```latex
\documentclass[a4paper]{article}


\usepackage{cmap}
\usepackage[10pt]{extsizes}
\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[english,russian]{babel}
\usepackage{amsmath,amsfonts,amssymb,amsthm,mathtools}
\usepackage[pdftex]{graphicx}
\graphicspath{{/}}
\DeclareGraphicsExtensions{.pdf,.png,.jpg}
\usepackage{array,graphicx,caption}


\begin{document}
\pagestyle{empty}
100 \hspace{3cm} численное интегрирование \hspace{2cm} [гл. III] \\ [5mm]
Получена \textit{формула} \textit{трапеций}
$$  \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)) \eqno(7) $$
с оценкой остаточного члена
$$ \overset{}{\underset{[a,b]}{max}}|f''(x)|\frac{(b-a)^3}{12}. $$
\indent 4. \textit{Формула} \textit{Симпсона}. Пусть n = 4, $d_1$ = - 1, $d_2$ = $d_4$ = 0, $d_3$ = 1. Тогда
$$ D= \int\limits_{-1}^1 \frac{t^2(1-t^2)}{4!}dt = \frac{1}{90}. $$
Согласно формуле интерполирования с кратными узлами, мы можем написать
$$ L_4(x) = L_3(x) + f\left(a;~b;~\frac{a+b}{2};~\frac{a+b}{2}\right)(x - a)(x - b)\left(x- \frac{a+b}{2}\right), $$
где
$$ L_3(x) = f(a) + f(a;~b)(x - a) + f\left(a;~b;~\frac{a+b}{2}\right)(x - a)(x - b). $$
Второе слагаемое в выражении $L_4$(x) является функцией, нечетной относи- \\
\begin{tabular}[l]{m{0.45\linewidth}m{0.55\linewidth}}
\includegraphics[width=0.5\textwidth,height=0.4\textwidth]{integral.png}
\label{fig:intab}
\par \hspace{60pt} Рис. 3.1.3.
& тельно середины отрезка [a,b]. Поэтому
$$ \int\limits_a^b L_4(x)dx = \int\limits_a^b L_3x)dx. $$
Многочлен $L_3(x)$ является интерполяционным многочленом второй степени, соответствующим
$$ d_1 = - ~1, ~d_2 = 0, ~d_3 = 1 $$
(рис. 3.1.3.). Этим значениям $d_1$, $d_2$, $d_3$ соответствуют
$$ D_1 = \frac{1}{3},~~~ D_2 = \frac{4}{3},~~~ D_3 = \frac{1}{3}.  $$
```

\end {tabular} \\ [2mm]

Полученная квадратурная формула

$$ \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f \left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) \eqno(8) $$

\newpage

\par \hspace{60pt} квадратурные формулы ньютона - котеса \hspace{20mm} 101 \\ [5mm]

с оценкой остаточного члена

$$ \overset{}{\underset{[a,b]}{max}}\left|f^{(4)}(x)\right|\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

называется \textit{формулой} \textit{Симпсона}. \\

\indent 5. Квадратурную формулу, точную для многочленов третьей степени, можно получить также, например, при $n = 4$, взяв

$$d_1 = -~ 1,~~~ d_2 = -~ \frac{1}{3},~~~ d_3 = \frac{1}{3},~~~ d_4 = 1. $$

\indent Тогда по описанной процедуре получается квадратура \\ [10mm]

$ \displaystyle \int\limits_a^b f(x)dx~ \approx $

$$ \approx ~ \frac{b-a}{8}\left(f(a) +3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2(b-a)}{3}\right) + f(b)\right). \eqno(9) $$

При той же степени многочленов, для которых эта формулла точна, она требует на 1 узел больше по сравнению с формулой Симпсона, и поэтому ее употребление менее оправдано. \\

\indent В связи с рассмотрением этой квадратуры полезно обратить внимание на следующее. Так как f(x) - $L_n(x)$ = $f^{(n)}(\zeta(x)) \frac{\omega_n(x)}{n!}$, то остаточный член квадратуры записывается в виде:

$$ \int\limits_a^b f^{(n)}(\zeta(x)) \frac{\omega_n(x)}{n!}dx. $$

В рассматривавшихся выше случаях 2 - 4 $\omega_n(x)$ не меняла знака на [a,b]. Согласно теореме о среднем:

$$ \int\limits_a^b h ~(x)~ g~ (x)dx = h(\bar{x}) \int\limits_a^b g(x)dx,~~ \bar{x} \in [a, b],~~ \text{если} ~ g(x) \geqslant 0; $$

это выражение может быть представлено в виде

$$ f^{(n)} ~(\widetilde{x}) \int\limits_a^b \frac{\omega_n(x)}{n!}dx. \eqno(10) $$

Подставляя в (10) конкретное выражение $ \omega_n(x) $, получаем представление погрешности формул прямоугольников, трапеций и Симпсона, соответственно: \\ [3mm]

$ \par \hspace{1cm} R_2(f) = f''(\widetilde{x}_1)\frac{(b~ -~ a)^3}{24}$, \\ [3 mm]

$ \par \hspace{1cm} R_3(f) = -~ f''(\widetilde{x}_2)\frac{(b ~-~ a)^3}{12},~~ R_4(f) = ~ -~ f^{(4)}(\widetilde{x}_3)\frac{(b ~-~ a)^5}{2880}. $

\end{document}