)\vec{\ni}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right)\vec{\ni}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\vec{\ni}_3\right\}$$

Вихрем вектора называется половина его ротора

$$\omega\left(\vec{a}\right) = \frac{1}{2} rot\ \vec{a}$$

Символы Леви-Чевита…

Для векторов локального базиса $\vec{\ni}_i$ можно ввести понятие объема параллелепипеда, построенного на этих векторах[66]

$$V = \vec{\ni}_1 \cdot \left(\vec{\ni}_2 \times \vec{\ni}_3\right) = \vec{\ni}_2 \cdot \left(\vec{\ni}_3 \times \vec{\ni}_1\right) = \vec{\ni}_3 \cdot \left(\vec{\ni}_1 \times \vec{\ni}_2\right)$$

Тогда, по определению, символами Леви-Чевита называются числа

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} V, & ijk - \text{четная подстановка} \\ -V, & ijk - \text{четная подстановка} \\ 0, & i = j \ \text{или}\ \ j = k \ \text{или}\ \ i = k \end{cases}$$

Аналогично вводятся символы Леви-Чевита с верхними индексами

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} \frac{1}{V}, & ijk - \text{четная подстановка} \\ -\frac{1}{V}, & ijk - \text{четная подстановка} \\ 0, & i = j \ \text{или}\ \ j = k \ \text{или}\ \ i = k \end{cases}$$

[65] Об этом чуть дальше. Согласно регламенту ☺. В смысле содержанию.

[66] Где-то мы уже его рассматривали, тока не говорили, что это объем☺

При этом $\dfrac{1}{V}$ – величина объема параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса $\vec{э}^i$.

Вспомним формулы, связывающие вектора взаимного и основного базисов

$$\vec{э}^1 = \frac{\vec{э}_2 \times \vec{э}_3}{\square}, \vec{э}^2 = \frac{\vec{э}_3 \times \vec{э}_1}{\square}, \vec{э}^3 = \frac{\vec{э}_1 \times \vec{э}_2}{\square}$$

С использованием символов Леви-Чевита эти соотношения запишутся следующим образом

$$\vec{э}^1 = \varepsilon^{123}\vec{э}_2 \times \vec{э}_3, \vec{э}^2 = \varepsilon^{231}\vec{э}_3 \times \vec{э}_1, \vec{э}^3 = \varepsilon^{312}\vec{э}_1 \times \vec{э}_2$$

Или в общем виде

$$\vec{э}^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\vec{э}_j \times \vec{э}_k$$

Аналогично

$$\vec{э}_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\vec{э}^j \times \vec{э}^k$$

С учётом определения, можно также показать, что

$$\vec{э}_i \times \vec{э}_j = \varepsilon_{ijk}\vec{э}^k$$
$$\vec{э}^i \times \vec{э}^j = \varepsilon^{ijk}\vec{э}_k$$

Отсюда векторное произведение двух векторов выражается следующим образом

$$\vec{r} \times \vec{s} = r^i\vec{э}_i \times s^j\vec{э}_j = \left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right) r^i s^j = \varepsilon_{ijk} r^i s^j \vec{э}^k = \varepsilon^{ijk} r_i s_j \vec{э}_k$$

Символы Леви-Чевита образуют тензор третьего ранга. Покажем, что $\varepsilon_{ijk}$ являются ковариантными компонентами, а $\varepsilon^{ijk}$ - контравариантными компонентами тензора третьего ранга[67]

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{ijk}\vec{э}^i\vec{э}^j\vec{э}^k = \varepsilon^{ijk}\vec{э}_i\vec{э}_j\vec{э}_k$$

Действительно

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{ijk}\vec{э}^i\vec{э}^j\vec{э}^k = \vec{э}_k \cdot \left(\vec{э}_i \times \vec{э}_j\right)\vec{э}^i\vec{э}^j\vec{э}^k = \vec{э}_i \cdot \left(\vec{э}_j \times \vec{э}_k\right)\left(g^{il}\vec{э}_l\right)\left(g^{jm}\vec{э}_m\right)\left(g^{kn}\vec{э}_n\right) =$$
$$g^{il}\vec{э}_i \cdot \left(g^{jm}\vec{э}_j \times g^{kn}\vec{э}_k\right)\vec{э}_l\vec{э}_m\vec{э}_n = \vec{э}^l \cdot \left(\vec{э}^m \times \vec{э}^n\right)\vec{э}_l\vec{э}_m\vec{э}_n = \varepsilon^{lmn}\vec{э}_l\vec{э}_m\vec{э}_n$$

Рассмотрим также понятия лапласианов.

По определению лапласиан скалярной функции есть дивергенция её градиента, таким образом

$$\Delta\varphi = div\left(\nabla\varphi\right) = div\left(\nabla_i\varphi\,\vec{э}^i\right) = div\left(g^{ij}\nabla_j\varphi\,\vec{э}_i\right) = div\left(\nabla^i\varphi\,\vec{э}_i\right) = \nabla_i\nabla^i\varphi = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi$$

Лапласиан вектора есть дивергенция тензора-градиента этого вектора

$$\Delta\vec{a} = div\left(\nabla\vec{a}\right) = div\left(\nabla_i a^k\vec{э}^i\vec{э}_k\right) = \left(\nabla_i\nabla^i a^k\right)\vec{э}_k = \left(g^{ij}\nabla_i\nabla_j a^k\right)\vec{э}_k = \Delta a^k\vec{э}_k$$

[67] Этот тензор и называется тензором Леви-Чевита

**11. Теория деформаций. Изменение базиса сопутствующей системы во времени. Тензоры деформаций. Геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций. Определение главных компонент и направлений главных осей тензоров деформаций. Инварианты тензоров деформаций. Коэффициенты относительного удлинения и кубического расширения.**

Пусть есть два произвольных положения деформируемого тела в моменты времени[68] $\overset{\circ}{t}$ и $\hat{t}$. Положим, в начальный момент времени $\overset{\circ}{t}$ через точку $O$ проведены координатные линии сопутствующей системы координат $\xi^i$ и по ним построен локальный базис

$$\overset{\circ}{\vec{\ni}}_i = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i}$$

Введем в рассмотрение метрику

$$\left| d\vec{r}_0 \right| = ds_0,\ ds_0^2 = \overset{\circ}{g}_{ij}\, d\xi^i d\xi^j,\ \ \overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\vec{\ni}}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{\ni}}_j$$

И аналогично в момент времени $\hat{t}$: сопутствующая система координат $\xi^i$, соответствующий локальный базис

$$\hat{\vec{\ni}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}$$

$$\left| d\vec{r} \right| = ds,\ ds^2 = \hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j,\ \ \hat{g}_{ij} = \hat{\vec{\ni}}_i \cdot \hat{\vec{\ni}}_j$$

Положим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left( \hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} \right),$$

тогда тензорами деформации[69] называются следующие тензоры

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\, \overset{\circ}{\vec{\ni}}_i\, \overset{\circ}{\vec{\ni}}_j$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \hat{\vec{\ni}}_i \hat{\vec{\ni}}_j$$

Из определения видно, что $\varepsilon_{ij}$ можно рассматривать как ковариантные компоненты тензоров деформации. Заметим, что они совпадают для обоих введенных тензоров. Однако контравариантные компоненты различны, так как переход к ним осуществляется с помощью компонент $\overset{\circ}{g}{}^{ij}$ и $\hat{g}^{ij}$ метрического тензора для первого и второго тензоров соответственно, а эти компоненты в силу определения их в разных базисах различны.

