№3

Махмудов Орхан
М80-405Б-18

1) Доказать ф-лы
$$\frac{1}{x\pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}$$
где под $\frac{1}{x+i0}$ понимается предел в $D'(\mathbb{R})$ регулярных ф-ций $\frac{1}{x\pm\varepsilon}$ при $\varepsilon\to+0$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{x+\xi i}$$
$$(F_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x+\varepsilon i}\varphi(x)\,dx = \{x=\varepsilon t,\ dx = \varepsilon dt\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-i)\varphi(\varepsilon t)\,dt}{t^2+1}$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\varepsilon t)(t-i)\,dt}{t^2+1} = \varphi(0)\left(\frac{\ln(t^2+1)}{2} - i\,\mathrm{arctg}(t)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}$$
Аналогично для $F_\varepsilon(x) = \frac{1}{x-\varepsilon i}$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x\pm\varepsilon i} = \mp i\pi\delta(x) + P\frac{1}{x}$$, что и требовалось доказать

2) Вычислить свёртку: $(\Theta(x)\otimes\delta(t)) * \left(\frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) =$
$$= \iint_{R^2} \frac{\Theta(\tau)}{2\sqrt{\pi\tau}}e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}}\Theta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,d\xi\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Theta(\tau)}{2\sqrt{\pi\tau}}\delta(t-\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}}\Theta(x-\xi)$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\delta(t-\tau)\,d\tau\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\xi^2}{4\tau}}\,d\xi = \int_0^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\delta(t-\tau)\sqrt{\pi\tau}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)+1\right)d\tau =$$
$$= \frac{\Theta(t)}{2}\int_0^{\infty}\delta(t-\tau)\left(\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right)+1\right)d\tau = \frac{1}{2}\Theta(t)\left(\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+1\right)$$

3) Вычислить преобразования Фурье обобщенных ф-ций медленного роста $F[\mathrm{sign}(x)]$

$$F[\mathrm{sign}(x)] = F[2\theta(x) - 1] = 2F[\theta(x)] - F[1] = 2\pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi} = (2\pi)^n\delta(\xi)$$

в $\mathbb{R}$ $F[\mathrm{sign}(x)] = iP\frac{1}{\xi}$