

**1. Закон Кулона. Напряженность и потенциал поля. Поле точечного заряда. Принцип суперпозиции. Теорема Гаусса для электростатики вакуума. Следствия. Теорема Ирншоу. Теорема о циркуляции  $\vec{E}$ . Потенциальность э/с поля. Связь  $\vec{E}$  и  $\varphi$  в электростатике. Уравнение Пуассона для  $\varphi$ . Энергия системы зарядов в электростатическом поле. Работа по перемещению заряда в э/с поле.**

### **Связь $\vec{E}$ и $\varphi$ в электростатике. Напряженность и потенциал поля. Потенциальность э/с поля.**

Напряженность – силовая характеристика электрического поля.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \frac{\varphi q(\vec{r})}{q} = -\text{grad} \varphi(\vec{r})$$

Напряженность заряда  $q_1$  (источника поля) в относительной точке положения заряда  $q_2$ :

$$\vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

В скалярной форме

$$E_q = \frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\varphi(\vec{r}) = \frac{\varphi_q(\vec{r})}{q}$  – электрический потенциал;  $\varphi_q(\vec{r}) = \text{const.}$

По определению потенциал произвольной точки электростатического поля равен отношению работы сил поля  $A$  по перемещению точечного положительного  $q_0$  заряда из данной точки поля в бесконечность.

$$\varphi = \frac{A}{q_0}$$

или потенциал электростатического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии  $W$  точечного положительного заряда, помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда  $q_0$

$$\varphi = \frac{W}{q_0}$$

Потенциал электростатического поля в бесконечности условно принят равным нулю.

## Поле точечного заряда.

Электрическим полем называется материальная среда, в которой | осуществляется действие электрических сил на электрические заряды, помещенные в эту среду.

Вокруг любого заряда возникает электростатическое поле. Основное свойство электростатического поля заключается в том, что *на всякий другой заряд, помещенный в это поле, действует сила*. Отсюда следует, что электростатическое поле – особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрическими зарядами.

Электростатическое поле называется *однородным*, если во всех его точках значения вектора напряженности  $\vec{E}$  одинаковы, т.е. совпадают по модулю и направлению. Электростатическое поле *неоднородно*, если в каждой точке значение напряженности поля имеет разное значение.

## Принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции: напряженность поля системы точечных зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

где  $n$  – число зарядов в системе. В случае  $n = 2$  модуль вектора напряженности находится по теореме косинусов

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad \text{где } \alpha \text{ – угол между векторами } \vec{E}_1 \text{ и } \vec{E}_2.$$

Принцип суперпозиции: потенциал электростатического поля, созданного системой  $n$  точечных зарядов, в данной точке поля в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов  $\varphi_1 \dots$  создаваемых отдельными точечными зарядами  $q_1 \dots$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

## Теорема Гаусса для электростатики вакуума. Следствия.

Теорема Остроградского–Гаусса для вакуума: поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$  в направлении системы векторов внешней нормали равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}.$$

Если в качестве поверхности  $S$  выбрать такую, где выполняется  $S: E_n^+ = \text{const}$ , то формула превращается в алгебраическую:

$$E_n^+ S = \frac{Q_{vs}}{\epsilon \epsilon_0}$$

((Теорема Остроградского–Гаусса используется для расчета напряженности электрического поля заряженных тел, при этом важное значение имеет выбор вспомогательной (—гауссовой) замкнутой поверхности, через которую рассматривается поток вектора напряженности  $\Phi_E$ . Для среды теорема Остроградского–Гаусса может быть записана через вектор электрической индукции

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum_i q_i \quad ))$$

Следовательно, существует 2 проблемы:

1) Проблема существования поверхностей со свойством  $S: E_n^+ = \text{const}$ . Всегда решается, т.е. таких поверхности всегда существуют и непрерывно заполняют пространство. Так что через любую точку пространства проходит такая поверхность.

2) Связана со сложной формой поверхности  $S: E_n^+ = \text{const}$ . Она может быть сложной настолько, что величины  $S$  и  $Q_{vs}$  будет невозможно считать. Поэтому переходим ко второму выражению, когда система зарядов имеет высокую степень симметрии (центральную, осевую, плоскую).

С помощью (1)(2) рассчитываются поля шара, сфера, бесконечной прямой нити, прямого кругового цилиндра, бесконечной плоскости. Во всех случаях распределение заряда подбирается так, чтобы  $S: E_n^+ = \text{const}$  имели каноническую форму (сферическая, цилиндрическая).

## Теорема Ирншоу.

Из определения потенциала следует, что для устойчивого равновесия положительный заряд должен находиться в точке минимума потенциала, а отрицательный — в точке, где потенциал максимален; при этом потенциал самого заряда исключается из рассмотрения. Поскольку в электростатическом поле нет ни максимумов, ни минимумов потенциала, то отсюда следует также **теорема Ирншоу**, утверждающая, что *заряд в электрическом поле не может удерживаться в равновесии одними электрическими силами*. Следовательно, если мы считаем природу вещества чисто электрической, т. е. все тела состоящими из положительных и отрицательных зарядов, между которыми действуют электрические силы, то эти силы взаимодействия должны быть отличны от электростатических.

## Теорема о циркуляции $\vec{E}$ . Потенциальность э/с поля.

Теорема о циркуляции вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0$$

циркуляция вектора напряженности потенциального электрического поля по замкнутому контуру равна нулю.

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным. Значит любое электростатическое поле – потенциальное.

Потенциал – величина численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда в данной точке поля.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E dl$$

## Уравнение Пуассона для $\varphi$ .

Локальная форма теоремы Гаусса:

$$\forall s: \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{\text{э}}(\vec{r})}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Также:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{\nabla} \varphi = \Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

То:

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho_{\text{э}}(F)}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией  $\varphi(r)$  – **уравнение Пуассона** (позволяет после граничных условий для любого заряда  $\rho_{\text{э}}(F)$  найти электрический потенциал, а затем вектор напряженности). Если правая часть равна нулю – уравнение Лапласа.

## Энергия системы зарядов в электростатическом поле.

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum W_i$$

Имея ввиду, что  $W_i = q_i \varphi_i$ , где  $q_i$  – i-ый заряд системы, а  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в месте нахождения i-ого заряда всеми остальными зарядами системы, получим окончательное выражение для энергии взаимодействия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

### Работа по перемещению заряда в э/с поле.

Рассмотрим работу сил электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда в поле напряженностью  $\vec{E}$  из точки 1 в точку 2

$$A = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{L} = \int_1^2 E_L dL = \int_1^2 E \cos \alpha \cdot dL.$$

*Работа сил электростатического поля по перемещению заряда  $q$  из точки с потенциалом  $\varphi_1$  в точку с потенциалом  $\varphi_2$*

$$A = q \int_L E_L dL = q \Delta \varphi = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для однородного поля последняя формула принимает вид

$$A = qE \cdot L \cdot \cos \alpha,$$

где  $L$  – перемещение,  $\alpha$  – угол между направлениями вектора  $\vec{E}$  и перемещения  $\vec{L}$ .

**2. Применение теоремы Гаусса и принципа суперпозиции для расчета полей равномерно заряженной плоскости, сферы, шара, кольца, нити, диска, цилиндра.**



Пусть поверхностная плотность заряда равна  $\sigma$ . Из симметрии задачи очевидно, что вектор  $\mathbf{E}$  может быть только перпендикулярным заряженной плоскости. Кроме того, ясно, что в симметричных относительно этой плоскости точках вектор  $\mathbf{E}$  одинаков по модулю и противоположен по направлению. Такая конфигурация поля подсказывает, что в качестве замкнутой поверхности следует выбрать прямой цилиндр, расположенный, как на рис. 1.7, где предполагается  $\sigma > 0$ .

Поток сквозь боковую поверхность этого цилиндра равен нулю, и поэтому полный поток через всю поверхность цилиндра будет  $2E\Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь каждого торца. Внутри цилиндра заключен заряд  $\sigma\Delta S$ . Согласно теореме Гаусса  $2E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$ , откуда  $E = \sigma/2\epsilon_0$ . Точнее это выражение следует записать так:

$$E_n = \sigma/2\epsilon_0, \quad (1.10)$$

где  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на нормаль  $\mathbf{n}$  к заряженной плоскости, причем вектор  $\mathbf{n}$  направлен от этой плоскости. Если  $\sigma > 0$ , то и  $E_n > 0$ , а значит, вектор  $\mathbf{E}$  направлен от заряженной плоскости, как на рис. 1.7; если же  $\sigma < 0$ , то  $E_n < 0$ , а значит, вектор  $\mathbf{E}$  направлен к заряженной плоскости. Тот факт, что  $E$  не зависит от расстояния до плоскости, означает, что соответствующее электрическое поле является однородным (как слева, так и справа от плоскости).

Полученный результат справедлив только для бесконечной плоской поверхности, ибо только в этом случае могут быть использованы приведенные соображения симметрии. Однако он приближенно справедлив и для области, прилегающей к средней части конечной равномерно заряженной плоской поверхности, вдали от ее краев.

**Поле сферической поверхности, заряженной равномерно зарядом  $q$ .**

Это поле, очевидно, центрально-симметричное: направление вектора  $\mathbf{E}$  в любой точке проходит через центр сферы, а модуль вектора  $\mathbf{E}$  должен зависеть только от расстояния  $r$  до центра сферы. Ясно, что при такой конфигурации поля в качестве замкнутой поверхности надо взять концентрическую сферу. Пусть ее радиус  $r > a$ , тогда по теореме Гаусса  $E_r \cdot 4\pi r^2 = q/\epsilon_0$ , откуда

$$E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > a), \quad (1.13)$$

где  $E_r$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , совпадающий по направлению с нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности в каждой ее точке. Знак заряда  $q$  и здесь определяет знак проекции  $E_r$ , а следовательно, и направление самого вектора  $\mathbf{E}$ : от заряженной сферы (при  $q > 0$ ) или к ней (при  $q < 0$ ).

Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области всюду  $E = 0$ , т. е. внутри равномерно заряженной сферической поверхности электрическое поле отсутствует. Вне этой поверхности поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как у точечного заряда.



### Поле равномерно заряженного шара.

Пусть заряд  $q$  равномерно распределен по шару радиусом  $a$ . Поле такой системы, очевидно, также центрально-симметричное, поэтому и здесь для нахождения поля следует в качестве замкнутой поверхности взять концентрическую сферу. Нетрудно сообразить, что для поля вне шара получится тот же результат, что и в предыдущем примере [см. (1.13)]. Внутри же шара выражение для поля будет другим. Сфера радиусом  $r < a$  охватывает заряд  $q' = q(r/a)^3$ , ибо в нашем случае заряды относятся как объемы, а последние как кубы радиусов. Поэтому согласно теореме Гаусса

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q \left( \frac{r}{a} \right)^3,$$

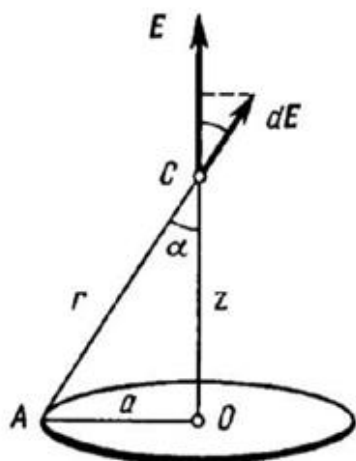
откуда

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^3} r (r \leq a), \quad (1.14)$$

т. е. внутри равномерно заряженного шара напряженность растет линейно с расстоянием  $r$  от его центра. График зависимости  $E$  от  $r$  показан на рис. 1.10.

Решение

Легко сообразить, что в данном случае вектор  $\vec{E}$  должен быть направлен по оси кольца (рис. 1.1). Выделим на кольце



около точки  $A$  элемент  $dl$ . Запишем выражение для составляющей  $dE_z$  от этого элемента в точке  $C$ :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha,$$

где  $\lambda = q/2\pi a$ . Для всех элементов кольца  $r$  и  $\alpha$  будут одними и теми же, поэтому интегрирование этого выражения сводится просто к замене  $\lambda dl$  на  $q$ . В результате

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Видно, что при  $z \gg a$  поле  $E \approx q/4\pi\epsilon_0 z^2$ , т. е. на больших расстояниях эта система ведет себя как точечный заряд.

## Нить:

Из соображений симметрии ясно, что вектор  $\mathbf{E}$  должен иметь направление, показанное на рис. 1.2. Это подсказывает, как надо поступить далее: найдем составляющую  $dE_x$  от элемента  $dl$  нити с зарядом  $dq$  и затем проинтегрируем по всем элементам нити. В нашем случае

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos \alpha,$$

где  $\lambda = q/2l$  — линейная плотность заряда. Приведем это уравнение к виду, удобному для интегрирования. Из рис. 1.2 видно, что  $dl \cos \alpha = r d\alpha$  и  $r = x/\cos \alpha$ , поэтому

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda r d\alpha}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \cos \alpha d\alpha.$$

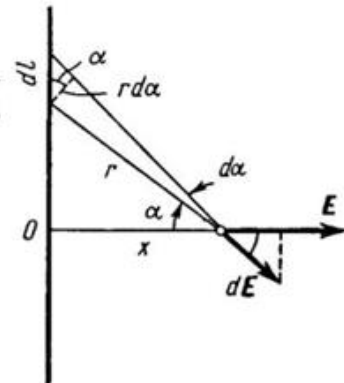
Это выражение легко проинтегрировать:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \sin \alpha_0,$$

где  $\alpha_0$  — максимальное значение угла  $\alpha$ ,  $\sin \alpha_0 = l/\sqrt{l^2 + x^2}$ , поэтому

$$E = \frac{q/2l}{4\pi\epsilon_0 x} 2 \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{l^2 + x^2}}.$$

И здесь  $E \approx q/4\pi\epsilon_0 x^2$  при  $x \gg l$  как поле точечного заряда.



## Диск:

Уже при решении задачи о нахождении поля такого симметричного распределения заряда, как у равномерно заряженного диска, теорема Гаусса оказывается бессильной. В этом случае конфигурация поля достаточно сложная, и замкнутой поверхности, обладающей необходимой для простоты вычисления потока вектора  $\mathbf{E}$  формой, здесь нет.

**Поле бесконечного круглого цилиндра**, заряженного равномерно по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд  $\lambda$ .