Выясним геометрический смысл ковариантных компонент $\varepsilon_{ij}$ тензоров деформации. Для этого запишем компоненты метрических тензоров, раскрыв смысл скалярного произведения

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\vec{\ni}}_i \cdot \overset{\circ}{\vec{\ni}}_j = \left| \overset{\circ}{\vec{\ni}}_i \right| \left| \overset{\circ}{\vec{\ni}}_j \right| \cos \overset{\circ}{\psi}_{ij}, \text{ где } \overset{\circ}{\psi}_{ij} \text{ – угол между } \overset{\circ}{\vec{\ni}}_i \text{ и } \overset{\circ}{\vec{\ni}}_j$$

И аналогично

---

[68] В сопутствующих системах координат частицы среды считаются «вмороженными», то есть сохраняют свои координаты относительно введенных сопутствующих системах координат, которые как раз и изменяются при деформации. То есть частица имела какие-то определенные координаты до деформации, то она их сохранит и после деформации.

[69] В некотором смысле можно считать, что тензоры деформации показывают локальное изменение метрики пространства (квадрата расстояния между близки точками) относительно старого и нового базисов – соответственно до и после деформации.

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\vec{э}}_i \cdot \hat{\vec{э}}_j = \left|\hat{\vec{э}}_i\right|\left|\hat{\vec{э}}_j\right|\cos\hat{\psi}_{ij}\text{, где } \hat{\psi}_{ij} \text{ – угол между } \hat{\vec{э}}_i \text{ и } \hat{\vec{э}}_j$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{\left|\hat{\vec{э}}_i\right|}{\left|\mathring{\vec{э}}_i\right|} = \frac{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}\right|}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i}\right|} = \frac{\left|dr_i\right|}{\left|dr_{oi}\right|} = \frac{ds_i}{ds_{oi}} = l_i + 1,$$

где $ds_i$ и $ds_{oi}$ – элементы дуг координатных линий $\xi^i$,

а $l_i$ – коэффициенты относительных удлинений в направлениях $\xi^i$.

С учетом введенных обозначений, получим

$$\hat{g}_{ij} = \left|\mathring{\vec{э}}_i\right|\left|\mathring{\vec{э}}_j\right|\left(1+l_i\right)\left(1+l_j\right)\cos\hat{\psi}_{ij}$$

Отсюда

$$2\varepsilon_{ij} = \hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij} = \left[\left(1+l_i\right)\left(1+l_j\right)\cos\hat{\psi}_{ij} - \cos\mathring{\psi}_{ij}\right]\left|\mathring{\vec{э}}_i\right|\left|\mathring{\vec{э}}_j\right|$$

Рассмотрим геометрическое истолкование $\varepsilon_{ij}$ с одинаковыми индексами

$$2\varepsilon_{ii} = \left[\left(1+l_i\right)^2 - 1\right]\left|\mathring{\vec{э}}_i\right|^2 = \left[\left(1+l_i\right)^2 - 1\right]\mathring{g}_{ii}$$

Откуда получим

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}} - 1$$

При малых деформациях можно воспользоваться разложением в ряд[70] и получить, что

$$l_i \approx \frac{\varepsilon_{ii}}{\mathring{g}_{ii}}, \quad \text{при малых } \varepsilon_{ii} \ll 1$$

Если в начальном состоянии сопутствующая система взята декартовой, то $\mathring{g}_{ii} = 1$, и при малых деформация получим

$$l_i \approx \varepsilon_{ii}$$

Таким образом, в случае малых деформаций ковариантные компоненты тензоров деформаций показывают относительное соответствующих декартовых осей координат начального состояния.

Для определения смысла ковариантных компонент тензоров деформации с различными индексами для простоты положим, что у начальном состоянии векторы базиса взамно ортогональны, то есть

$$\mathring{\psi}_{ij} = \frac{\pi}{2}$$

[70] Вспомним фокусы из математического анализа

Пусть

$$\hat{\psi}_{ij} = \overset{\circ}{\psi}_{ij} - \chi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij},$$

тогда

$$2\varepsilon_{ij} = \hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij} = \hat{g}_{ij} = \left|\hat{\vec{\partial}}_i\right|\left|\hat{\vec{\partial}}_j\right| \sin\chi_{ij}$$

Отсюда

$$\sin\chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\left|\hat{\vec{\partial}}_i\right|\left|\hat{\vec{\partial}}_j\right|} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}}$$

Из этого делаем вывод первый: при деформации в общем случае прямые углы перестают быть прямыми, то есть происходит скашивание, которое как раз и характеризуют ковариантные компоненты тензоров деформаций с различными индексами.

Если деформации достаточно малы, то, опять раскладывая в ряд, можно получить, что

$$\sin\chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}$$
$$\chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}$$

Тензоры деформаций являются симметричными (это следует из симметричности метрических тензоров). Как и для любого симметричного тензора второго порядка можно вести в рассмотрение понятие главных осей тензоров и главных значений тензоров.[71]

Положим, в начальный момент выбрана сопутствующая система координат так, что направления векторов локального базиса совпадают с главными направлениями тензора деформации. Тогда тензор деформации в этом базисе будет иметь ненулевыми только компоненты с одинаковыми индексами (по определению[72] главных осей). Отсюда с учетом

$$\sin\chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\left|\hat{\vec{\partial}}_i\right|\left|\hat{\vec{\partial}}_j\right|} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}} = 0$$

будем иметь, что после деформации базис, задаваемый сопутствующей системой, будет снова ортогональным, то есть углы между главными осями не скашиваются.

Отметим также, что главные оси тензоров деформаций проходят через одни и те же индивидуальные точки среды, однако при этом элементы $d\vec{r}$, взятые вдоль главных осей, могут сжиматься или растягиваться.

Перейдем теперь к главным компонентам тензоров деформаций. При условии ортогональности локальных базисных векторов координаты можно считать декартовыми, поэтому длины малых приращений можно выразить следующим образом

$$ds_0^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2, \quad ds_{0i}^2 = \overset{\circ}{g}_{ii}\left(dx^i\right)^2$$
$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2, \quad ds_i^2 = \hat{g}_{ii}\left(dx^i\right)^2$$

Отсюда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon_{ii}}{\hat{g}_{ii}} ds_i^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}} ds_{0i}^2$$

[71] Вопросы вывода главных значений и направлений мы рассматривали ранее, так что здесь их пропустим ☺

[72] Напомним, что главные оси как раз и выбираются с тем, чтобы привести соответствующую квадратичную форму к каноническому виду и с тем избавиться от компонент с различными индексами.

При этом ковариантные компоненты $\varepsilon_{ii}$ тензоров деформаций взяты в главных осях. Так как матрицы компонент метрического тензора имеют в главных осях диагональный вид, то диагональный вид имеют также и матрицы компонент тензоров деформаций. Отсюда с учетом свойств[73] $g_{ij}$ в ортогональном базисе получим, что

$$\frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}} = \varepsilon_{ii}\overset{\circ}{g}^{ii} = \overset{\circ}{\varepsilon}_i^i = \overset{\circ}{\varepsilon}_i\,,\quad \frac{\varepsilon_{ii}}{\hat{g}_{ii}} = \varepsilon_{ii}\hat{g}^{ii} = \hat{\varepsilon}_i^i = \hat{\varepsilon}_i$$

Тогда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\sum_i \hat{\varepsilon}_i ds_i^2 = 2\sum_i \overset{\circ}{\varepsilon}_i ds_{0i}^2$$

Таким образом, мы получили, что с каждой точкой движущейся среды можно связать обычную ортогональную декартовы систему координат, направленную вдоль главных осей тензора деформаций, которая в процессе преобразования также будет переходить в ортогональную декартову систему координат.

