Тема №1 Махмудов Орхан

№8 М8О-408Б-18

$\Omega = \{(\rho, \theta): 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \pi\}$ (полукруг), $\varphi(\theta) = 1$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_\rho|_{\rho=1} = \varphi(\theta) \\ u|_{\theta=0} = 0 \\ u|_{\theta=\pi} = 0 \end{cases}$$

1) $$Z''(\rho)\Psi(\theta) + \frac{1}{\rho} Z'(\rho)\Psi(\theta) + \frac{1}{\rho^2} Z(\rho)\Psi''(\theta) = 0$$

$Z(\rho)\Psi(0) = 0$, $Z(\rho)\Psi(\pi) = 0$

Из краевых усл-ий и нетривиальности ф-ций Z и Ψ $\Rightarrow$

$\Psi(0) = 0$, $\Psi(\pi) = 0$

Разделим перем.

$$\frac{\rho^2 Z''(\rho) + \rho Z(\rho)}{Z(\rho)} = \frac{-\Psi''(\theta)}{\Psi(\theta)} = \lambda = const$$

ρ и θ – независ. перем.

$$\begin{cases} -\Psi''(\theta) = \lambda \Psi(\theta), & 0 < \theta < \pi \\ \Psi(0) = 0 \\ \Psi(\pi) = 0 \end{cases}$$

Пусть $l = \pi$

а) Пусть $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$

$\Psi'' - \omega^2 \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = C_1 e^{-\omega\theta} + C_2 e^{\omega\theta}$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\omega l} & e^{\omega l} \end{vmatrix} = e^{\omega l} - e^{-\omega l} = 0 \Rightarrow e^{2\omega l} = 1$$

Невозможно, т.к. $\omega = \sqrt{-\lambda} > 0$

б) Пусть $\lambda = 0$

$Y'' = 0 \Rightarrow Y = C_1\theta + C_2 \Rightarrow C_2 = 0,\ C_1 l + C_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ – не собств. знач.

с) Пусть $\lambda > 0$, $\omega = \sqrt{\lambda}$

$Y'' + \omega^2 Y = 0$ есть $Y = C_1 \cos\omega\theta + C_2 \sin\omega\theta$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1\cos\omega l + C_2 \sin\omega l = 0 \end{cases}$$

$\omega_k = \frac{\pi k}{l},\ k \in \mathbb{N}$

$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} = k^2,\ k \in \mathbb{N}$

Собств. ф-ции $X_k(x) = b_k \sin(k\theta),\ b_k \neq 0$

2) Ф-я $\varphi \in L_2(0, \pi)$, поэтому можно разложить в ряд

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(k\theta)$$

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\sigma)\sin(k\sigma)\,d\sigma$$

$$\|\sin(k\theta)\|^2 = \int_0^{\pi} \sin^2(k\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2k\theta)\right)d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho)\sin(k\theta)$$

3) $$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\rho^2 u_k'' + \rho u_k' - k^2 u_k) \sin(k\theta) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(1) \sin(k\theta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin(k\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho^2 u_k'' + \rho u_k' - k^2 u_k = 0, \quad 0 < \rho < 1 \\ u_k(\rho) = O(1) \text{ при } \rho \to +0 \\ u_k'(1) = \varphi_k \end{cases}$$

4) $\rho^2 z'' + \rho z' - k^2 z = 0$

$z_k(\rho) = C_k \rho^{-k} + D_k \rho^{k}$ для $k \in N$

$C_k = 0$ для $k \in N \Rightarrow z_k(\rho) = D_k \rho^k$

$z_k'(\rho) = k D_k \rho^{k-1}$

$k D_k = \varphi_k$, где $D_k = \frac{\varphi_k}{k}$

$u_k(\rho) = \frac{\varphi_k}{k} \rho^k$

5) $$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{k} \rho^k \sin(k\theta)$$

$$u(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \rho^k \sin(k\theta) \int_0^{\pi} \varphi(\tau) \sin(k\tau)\, d\tau = \int_0^{\pi} K(\rho, \theta, \tau) \varphi(\tau)$$

где $K(\rho, \theta, \tau) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \rho^k \sin(k\theta) \sin(k\tau)$ – ядро интегральной ф-лы

$- \sin(k\theta)\sin(k\tau) = \frac{1}{2}(\cos(k(\theta-\tau)) - \cos(k(\theta+\tau))) \Rightarrow$

$K_1(\rho, \theta, \tau) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^k \cos(k(\theta - \tau))$

$$K_2(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^k \cos(k(\theta + \tau))$$

$$K = K_1 - K_2$$

$$K_0(\rho, \theta, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \rho^k \cos(k\alpha) = \mathbf{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} e^{k(i\alpha + \ln \rho)} =$$

$= \mathbf{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k$, где $q = e^{\ln \rho + i\alpha} = \rho e^{i\alpha} = \rho \cos\alpha + i \rho \sin\alpha$

$$K_0(\rho, \theta, \tau) = \mathbf{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} q^k = -\frac{1}{\pi} \mathbf{R} \ln(1-q) = -\frac{1}{\pi} \ln|1-q| =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \ln(1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2)$$

$$K(\rho,\theta,\tau) = K_1(\rho,\theta,\tau) - K_2(\rho,\theta,\tau) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-2\rho\cos(\theta+\tau)+\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta+\tau)+\rho^2}$$

б) Найдём коэфф. Фурье ф-ции $\varphi(\theta)=1$

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\tau)\,d\tau = -\frac{2}{\pi k}\cos(k\theta)\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k)$$

при чётных k имеем $\varphi_k = 0$

при нечётных k имеем $\varphi_k = \frac{4}{\pi k}$

$$u(\rho,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k)\rho^k \sin(k\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2j+1)^2}\rho^{2j+1}\sin((2j+1)\theta)$$