Из соображений симметрии следует, что поле здесь имеет радиальный характер, т. е. вектор  $\mathbf{E}$  в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра, а модуль вектора  $\mathbf{E}$  зависит только от расстояния  $r$  до оси цилиндра. Это подсказывает, что замкнутую поверхность здесь надо взять в форме коаксиального прямого цилиндра (рис. 1.9). Тогда

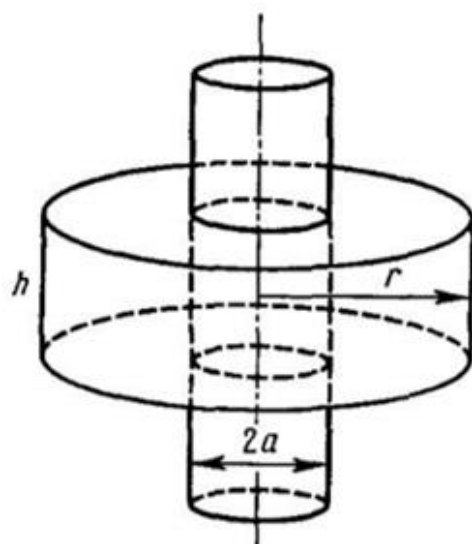


Рис. 1.9

поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь торцы этого цилиндра равен нулю, а через боковую поверхность  $E_r 2\pi r h$ , где  $E_r$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$ , совпадающий по направлению с нормалью  $\mathbf{n}$  к боковой поверхности цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $h$ . По теореме Гаусса для случая  $r > a$  имеем  $E_r \cdot 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0$ , откуда

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (r > a). \quad (1.12)$$

При  $\lambda > 0$  и  $E_r > 0$ , т. е. вектор  $\mathbf{E}$  направлен от заряженного цилиндра, и наоборот.

Если  $r < a$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому в этой области  $E = 0$  независимо от  $r$ . Таким образом, внутри равномерно заряженного по поверхности круглого бесконечного цилиндра поля нет.

**3. Электрический диполь. Дипольный момент.**

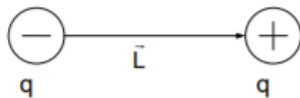
**Напряженность и потенциал поля диполя. Поведение диполя во внешнем однородном и неоднородном эл. поле. Энергия и момент действующих сил для диполя во внешнем эл. поле.**



## Электрический диполь. Дипольный момент.

### Напряженность и потенциал поля диполя.

**Электрическим диполем** называется система из двух одинаковых точечных электрических зарядов  $q$  противоположного знака (рис), расположенных на



расстоянии  $L$  друг от друга.

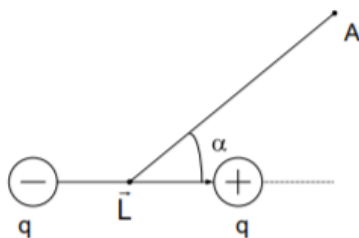
Электрическим **моментом диполя** или дипольным моментом называют вектор  $\vec{p} = q\vec{L}$ .

Вектор  $L$ , направленный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется плечом диполя (рис).

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha},$$

**Напряженность** поля диполя

где  $p$  - электрический момент диполя;  $r$  - модуль радиус-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность в которой нас интересует;  $\alpha$ - угол между радиус-вектором  $r$  и плечом диполя  $L$  (рис).



Напряженности на оси диполя ( $\alpha = 0$ ) и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленному из его середины ( $\alpha = \pi/2$ ), соответственно

$$E_{\alpha=0} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \quad E_{\alpha=\pi/2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}.$$

равны

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha.$$

**Потенциал** поля диполя

Потенциалы на оси диполя ( $\alpha = 0$ ) и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленному из его середины ( $\alpha = \pi/2$ ), соответственно

$$\varphi_{\alpha=0} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}; \quad \varphi_{\alpha=\pi/2} = 0.$$

равны

**Поведение диполя во внешнем однородном и неоднородном эл. поле. Энергия и момент действующих сил для диполя во внешнем эл. поле.**

Теперь изучим поведение диполя во внешнем электрическом поле. Пусть диполь помещен в однородное электрическое поле (см. рис. 1.16).

На диполь действует момент электрической силы

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2, \quad (1.44)$$

где  $\mathbf{F}_1 = q\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}_2 = -q\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$ , откуда  $\mathbf{N} = 2q\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E}$ , или

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (1.45)$$

где электрический момент диполя  $\mathbf{p} = 2q\mathbf{r}_1$ .

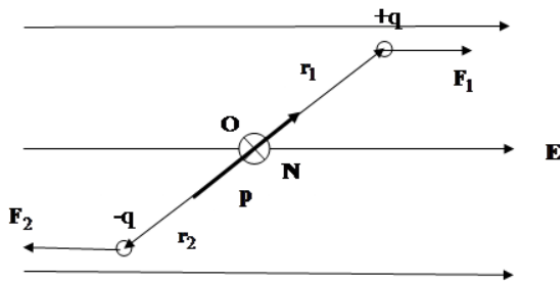


Рис. 1.16. Диполь в однородном поле

Момент сил (1.45) стремится повернуть диполь так, чтобы его электрический момент  $\mathbf{p}$  установился в направлении электрического поля  $\mathbf{E}$ .

Найдем потенциальную энергию, которой обладает диполь во внешнем электрическом поле (см. рис. 1.17):

$$W_{\Pi} = q\varphi_+ - q\varphi_-. \quad (1.46)$$

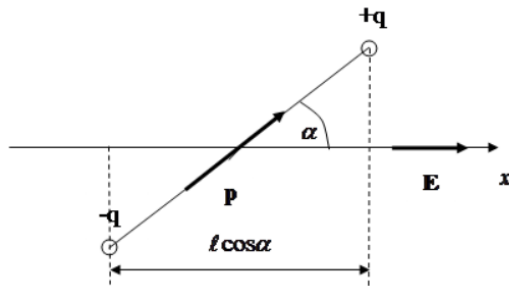


Рис. 1.17. К расчету потенциальной энергии диполя во внешнем поле

Потенциал однородного поля убывает линейно в направлении вектора  $\mathbf{E}$ . Поэтому

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{d\varphi}{dx} l \cos \alpha = -El \cos \alpha. \quad (1.47)$$

Подставим (1.47) в (1.46), найдем

$$W_{\Pi} = -qEl \cos \alpha = -pE \cos \alpha, \quad (1.48)$$

или в векторных обозначениях

$$W_{\Pi} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.49)$$

Формулы (1.45) и (1.49) остаются справедливыми и в неоднородном электрическом поле, так как размером диполя  $\ell$  пренебрегается по сравнению с характерным размером неоднородности поля.

В неоднородном внешнем электрическом поле на диполь действует сила

$$\mathbf{F} = -\text{grad}(W_{\Pi}) = \text{grad}(\mathbf{p}\mathbf{E}). \quad (1.50)$$

Формула (1.50) показывает, что в неоднородном поле на диполь действует сила, направленная в сторону наиболее быстрого уменьшения потенциальной энергии диполя в этом поле. Сила  $\mathbf{F}$  приводит диполь в поступательное движение. Проиллюстрируем данный вывод на конкретных примерах (см. рис. 1.18).

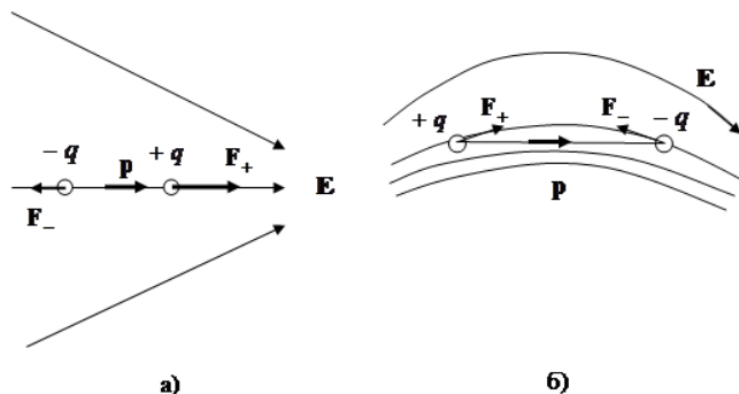


Рис. 1.18. Поведение диполя в неоднородном поле

В случае рис. 1.18, а диполь втягивается в область более сильного поля, так как  $|\mathbf{F}_+| > |\mathbf{F}_-|$ , и сила  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-$ , действующая на диполь, направлена слева направо. Аналогично можно показать, что диполь, ориентированный против поля, выталкивается из поля. В случае рис. 1.18, б сила  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_-$ , действующая на диполь, направлена вверх (в направлении ослабления поля) – диполь смещается вверх, параллельно самому себе.

## 4. Полярные и неполярные молекулы.

**Поляризуемость молекул. Качественное поведение вещества в электрическом поле (ЭП). Диэлектрики, пьезоэлектрики и сегнетоэлектрики. Гистерезис в сегнетоэлектриках.**

### Полярные и неполярные молекулы.

Молекулы могут быть полярными и неполярными. У полярных молекул центр «тяжести» отрицательного заряда сдвинут относительно центра тяжести положительных зарядов, в результате чего они обладают собственным дипольным моментом  $\mathbf{P}$ .

Неполярные молекулы собственным дипольным моментом не обладают: у них центры тяжести положительного и отрицательного зарядов совпадают.

## Поляризуемость молекул. Качественное поведение вещества в электрическом поле (ЭП).

**Поляризация.** Под действием внешнего электрического поля происходит *поляризация* диэлектрика. Это явление заключается в следующем. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в пределах каждой молекулы происходит смещение зарядов — положительных по полю, отрицательных против поля. Если же диэлектрик состоит из полярных молекул, то при отсутствии внешнего поля их дипольные моменты ориентированы совершенно хаотически (из-за теплового движения). Под действием же внешнего поля дипольные моменты ориентируются преимущественно в направлении внешнего поля. Наконец, в диэлектрических кристаллах типа NaCl при включении внешнего поля все положительные ионы смещаются по полю, отрицательные — против поля\*.

Таким образом, механизм поляризации связан с конкретным строением диэлектрика. Однако для дальнейшего существенно лишь то, что независимо от механизма поляризации в этом процессе все положительные заряды смещаются по полю, а отрицательные — против поля. Заметим, что смещения зарядов в обычных условиях весьма малы даже по сравнению с размерами молекул, это связано с тем, что напряженность внешнего поля, действующего на диэлектрик, значительно меньше напряженности внутренних электрических полей в молекулах.

## Диэлектрики, пьезоэлектрики и сегнетоэлектрики. Гистерезис в сегнетоэлектриках.

**Диэлектриками** (или изоляторами) называют вещества, практически не проводящие электрического тока. Это значит, что в диэлектриках в отличие, например, от проводников нет зарядов, способных перемещаться на значительные расстояния, создавая ток. При внесении даже нейтрального диэлектрика во внешнее электрическое поле обнаруживаются существенные изменения как в поле, так и в самом диэлектрике; последнее следует хотя бы из того, что на диэлектрик

начинает действовать сила, увеличивается емкость конденсатора при заполнении его диэлектриком и др.

**Пьезоэлектриками** называется группа кристаллических диэлектриков, у которых в отсутствие внешнего электрического поля при механических деформациях в определенных направлениях на гранях кристаллов возникают электрические заряды противоположных знаков.

**Сегнетоэлектрики** – это кристаллические диэлектрики, обладающие в определенном диапазоне температур и в отсутствие внешних электрических полей спонтанной электрической поляризацией, т.е. электрическим дипольным моментом.

**Связь между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$ .** Как показывает опыт, для обширного класса диэлектриков и широкого круга явлений поляризованность  $\mathbf{P}$  зависит *линейно* от напряженности  $\mathbf{E}$  поля в диэлектрике. Если диэлектрик изотропный и  $\mathbf{E}$  не слишком велико, то

$$\mathbf{P} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

где  $\kappa$  — безразмерная величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью* вещества.

Существуют, однако, и диэлектрики, для которых (3.5) не применимо. Это некоторые ионные кристаллы и электреты а также *сегнетоэлектрики*. У сегнетоэлектриков связь между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  *нелинейная* и зависит, кроме того, от предыстории диэлектрика, т. е. от предшествующих значений  $\mathbf{E}$  (это явление называют *гистерезисом*).

Существуют ионные кристаллы, поляризованные даже при отсутствии внешнего поля. Этим же свойством обладают диэлектрики, называемые *электретами* (они подобны постоянным магнитам).



## 5. Вектор поляризации диэлектрика. Диэлектрическая восприимчивость вещества. Вектор электрической индукции. Связь $\underline{E}$ , $\underline{D}$ и $\underline{P}$ . Теорема Гаусса для диэлектрика. Условия для $\underline{E}$ , $\underline{D}$ на границе раздела диэлектриков.

Во внешнем электрическом поле молекулы–диполи ориентируются вдоль поля. Объемная плотность электрических зарядов внутри диэлектрика равна нулю. На границах диэлектрика появляются связанные (поляризационные) заряды с поверхностной плотностью  $\sigma'$ . Диэлектрик поляризуется.

При однородной поляризации поляризованность (**вектор поляризации**) есть суммарный электрический момент единицы объема диэлектрика

$$\underline{P} = \frac{\sum \underline{p}_i}{\Delta V}$$

где  $\underline{p}_i$  – электрический момент  $i$ -ой молекулы диполя,  $\Delta V$  – объем диэлектрика. Единица поляризованности кулон на метр квадратный. Связь поляризованности  $\underline{P}$  с вектором напряженности электрического поля в диэлектрике  $\underline{E}$ , если диэлектрик изотропный и  $E$  не слишком велико

$$\underline{P} = \chi \varepsilon_0 \underline{E}$$

где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, равная  $\chi = \varepsilon - 1$ . Эта величина не зависит от  $E$ , она характеризует свойства самого диэлектрика и всегда больше нуля.

Поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma'$  равна нормальной составляющей вектора поляризованности  $\underline{P}$

$$\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E$$

Для расчета поля в диэлектрике вводят вспомогательный вектор электрического смещения  $\underline{D}$  (или **вектор электрической индукции**)

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

Между векторами  $\underline{D}$  и  $\underline{E}$  существует **связь**

$$\underline{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \underline{E}$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость вещества,  $\underline{E}$  – напряженность поля в диэлектрике, которая меньше напряженности поля в вакууме  $\underline{E}_0$  в  $\varepsilon$  раз ( $\underline{E} = \underline{E}_0 / \varepsilon$ )

**Теорема Гаусса:** поток  $\Phi_D$  вектора электрического смещения  $\underline{D}$  через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, заключенных внутри этой поверхности:

$$\Phi_D = \sum_i q_i \text{ или}$$

$$\Phi_D = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_{св} dV.$$

Тангенциальная составляющая вектора  $\underline{E}$  оказывается одинаковой по обе стороны раздела (нет скачка).

Если на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков стороннего заряда нет, то при переходе этой границе тангенциальные составляющие  $E_\tau$ ,  $D_\tau$  изменяются непрерывно, без скачка. Составляющие же  $E_n$ ,  $D_n$  претерпевают скачок.

(объяснение этого вывода)

**Условие для вектора  $\underline{E}$ .** Пусть поле вблизи границы раздела в диэлектрике 1 равно  $\underline{E}_1$ , а в диэлектрике 2 —  $\underline{E}_2$ . Возьмем небольшой вытянутый прямоугольный контур, ориентируя его так, как показано на рис. 3.7.

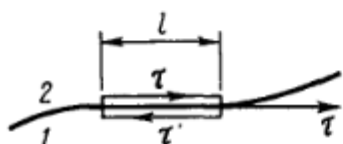


Рис. 3.7

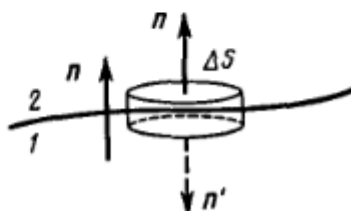


Рис. 3.8

Стороны контура, параллельные границе раздела, должны иметь такую длину, чтобы в ее пределах поле  $\underline{E}$  в каждом диэлектрике можно было считать одинаковым, а «высота» контура должна быть пренебрежимо малой. Тогда согласно теореме о циркуляции вектора  $\underline{E}$

$$E_{2\tau} l + E_{1\tau'} i = 0,$$

где проекции вектора  $\underline{E}$  взяты на направление обхода контура, указанное на рисунке стрелками. Если на нижнем участке контура проекцию вектора  $\underline{E}$  взять не на орт  $\tau'$ , а на общий орт  $\tau$ , то  $E_{1\tau'} = -E_{1\tau}$  и из предыдущего уравнения следует, что

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}, \quad (3.22)$$

т. е. тангенциальная составляющая вектора  $\underline{E}$  оказывается одинаковой по обе стороны границы раздела (не претерпевает скачка).

**Условие для вектора  $\mathbf{D}$ .** Возьмем очень малой высоты цилиндр, расположив его на границе раздела двух диэлектриков (рис. 3.8). Сечение цилиндра должно быть таким, чтобы в пределах каждого его торца вектор  $\mathbf{D}$  был одинаков. Тогда согласно теореме Гаусса для вектора  $\mathbf{D}$

$$D_{2n} \Delta S + D_{1n} \Delta S = \sigma \Delta S,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела. Взяв обе проекции вектора  $\mathbf{D}$  на общую нормаль  $\mathbf{n}$  (она направлена от диэлектрика  $I$  к диэлект-

74

рику 2), получим  $D_{1n} = -D_{2n}$ , и предыдущее уравнение можно привести к виду

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma.} \quad (3.23)$$

Из этого соотношения видно, что нормальная составляющая вектора  $\mathbf{D}$ , вообще говоря, претерпевает скачок при переходе границы раздела. Однако если сторонние заряды на границе раздела отсутствуют ( $\sigma = 0$ ), то

$$\boxed{D_{1n} = D_{2n},} \quad (3.24)$$

в этом случае нормальные составляющие вектора  $\mathbf{D}$  скачка не испытывают, они оказываются одинаковыми по разные стороны границы раздела.

Таким образом, если на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков сторонних зарядов нет, то при переходе этой границы составляющие  $E_{\tau}$  и  $D_n$  изменяются непрерывно, без скачка. Составляющие же  $E_n$  и  $D_{\tau}$  претерпевают скачок.

**6. Проводники в э/с поле. Электрическая индукция. Эквипотенциальность проводника в э/с поле. Э/с защита. Поле у поверхности проводника. Емкость. Емкость проводника. Конденсатор и его емкость. Емкость плоского, сферического и цилиндрического конденсатора. Соединения конденсаторов. Энергия плоского конденсатора и объемная плотность энергии электрического поля.**

При внесении любого вещества в электрическое поле в веществе происходит смещение положительных и отрицательных зарядов (ядер и электронов), что в свою очередь приводит к частичному разделению этих зарядов. В тех или иных местах вещества появляются нескомпенсированные заряды различного знака. Это явление называют **электростатической индукцией**, а появившиеся в результате разделения заряды - индуцированными зарядами.

Индуцированные заряды создают дополнительное электрическое поле, которое вместе с исходным (внешним) электрическим полем образуют результирующее поле.

В проводниках большая доля зарядов может перемещаться внутри вещества. При помещении проводника во внешнее электрическое поле на границах проводника возникают индуцированные заряды противоположных знаков, поле которых противоположно внешнему, что приводит к ослаблению внешнего поля.

Напряженность электрического поля **внутри** проводника, помещенного в электростатического поле, равна нулю

$$\underline{E} = 0$$

Свободные заряды внутри проводника отсутствуют, а распределяются только по его поверхности. Силовые линии вблизи проводника перпендикулярны к его поверхности.

Напряженность **вблизи поверхности проводника** (вне его) равна

$$E = \sigma / \varepsilon_0$$

где  $\sigma$ - поверхностная плотность зарядов на поверхности проводника.  
Потенциалы всех точек поверхности проводника (и внутри него)  
одинаковы, т.е. поверхность проводника является **эквипотенциальной**

$$\varphi = const$$

Соединение заряженного проводника с другим проводником приводит к перераспределению зарядов так, что потенциалы тел выравниваются.  
Поэтому потенциал заземленного проводника равен нулю (т.к. потенциал Земли равен нулю)

**Электростатическая защита** – защита приборов и оборудования, основанная на том, что напряженность электростатического поля внутри проводника равна нулю.( чувствительные приборы помещаются внутрь замкнутого металлического корпуса)

**Электрическая емкость** уединенного проводника - мера его способности накапливать электрический заряд (1 Ф)

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$$

где  $q$  – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору);  $\Delta\varphi$  - изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Величина  $C$  зависит от геометрических размеров, формы проводника и свойств среды, в которой находится уединенный проводник (или среды между обкладками конденсатора).

Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом  $R$ , находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$$

**Конденсатор** - система проводников, которая обладает емкостью гораздо большей, чем уединенный проводник, и притом не зависящая от окружающих тел. Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок) , расположенных на малом расстоянии друг от друга.

Емкость- основная характеристика конденсатора.

В отличие от емкости уединенного проводника под емкостью конденсатора понимают отношение заряда конденсатора к разности потенциалов между обкладками( эту разность называют напряжением)

$$C = \frac{q}{U}$$

Емкость зависит от размеров и формы обкладок, зазора между ними и от заполняющей конденсатор среды.



Электрическая емкость **плоского конденсатора**

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

где S - площадь одной пластины конденсатора, d - расстояние между пластинами, - диэлектрическая постоянная среды внутри конденсатора.

Электрическая емкость **сферического конденсатора** (две концентрические сферы радиусами R1 и R2, пространство между которыми заполнено средой с диэлектрической проницаемостью )

$$C = \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

где R1 - радиус внутренней сферы, R2 - радиус внешней сферы.

Емкость **цилиндрического конденсатора** (два коаксиальных цилиндра длиной L и радиусами R1 и R2, пространство между которыми заполнено средой с диэлектрической проницаемостью )

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\ln(R_2/R_1)}$$

где R1 - радиус внутреннего цилиндра, R2 - радиус внешнего цилиндра.

При **последовательном соединении** конденсаторов емкость батареи C определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

При **параллельном соединении** конденсаторов емкость батареи C определяется соотношением

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

**Энергия плоского конденсатора**

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$$

**Объемная плотность энергии**

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} ED$$

где E – напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ; D – электрическое смещение (индукция).

## 7. Сила и плотность электрического тока.

**Напряжение, разность потенциалов и э.д.с. Мощность тока. Правила Кирхгофа. Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной (локальной) формах. \*Квазинейтральность и релятивистская природа дифференциального закона Ома.** Соединения элементов цепи. Метод контурных токов.

Электрический ток- перенос заряда через ту или иную поверхность  $S$ . Количественной мерой электрического тока служит **сила тока  $I$** , т.е заряд переносимый сквозь рассматриваемую поверхность  $S$  в единицу времени:  $I = dQ/dt$

Электрический ток может быть распределен по поверхности, через которую он протекает, неравномерно. Поэтому и вводят **вектор плотности тока  $j$** . Модуль этого вектора численно равен отношению силы тока  $dI$  через элементарную площадку, расположенную в данной точке перпендикулярно направлению движения носителей, к ее площади

$$j = dI/dS \perp$$

За направление вектора  $j$  принимают направление вектора скорости  $u$  упорядоченного движения положительных носителей. Если носителями являются как положительные так и отрицательные заряды то

$$j = \rho_+ u_+ + \rho_- u_-$$

где  $\rho_+$  и  $\rho_-$  объемные плотности положительного и отрицательного зарядов - носителей,  $u$  - их скорости.

Поле вектора  $j$  изображается с помощью линий тока, которые проводят так же, как и линии вектора  $E$ .

Физическая величина, равная отношению работы  $A_{ст}$  сторонних сил при перемещении заряда  $q$  от отрицательного полюса источника тока к положительному к величине этого заряда, называется электродвижущей силой источника (ЭДС):

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q} \varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} \varepsilon = \oint E dl$$

Таким образом, ЭДС определяется работой, совершаемой сторонними  
Электрическая мощность — физическая величина, характеризующая скорость передачи или преобразования электрической энергии.

$$P=A/t= UI$$

**1-е правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле (точке разветвления), равна нулю.

**2-е правило:** алгебраическая сумма напряжений на резистивных элементах замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур.

**Закон Ома:** сила тока, протекающая по однородному проводнику, пропорциональна разности потенциалов на его концах ( напряжению  $U$ ):  
где  $R$  - электрическое сопротивление проводника.

$$I=U/R$$

в лок. форме  $j dS = \frac{E dl}{\rho dl/dS}$  или  $j=E/\rho = \sigma E$ . Свое название получило потому,

что в нем устанавливает связь между величинами, относящимся к одной и той же точке проводника.

$\sigma = 1/\rho$ - удельная электропроводимость среды.

**Закон Джоуля-Ленца:**  $Q' = RI^2$ . ( $Q'$  - тепловая мощность, теплота в единицу времени)

**в локальной форме** - удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности электрического тока и удельному сопротивлению среды в данной точке

$$Q'_{уд} = \rho j^2$$

При последовательном соединении проводников сила тока во всех проводниках одинакова:  $I_1 = I_2 = I$ .

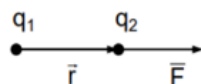
Общее напряжение  $U$  равно сумме напряжений

При последовательном соединении полное соо

### Закон Кулона.

Два точечных электрических заряда, расположенных в вакууме, взаимодействуют друг с другом с силой, определяемой законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = \frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21}$$



$\vec{F}$  – сила, с которой заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ . Если заряды одного знака, то скалярный коэффициент  $\frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon}$  в формуле положительный, и сила направлена  $\vec{r}$  (имеем силу отталкивания). Если заряды разные по знаку – имеем силу притяжения.

Величина силы убывает по закону обратных квадратов по мере удаления от заряда.

$$F_{12} = \frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{|q_1 q_2|}{r_{21}^2}$$

$k_{\varepsilon}$

– электрический коэффициент, который зависит от выбора системы единиц.

В СИ  $k_{\varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}}$ . В Гауссовой системе  $k_{\varepsilon} = 1$ .

Величина  $\varepsilon$  – безразмерный коэффициент, который называется относительной диэлектрической проницаемостью среды по сравнению с вакуумом. Среда ослабляет электрическое взаимодействие,  $\varepsilon$  – коэффициент такого ослабления.  $\varepsilon\varepsilon_0$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. С помощью закона Кулона можно описать поле простейшего источника электрического поля. В таком виде он справедлив только для точечных электрических зарядов.

противление цепи равно сумме сопротивлений отдельных проводников.

### Параллельное соединение

При параллельном соединении напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на обоих проводниках одинаковы:  $U = U_1 = \dots = U_n$

Сумма токов протекающих по проводникам, равна току в неразветвленной цепи:  $I = \sum_1^n I_n$

Величина, обратная общему сопротивлению цепи, равна сумме величин, обратных сопротивлениям параллельно включенных проводников.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

### Метод контурных токов

1. Обозначить стрелками предположительные направления токов, не задумываясь над тем, куда эти стрелки направить. Если в результате вычисления окажется, что такой-то ток положителен, то это значит, что его направление выбрано правильно. Если же ток окажется отрицательным, то его истинное направление противоположно направлению стрелки.

2. Выбрав произвольно замкнутый контур, все его участки следует обойти в одном направлении, например по часовой стрелке. Если предположительное направление некоторого тока совпадает с выбранным направлением обхода, то соответствующее слагаемое  $IR$  в уравнении (5.18) надо брать со знаком плюс, если же эти направления противоположны, то со знаком минус. Аналогично следует поступать и с  $\mathcal{E}$ : если какая-то э. д. с.  $\mathcal{E}$  повышает потенциал в направлении обхода, ее надо брать со знаком плюс, в противном случае — со знаком минус.

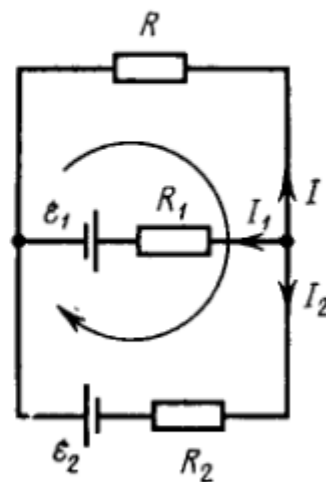


Рис. 5.8

## 8. Определение $\mathbf{B}$ как характеристики магнитного поля. Магнитный момент контура с током. Энергия и поведение магнитного момента во внешнем однородном и неоднородном магнитном поле.