Главные компоненты тензоров деформации $\overset{\circ}{\varepsilon}$ и $\hat{\varepsilon}$ имеют различные главные компоненты, то есть $\overset{\circ}{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$. Установим связь между ними.

$$ds_i^2 - ds_{i0}^2 = 2\hat{\varepsilon}_i ds_i^2 = 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i\, ds_{0i}^2$$

Отсюда

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{i0}^2}{ds_i^2}$$

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_i = \frac{ds_0^2}{ds_{i0}^2} - 1$$

Тогда

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{1}{1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i} = \frac{2\overset{\circ}{\varepsilon}_i}{1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i}$$

Установим связь между коэффициентами относительного удлинения в направлении главных осей и главными компонентами тензоров деформаций

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{i0}^2}{ds_i^2} = 1 - \frac{1}{\left(l_i + 1\right)^2} \Rightarrow l_i = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\hat{\varepsilon}_i}} - 1$$

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_i = \frac{ds_0^2}{ds_{i0}^2} - 1 = \left(l_i + 1\right)^2 - 1 \Rightarrow l_i = \sqrt{1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i} - 1$$

Инвариантами для тензора деформаций будут

$$\overset{\circ}{J}_1 = \overset{\circ}{\varepsilon}_1 + \overset{\circ}{\varepsilon}_2 + \overset{\circ}{\varepsilon}_3$$

$$\overset{\circ}{J}_2 = \overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2 + \overset{\circ}{\varepsilon}_2\overset{\circ}{\varepsilon}_3 + \overset{\circ}{\varepsilon}_3\overset{\circ}{\varepsilon}_1$$

$$\overset{\circ}{J}_3 = \overset{\circ}{\varepsilon}_1\overset{\circ}{\varepsilon}_2\overset{\circ}{\varepsilon}_3$$

Аналогичные формулы для инвариантов тензора $\hat{\varepsilon}$ можно выразить через инварианты тензора $\overset{\circ}{\varepsilon}$

---

[73] $g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}$

$$\hat{J}_1 = \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = \frac{\overset{\circ}{J}_1 + 4\overset{\circ}{J}_2 + 12\overset{\circ}{J}_3}{1 + 2\overset{\circ}{J}_1 + 4\overset{\circ}{J}_2 + 8\overset{\circ}{J}_3}$$

$$\hat{J}_2 = \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\overset{\circ}{J}_2 + 6\overset{\circ}{J}_3}{1 + 2\overset{\circ}{J}_1 + 4\overset{\circ}{J}_2 + 8\overset{\circ}{J}_3}$$

$$\hat{J}_3 = \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\overset{\circ}{J}_3}{1 + 2\overset{\circ}{J}_1 + 4\overset{\circ}{J}_2 + 8\overset{\circ}{J}_3}$$

Коэффициенту кубического расширения

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

можно придать вид

$$\theta = \sqrt{\left(1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_1\right)\left(1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_2\right)\left(1 + 2\overset{\circ}{\varepsilon}_3\right)} - 1$$

Или с использованием инвариантов

$$\theta = \sqrt{1 + 2\overset{\circ}{J}_1 + 4\overset{\circ}{J}_2 + 8\overset{\circ}{J}_3} - 1$$

**12. Вычисление компонент тензоров деформаций при существовании вектора перемещений[74]. Преобразование окрестности точки сплошной среды при конечной деформации. Бесконечно малая деформация. Чистая деформация. Сдвиг.**

Пусть при деформации радиус вектор $\vec{r}_0$ некоторой точки среды перемещается на вектор перемещения $\vec{w}$, то есть

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w}$$

Тогда продифференцировав по $\xi^i$ приращение, получим

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \hat{\text{э}}_i - \mathring{\text{э}}_i$$

Отсюда

$$\hat{\text{э}}_i = \mathring{\text{э}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \text{ или } \mathring{\text{э}}_i = \hat{\text{э}}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}$$

Вычисляя компоненты метрического тензора, получим

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\text{э}}_i \cdot \hat{\text{э}}_j = \left( \mathring{\text{э}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left( \mathring{\text{э}}_j + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \mathring{\text{э}}_i \cdot \mathring{\text{э}}_j + \mathring{\text{э}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \mathring{\text{э}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\text{э}}_i \cdot \mathring{\text{э}}_j = \left( \hat{\text{э}}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right) \cdot \left( \hat{\text{э}}_j - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \hat{\text{э}}_i \cdot \hat{\text{э}}_j - \hat{\text{э}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \hat{\text{э}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

Таким образом, мы получим следующее представление для компонент тензора напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left( \hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij} \right) = \frac{1}{2}\left( \mathring{\text{э}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \mathring{\text{э}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \frac{1}{2}\left( \hat{\text{э}}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \hat{\text{э}}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right)$$

Рассмотрим вопрос выражения компонент тензора деформации непосредственно по вектору перемещения.

Заданный вектор перемещения $\vec{w}$ можно разложить как по начальному базису $\mathring{\text{э}}_i$, так и по актуальному $\hat{\text{э}}_i$, точно также как можно ввести и два «сорта» ковариантных производных перемещения – для начального и актуального базиса соответственно

$$\vec{w} = \mathring{w}^k \mathring{\text{э}}_k = \hat{w}^k \hat{\text{э}}_k$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\text{э}}_k = \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\text{э}}_k$$

Подставляя в формулы для вычисления компонент тензора деформации, получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left( \mathring{\text{э}}_i \cdot \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k \mathring{\text{э}}_k + \mathring{\text{э}}_j \cdot \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\text{э}}_k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\text{э}}_k \cdot \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^l \mathring{\text{э}}_l \right) = \frac{1}{2}\left( \mathring{g}_{ik} \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^k + \mathring{g}_{jk} \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k + \mathring{g}_{kl} \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\nabla}_j \mathring{w}^l \right)$$

Вводя компоненты метрического тензора под знак ковариантной производной, будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left( \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\nabla}_j \mathring{w}_k \right)$$

---

[74] Следует особо отметить, что приводимые формулы справедливы для компонент тензора деформации только тогда, когда можно ввести вектор перемещения $\vec{w}$ для всех точек движущейся среды.

или аналогично

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathfrak{Э}}_i \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k \hat{\mathfrak{Э}}_k + \hat{\mathfrak{Э}}_j \cdot \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\mathfrak{Э}}_k - \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\mathfrak{Э}}_k \cdot \hat{\nabla}_j \hat{w}^k \hat{\mathfrak{Э}}_k\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ik}\hat{\nabla}_j \hat{w}^k + \hat{g}_{jk}\hat{\nabla}_i \hat{w}^k - \hat{g}_{kl}\hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\nabla}_j \hat{w}^l\right)$$

Вводя компоненты метрического тензора под знак ковариантной производной, будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j - \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\nabla}_j \hat{w}_k\right)$$

В случае малых деформаций можно отбросить квадратичные по $|\vec{w}|$ члены, тогда получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathring{\nabla}_j \mathring{w}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}_j\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\nabla}_j \hat{w}_i + \hat{\nabla}_i \hat{w}_j\right)$$

Отметим, что в этом случае $\varepsilon_{ij}$ совпадают с компонентами симметризованного тензора

$$\nabla_i w_j \vec{\mathfrak{Э}}^i \vec{\mathfrak{Э}}^j$$

Для декартовой системы координат при малых деформациях будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i}\right)$$

Рассмотрим теперь вопрос деформации в бесконечно малой окрестности точки. Покажем, что при этом преобразование среды можно считать аффинным[75].

