16

Махмудов Орхан
М80-405Б-18

1) Методом отражений получить решение первой начально-краевой задачи для волнового ур-я

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} & x>0,\ t>0 \\ u|_{x=0} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

Обеспечить гладкость классич. решения $u \in C^2(\bar{Q})$, где $Q - \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x>0, t>0\}$, позволяют нач. данные

$\varphi(x) \in C^2[0,+\infty)$, $\psi(x) \in C^1[0,+\infty)$

$$\begin{cases} \xi = x+t \\ \eta = x-t \end{cases}$$

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ f'(x) - g'(x) = \psi(x) \end{cases} \quad \forall x \geq 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi + C$$

$$\forall x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \psi(\xi)\,d\xi - C$$

$$f(t) + g(-t) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

$$g(s) = -f(-s) \qquad \forall s < 0$$

$$g(s) = -\frac{1}{2}\varphi(-x) - \frac{1}{2}\int_0^{-s} \psi(\xi)\,d\xi - C \qquad \forall s < 0$$

Проверим согласованность заданных нач. и граничных усл-ий

$$\begin{cases} g(-0) = g(+0) \\ g'(-0) = g'(+0) \\ g''(-0) = g''(+0) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -\frac{1}{2}\varphi(0) - C = \frac{1}{2}\varphi(0) - C \\ \frac{1}{2}\varphi'(0) + \frac{1}{2}\psi(0) = \frac{1}{2}\varphi'(0) - \frac{1}{2}\psi(0) \\ -\frac{1}{2}\varphi''(0) - \frac{1}{2}\psi'(0) = \frac{1}{2}\varphi''(0) - \frac{1}{2}\psi'(0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \psi(0) = 0 \\ \varphi''(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x+t) + \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\,d\xi & , x > t \\ -\frac{1}{2}\varphi(t-x) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \psi(\xi)\,d\xi & , x < t \end{cases}$$

2) После редукции к однородным краевым усл-ям найти решение второй начально-краевой задачи для ур-я теплопроводности методом отражений:

$u_t = u_{xx}$, $x > 0$, $t > 0$

$u_x|_{x=0} = g(t)$

$u|_{t=0} = 0$

Редукция

$u = v + g(t) \cdot S(x)$ $\qquad$ $g(0) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad S'(0) =$

$v_t = v_{xx} - g'(t) S(x) + g(t) \cdot S''(x)$

$v_x|_{x=0} = 0$

$v|_{t=0} = 0$

$f(x,t) = -g'(t) S(x) + g(t) S''(x)$, $x > 0$

продолжаем $f(x,t)$ при $x < 0$ чётным образом

$f(x,t) = f(-x,t)$

используем ф-лу Пуассона при $\varphi(x)=0$

$$V=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot$$

$$\cdot f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$u=g(t)S(x)+\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

3) Разделением переменных решить начально-краевую задачу для ур-я гиперболического типа:

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+4u+2\sin^2 x, & 0<x<\pi,\ t>0\\ u_x|_{x=0}=0, & u_x|_{x=\pi}=0\\ u|_{t=0}=0, & u_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

$u(x,t)=X(x)\,T(t)$

$$T''(t)X(x)=X''(x)T(t)+4X(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)}-4=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2$$

$-X''=\lambda^2 X$

$X'(0)=0,\ X'(\pi)=0$

1) $\lambda=0$

$X=Ax+B$

$A=0$

$X_0=1$

2) $\lambda^2>0$

$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$

$B=0$

$-\lambda A\sin\pi\lambda=0$

$\lambda\pi=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\lambda=k,\ k\in\mathbb{N}$

$X_k=\cos kx,\ k\in\mathbb{N}$

$$u=\sum_{k=0}^{\infty} T_k \cos kx$$

$$2\sin^2 x=\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin^2 x\,dx=1$$

$$\alpha_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin^2 x-\cos x\, x\,dx=$$

$$=-\frac{8\sin\pi k}{\pi n(x^2-4)}\Bigg|_0^{\pi}=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(T_k''+k^2T-4T\right)\cos kx=2\sin^2 x$$

$$\begin{cases} T_k''+(k^2-4)T=\alpha_k \\ T_k(0)=T_k'(0)=0 \end{cases} \quad k=0,1,2\ldots$$

$k=0$ $\quad T=Ae^{2t}+Be^{-2t}-\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} A+B-\frac{1}{4}=0 \\ 2A-2B=0 \end{cases} \Rightarrow A=B=\frac{1}{8}$$

$$T_0=\frac{1}{8}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)-\frac{1}{4}$$

$k=2$ $\quad T=At+B$

$$\begin{cases} B=0 \\ A=0 \end{cases}$$

$T=0$

$k\geq 3$ $\quad k^2-4=\omega^2$

$T=A\sin\omega+B\cos\omega t$

$$\begin{cases} B=0 \\ A\omega=0 \end{cases} \Rightarrow A=0$$

$T=0$

$$u=\frac{1}{8}\left(e^{2t}+e^{-2t}\right)-\frac{1}{4}$$