Вектор  $\mathbf{B}$  характеризует силовое действие магнитного поля на движущийся заряд и является аналогом  $\mathbf{E}$  для электрического поля. Направление вектора  $\mathbf{B}$  можно определить с помощью магнитной стрелки. Вектор магнитной индукции всегда направлен вдоль стрелки от ее южного полюса к северному.

**Магнитный момент контура с током:**  $p_m = ISn$ , где  $I$  - сила тока,  $S$  - площадь, ограниченная контуром,  $n$  - нормаль к контуру. Используется для расчета силы, действующей на элементарный контур.



## 9. Основные законы магнитостатики: Био-Савара-Лапласа, принцип суперпозиции, теорема о циркуляции $\mathbf{B}$ и теорема Гаусса для $\mathbf{B}$ . Магнитный монополь. Расчет магнитного поля прямолинейного тока, тока по кольцу (на оси кольца), поля идеального соленоида. Магнитный момент как источник магнитного поля.

### Принцип суперпозиции:

Опыт дает, что для магнитного поля, как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: магнитное поле, создаваемое несколькими движущимися зарядами или токами, равно векторной сумме магнитных полей, создаваемых каждым зарядом или током в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}_i (\text{векторы})$$

### Закон Био-Савара:

Рассмотрим вопрос о нахождении магнитного поля, создаваемого постоянными электрическими токами. Этот вопрос будем решать, исходя

из закона 
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\mathbf{v} \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (1)$$

определяющего индукцию поля  $\mathbf{B}$  равномерно движущегося точечного заряда. Подставим в формулу вместо  $q$  заряд  $\rho dV$ , где  $dV$  - элементарный объем,  $\rho$  - объемная плотность заряда, являющегося носителем тока, и учтем, что  $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ . Тогда формула (1) приобретает следующий вид:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{j} \mathbf{r}] dV}{r^3}. \quad (2)$$

Если же ток  $I$  течет по тонкому проводу с площадью поперечного сечения  $\Delta S$ , то

$$\mathbf{j} dV = \mathbf{j} \Delta S dl = I d\mathbf{l}$$

где  $d\mathbf{l}$  - элемент длины провода. Введя вектор  $d\mathbf{l}$  в направлении тока  $I$ ; перепишем предыдущее равенство так:

$$\mathbf{j} dV = I d\mathbf{l}$$

Векторы  $j dV$  и  $I dl$  называют соответственно объемным и линейным элементами тока. Произведя в формуле (2) замену объемного элемента тока на линейный, получим:

$$\left[ d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [dl, r]}{r^3} \right] \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) выражают закон Био - Савара.

### **Теорема Гаусса для поля $\mathbf{B}$ .**

Поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

**Теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$**  (для магнитного поля постоянных токов в вакууме)

Циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  по произвольному контуру  $\Gamma$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром  $\Gamma$ :

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

где  $I = \sum I_k$ , причем  $I_k$  - величины алгебраические. Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта. Ток противоположного направления считается отрицательным.

### **Магнитное поле прямого тока:**

Пусть постоянный ток  $I$  течёт вдоль бесконечно длинного прямого провода, имеющего круглое сечение радиусом  $a$ . Найти индукцию  $\mathbf{B}$  поля снаружи и внутри провода. Из симметрии задачи следует, что линии вектора  $\mathbf{B}$  для круглого контура  $\Gamma$   $B * 2\pi r = \mu_0 I$ , откуда следует, что

$$B = (\mu_0/2\pi) I/r \quad (r \geq a).$$

**А внутри провода**

$$B = (\mu_0/2\pi) Ir/a^2 \quad (r \leq a).$$

### **Магнитное поле соленоида:**

Пусть ток  $I$  течет по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра. Такой обтекаемый током цилиндр называют *соленоидом*. Пусть на единицу длины соленоида приходится  $n$  витков проводника. Если шаг винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближённо заменить замкнутым витком. Будем также

предполагать, что сечение проводника настолько мало, что ток в соленоиде можно считать текущим по его поверхности.

Опыт и расчет показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше индукция магнитного поля снаружи него. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще.

**Внутри длинного соленоида:**

$$B_{\text{внутри}} = \mu_0 I \cdot \frac{N}{l} = \mu_0 n I,$$

$$B = \mu_0 n I$$

Произведение  $nl$  называют числом ампервитков.

**По определению, результирующий момент амперовых сил:**

$$\mathbf{M} = \oint [\mathbf{r}, d\mathbf{F}],$$

где  $d\mathbf{F}$  дается согласно закону Ампера. Для произвольной формы контура с током этот момент сил можно представить как:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m, \mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{p}_m$  - магнитный момент контура с током (для плоского контура  $p_m = ISn$ )

## 10. Силы Лоренца и Ампера. Объемная плотность силы Ампера. Консервативность и непотенциальность силы Лоренца. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле и скрещенных электрическом и магнитном полях. Ларморово вращение. Радиус и шаг ларморовой спирали. Магнитное взаимодействие токов. Закон Ампера.

**Сила Лоренца:**

Опыт показывает, что сила  $\mathbf{F}$ , действующая на точечный заряд  $q$ , зависит в общем случае не только от положения этого заряда, но и от его скорости  $\mathbf{v}$ . Соответственно этому силу  $\mathbf{F}$  разделяют на две составляющие - электрическую  $\mathbf{F}_a$  (она не зависит от движения заряда) и магнитную  $\mathbf{F}_m$  (она зависит от скорости заряда). В любой точке пространства направление и модуль магнитной силы зависят от скорости  $\mathbf{v}$  заряда,

причем, эта сила всегда перпендикулярна вектору  $v$ , кроме того, в любом месте магнитная сила перпендикулярна определенному в данном месте направлению и, наконец, ее модуль пропорционален той составляющей скорости, которая перпендикулярна этому выделенному направлению.

Все эти свойства магнитной силы можно описать, если ввести понятие магнитного поля. Характеризуя это поле вектором  $\mathbf{B}$ , определяющим выделенное в каждой точке пространства направление, запишем выражение для магнитной силы в виде:

$$\mathbf{F}_m = q [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Тогда полная электромагнитная сила, действующая на заряд  $q$ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{v} \mathbf{B}].$$

Ее называют **силой Лоренца**. Последнее выражение является универсальным: оно справедливо как для постоянных, так и для переменных электрических магнитных полей, причём при любых значениях скорости  $v$  заряда.

### **Закон Ампера:**

Каждый носитель тока испытывает действие магнитной силы. Действие этой силы передается проводнику, по которому заряды движутся. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током. Найдем эту силу.

Пусть объемная плотность заряда, являющегося носителем тока (электроны в металле, например) равна  $\rho$ . Выделим мысленно элемент объёма  $dV$  проводника. В нём находится заряд - носитель тока, равный  $\rho dV$ . Тогда сила, действующая на элемент  $dV$  проводника, может быть записана по формуле в виде:

$$d\mathbf{F} = \rho [\mathbf{u} \mathbf{B}] dV.$$

Так как  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$ , то

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{j} \mathbf{B}] dV.$$

Если ток течет по тонкому проводнику, то согласно  $j dV = Idl$

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

Эти формулы выражают закон Ампера.

### **Теорема Ампера:**

Магнитное поле предельно тонкого плоского магнита магнитного листка (тонкого магнита - двойного магнитного слоя образованного магнитными диполями - маленькими побочными магнитами) тождественна полю

замкнутого линейного тока, текущего по контуру листка, точнее, если сумма магнитных моментов магнитных диполей листка равна  $p_m$ , то эквивалентное листку поле создается током из уравнения  $p_m = IS$ ,  $S$  - площадь листка.

(Тут должно быть море инфы, но череп блять решил нам это не давать, а учебник нахуй послан)

## **11. Реакция вещества на внешнее магнитное поле. Гипотеза Ампера о токах намагничивания. Векторы намагниченности и напряженности магнитного поля. Теоремы о циркуляции для магнитного поля в веществе. Магнитная восприимчивость и проницаемость вещества. Диа-, пара- и ферромагнетики. Восприимчивость и гистерезис в ферромагнетиках**

### **Поле в магнетике:**

Если в магнитное поле, образованное токами в проводах, ввести то или иное вещество, поле изменится. Это объясняется тем, что всякое вещество является магнетиком, т.е. способно под действием магнитного поля намагничиваться - приобретать магнитный момент. Намагниченное вещество создает свое магнитное поле  $B'$ , которое вместе с первичным полем  $B_0$ , обусловленным токами проводимости, образует результирующее поле:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'.$$

Здесь под  $B'$  и  $B_0$  имеются в виду поля, усредненные по физически малому объекту.

Поле  $B'$ , как и поле  $B_0$  токов проводимости, не имеет источников (магнитных зарядов), поэтому для результирующего поля  $\mathbf{B}$  при наличии магнетика справедлива теорема Гаусса:

$$\oint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0.$$

Это означает, что линия вектора  $\mathbf{B}$  и при наличии вещества остаются всюду непрерывными.

### Намагниченность:

Степень намагниченности магнетика характеризуют магнитным моментом единицы объема. Эту величину называют намагниченностью и обозначают  $\mathbf{J}$ .

По определению:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum \mathbf{p}_m,$$

где  $\Delta V$  - физически бесконечно малый объем в окрестности данной точки,  $\mathbf{p}_m$  - магнитный момент отдельной молекулы. Суммирование проводится по всем молекулам в объеме  $\Delta V$ .

Намагниченность можно представить как:

$$\mathbf{J} = n \langle \mathbf{p}_m \rangle,$$

где  $n$  - концентрация молекул,  $\langle \mathbf{p}_m \rangle$  - средний магнитный момент одной молекулы.

### Циркуляция вектора $\mathbf{J}$ :

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{l} = I',$$

где  $I' = \int j' dS$ , причем интегрирование проводится по произвольной поверхности, натянутой на контур  $\Gamma$ .

### Теорема о циркуляции вектора $\mathbf{H}$ : (для магнитного поля постоянных токов)

В магнетиках, помещенных во внешнее магнитное поле, возникают токи намагничивания, поэтому циркуляция вектора  $\mathbf{B}$  теперь будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания, а именно:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I'),$$

где  $I$  и  $I'$  - токи проводимости и намагничивания, охватываемые заданным контуром  $\Gamma$ .

### Дифференциальная форма уравнения:

$$\nabla \times \mathbf{J} = \mathbf{j},$$



т.е. ротор намагниченности  $\mathbf{J}$  равен плотности тока намагничивания в той же точке пространства.

$$\mathbf{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_m = n \langle \vec{p}_m \rangle = \mu_0 \chi \mathbf{H}$$

- намагничивание;  $\chi$  - магн. воспр.  $> 0$  - пара,  $< 0$  - диа

(это из записей черепа)

$\mathbf{H}$  - напряженность магнитного поля

**Связь между  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{H}$ :**

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (1)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость, безразмерная величина, характерная для каждого данного магнетика (безразмерность  $\chi$  следует из того, что

согласно  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J},$  (2) размерности  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{J}$  одинаковы)

**Связь между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ :**

Для магнетиков, которые подчиняются зависимости (1), выражение (2) принимает вид  $(1 + \chi)\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ . Отсюда:

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H},$$

где  $\mu$  - магнитная проницаемость среды:

$$\mu = 1 + \chi$$

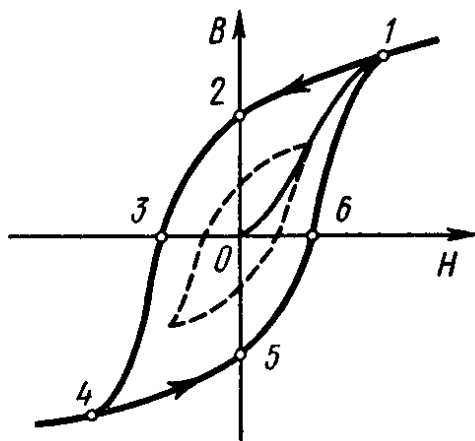
У парамагнетиков  $\mu > 1$ , у диамагнетиков  $\mu < 1$ , причем как у тех, так и у других  $\mu$  отличается от единицы весьма мало, т.е. магнитные свойства этих магнетиков выражены слабо.

**Диа-, пара- и ферромагнетики:**

В магнитном отношении все вещества можно разделить на слабомагнитные (парамагнетики и диамагнетики) и сильномагнитные (ферромагнетики). Пара- и диамагнетики при отсутствии магнитного поля, как мы знаем, не намагничены и характеризуются однозначной

зависимостью  $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$ , намагниченностью  $\mathbf{J}$  от  $\mathbf{H}$ .

Ферромагнетиками называют вещества (твёрдые), которые могут обладать спонтанной намагниченностью, т.е. намагничены уже при отсутствии внешнего магнитного поля. Типичные представители ферромагнетиков - это железо, кобальт и многие их сплавы.



### Магнитный гистерезис:

Кроме нелинейной зависимости  $B(H)$  или  $J(H)$  для ферромагнетиков характерно также явление магнитного гистерезиса: связь между  $B$  и  $H$  или  $J$  и  $H$  оказывается неоднозначной, а определяется предшествующей историей намагничивания ферромагнетика. Если первоначально намагниченный ферромагнетик намагничивать, увеличивая  $H$  от нуля

до значения, при котором наступает насыщение (точка 1), а затем уменьшать  $H$  от  $H_1$  до  $-H_1$ , то кривая намагничения  $B(H)$  пойдет не до первоначальному пути 10, а выше по пути 1 2 3 4. Если дальше изменять  $H$  в обратном направлении от  $-H_1$  до  $+H_1$ , то кривая намагничения пройдет ниже - по пути 4 5 6 1.

Получившуюся замкнутую кривую называют петлей гистерезиса. В том случае, когда в точках 1 и 4 достигается насыщение, получается максимальная петля гистерезиса. Когда же в крайних точках (1 и 4) насыщения нет, получаются аналогичные петли гистерезиса, но меньшего размера, как бы вписанные в максимальную петлю гистерезиса.

Из рис. 7.15 видно, что при  $H = 0$  намагничивание не исчезает (точка 2) и характеризуется величиной  $B_r$ , называемой остаточной индукцией. Ей соответствует остаточная намагниченность  $J_r$ . С наличием такого остаточного намагничивания связано существование постоянных магнитов. Величина  $B$  обращается в нуль (точка 3) лишь под действием поля  $H_c$ , имеющего направление, противоположное полю, вызвавшему намагничивание. Величина  $H_c$  называется коэрцитивной силой.