Пусть к заданной точке привязана сопутствующая система координат. В начальный момент векторы базиса равны $\mathring{\mathfrak{Э}}_i$, а положение всех точек задается

$$d\vec{r}_0 = d\xi^i \mathring{\mathfrak{Э}}_i$$

В актуальный момент вектора базиса равны $\hat{\mathfrak{Э}}_i$, тогда в нем положение всех точек, координаты которых также равны $d\xi^i$, определяется

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\mathfrak{Э}}_i$$

Если «совместить» исходной и актуальное положения точки, то вектор $d\vec{r}$ также можно разложить по начальному базису

$$d\vec{r} = d\eta^i \mathring{\mathfrak{Э}}_i$$

С учетом

$$\hat{\mathfrak{Э}}_i = \mathring{\mathfrak{Э}}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \mathring{\mathfrak{Э}}_i + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k \mathring{\mathfrak{Э}}_k = \left(\delta_i^k + \mathring{\nabla}_i \mathring{w}^k\right)\mathring{\mathfrak{Э}}_k = c_i^k \mathring{\mathfrak{Э}}_k$$

получим

---

[75] Аффинное преобразование – геометрическое преобразование плоскости или пространства, которое можно получить, комбинируя движения, зеркальные отражения и гомотетии в направлениях координатных осей. Любое аффинное преобразование пространства может быть определено при помощи невырожденных линейных преобразований координат точек пространства.

$$d\vec{r} = d\xi^i \hat{\text{э}}_i = d\xi^i c_i^k \overset{\circ}{\text{э}}_k = d\eta^k \overset{\circ}{\text{э}}_k$$

Отсюда

$$d\eta^k = d\xi^i c_i^k$$

Таким образом, преобразование от $d\xi^i$ к $d\eta^k$ является однородным и линейным с матрицей $\left\| c_i^k \right\|$, которая не зависит от дифференциалов $d\xi^i$ и могут зависеть только от координат рассматриваемой частицы. То есть для данной частицы они постоянные, а, следовательно, преобразование аффинное.

Отметим, что при аффинном преобразовании прямые переходя в прямые, плоскости в плоскости, порядок поверхностей и кривых сохраняется.

В частности эллипсоид переходит снова в эллипсоид. У эллипсоида в общем случае существует тройка главных направлений (ортогональных сопряженных диаметров). Если при деформации главные направления не меняют своей ориентации в пространстве, то говорят, что произошла чистая деформация, которая сводится к растяжению или сжатию по главным направлениям.

Если главные направления меняют свою ориентацию, то имеет место общий случай аффинного преобразования, который сводится к чистой деформации и повороту в пространстве.

**13. Тензор скоростей конечной деформации. Кинематический смысл компонент тензора скоростей деформаций. Главные оси и главные компоненты тензора скоростей деформаций. Распределение скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды. Скорость чистой деформации. Вектор вихря и его кинематический смысл.**

Тензор скоростей конечной деформации.

$$t - \hat{g}_{ij}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i + \nabla_i \omega^p \nabla_j \omega_p\right)$$

$$(\omega = \omega_i \hat{Э}^i \ ;\nabla_i - в\ пространстве\ \ \hat{g}_{ij})$$

$$\omega = v\Delta t = v_i \hat{Э}^i \ \Delta t$$

$$e_{ij} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (*)$$

(*)Компоненты тензора скоростей деформации
Тензор семеричен

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\Delta t$$

Компоненты тензора скорости деформации с одноименными индексами – скорости относительных удлинений отрезков, первоначально направлены параллельно декартовым осям.

Внедиагональные элементы равны половине скорости скашивания первоначально прямых углов

Главные компоненты тензора скоростей деформации:

$e_1, e_2, e_3$, если $e_i > 0$-растяжение, если $e_i < 0$ сжатие

Распределение скоростей в бесконечно малой частицы сплошной среды:

$$точка \quad O(\xi^1, \xi^2, \xi^3), ее \quad окресность \quad O_1(\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i), \rho = \overline{O}\overline{O}_1$$

Через $\Delta t : \overline{O}' \ \ \overline{O}'_1 = \rho'$

$$\rho' = \rho + (v_1 - v_0)\Delta t; v_0 - скорость \quad точки \quad O; v_1 - скорость \quad точки \quad O_1$$

Разложим v1 в ряд:

$$v_1 = v_0 + (\frac{\partial v}{\partial \xi^i})\rho^i + \rho * O(\rho)$$

$$\rho' \approx \rho + (\frac{\partial v}{\partial \xi^i})\rho^i \Delta t \quad (**)$$

(**)-аффинное преобразование

$$v_1 = v_0 + \nabla_i v_k \rho^i Э^k = v_0 + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i Э^k + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)\rho^i Э^k$$

$$e_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i), \qquad \omega_k = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)$$

Введем декартовы координаты:

$$u_1 = u_0 + e_{1i}x^i + \omega_{1i}x^i$$
$$v_1 = u_0 + e_{2i}x^i + \omega_{2i}x^i$$
$$w_1 = u_0 + e_{3i}x^i + \omega_{3i}x^i$$

$$e_{ki}x^i \ \ = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

I II III

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^1$$
$$v_1 = v_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \omega_{3i}x^2$$
$$w_1 = w_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^3$$

I – Скорость поступательного движения

Ш: $\left\|\omega_{ji}\right\| = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & *-\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}$

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k}) = \begin{pmatrix} В \\ Декартовых \\ координатах \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$$

$$u_1 = u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y = u_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (\omega \times \rho)_x$$
$$v_1 = v_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\omega \times \rho)_y$$
$$w_1 = w_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (\omega \times \rho)_z \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + grad\varphi + \overline{\omega} \times \overline{\rho}$$

$\overline{\omega}$ вектор вихря

II Вычислим относительное удаление среды в направлении $\overline{\rho}$

$$e_\rho = \frac{1}{|\rho|}\frac{d|\overline{\rho}|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2\rho^2}\frac{d(\overline{\rho}\overline{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2}(\overline{\rho}\frac{d\overline{\rho}}{dt})$$

$$e_\rho = \frac{1}{\rho^2}(\bar\rho\frac{d\bar\rho}{dt}) = \frac{1}{\rho^2}(\bar\rho(grad(\varphi)) + \bar\rho(\bar\omega\times\bar\rho)) = \frac{1}{\rho^2}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z) = \frac{2\varphi}{\rho^2} = e_{ij}\frac{x^i}{\rho}\frac{x^j}{\rho} =$$

$$= e_{ij}\alpha^i\alpha^j; \alpha^i = \frac{x^i}{\rho} = Cos(\rho, x^i)$$

Следовательно

1)Кинематический смысл $e_{ij}$

2) $v^* := grad(\varphi)$ -скорость чистой деформации

**14. Уравнения совместности деформаций (вывод). Формула дифференцирования интеграла от произвольной непрерывной функции по подвижному объему.**

Тензор Римана - Кристофеля:

$$R^k_{ijm} a^m = \nabla_i \nabla_j a^k - \nabla_j \nabla_i a^k = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^k_{mi} - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^k_{mj} + \Gamma^k_{lj} \Gamma^l_{mi} - \Gamma^k_{li} \Gamma^l_{mj}$$

В трехмерном пространстве существует шесть независимых компонент $R^k_{ijm}$

В Евклидовом пространстве повторное ковариантное дифференцирование не зависит от порядка, поэтому $R^k_{ijm} a^m$ =0

Уравнение совместности деформаций:

1) $\overset{0}{R}_{ij\mu\nu} = 0$

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\eta} R^{\alpha}{}_{ij\mu}$$

2) $\overset{\wedge}{R}_{ij\mu\nu} = 0$

Если в деформированном состоянии выбрана декартова система координат, то:

$$\overset{0}{R}_{ij\mu\nu} = 0 : \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} - \overset{0}{g}{}^{\alpha\omega} [G_{\omega\mu j} G_{\alpha\upsilon i} - G_{\omega\mu i} G_{\alpha\upsilon j}] = 0$$

Теорема Гаусса-Остроградского:

$$A = A^k Э_k, \quad n = n_i Э^i$$

$\int_{\Sigma} A^k n_k dr = \int_V p^k A^k dr$ , в любой системе координат

$\int_{\Sigma} (uCos(n,x) + vCos(n,y) + wCos(n,z))dr = \int_V (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})dr$ , в декартовых

Формула дифференцирования по времени, интеграла по объему:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(x,y,z,t)dr = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V'} f(t+\Delta t)d\tau + \int_V f(t+\Delta t)d\tau}{\Delta t} =$$

*По формуле Гаусса − Остроградского получаем*

$$\int_V [\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (fv^i)]d\tau = \int_V [\frac{\partial f}{\partial t} + fp^i v^i]d\tau = \int_V [\frac{\partial f}{\partial t} + fdiv(v)]d\tau$$

**15. Динамика. Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера и переменных Лагранжа. Частные случаи. Несжимаемая среда. Свойства трубок тока.**

m = const для любого индивидуального объема, т.е. для одних и тех же частиц среды

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Уравнение неразрывности в переменных Эйлера:

$$\rho := \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta v}$$

$$m = \int_v \rho dr\,,\ \Delta m \approx \rho \Delta v$$

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dr = 0 = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \rho v\right) dt = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div v\right) dt \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div v = 0$$

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа:

t, $\hat{Э}_1 d\xi^1, \hat{Э}_2 d\xi^2, \hat{Э}_3 d\xi^3$ - векторы, построим на них параллелепипед, здесь $\xi^i$ сопутствующая система координат.

v = $\left|\hat{Э}_1(\hat{Э}_2 \times \hat{Э}_3)\right| d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3\,, \rho$

при $t_0$

$$v_0 = \left|\overset{0}{Э}_1(\overset{0}{Э}_2 \times \overset{0}{Э}_3)\right| d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \rho_0$$

По закону сохранения массы: $\rho_0 v_0 = \rho v$

$$\rho = \rho_0 \left| \frac{\hat{Э}_1(\hat{Э}_2 \times \hat{Э}_3)}{\overset{0}{Э}_1(\overset{0}{Э}_2 \times \overset{0}{Э}_3)} \right| \quad (*)$$

$$\overset{0}{\Delta} = \overset{0}{Э}_1(\overset{0}{Э}_2 \times \overset{0}{Э}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

$x_0^i -$ Декартова система координат

$$\hat{\Delta} = \hat{Э}_1(\hat{Э}_2 \times \hat{Э}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

$$\rho = \rho_0 \frac{\overset{0}{\Delta}}{\hat{\Delta}} = \rho_0 Det \left\| \frac{\partial x_0^0}{\partial x^k} \right\| \quad (**)$$

(*) и (**) уравнения непрерывности в переменных Лагранжа

Частный случай:
Многокомпонентная смесь:

$$\frac{\partial m_i}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div \rho_i v_i = 0$$

$$\rho = \sum \rho_i \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div \sum \rho_i v_i = 0$$

Несжимаемая среда:

Среда – несжимаемая, если ее индивидуальный объем постоянен во все время движения
Для несжимаемой среды уравнение неразрывности имеет вид div v =0

Свойства трубок тока несжимаемой среды:

Трубка тока – множество линий тока проведенных через любую точку замкнутой кривой.

$$C_1, C_2 - контуры \quad на \quad трубке$$

$$Q = \int_{C1} v dS + \int_{C2} v dS$$

Q – напряженность трубки

**16. Классификация сил, действующих на частицы сплошной среды. сосредоточенные силы. Массовые и объемные силы. Поверхностные силы. Силы внутренних напряжений. Уравнения количества движения для конечного объема сплошной среды. Свойства внутренних напряжений.**

Классификация сил:

Сосредоточенные силы – приложены к одной точке.
Распределенные силы – по всем точкам объема V

Плотность массовых сил - $\lim\limits_{\Delta m \to 0} \dfrac{F}{\Delta m}$

Плотность объемных сил: $\Phi = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{F}{\Delta V}$

$\Phi$ -размерность ускорения * размерность плотности

$\Phi dV$ , Fdm – размерность силы

Плотность поверхности сил: $p = \lim\limits_{\Delta \delta \to 0} \dfrac{P}{\Delta \delta}$

Силы внутренних напряжений:

Сила, действующая со стороны части среды $V_2$ на часть в $V_1$ на площади d$\delta$ с нормалью n, $dP = p_n d\delta$ - сила внутренних напряжений, ее можно разложить на касательную и нормальную $p_n d\delta = p_{nn}\bar{n} d\delta + p_{n\tau}\bar{\tau} d\delta$

Уравнение количества движения для системы точек:

$m\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dmv}{dt} = F$ для точки
mv – количество движения.

$\sum\limits_{1}^{n} \dfrac{dm_i v_i}{dt} = F_i^{(e)}$ , где $F_i^{(e)}$ - внешние силы.

$\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{d}{dt}\sum m_i v_i = mv^* = \sum F_i^{(e)}$ - для системы!

Уравнение количества для объема.

$$Q = \int\limits_V v\rho d\tau$$

$$\int\limits_V \frac{d}{dt}(\bar{v}\rho d\tau) = \int\limits_M \frac{dv}{dt} dm = \frac{d}{dm}\int\limits_M vdm = \frac{d}{dt}\int\limits_V \bar{v}\rho d\tau$$

(*) $\dfrac{dQ}{dt} = \int\limits_V F\rho d\tau + \int\limits_{\Sigma} p_n d\tau$ , здесь первый интеграл это внешняя массовая сила, второй интеграл это поверхностная сила.

Если действуют сосредоточенные силы, то их приставляют в правую часть.