Значения  $B_r$  и  $H_c$  для разных ферромагнетиков меняются в широких пределах. Для трансформаторного железа петля гистерезиса узкая ( $H_c$  мало), для ферромагнетиков, используемых для изготовления постоянных магнитов - широкая.

### Гипотеза Ампера:

Предположение о том, что намагничивание тел объясняется круговыми внутри молекулярными (атомарными) токами.

**1. Движение проводников в магнитном поле. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Индукционная э.д.с. Электромагнитная индукция и магнитный поток. Закон Фарадея и правило Ленца. Консервативный характер индукционного процесса. Объединенный закон электромагнитной индукции – теорема о циркуляции  $\mathbf{E}$  нестационарного электромагнитного поля. Связь циркуляции с э.д.с. \*Единая природа электрического и магнитного поля, преобразования Лоренца для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Движение проводников в магнитном поле:**

При движении в магнитном поле за счет энергии поля работу совершает индукционная эдс  $\xi = - \frac{d\Phi_B}{dt}$ . Если ток в контуре  $I$ , то за время  $dt$  по нему пройдет заряд  $dQ = Idt$  и будет полем совершена работа:

$$\delta A_{\text{поле}} = -dW = \xi dQ = - \frac{d\Phi_B}{dt} Idt = - I d\Phi_B = - \frac{dLI^2}{2}$$

если процесс самоиндуктивный. Но механическая работа, обеспечивающая движение контура в поле

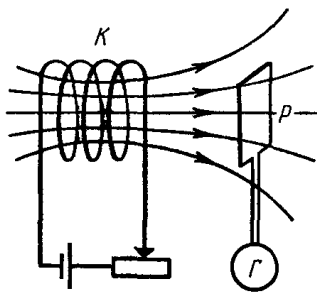
$\delta A_{\text{мех}} = +Id\Phi_B$  и совершает за счёт внешнего источника (её не сущ. без  $\mathbf{B}$ ) суммарная работа, связанная с полем  $\delta A_{\text{поле}} +$

$\delta A_{\text{мех}} = 0$  - см. св. силы Лор. (это я сука расшифровать не готов) //смотри св? силы Лоренца

### **Закон Фарадея:**

Фарадеем было сделано одно из наиболее фундаментальных открытий в электродинамике - **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток - его называли **индукционным**.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает эдс индукции  $\xi_i$ . При этом весьма замечателен тот факт, что  $\xi_i$  совершенно не зависит от того, каким образом осуществляется изменение магнитного потока  $\Phi$ , и определяется лишь скоростью его изменения, т.е. величиной  $\frac{d\Phi}{dt}$ . И ещё, изменение знака производной  $\frac{d\Phi}{dt}$  приводит к изменению знака или “направления”  $\xi_i$ .



Фарадей обнаружил, что индукционный ток можно вызвать двумя различными способами:

**1-ый способ:**

перемещение рамки Р (или отдельных ее частей) в поле неподвижной катушки К.

**2 -ой способ:**

рамка Р неподвижна, но изменяется магнитное поле - или за счет движения катушки К, или вследствие изменения силы тока  $I$  в ней, или в результате того и другого вместе.

Во всех этих случаях гальванометр будет Г будет показывать наличие индукционного тока в рамке Р.

**Правило Ленца:**

Индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине, его вызывающей.

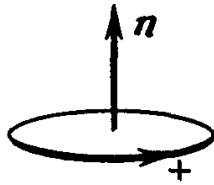
Иначе говоря, индукционный ток создает магнитный поток, препятствующий изменению магнитного потока, вызывающего эдс индукции.

**Закон электромагнитной индукции:**

Согласно этому закону, какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре эдс индукции определяется формулой:

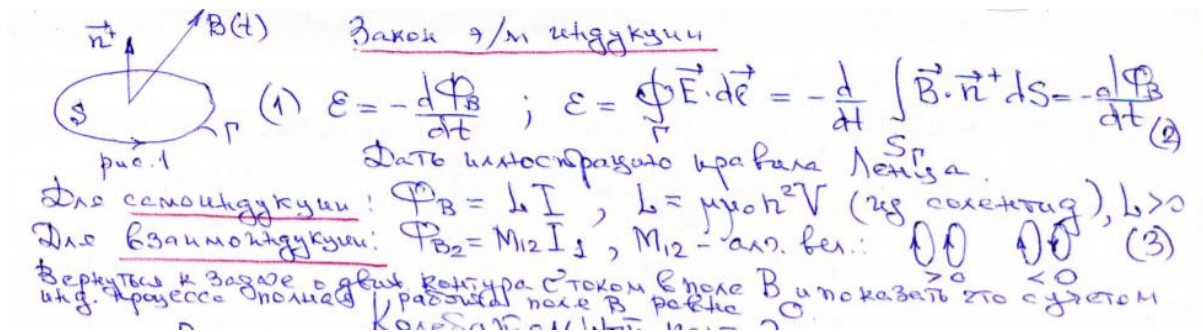
$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Здесь предполагается, что направление нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  и положительное направление обхода контура связаны друг с другом правилом правого винта.



Поэтому, выбирая (произвольно) направление нормали, мы определяем как знак потока  $\Phi$  так и знак эдс индукции. При сделанном нами выборе положительных направлений - в соответствии с правилом правого винта - величины  $\xi_i$  и  $\frac{d\Phi}{dt}$  имеют противоположные знаки.

**Объединенный закон электромагнитной индукции – теорема о циркуляции  $\mathbf{E}$  нестационарного электромагнитного поля.**



Согласно Максвеллу изменяющееся со временем магнитное поле порождает электрическое поле. Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  этого поля по любому неподвижному контуру определяется как:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  по контуру даёт по определению величину эдс индукции. В нашем случае:

$$\mathcal{E}_i = - vBl,$$

где знак минус поставлен в связи с принятым правилом знаков: (по часовой стрелке)

## **Единая природа электрического и магнитного поля, преобразования Лоренца для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ .**

Максвелл предположил, что изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве электрического поля, независимо от наличия проводящего контура. Последний лишь позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование это электрического поля.

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t.$$

Это уравнение выражает локальную связь между электрическим и магнитным полями: изменение поля  $\mathbf{B}$  во времени в данной точке определяет ротор поля  $\mathbf{E}$  в этой же точке. Отличие же  $\nabla \times \mathbf{E}$  от нуля свидетельствует о наличии самого электрического поля.

## **2. Самоиндукция. Э.д.с. самоиндукции.**

**Индуктивность контура и коэффициент взаимной индукции контуров. Индуктивность идеального соленоида. Энергия магнитного поля. Свернутая форма закона электромагнитной индукции. Правило направлений.**

Электромагнитная индукция возникает во всех случаях, когда изменяется магнитный поток через контур. Изменение тока в контуре ведет к возникновению ЭДС индукции в этом же контуре. Это явление и называется **самоиндукцией**.

**ЭДС самоиндукции:**  $\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (LI)$ , где  $L$  - **индуктивность** контура,  $I$  - ток, протекающий в контуре.

Если при изменении тока  $L$  постоянна (не меняется конфигурация контура и нет ферромагнетиков)  $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$ .

Знак минус показывает, что ЭДС всегда направлена против изменения силы тока.

Так как  $\Phi$  и  $L$  всегда имеют одинаковые знаки,  $L$  - существенно положительная величина. **Индуктивность** зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Измеряется в Генри (Гн).

Если между контурами существует магнитная связь, то при изменении тока в одном, в другом возникает ЭДС индукции.



$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI}{dt}$ ,  $\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI}{dt}$ ,  $L_{12} = L_{21}$  - коэффициент взаимной индукции.

Энергия магнитного поля:  $W = \int \frac{BH}{2} dV$ , где В - магнитная индукция, Н - напряженность магнитного поля.

Правило направлений: Индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.

Индуктивность идеального соленоида:  $L = \mu\mu_0 n^2 V$ .

### **3. Линейные цепи переменного тока. R-L и R-C цепочки. Действие индуктивности и емкости на поведение электрического тока. Время релаксации тока и заряда конденсатора.**

#### **RC- и RL-цепи**

*Если цепь состоит из резисторов и конденсаторов (RC-цепь) или из резисторов и катушек индуктивности (RL-цепь), то в ней могут происходить только релаксационные неперiodические процессы.*

В зависимости от сложности цепи, уравнение цепи может быть любого порядка, начиная с первого.

В курсе общей физики рассматриваются только такие цепи, в которых уравнение цепи является дифференциальным уравнением либо первого, либо второго порядка.

**Уравнение цепи первого порядка** В этом случае уравнение цепи можно записать в виде:

$$\frac{dX}{dt} + \frac{1}{\tau} [X - X_{\infty}] = 0.$$

Решение такого уравнения имеет следующий вид

$$X(t) = X_{\infty} + Ae^{-t/\tau},$$

где А — константа, определяемая из начального условия  $X(0)$ . Так как  $X(0) = X_{\infty} + A$ , решение уравнения (11.9) окончательно можно записать следующим образом:

$$X(t) = X_{\infty} - [X_{\infty} - X(0)]e^{-t/\tau}.$$

Например, если в качестве исследуемой величины выбрана сила тока в цепи, то уравнение цепи имеет вид

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{\tau} [I - I_{\infty}] = 0,$$

а его решение

$$I(t) = I_{\infty} - [I_{\infty} - I(0)]e^{-t/\tau}.$$

Величина  $\tau$ , входящая в уравнение (11.9) и в его решение (11.10) определяет время, за которое величина  $|X(t) - X_{\infty}|$  уменьшается в  $e$  раз. Эта величина называется временем релаксации. Она является одной из основных характеристик цепи, определяется только параметрами цепи и не зависит от начальных условий.

### Уравнение цепи второго порядка

Его можно представить в виде: 2

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\beta \frac{dX}{dt} + \Omega^2 (X - X_{\infty}) = 0.$$

Решением этого уравнения является функция

$$X(t) = X_{\infty} + A_1 e^{-\beta_1 t} + B_1 e^{-\beta_2 t}, \quad \beta_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega^2},$$

в которой константы  $\Omega$  и  $\beta$  определяются параметрами самой цепи, а константы  $A_1$  и  $B_1$  находятся из начальных условий. При  $t \rightarrow \infty$  значение исследуемой величины, как следует из (11.10) и (11.12), стремится к установившемуся значению  $X_{\infty}$ . Таким образом, решение уравнения цепи в обоих случаях описывает переходный процесс установления силы тока в цепи (или напряжения на элементах цепи) после скачкообразного изменения параметров (например, замыкания или размыкания ключа).

## 4. Линейный колебательный контур (R-L-C цепочка).

### Идеальный колебательный контур Томпсона.

### Незатухающие колебания. Период. Превращения энергии во время колебаний.

Линейная цепь с катушкой индуктивности  $L$ , конденсатора емкости  $C$  и сопротивления  $R$  называется **линейным колебательным контуром**, так как в ней могут возникнуть колебания электрического тока.

### Превращение энергии во время колебаний:

Вначале вся энергия сосредоточена в конденсаторе. После замыкания ключа ток начинает течь по катушке. Электрическая энергия конденсатора начнет превращаться в магнитную энергию катушки. После того как в

конденсаторе закончится энергия, ток, не меняя направление, будет заряжать конденсатор, разряжая катушку. Если при этом есть ненулевое  $R$ , то ток будет еще и превращаться в джоулеву теплоту.

Если  $R = 0$ , то контур называется **идеальным колебательным контуром Томпсона** у колебания в нем **незатухающие**.

Период таких колебаний:  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

## **5. Поведение тока и заряда конденсатора в неидеальном контуре. Свободные затухающие колебания и апериодическое затухание. Условия возникновения. Фазовый сдвиг $i(t)$ и $q(t)$ . Период, частота, коэффициент затухания, декремент и логарифмический декремент колебаний.**

При наличии активного сопротивления, ток в контуре опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\frac{\pi}{2}$ .

Свободные электромагнитные колебания будут затухающими, если энергия запасенная в контуре с ненулевым омическим сопротивлением  $R$  постепенно уменьшается.

$$q(t) = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0)$$

где  $\omega$  частота затухающих колебаний, равная

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta_0^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Амплитуда равна  $A = q_m e^{-\beta t}$

**Период затухающих колебаний**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta_0^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

**Коэффициент затухания  $\beta$** - это величина, обратная времени релаксации  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний уменьшится в  $e$  раз.

$$\beta = \frac{1}{\tau}$$

Если  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , то вместо колебаний в контуре будет происходить **апериодический** разряд конденсатора ( $T \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0$ ). Активное

сопротивление контура, при котором наступает аperiodический процесс, называют критическим .

$$R_{кр} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Закон изменения тока при затухающих колебаниях можно представить в виде

$$i = \omega_0 q_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\beta}{\omega} = \arctg \frac{R}{2L\omega}$$

Так как  $2 \sin(\omega t + \varphi) = \cos(\omega_0 t - (\frac{\pi}{2} - \varphi))$  , то колебания тока в контуре с сопротивлением R отстают по фазе от колебаний заряда меньше, чем на  $\frac{\pi}{2}$ .

**Декремент затухания**  $\delta$  равен отношению двух последовательных значений амплитуды заряда, напряжения или тока, отстоящих друг от друга на время, соответствующее периоду T.

**Логарифмический декремент затухания**  $\delta$  равен натуральному логарифму отношения двух последовательных значений амплитуды заряда, напряжения или тока, отстоящих друг от друга на время, соответствующее периоду T:

$$\delta = \ln \frac{q_t}{q_{t+T}} = \ln \frac{q_m e^{-\beta t}}{q_m e^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

Логарифмический декремент затухания – величина обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации  $\tau$

$$\delta = \frac{1}{N_e}$$

**6. Вынужденные колебания. Добротность колебательного контура. Резонанс. Условия наблюдения. Резонансные условия для тока в контуре и заряда на конденсаторе.**

Электромагнитные колебания, обусловленные действием внешней э.д.с.  $\varepsilon$ , называются **вынужденными**.

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega_b t$$

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi)$$

где  $q_m$  максимальное значение заряда на конденсаторе;  $\psi$  - разность фаз между колебаниями заряда и внешней э.д.с.  $\mathcal{E}$ ,  $\omega$  - циклическая частота внешней э.д.с.