Свойства внутренних напряжений:

Применяя (*) к $V_1$ , $V_2$ ,V

(1) $\int\limits_{V1} \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int\limits_{V1} F^{'} \rho dt + \int\limits_{\sum_1} p_n \partial\tau + \int\limits_{S} p_n dS$

(2) $\int\limits_{V2} \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int\limits_{V2} F^{''} \rho dt + \int\limits_{\sum_2} p_n \partial\tau + \int\limits_{S} p_n dS$

(3) $\int\limits_{V} \frac{dv}{dt} \rho d\tau = \int\limits_{V} F^{'} \rho dt + \int\limits_{\sum} p_n \partial\tau$

**17. Связь напряжения на любой координатной площадке с напряжением на координатных площадках декартовой прямоугольной системы координат. Тензор напряжений. Физические компоненты векторов напряжений на координатных площадках.**

$p_n, p^1, p^2, p^3$ напряжения на площадях с нормалями i,j,k,n

$$p_n = p^1 * \cos(nx) + p^2 * \cos(ny) + p^3 * \cos(nz)$$

$$n = \cos(nx)i + \cos(ny)j + \cos(nz)k - \textit{единичный} \quad \textit{вектор} \quad \textit{нормали}$$

$$(*) \int_\Sigma P_n d\sigma = \int_V \left( \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^3}{\partial y} + \frac{\partial p^3}{\partial z} \right) d\tau$$

Используя (*) можем представить

$\Omega = \int_V F d\tau + \int_V \left( \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^3}{\partial y} + \frac{\partial p^3}{\partial z} \right) d\tau - \int_V \left( \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \right) p d\tau$ и из условия $\lim_{V \to 0} \frac{\Omega}{V} = 0$ получаем

(**) $p \frac{d\upsilon}{dt} = pF + \frac{\partial p^1}{\partial x} + \frac{\partial p^3}{\partial y} + \frac{\partial p^3}{\partial z}$, Основное дифференциальное уравнение движения.

Оно выполняется для любых непрерывных движений, любых сред и в случае непрерывности движения полностью эквивалентна уравнению количества движения, так как из него следует, что $\Omega = 0$ для любого объема.

Равенства (*) и (**) получены при допущении непрерывности и дифференцируемости векторов $p^i$.

Разложим векторы $p^1, p^2, p^3$ по векторам базиса $э_1 = i, э_2 = j, э_3 = k$ декартовой системы координат:

$\begin{cases} p^1 = p^{k1} э_k \\ p^2 = p^{k2} э_k \\ p^3 = p^{k3} э_k \end{cases}$ или, что тоже самое $p^i = p^{ki} э_k$, и введем матрицу:

$$P = \left\| p^{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{Vmatrix}$$

Состоящую из 9 чисел. Согласно равенству $p_n = p^1 * \cos(nx) + p^2 * \cos(ny) + p^3 * \cos(nz)$ напряжения по произвольно ориентированной площадке, взятой в данной точке сплошной среды представляются формулами:

$$\begin{cases} p_n^1 = p^{11} * \cos(nx) + p^{12} * \cos(ny) + p^{13} * \cos(nz) \\ p_n^2 = p^{21} * \cos(nx) + p^{22} * \cos(ny) + p^{23} * \cos(nz) \\ p_n^3 = p^{31} * \cos(nx) + p^{32} * \cos(ny) + p^{33} * \cos(nz) \end{cases}$$

Таким образом матрица P определяет преобразование компонент $n_i$ вектора $n = n_i э^i$ к компонентам $p_n^i$ вектора $p_n$

Функции (их девять!) $p^{ik}$ входят в векторное уравнение, которое в проекции на оси Декартовых координат записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial u}{\partial t} = \rho F_x + \dfrac{\partial p^{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial p^{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial p^{13}}{\partial z} \\ p\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = \rho F_y + \dfrac{\partial p^{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial p^{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial p^{23}}{\partial z} \\ p\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \rho F_z + \dfrac{\partial p^{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial p^{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial p^{33}}{\partial z} \end{cases}$$

, где $F_x, F_y, F_z$ - проекции на оси координат плотности массовой силы F.

**Тензор напряжений.**

Зависимость $p_n = p^1 * \cos(nx) + p^2 * \cos(ny) + p^3 * \cos(nz)$ вектора напряжений $p_n$, на произвольно ориентированной площадке от векторов напряжений $p^1, p^2, p^3$ на координатных площадках может быть представлена в виде

$p_n = p^i n_i = p^{ki} Э_k n_i = p^i (Э_i * n) = p^{ki} Э_k (Э_i * n)$

Это равенство дает линейное преобразование от компонент вектора n к компонентам вектора $p_n$

$p^{ki}$ **,** были определены в произвольных ортогональных декартовых системах координат.

Равенство является соотношением между векторами $p_n$ и n, и поэтому может быть представлено в любой криволинейной системе координат.

$$P = p^{ki} * Э_k * Э_i$$

Где $p^{ki}$ контравариантные компоненты тензора P.

**P- тензор внутренних напряжений**

При этом, в любой системе координат будет выполнятся равенство: $p_n = P * n = p^i + n_i$

Где $p_n$ - напряжение на произвольной площадке с нормалью n, а $n_i$ - ковариантные компоненты n.

**Физические компоненты векторов напряжений на координатных площадках.**

Равенство $p^i = p_n$ выполняется только в случае ортогональной декартовой системы координат.

Положительные нормали к площадке определим как направление контравариантного вектора базиса $Э^i = \dfrac{Э_{i+1} * Э_{i+2}}{\sqrt{g}}$

Единичный вектор направления определяется формулой: $n^i = \dfrac{Э_i}{\sqrt{g^{ii}}}$, где $g^{ii} > 0$, а квадратный корень здесь и далее берется с положительным знаком.

Вектор напряжения $p_n$, на такой площадке обозначим через $p_i^*$, представится в виде:

$p_i^* = p^{\alpha\ k} \dfrac{Э_\alpha (Э_k - Э^i)}{\sqrt{g^{ii}}} = \dfrac{p^{\alpha i} Э_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}}$ - не равен вектору $p^i = p^{\alpha i} Э_\alpha$

Вектор напряжения $p_i^*$ можно разложить по единичным векторам базиса $Э_\alpha$ взятом в рассматриваемой точке.

$$p_i^* = X^{\alpha i} \frac{Э_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}$$

**Величины $X^{\alpha i}$ называются физическими компонентами вектора напряжений $p_i^*$**

на основании двух предыдущих равенств можем записать:

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}\sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{\alpha\alpha}}}$$ (суммирование по альфа в этой формуле отсутствует)

Отсюда ясно, что физические компоненты не являются компонентами какого либо тензора.

В декартовой ортогональной системе координат $p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$

**18. Уравнения движения сплошной среды в дифференциальной форме. Незамкнутость системы уравнений движения вместе с уравнением неразрывности. теорема моментов количества движения индивидуального объема среды. Следствия из теоремы.**

$p_n, p^1, p^2, p^3$ напряжения на площадях с нормалями i,j,k,n

$$p_n = p^1 * \cos(nx) + p^2 * \cos(ny) + p^3 * \cos(nz)$$

$$n = \cos(nx)i + \cos(ny)j + \cos(nz)k - \textit{едичный} \quad \textit{вектор} \quad \textit{нормали}$$

Рассмотрим уравнение количества движения $p\dfrac{d\upsilon}{dt} = pF + \dfrac{\partial p^1}{\partial x} + \dfrac{\partial p^3}{\partial y} + \dfrac{\partial p^3}{\partial z}$

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$\int_{\Sigma} P_n d\sigma = div(\overline{p}_i)dr$$

$$div(\overline{p}_i) = \nabla_i \overline{p}^i = \nabla_i p^{ik} Э$$

$$\nabla_i p^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} p^{ik} + p^{3k}\Gamma^i_{si} + p^{is}\Gamma^k_{si}$$

Следовательно $\int\limits_V (\rho \dfrac{d\overline{v}}{dt}) - \rho\overline{F} - \nabla_i \overline{p}^i)dr = 0$

Окончательно получаем $(\rho\dfrac{d\overline{V}}{dt}) - \rho\overline{F} - \nabla_i \overline{p}^i = 0$ -Дифференциальное уравнения движения системы.

Неизвестны три компоненты $\overline{V}$, девять компонент P и одно $\rho$

**Условие равновесия системы**

Из ДУ (при векторах скорости и ускорения равных нулю) имеем

$$\rho\overline{F} = -\nabla_i \overline{p}^i$$

**Уравнение моментов количества движения конечного объема Сплошной среды**

$$\overline{K}_0 = \int\limits_V [\overline{r}, \rho\overline{v}]d\tau$$

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}^l_0$$

$\dfrac{d}{dt}\left\{\int\limits_V [r, \rho v]d\tau\right\} = \int\limits_v [\overline{r}, \rho F]d\tau + \int\limits_{\Sigma} [\overline{r}, \overline{p}_n]dr$, где F – сила на единицу массы

$$\int\limits_V [\overline{r}, \frac{d\overline{V}}{dt}]\rho d\tau = \int\limits_V (\overline{r}, \rho\overline{F})dr + \int\limits_V ([Э_{i,} \overline{p}^i] + [\overline{r}, \nabla_i \overline{p}]^i)dr$$

$$\int_V (\bar{r}, \rho \frac{d\bar{V}}{dt} - \rho\bar{F} - \nabla_i \bar{p}^i) dr = \int_V (\bar{Э}_i, \bar{p}^i) dr$$, ДУ равно нулю

$$[Э_i, \bar{p}^i] = [Э_i, p^{ik} Э_k] = [Э_{i,} Э_k] p^{ik} = 0$$

**Следствие:**

$$p^{ik} = p^{ki}$$

**19. Поверхность напряжений (Коши). Разложение тензора напряжений на шаровой и девиатор Касательное напряжение на площадке (его связь с девиатором напряжений). Простейшие модели сплошных сред. Идеальные жидкость и газ. Тензор напряжений Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера). Идеальная баротропная жидкость.**

Спроектируем напряжение на соответствующую нормаль:

$$p_{nn} = p_n * n = (p^i * n)n_i = p^{ki} * n_k * n$$

Введем векторы $v = x_i * Э^i$ направленные по n, тогда $n_i = \cos(n, x_i) = x_i / r$

Выберем длину векторов r так, чтобы $p_{nn} r^2 = p^{ki} x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = const$, где $2\Phi(x, y, z)$ - квадратичная форма геометрического места точек $2\Phi(x, y, z) = const$ образует поверхность второго порядка.

**Главные оси:**

$p_n = p^{ki} n_i Э_k = \lambda n_i Э^i$ или $p_k^i n_i Э^k = \lambda \delta_k^i n_i Э^k$ откуда $\left(p_k^i - \lambda \delta_k^i\right) n_i Э^k = 0$ или $\left(p_k^i - \lambda \delta_k^i\right) n_i = 0$

**Тензор напряжений:**

$$p^{ki} = g^{\alpha s} p_s^i = -p g^{ks} \delta_s^i = -p q^{ki}$$

$$p^{ki} = g_{ks} p_i^s = -p g_{ks} \delta_i^s = -p g_k$$

P= - p*G

**Уравнения Эйлера:**

Уравнение движения $\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^k$ для идеальной жидкости $\rho a^k = \rho F^k - g^{ki} \nabla_i p^k$

В векторном виде $\rho a = \rho F + grad(p)$ в проекции на декартовы оси координат:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{dv}{dt} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{dw}{dt} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Процесс называется баротропным, если p=f(p) полная система:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = F - \dfrac{1}{\rho} grad(p) \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial pu}{\partial x} + \dfrac{\partial pv}{\partial y} + \dfrac{\partial pw}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

**Разложение тензора напряжений на шаровой и девиатор:**

$$S = \frac{J_1(T)}{3} G \qquad D = T - \frac{J_1(T)}{3} G$$

Касательная составляющая зависит только от девиатора

$$\overline{T}_{\eta\tau} = T * \overline{n} - (\overline{n} T \overline{n})\overline{n} = S\overline{n} + D\overline{n} - (\overline{n} S \overline{n})\overline{n} - (\overline{n} D \overline{n})\overline{n} = \frac{J_1(T)}{3} G * \overline{n} - \frac{J_1(T)}{3} * (\overline{n} G \overline{n})\overline{n} + D\overline{n} - (\overline{n} D \overline{n}) \quad G\overline{n} = \overline{n}$$

$$\overline{n} G \overline{n} = \overline{n}\overline{n} = 1 \Rightarrow \overline{T}_{\eta\tau} = D * \overline{n} - (\overline{n} D \overline{n})\overline{n}$$

**20. Основные теоремы движения идеальной жидкости. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громека-Ламда. Установившееся движение идеальной жидкости. Интеграл Бернулли.**

Форма Громеки-Ламба:
Имеем уравнения Эйлера

$$\frac{dv}{dt}=F-\frac{1}{\rho}grad(p)$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+grad(\frac{v^2}{2})+2\omega\times v$$

$\omega$ – вектор вихря,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial z}w=\frac{\partial u}{\partial t}=$$

В самом деле $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2)-(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})v+(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})w=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}+2(w_y\omega-w_z v)=$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}+2(\omega\times v)$$

Уравнение движения принимает вид

(1) $$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{2}grad(v^2)+2\omega\times v=F-\frac{1}{\rho}grad(p)$$

Установившееся движение $\Leftrightarrow \frac{\partial v0}{\partial t}=0$

Пусть внешние массовые силы потенциальны F = grad u
Рассмотрим в потоке жидкости некоторую линию z и введем вдоль нее направление отсчета длинны l начиная от некоторой точки O.
Заданием l будут фиксироваться точки на линии z. Через dl обозначим элемент касательный к линии z в произвольной точке M
Проектируя (1) на направление касательной:

(2) $$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}-\frac{\partial u}{\partial l}=-2(\omega\times v)$$

Плотность и давление вдоль данной линии являются функциями длинны дуги l

$$\rho=\rho(l,z)$$
$$p=p(l,z)$$

Плотность можно считать функцией давления $p=p(l,z)$ и можно ввести функцию давления,

$\rho=\rho(l,z)=\int\limits_{p1}\frac{dp}{\rho(p,z)}, p_1=const$ так что $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial \ell}\Rightarrow$ уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}+\rho(p,z)-u\right)=-2(\omega\times v)_l$$

Пусть теперь z – линия тока, тогда $(\omega\times v)_l$=0, так как $\omega\times l$ перпендикулярно линии тока, таким образом

$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}+\rho(p,z)-u\right)=0$ т.е. $\frac{v^2}{2}+\rho(p,z)-u=const$-Интеграл Бернулли.

**21. Потенциальное движение идеальной жидкости. Интеграл Коши-Лагранжа. Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости. Дифференциальные уравнения движения вихрей в идеальной жидкости. Кинематические теоремы Гельмгольца в вихрях. теорема Томсона. Теорема Лагранжа. Следствия. Причины возникновения вихрей. Постановки задач о движении тела в жидкости.**

**Потенциальное движение идеальной жидкости, интеграл Коши-Лагранжа**

Запишем уравнение движения, $\frac{\partial v}{\partial t} + grad(v^2/2) + 2\omega \times v = -\frac{1}{\rho} grad(p) + F$ (1)

Предположим:

1) Движение потенциально, т.е. $\omega = 0, v = grad\rho$
2) « Имеет место баротропия p=p( $\rho$ )

Следовательно можно вывести единственную для всего потока функцию давления

$$P(p) = \int \frac{dP}{\rho(p)}$$

$\frac{1}{\rho} grad(p) = gradP \Rightarrow$ уравнение (1) записывается в виде

$grad(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + p) = F \Rightarrow$ массовые силы должны обладать потенциалом (обозначается u) $\Rightarrow$

$grad(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + p - u) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + p - u = f(t)$ во всех точках, где движение потенциально – Интеграл Коши-Лагранжа.