**Добротность**  $Q$  колебательного контура

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e$$

Чем меньше затухание, тем больше добротность контура  $Q$

При малых затуханиях - 
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Явление резонанса** - это возбуждение сильных колебаний (возрастание амплитуды) при частоте внешней э.д.с., равной или близкой к собственной частоте колебательного контура.

Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ .

Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

$$\omega_{I\text{рез}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Максимум при резонансе оказывается тем выше, чем меньше коэффициент затухания  $\beta = \frac{R}{LC}$

Максимум амплитуды заряда достигается при резонансной частоте

$$\omega_{q\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

которая по мере уменьшения  $\beta$  все больше приближается к  $\omega_0$ .

## 7. Система интегральных уравнений единого электромагнитного поля. Ротор векторного поля и его связь с циркуляцией. Локальная (дифференциальная) форма системы уравнений единого э.м. поля.

### Некорректность в математическом смысле системы и корректировка Максвелла. Физические следствия корректировки. Ток смещения, проводимости и полный ток.

Система Максвелла (дифференциальная форма):

$$(1) \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \underline{D} = \rho \quad (\underline{D} - \text{электрическая индукция})$$

$$(3) \quad \operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$(5) \quad \underline{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \underline{E}$$

(Интегральная форма записи):

$$(1') \quad \oint_S \underline{B} * \underline{n} dS = 0 - \text{Закон Гаусса для магнитного поля}$$

$$(2') \quad \oint_S \underline{D} * \underline{n} dS = Q - \text{Закон Гаусса}$$

$$(3') \quad \oint_l \underline{H} d\underline{l} = I + \frac{d}{dt} \oint_S \underline{D} dS - \text{Теорема о циркуляции магнитного поля}$$

$$(4') \quad \oint_l \underline{E} d\underline{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \underline{B} dS - \text{Закон индукции Фарадея}$$

$$Q = \int_v \rho dv, I = \oint_S \underline{j} dS$$

Из (2) и (4):

$$\operatorname{div} \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

$\operatorname{div} \underline{j}_\Sigma$  (полный ток) = 0 — нет источника сил. Линии непрерывны.

(3) умножим на  $\underline{E}$ , (4) умножим на  $\underline{H}$  и просуммируем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\underline{B} * \underline{H} + \underline{D} * \underline{E}}{2} = (\underline{E} * \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} * \operatorname{rot} \underline{E})^* - \underline{j} * \underline{E}$$

$$* = -\operatorname{div}[\underline{E}, \underline{H}]$$

Ток смещения



$$\oint_l \underline{B} d\underline{l} = \mu_0 (I_{\text{макро}} + I_{\text{микро}})$$

Постулируется: линии тока проводимости на границах обкладок конденсатора переходят в линии тока смещения  
Сумма тока проводимости и тока смещения называют полным током.

## **8. Потенциальная и вихревая компоненты поля.**

### **Теорема Гельмгольца для векторных полей. Полнота системы уравнений Максвелла. Незамкнутость системы Максвелла. Уравнение неразрывности для объемной плотности заряда как следствие системы.**

Теорема Гельмгольца:

$$\underline{a}(\underline{r}) = -\nabla\varphi + \text{rot } \underline{b}(\underline{r}) \quad (1)$$

Заметим  $\text{rot } \underline{b} = \underline{\nabla} \times \underline{b}$

$$\text{div } \underline{b} = \underline{\nabla} \cdot \underline{b}$$

$$(2) \text{div rot } \underline{b} = 0, (\underline{c}, \underline{c} \times \underline{b}) = 0$$

$$\text{rot grad } f = 0, \underline{c} \times \underline{c} = 0$$

Поэтому в поле (1) выделяются потенциальная и вихревая составляющие

$$\text{div } \underline{a} = -\Delta\varphi \Rightarrow \varphi \quad (3)$$

$$\text{rot } \underline{a} = \text{rot rot } \underline{b} = \underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \times \underline{b} = \text{grad}(\text{div } \underline{b}) - (\underline{\nabla}, \underline{\nabla})\underline{b} = \text{grad div } \underline{b} - \Delta \underline{b}$$

обычно для  $\underline{b}$  используют условие вихревой функции (обнуление потенциальной части)

$$\text{rot } \underline{a} = -\Delta \underline{b} \Rightarrow \underline{b} \quad (4)$$

$\varphi$  и  $\underline{b}$  полностью определяются полем.

Следствие:

$$\text{div } \underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

$\text{div } \underline{j}_{\Sigma}$  (полный ток) = 0 —нет источника сил. Линии непрерывны.

## **9. Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга. Объемная плотность энергии магнитного и электромагнитного поля.**

### **Вектор Пойнтинга. Формы представления вектора Пойнтинга.**

Теорема Умова-Пойнтинга:

$$\operatorname{div} \underline{S} + \frac{\partial W}{\partial t} = -\underline{j} * \underline{E} = -\sigma E^2 \quad (8)$$

Убыль энергии за единицу времени в данном объеме равна потоку энергии сквозь поверхность, ограниченную этим объемом, плюс работа в единицу времени, которую поле производит над зарядами вещества внутри данного объема.

В интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV + \oint_{\partial V} S dA = - \int_V \underline{j} \underline{E} dV$$

$\underline{S}$  - вектор Пойнтинга, теорема описывает закон сохранения энергии электромагнитного поля.

$$\nabla \underline{S} + \varepsilon_0 E \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{\underline{B}}{\mu_0} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{j} \underline{E} = 0$$

Второе слагаемое - плотность энергии электрического поля, третье слагаемое - плотность энергии магнитного поля

## **10. Решение системы Максвелла для свободного поля. Фазовая скорость волны и коэффициент преломления среды. \*Электромагнитные потенциалы $A$ и $\phi$ .**

\*Калибровочная инвариантность электромагнитного поля. \*Калибровка Лоренца свободного поля.

\*Волновые уравнения для потенциалов. \*Потенциал Герца. \*Запаздывающие потенциалы Лиенара-Вихерта.

Система Максвелла:

$$(1) \quad \operatorname{div} \underline{B} = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{div} \underline{D} = \rho$$

$$(3) \quad \text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$(5) \quad \underline{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \underline{E}$$

Решение системы:

Положим:

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad (9)$$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \quad (10)$$

Уравнения (1) и (4) выполнены. Остаются (2) и (3)

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{B} &=_{(9)} \text{rot rot } \underline{A} = \text{grad div } \underline{A} - \Delta \underline{A} =_{(5)} \mu \mu_0 \text{rot } \underline{H} \\ &= \mu \mu_0 \left( \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) = \mu \mu_0 \underline{j} + \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \\ &=_{(10)} \mu \mu_0 \underline{j} + \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\underline{\nabla} \varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

**Фазовая скорость волны:**

Фазовая скорость электромагнитной волны:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды  
 $\mu$  – магнитная проницаемость среды

электрическая постоянная:  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$

магнитная постоянная:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \underline{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}$$

**Показатель преломления:**

$$n = \frac{v_1}{v_2}$$

Относительный - физ. величина, равная отношению скоростей света в средах, на границе между которыми происходит преломление

Абсолютный - относительно вакуума (в числителе стоит скорость света -  $c$ )

**11. Структура электромагнитной волны. Связь  $E$  и  $H$  в волне. Распределение энергии в волне.**

**Интенсивность волны. Поляризация плоской монохроматической волны. Виды поляризации. Закон Малюса. Частичная поляризация. Естественный свет. Поляризация при отражении и преломлении света. Угол Брюстера.**

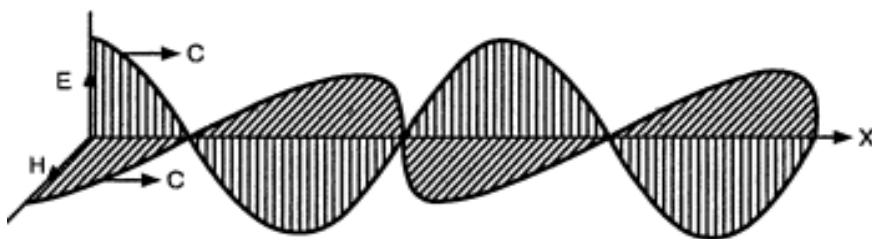


Рис. 1 . Структура электромагнитной волны

Интенсивность волны:

$$I = \frac{\Phi}{S_{\text{пл}}} = \frac{1}{\Delta t S_{\text{пл}}}, \Delta t \sim T = \frac{2\pi}{\omega}, \langle \sin^2 \psi \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\Delta t} \int_{S_{\text{пл}}} S n dS_{\text{пл}} dt = \frac{1}{S_{\text{пл}}} \frac{\omega k}{\mu \mu_0} A^2 \frac{1}{2} S_{\text{пл}} \Delta t$$

$\sim T, \Delta t \gg T$

Handwritten derivation:

$$\int_{S_{\text{пл}}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left( \frac{\omega}{\mu \mu_0} A_0^2 \sin^2 \psi \right) \frac{\vec{k} \cdot \vec{n}}{k} dt dS_{\text{пл}} =$$

where  $\vec{k}, S_{\text{пл}} \perp \vec{k}$  and  $\vec{n} \parallel \vec{k}$ .

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} \omega^2 A_0^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu \mu_0}} E_m^2 =$$

(24)  $\frac{1}{2} H_m E_m$  — интенсивность (33) только от средней!

### Поляризация плоской монохроматической волны

Плоские волны      Поларизация

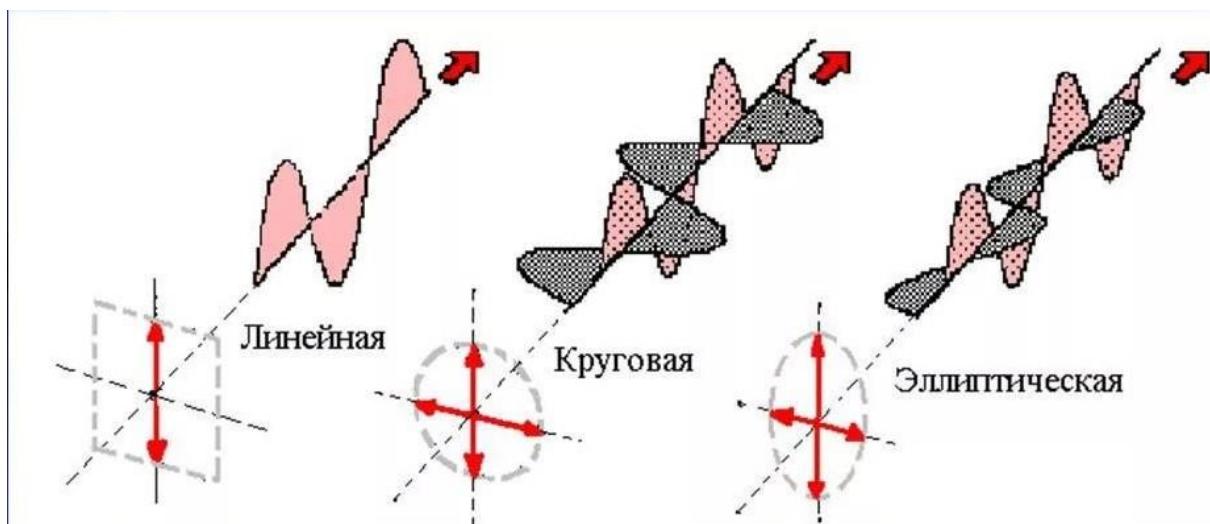
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \omega \vec{A}_0 \sin \psi$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A} = \frac{\vec{k} \times \vec{A}_0}{\mu_0} \sin \psi$$

$\psi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  (1)

Это — лев. полариз. плос. монохр. волны

Виды поляризации:



Существует три вида поляризации.

### 1. Линейная (плоская)

Возникает, если электрический вектор  $E$  сохраняет свое положение в пространстве. Она как бы выделяет плоскость, в которой колеблется вектор  $E$ .

### 2. Круговая

Это поляризация, возникающая, когда электрический вектор  $E$  вращается вокруг направления распространения волны с угловой скоростью, равной угловой частоте волны, и сохраняет при этом свою абсолютную величину. Такая поляризация характеризует направление вращения вектора  $E$  в плоскости, перпендикулярной лучу зрения.

### 3. Эллиптическая

Возникает тогда, когда величина электрического вектора  $E$  меняется так, что он описывает эллипс (вращение вектора  $E$ ).

плоскости  $xOy$   $E_{01}$ ,  $E_{02}$  эллипса

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (3)$$

$\sin \delta > 0$  — левая поляризация  
 $\sin \delta < 0$  — правая  $\pi$

$A_1 = A_2$  — поляризация по кругу  
 $A_1, A_2$  — пол. осей эллипса. при  $\delta = \frac{\pi}{2}$  один совп. с  $Ox$  и  $Oy$ . тогда эр. эллипса становится крестообразным.

смотрим на источник, т.е. против хода волны.

### Закон Малюса

$$I_{\text{за}} \sim E_{\parallel}^2 = E^2 \cos^2 \alpha \sim I \cos^2 \alpha \quad | \quad I_{\text{за}} = I \cos^2 \alpha \quad (4)$$

З-н Малюса.

### Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}} = \frac{I_{\text{полариз}}}{I_0} \quad (6)$$

— степень поляризации



## Естественный свет

Для естест. света  $I_{3a} = I \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{I}{2} \quad (5)$   
из-за уср. для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

## Угол Брюстера

Образ. Луч преимущественно поляризован  $\perp$  плоскости падения. При  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$  (случай Брюстера)  $E_{\perp\parallel} = 0 \Rightarrow$  отр. луч полн. поляриз.  $\perp$  плос. пад. (2)  
Прелом. Луч преимущественно поляризован  $\parallel$  плос. падения, при этом степ. ель поляризации макс при угле Брюстера  $\tan \gamma_B = n_2/n_1$  - случай Б (8)  
лучи (1) и (2) дают  $\perp$ . /а % и обозначается/

**12. Интерференция света как проявление принципа суперпозиции для Е и Н. Устойчивая интерференционная картина. Невозможность наблюдения интерференции некогерентных электромагнитных волн. Нормальное падение монохроматической волны на границу раздела диэлектриков. Практические задачи интерференции**  
**Интерференция от двух когерентных точечных источников. Опыт Ллойда. Длина и ширина интерференции. Интерференция на тонких пленках. Кольца Ньютона. Многолучевая интерференция.**

Интерференция – явление перераспределения интенсивности света при наложении двух или нескольких когерентных волн.

Независимые источники света, посылающие световые волны в одну область пространства, возбуждают там колебания с изменяющейся разностью фаз. В результате их сложения возникает результирующее колебание с беспорядочно меняющейся во времени амплитудой. Чтобы получить устойчивую во времени интерференционную картину, нужны когерентные источники колебаний.

Когерентные источники имеют одинаковую частоту, одинаковое направление колебаний электрической и магнитной составляющих волны и постоянную во времени разность фаз. Один из способов получения когерентных источников состоит в отражении и преломлении волн, испускаемых одним источником.

Колебания в точке, вызванные двумя волнами, для электрической составляющей можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 \sin(\omega t - \varphi_1), \\ E_2 &= A_2 \sin(\omega t - \varphi_2); \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – напряженность электрического поля в первой и второй волне,  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды колебаний.

Можно показать, что интенсивность света  $J$  (количество энергии, падающее за одну секунду на единицу площади поверхности, перпендикулярной лучам) пропорциональна квадрату амплитуды колебания  $J \sim A^2$ . Следовательно, для расчета интерференционной картины необходимо определить условия, при которых амплитуда результирующего колебания будет максимальна или минимальна.

Введем понятие оптической разности хода волн

$$\delta = L_2 n_2 - L_1 n_1, \quad (9.2)$$

где  $L$  – геометрическая длина пути,  $n$  – показатель преломления среды, в которой распространяется волна, равный

$$n = \frac{c}{v}. \quad (9.3)$$

Здесь  $c$  – скорость света в вакууме,  $v$  – скорость света в среде.

Величина  $L \cdot n$ , равная произведению геометрической длины пути и показателя преломления среды, в которой распространяется волна, называется *оптической длиной пути*.

Разность фаз колебаний  $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$  может быть рассчитана через оптическую разность хода волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta, \quad (9.4)$$

где  $\lambda$  – длина волны света в вакууме.

В результате сложения колебаний (9.1) результирующее гармоническое колебание будет происходить с амплитудой:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)} = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right)} \end{aligned} \quad (9.5)$$

и интенсивностью

$$J = \sqrt{J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1} \cdot \sqrt{J_2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta\right)}. \quad (9.6)$$

Значения амплитуды  $A$  и интенсивности  $J$  максимальны, если

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) = 1,$$

т.е. оптическая разность хода  $\delta$  равна **целому числу длин волн**:

$$\delta = k\lambda, \quad (9.7)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Значения  $A$  и  $J$  минимальны, если

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) = -1,$$

т.е. оптическая разность хода  $\delta$  равна **нечетному числу полуволн**:

$$\delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (9.8)$$

Кроме того, следует учесть, что *при отражении света от границы раздела* двух сред скачком происходит изменение направления на противоположное (изменение фазы колебаний на  $\pi$ ) вектора напряженности для электрической или магнитной составляющих волны.

При отражении от оптически более плотной среды (у которой показатель преломления  $n$  больше показателя преломления среды, из которой пришел луч) на  $\pi$  изменяется фаза электрической составляющей, следовательно, в этом случае оптическую разность хода  $\delta$  необходимо изменить на  $\lambda/2$ .

Пример: интерференция в тонкой пленке, освещаемой параллельным пучком лучей, наблюдаемая в отраженном свете. Ход интерферирующих лучей показан на рис.9.1.

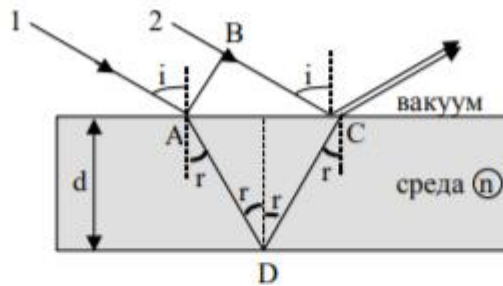


Рис. 9.1

Оптическая разность хода для фронта волны АВ:  $\delta_{AB} = 0$ , а для фронта С:

$$\delta_C = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \quad (9.9)$$

Так как луч 1 в точке D отражается от оптически менее плотной среды, а луч 2 в точке C отражается от оптически более плотной среды,  $\delta_C$  должна быть изменена на  $\lambda/2$  (в точке C фаза меняется на  $\pi$ )

$$\delta = \delta_C \pm \frac{\lambda}{2}. \quad (9.10)$$

Для того, чтобы картина усиления и ослабления волн была устойчивой во времени, т.е. не менялась с течением времени, необходимо, чтобы разность фаз колебаний во всех точках наложения волн оставалась постоянной. Такие волны, которые имеют одинаковую частоту и постоянную разность фаз, называются **когерентными или согласованными**.

Явление устойчивого во времени усиления или ослабления колебаний в разных точках пространства (пространственное перераспределение энергии), которое возникает при наложении двух или нескольких когерентных волн, называется **интерференцией волн**.

Идеальный вариант когерентности представляют собой две монохроматические волны одинаковой частоты. У монохроматических волн частота одна определенная и строго постоянная, а амплитуда и начальная фаза неограниченно долго остаются постоянными.

Идеальный вариант когерентности представляют собой две монохроматические волны одинаковой частоты. У монохроматических волн частота одна определенная и строго постоянная, а амплитуда и начальная фаза неограниченно долго остаются постоянными. Рис. 6.2. 10 Поэтому разность фаз двух монохроматических волн одинаковой частоты в каждой точке также остается постоянной.

Из повседневного опыта известно, что при наложении световых волн от двух обычных источников света, например от двух лампочек, никакой интерференционной картины с характерным чередованием светлых и темных полос не наблюдается, в любой точке интенсивности света (освещенности) просто складываются. Следовательно, естественные источники света являются некогерентными. Физическая причина некогерентности реальных источников лежит в механизме испускания света

Фаза волны, излучаемой реальным источником света, остается приблизительно постоянной только на интервалах времени порядка длительности излучения атома  $\tau$ . Отдельные «отрезки» монохроматической волны, испущенные за время  $\tau$ , называются **цугами**.

Цуги имеют длину, равную  $c\tau$ , где  $c$  – скорость света. Колебания в разных цугах не согласованы между собой. Поэтому реальная световая волна представляет собой последовательность волновых цугов с беспорядочно меняющейся фазой. Интервал времени  $\tau_k = \tau$ , в течение которого фаза колебаний остается приблизительно постоянной, называют **временем когерентности**.

Фаза волны, образованной наложением большого числа цугов, изменяется случайным образом. Поэтому временем когерентности называют также время  $\tau_k$ , за которое случайное изменение фазы волны достигает значения порядка  $\pi$ . Путь  $l_k$ , проходимый световой волной за время когерентности, называется **длиной когерентности**:

$$l_k = c \tau_k$$

Интерференция от двух точечных источников. Далекое поле Рассмотрим теперь интерференцию излучения от двух точечных источников, находящихся на некотором расстоянии друг относительно друга. Частоты их будем считать одинаковыми, так что единственное их различие с точки зрения наблюдателя в некоторой точке наблюдения  $P$  — это разные амплитуды и фазы первой и второй волн — рис. 3.



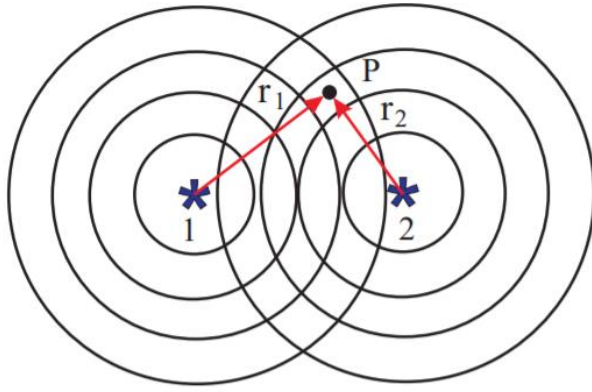


рис. 3: Интерференционная картина от двух источников в пространстве.

Как известно, точечный источник излучает сферическую волну

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{10}(\mathbf{r}) \cos(kr - \omega t + \alpha),$$

где поверхности  $kr = \text{const}$  есть сферы (поэтому волна сферическая). Амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию от источника  $r$  и может зависеть от ориентации вектора  $r$  в пространстве

$$\mathbf{E}_{10}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{A}(\theta, \varphi)}{r},$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — углы, образованные вектором  $r$  в сферической системе координат, связанной с источником. Такую волну, как мы видели, излучает ускоренно движущийся заряд. Действуя как и раньше, получаем, что интерференционный член теперь равен

$$2\mathbf{E}_{10}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}_{20}(\mathbf{r}_2) \cos[k(r_1 - r_2) + \alpha - \beta].$$

Таким образом, что будет в точке наблюдения (говоря условно максимум или минимум) зависит от:

1. разности фаз обоих источников  $\alpha - \beta$ ,
2. разности расстояний  $\Delta r = r_1 - r_2$ , точнее сколько на этой разности укладывается длин волн.

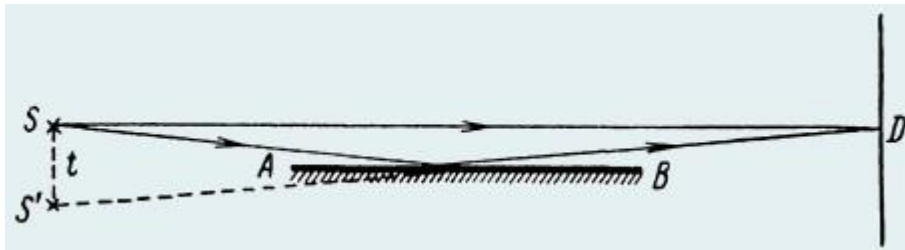
Поскольку  $k = 2\pi/\lambda$ , то

$$k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda}.$$

**Зеркало Ллойда** - устройство для наблюдения интерференции световых пучков. Свет от источника, расходящийся под небольшим углом, падает на отражающую поверхность, расположенную



перпендикулярно экрану. Интерференционная картина наблюдается на экране в области перекрытия падающего и отраженного световых потоков.



В опыте, предложенном Ллойдом, интерферируют лучи, исходящие непосредственно от источника **S** (рисунок) и отраженные от поверхности зеркала **AB**. Лучи, отраженные от зеркала **AB**, как бы исходят от мнимого источника **S<sub>1</sub>** когерентного с **S**.

Для того чтобы расстояние **d** между **S** и **S'** было достаточно мало, лучи должны отражаться от зеркала под углом, близким к **90°**. Источником света служит щель, параллельная плоскости зеркала.

Особенность интерференционной картины, наблюдаемой с помощью зеркала Ллойда, заключается в том, что центральная полоса получается не светлой, а темной. Это указывает на то, что лучи, проходящие одинаковые геометрические пути, все же сходятся в опыте Ллойда с разностью хода  $\lambda/2$ . Такая „потеря“ полуволны (или, другими словами, изменение фазы на  $\pi$ ) происходит при отражении света от поверхности стекла, коэффициент преломления которого больше, чем воздуха. В дальнейшем мы увидим, в каких случаях при отражении света от прозрачной среды происходит потеря полуволны.

## Ширина

Назовем расстояние между двумя соседними максимумами интенсивности расстоянием между интерференционными полосами,

а расстояние между соседними минимумами интенсивности - **шириной интерференционной полосы**. Из формул (8) и (9) следует, что расстояние между полосами и ширина полосы имеют одинаковое значение, равное

$$\Delta x = \frac{\ell}{d} \lambda.$$

**Длина волны в веществе:**

$$\lambda = \frac{\lambda_0 l}{nb} - \text{длина волны света в веществе.}$$

расстояния между источниками света ( $b$ ),  $n$  – показатель преломления вещества  
 $\lambda_0$  – длина волны света в вакууме    расстояния до экрана     $l$

Если плоско-выпуклую линзу с большим радиусом кривизны положить выпуклой стороной на блестящую поверхность плоскопараллельной стеклянной пластинки и осветить параллельным пучком монохроматического света (рис.9.20), то луч 2, отраженный от нижней поверхности линзы, будет интерферировать с лучом 1, отраженным от поверхности пластинки, образуя кривые равной толщины – кольца Ньютона.

Для слоя воздуха толщиной  $d$  оптическая разность хода при падении лучей под малым углом согласно формулам (9.9) и (9.10) запишется

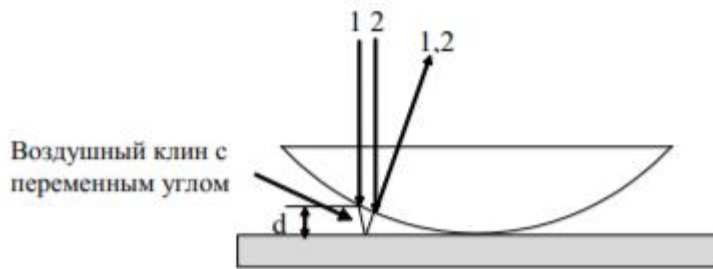


Рис. 9.20

$$\delta = 2d + \frac{\lambda}{2}. \quad (9.31)$$

Для светлых колец согласно (9.7)

$$2d + \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \quad (9.32)$$

Для темных колец согласно (9.8)

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}. \quad (9.33)$$

Здесь  $k$  – порядковый номер кольца ( $k = 0$  соответствует центральному темному пятну).

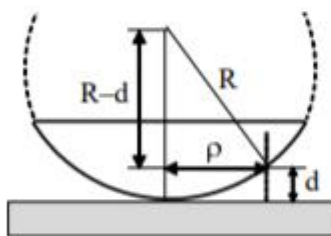


Рис. 9.21

В соответствии с рис.9.21

$$\rho^2 = R^2 - (R - d)^2 = 2Rd - d^2$$

Т.к.  $d \ll R$ , то

$$\rho^2 \approx 2Rd. \quad (9.34)$$

Подставляя (9.34) в формулу (9.32) для радиусов светлых колец Ньютона получаем

$$\rho_k^2 = (2k + 1)R\frac{\lambda}{2}, \quad (9.35)$$

а для радиусов темных колец по формуле (9.33)

$$\rho_k^2 = kR\lambda. \quad (9.36)$$

Измерив, например, радиусы двух темных колец, достаточно удаленных от центрального темного пятна:

$$\rho_{k_1}^2 = k_1 R \lambda; \quad \rho_{k_2}^2 = k_2 R \lambda,$$

можно получить

$$\rho_{k_2}^2 - \rho_{k_1}^2 = R\lambda(k_2 - k_1)$$

и определить радиус линзы

$$R = \frac{(\rho_{k_2} - \rho_{k_1})(\rho_{k_1} + \rho_{k_2})}{\lambda(k_2 - k_1)}. \quad (9.37)$$

Вычисление  $R$  по радиусам двух колец снижает погрешность измерения.