Распространение малых возмущений в сжимаемой жидкости:

Движения сжимаемой жидкости представляют собой малые возмущения некоторого известного состояния, являются потенциальными.

**Теорема Гельмгольца о вихрях:**

При условиях 1) 2) уравнение (1) можно записать в виде $\frac{d\omega}{dt} + wdivv = (w\nabla)v$, где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$

Используя уравнение неразрывности получаем $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho div(v) = 0 \Rightarrow \frac{d\frac{\omega}{\rho}}{dt} = (\frac{\omega}{\rho} * \nabla)v$

**Теорема Томсона:**

Если внешние массовые силы потенциальны и движение баротропное, то $\int_C vdl = const$ где С - произвольный замкнутый контур.

**Теорема Лагранжа:**

Если выполнены условия теоремы Томсона в некоторой части жидкости в момент времени $t_{.0}$ нет вихрей, то их в этой части жидкости не было при t < $t_{.0}$ и не будет при t> $t_{.0}$

**Первая динамическая теорема Гельмгольца:**

В пределах теоремы Томсона, частицы жидкости образуют в некоторый момент времени вихревую поверхность, трубку или линию.

**Вторая теорема Гельмгольца:**

В пределах теорема Томсона интенсивность вихревой трубки во все время движения остается постоянной

Т.е. $\oint_C vdl = const,$ где С – любой замкнутый контур охватывающий один раз данную вихревую трубку.

Форма Громеки-Ламба:

Имеем уравнения Эйлера

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} grad(p)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + grad(\frac{v^2}{2}) + 2\omega \times v$$

$\omega$ – вектор вихря,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = \frac{\partial u}{\partial t} =$$

В самом деле $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2 + w^2) - (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})v + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})w = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(w_y\omega - w_z v) =$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\omega \times v)$$

Уравнение движения принимает вид

(1) $$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} grad(v^2) + 2\omega \times v = F - \frac{1}{\rho} grad(p)$$

Установившееся движение $\Leftrightarrow \frac{\partial v0}{\partial t} = 0$

Пусть внешние массовые силы потенциальны F = grad u

Рассмотрим в потоке жидкости некоторую линию z и введем вдоль нее направление отсчета длинны l начиная от некоторой точки O.

Заданием l будут фиксироваться точки на линии z. Через dl обозначим элемент касательный к линии z в произвольной точке M

Проектируя (1) на направление касательной:

(2) $$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial u}{\partial l} = -2(\omega \times v)$$

Плотность и давление вдоль данной линии являются функциями длинны дуги l

$$\rho = \rho(l, z)$$

$$p = p(l, z)$$

Плотность можно считать функцией давления $p = p(l, z)$ и можно ввести функцию давления,

$\rho = \rho(l, z) = \int_{p1} \frac{dp}{\rho(p, z)}, p_1 = const$ так что $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \ell} \Rightarrow$ уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + \rho(p, z) - u\right) = -2(\omega \times v)_l$$

Пусть теперь z – линия тока, тогда $(\omega \times v)_l$=0, так как $\omega \times l$ перпендикулярно линии тока, таким образом

$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + \rho(p, z) - u\right) = 0$ т.е. $\frac{v^2}{2} + \rho(p, z) - u = const$-Интеграл Бернулли.

**22. Закон Гука для изотропной среды. Сведение количества упругих постоянных с 81 до 2 (параметры Ламе) и представление закона Гука через главные компоненты тензоров напряжений и деформаций. Запись закона Гука в любой криволинейной системе координат, а также в декартовой (не главной) системе координат.**

Упругим телом называется среда, в которой компоненты тензора напряжений

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, X_1, .., X_n)$$

Закон Гука: $p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$

Изотропной называют среду, свойства которой одинаковой по всем направлениям. В частности среда называется изотопной, если компоненты тензоров, определяющих ее свойства, не меняются при ортогональных преобразованиях.

Ортогональные преобразования – преобразование сохраняющие компоненты метрического тензора

$$q_{ij}^{/} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{i}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{j}} = g^{ij}$$

Сведение количества упругих постоянных с 81 до 2

1) Направим оси координат вдоль главных направлений тензора деформации $\varepsilon_{ij}$

Следовательно в законе Гука будут входить только коэффициенты вида $A^{ij\alpha\alpha}$

2) Докажем, что $A^{ij\alpha\alpha}$=0, при i != j

Повернем систему координат на 180 градусов вокруг i-ой оси следовательно $A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha}$, но для изотермической среды $A'^{ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$ и следовательно $A^{ij\alpha\alpha}$ = 0, при i != j

$p^{ij} = 0$ при i != jследовательно главные оси совпадают.

В результате имеем

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda$$
$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda$$
$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii}$$

Закон Гука для изотропной среды в главных осях тензора деформации имеет вид:

$$p_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1$$

$p_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2$ , $\lambda, \mu -$коэффициенты Ламе

$$p_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3$$

В произвольной системе координат закон Гука имеет вид:

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

В декартовой (не главной системе координат) закон Гука имеет вид:

$$p_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon)g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ii}$$

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, (i \neq j)$$

**23. Вязкая жидкость. Тензор напряжений вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса. Уравнения движения вязкой жидкости при постоянной температуре (уравнения Навье - Стокса). Несжимаемая вязкая жидкость. Граничные условия при постановке задач.**

Вязкой жидкостью называется среда, в которой компоненты тензора напряжений представляются в виде $p^{ij} = -pg^{ii} + \tau^{ij}$ причем $p = p(\rho, T, X_1, ..., X_n)$

$\tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, X_1, .., X_n)$, где $e_{\alpha\beta}$ компоненты тензора скоростей деформации

Закон Навье-Стокса

$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$

Уравнение Навье-Стокса:

$$p^{ij} = -pg^{ii} + \lambda g^{ij} div(v) + 2\mu e_{\alpha\beta}$$

В векторной форме:

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} grad(p) + \frac{\lambda + \mu}{\rho} grad(div(v)) + \upsilon \Delta v$$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho}$$

Для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} grad(p) + \frac{\mu}{\rho} \Delta v$$

**24. Упругое тело. Закон Гука для изотропных тел при малых деформациях. Уравнения движения в перемещениях для упругого тела (уравнения Ламе). Начальные и граничные условия в задачах о движении упругого тела.**

Упругим телом называется среда, в которой компоненты тензора напряжений
$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, X_1, .., X_n)$

Закон Гука: $p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$

Уравнения движения в перемещениях для упругого тела, удовлетворяющее закону Гука в случае малых деформаций

$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)g^{ij} + 2\mu\varepsilon^{ij}$

$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla^j\omega^i + \nabla^i\omega^j)$, где $\omega^j$ – компоненты тензора перемещения.

$I_1(\varepsilon)$ – первый инвариант тензора деформации

Уравнения Ламе:

$(\lambda + \mu) grad(div(\omega)) + \mu\Delta\omega + \rho F = \rho\alpha$