### 13. Дифракция света. Условие возникновения.

#### Принципы Гюйгенса-Френеля и Ферма.

**Дифракционная задача в постановке Френеля.** Метод зон Френеля. \*Векторные диаграммы Френеля.

**Дифракционная задача в постановке Фраунгофера.**

Дифракция Фраунгофера на щели и решетке.

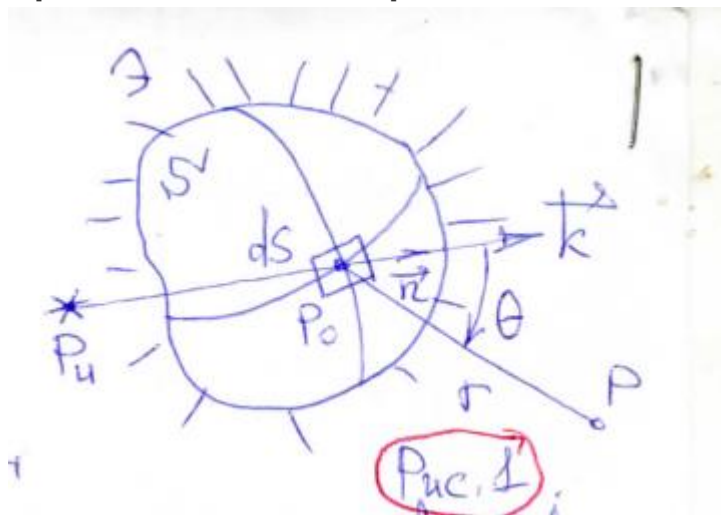
Дифракционная решетка как спектральный прибор.

Разрешающая способность и угловая дисперсия как характеристики решетки.

**Дифракция (D)** - наблюдаемое изменение геометрической формы фронта волны, отклонение волны от первоначального направления распространения при её взаимодействии с неоднородной средой (огибание, волна идет перпендикулярно фронту).

**Дифракция света** - огибание непрозрачного тела (в узком смысле)

#### Принцип Гюйгенса-Френеля



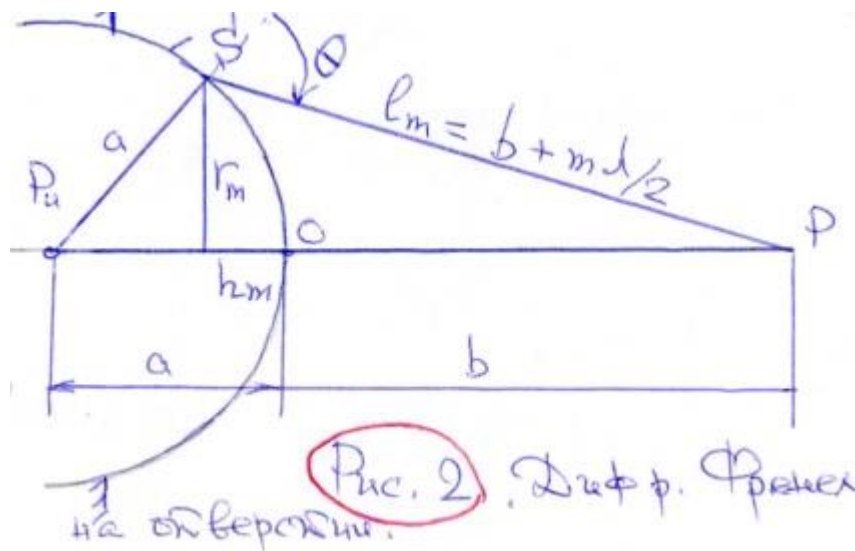
Френель предположил, что  $E$  в точке отверстия экрана “Э” или в точках первичного фронта  $S$  такое же как и без Э, а точки экрана (и вблизи него) не излучают. Существенной будет только форма отверстия (или открытого участка  $S$  первичного фронта), но не сам экран. Потом оказалось, что это

справедливо лишь при  $\lambda \ll \sqrt{S}$ ,  $r$  и расстояния  $P$ . Принцип сводит дело к расчету интеграла Френеля для амплитуды поля

$$E_m(P) = \int_S K(\theta) \frac{E_0(P_0)}{r_0} \cos(kr + d(P_0)) dS \quad (1)$$

$K(0) = 1$ ,  $K(\frac{\pi}{2}) = 0$ ,  $\alpha(P_0)$  учитывает сдвиг фаз между точками  $S$ , если  $S$  - волновой фронт,  $\alpha \equiv 0$ . Если  $S$  поверхность отверстия, то  $\alpha \equiv 0$ .  $kr$  - фаза амплитуды в какой-либо одной точке  $S$ . Рассчитать (1) в общем тоже непросто. Упростить расчет позволяет **метод зон Френеля**.

### Метод зон Френеля



Источник считаем точечным. В идеале  $a \rightarrow \infty$  - пучок лучей

$$r_m^2 = b_m^2 - (b + h_m)^2 = a^2 - (a - h_m)^2 \Rightarrow$$

$$h_m = \frac{mb\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}}{2(a+b)} \approx \frac{mb\lambda}{2(a+b)}$$

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2 \approx 2ah_m$$

$$r_m = \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda$$

Считаем  $\lambda \ll a, \lambda \sim r_m$

$S = 2\pi rh$  - площадь сфер. сегмента высоты h, R - радиус сферы

$$\Delta S_m = S_{m+1} - S_m = 2\pi a(h_{m+1} - h_m) =$$

$$\frac{\pi ab}{a+b} = \Delta S \text{ - площади зон равны.}$$

Амплитуды излучаемые по нормали к ним равны, но из-за

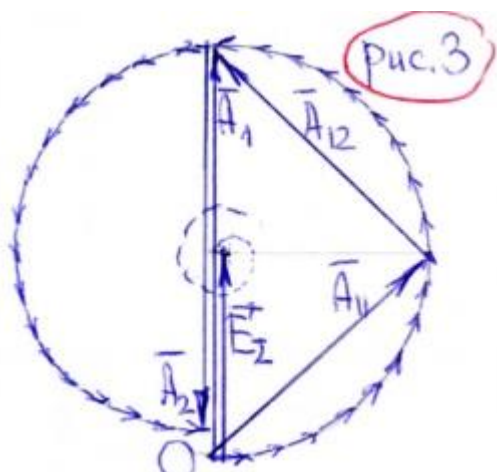
$K(\theta)$   $A_k$  слабо ↓

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}(P) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} A_k = A_1 - A_2 + A_3 - \dots \\ &= \frac{A_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A_k}{2} - A_{k+1} + \frac{A_{k+2}}{2} \approx \frac{A_1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{I_1}{4} \end{aligned}$$

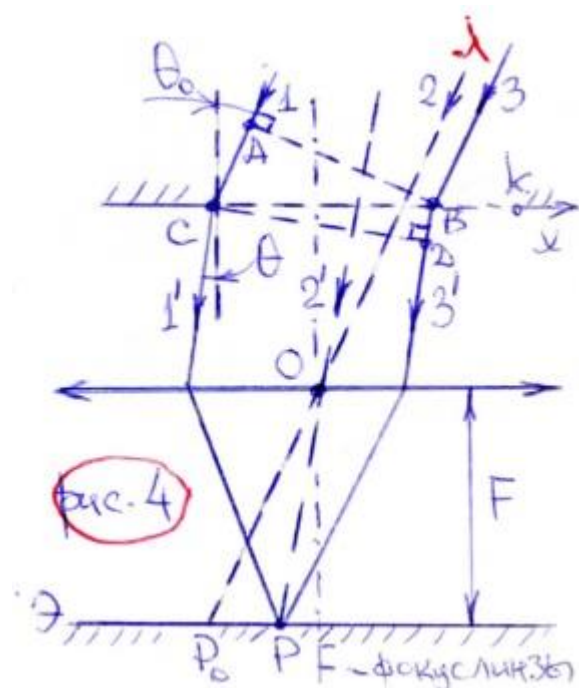
Этот результат соотносится полному открытому плоскому фронту S ( $a = \infty, r_m = \sqrt{m\lambda b}$ ). Если какая-то из зон закрыта - этих слагаемых в (S) нет.

Так если круглая диафрагма закрывает первые m зон,  $E_{\Sigma}(P) = \frac{A_{m+1}}{2}$ , но в точке будет светлое пятно чуть меньшей яркости (пятно Пуассона)

Если зоны открыты не полностью, то надо применить векторные диаграммы Френеля. (рис. 3) - вариант фазовых диаграмм



### Дифракция Фраунгофера на щели и решетке



Экран “Э” собирает в одной точке Р лучи, идущие за дифрактором параллельно. Отсюда название. Если СК - отверстие круглое, на Э - кольца, если СК - щель, на Э - полосы. Всюду углы дифракции малы.

Величину  $\delta\theta = \frac{\lambda}{D}$  можно считать мерой расходимости падающего пучка (первоначального диаметра D)  $\Rightarrow$  любой пучок конечного диаметра будет расходиться. Если СК - щель, то расчет проще.

P.S. Я хз что тут выделить, вроде все важно, а вроде и дохера для одного



## вопроса

Минимум первого темного кольца  $\theta_1 \approx 1,22 \lambda / D$  (7)  
 при условии  $\lambda \gg \lambda$ ,  $D$  - диаметр отверстия.  
 На 1-м. max прих. 84% светового потока. Картины  
 дифракции можно считать сложением из волн  
 дифракционного светового пучка, считая его излучаю-  
 щим удаленного источника, упрощенное дифракцией.  
 Величину  $\delta \theta \approx \lambda / D$  (8) можно считать мерой расхо-  
 жимости пучка (перфола? диаметр  $\leq D$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  пучок рассеивается диаметра  $\delta \theta$  расходившееся.  
 Если СК на рис. 4 - излучатель, то расхождение. Когда свет  
 на излуч. наклонно, то расхождение  $\Delta(x) = \Delta_c = |AC - BD| = x_B |\sin \theta - \sin \theta_0|$  (9)  
 При норм. освещении ( $\theta_0 = 0$ )  $\Delta(x_B) = x_B \sin \theta$   $\delta(x_B) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x) = \frac{2\pi x_B \sin \theta}{\lambda}$  (10)  
 С ростом  $\theta$ ,  $\delta(x_B) \uparrow$  и тем же. Разбег излуч. на излуч.  
 пучке, амплитуда от разбег.  $dA_1$  одинакова, как и разбег.  
 фаз мех. осей плоскости. Возникает фаз. разность где  
 многолуч. интерф. и, рис. 6(a). На этом рис.  $\delta$  - раз-бе фаз  
 для точек  $C$  и  $K$  на рис. 4, т.е.  $\delta(x_K) = \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}$  (11)  
 $b$  - ширина щели, падение света нормальное. С  $\uparrow \theta$   $\delta$   $\uparrow$   
 поворота  $dA_K \uparrow$ , дуга на рис. 6(a) закрывается и не может  
 замыкаться ( $C$  и  $K$  в фазе), когда  $\Delta(x_K) = b \sin \theta =$   
 $= \pm m \lambda$  (12), см. рис. 6(b). При дальнейшем  $\uparrow \theta$   $\delta$   $\uparrow$   
 размыкается, дуга раскрывается и когда  $\delta = \frac{\lambda}{2}$   
 мы имеем max интерф. и, рис. 6(b). При условии (12)  
 - минимум, т.е.  $E_p = A = 0$  для случая на рис. 6(b).  
 Для распределения дуги  $E_p = A = A_0$  - не дифрагировавший свет. Поскольку  
 $A = 2R \sin \delta/2$ ,  $A_0 = R \delta \Rightarrow A = E_p = A_0 \frac{\sin \delta/2}{\delta/2} \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$ ,  $\alpha = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$  (13)  
 Функция (13) на рис. 7.  $\sin \theta = \pm \frac{m \lambda}{b}$  - точки min (12).  
 Амплитуда max падает из-за борта  $\alpha^2$  из (13) с  $\uparrow \sin \theta$ .

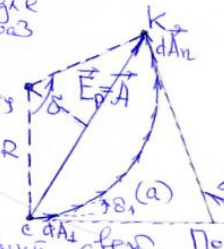
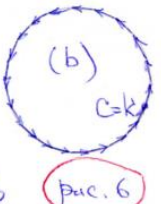



Рис. 5: Graph of intensity I/I0 vs angle theta. It shows a central maximum at theta=0 and two side maxima at theta1 and theta2. The values 0,075 and 0,004 are marked on the curve.

Рис. 6: (a) Vector diagram for a single slit showing the path difference Delta and the resulting amplitude A. (b) Vector diagram showing the condition for a minimum where the phasors form a closed circle.

Рис. 7: Graph of intensity I vs angle theta. It shows a central maximum at theta=0 and two side maxima at theta1 and theta2. The values 0,075 and 0,004 are marked on the curve.

## Дифракционная решетка

Картина min и max сложнее чем от одной щели. Разность хода лучей равна  $\Delta = d \sin \theta$ . Если  $d \sin \theta = \pm m \lambda$  мы имеем главные max.

Минимумы будут двух типов:

1) Интерференционные min, которые получаются, когда векторы амплитуд отдельных щелей замыкаются в кольцо. Они подчиняются условию

$$d \sin \theta = \pm \frac{m}{N} \lambda, m \neq 0, N, 2N, \dots N - \text{число щелей решетки}$$

2) Дифракционные min от щелей, которые определяются направлением

$$b \sin \theta = \pm m \lambda \text{ для которых излучения всех щелей равны нулю.}$$

$$\text{Угловая дисперсия} - D = \frac{\delta \theta}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}$$

$$\text{Разрешающая способность} - R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN$$

$\delta \lambda$  - минимальная разность длин волн в окрестности  $\lambda$  при которой они различны по критерию Релея