МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)
Факультет №8
«Информационные технологии и прикладная математика»

Курсовая работа

по курсу «Теория случайных процессов»
VI семестр

Выполнил студент
3-го курса, 305-ой
группы
Махмудов О. С.
____
(подпись)
Научный руководитель
Осокин А. В.
____
(подпись)

Работа защищена
«__»___________ 2021
Оценка___________

Москва, 2021

Махмудов Орхан Сакитович

М8О-305Б-18

№1

В одном исследовании предполагалось, что не меньше 20% всех восьмиклассников страдают от избыточного веса. В выборке из 95-ти учащихся избыточный вес оказался у 18 человек. Проверьте предположение исследования при $\alpha = 0,03$

1) Сформулируем основную и альтернативную гипотезу:

$$H_0 : \mu \geq 0,2$$

$$H_1 : \mu < 0,2$$

2) Уровень значимости $\alpha = 0,03$

Критическая область левосторонняя, а крит. знач. равно $-1,88$

3) По выборке вычислим значение статистики:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0 \sqrt{n}}{\sqrt{pq}} = \frac{\left(\frac{18}{95} - 0,2\right)\sqrt{95}}{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}} = -0,266$$

p – вероятность того, что человек страдает ожирением

q – вероятность того, что человек не страдает ожирением

n – число учащихся

4) $-0,266 > -1,88 \Rightarrow$ значение статистики не попадает в критическую область $\Rightarrow$ мы принимаем основную (нулевую) гипотезу при $\alpha = 0,03$

Поскольку мы приняли основную гипотезу и отвергли альтернативную, делаем вывод, что не меньше 20% восьмиклассников страдают ожирением, у нас нет оснований думать иначе.

№2

Махмудов Джан Сакитович
М80-305Б-18

Офис-менеджер хочет узнать, можно ли увеличить скорость печатания десяти секретарей, заменив печатные машинки компьютерами. В таблице число слов в минуту. На уровне значимости $\alpha = 0,1$ проверьте утверждение, что, используя компьютер, секретари могут печатать большее количество слов в минуту.

Секретарь	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Печатная машинка	63	72	85	97	82	101	73	62	58	75
Компьютер	68	80	95	93	80	106	82	78	65	83

1) Сформулируем основную и альтернативную гипотезы:

$$H_0: \mu_1 \geqslant \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 < \mu_2$$

μ_1 – генеральное среднее для печатных машинок

μ_2 – генеральное среднее для компьютеров

2) Уровень значимости $\alpha = 0,1$

Поскольку дисперсии генеральных совокупностей неизвестны и не предполагаются равными, число степеней свободы $df = \min(9, 9) = 9$.

Критическое значения по таблице равно 1,383

Левосторонняя критическая область $t < 1,383$

3) Считаем значение статистики:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{76,8 - 83}{\sqrt{189,16 + 136,6}} = \frac{-6,2}{18.05} = -0,34$$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – выборочные средние

μ_1, μ_2 – гипотетические генеральные средние

n_1, n_2 – объёмы выборок

S_1^2, S_2^2 – выборочные дисперсии

4) Сравним полученное значение с критической областью. Значение статистики $-0{,}34$ попадает в критическую область $\Rightarrow$ мы отклоняем основную гипотезу и принимаем альтернативную на уровне значимости 10%. Получается, что утверждение о том, что используя компьютер, секретари могут печатать большее кол-во слов в минуту мы не смогли опровергнуть, у нас нет оснований думать иначе.

№3

Махмудов Орхан Сакитович

М80-305Б-18

При $\alpha = 0{,}07$ проверить гипотезу об однородности следующих выборок:

	16	19	20	17	2	22	12	5	8	3	23	15
1):	2,19	2,26	2,28	2,21	1,87	2,34	2,14	1,93	2,10	1,89	2,36	2,17
2):	1,98	2,31	2,25	1,91	2,15	2,12	1,83	2,13	2,11	2,16	1,99	
	6	21	18	4	13	10	1	11	9	14	7	

1) Составим основную и альтернативную гипотезы

H_0: выборки однородны

H_1: выборки не однородны

2) Уровень значимости $\alpha = 0{,}07$

Т.к. наши выборки имеют объём больше 10 каждая, воспользуемся значениями для нормального распределения. Критическая область односторонняя ($Z \le Z_{крит}$) и при $\alpha = 0{,}07 \Rightarrow Z_{крит.} = -1{,}4758$

3) Вычисляем значение статистики

$$Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{114 - 144}{16{,}25} = -1{,}85 \le Z_{крит.}$$

R – меньшая сумма рангов среди двух выборок

$\Sigma_1 = 162$

$\Sigma_2 = 114$

$\Sigma_2 < \Sigma_1 \Rightarrow R = 114$

μ_R – среднее значение R

$$\mu_R = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} = \frac{12(12+11+1)}{2} = 144$$

σ_R – стандартное отклонение R

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 11 (12 + 11 + 1)}{12}} = 16{,}25$$

4) Полученное значение статистики попадает в критическую область ⇒ Основную гипотезу нужно отклонить и принять альтернативную. Делаем вывод, что на уровне значимости 7% выборки не однородн.

№4 Махмудов Орхан Самитович

М80-305Б-18

$y_i = f(x_i) + \xi_i$, $i = 1, \dots, n$, $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$

Требуется

а) Смоделировать набор величин ξ_i с дисперсией $\sigma^2 = 4$, где $i = 1, \dots, 55$

б) Получить набор значений $y_i = f(x_i) + \xi_i$, где x_i - равноотстоящие точки $-6 = x_1 < x_2 < \dots < x_{55} = 6$

Для этого в качестве ф-ции $f(x)$ взять

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$$

в) Подобрать методом наим. квадратов коэфф. a, b и c в модели

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

г) Построить 93%-доверительный интервал для остаточной дисперсии

д) Построить 92%-доверительный интервал для коэфф. a модели

е) Построить графики в одной системе координат: исходные данные (величины y_i) и полученную оценку (величины $f(x_i)$ из пункта в).

а) ξ_i = [0.69, -2.17, -0.47, 4.35, 0.44, 0.47, 1.67, -5.66, 0.64, 0.16, -2.68, 1.01, 2.27, -1.88, -1.02, -3.32, -1.99, -1.52, 2.31, 3.32, -0.62, 0.71, 1.1, -1.32, 0.37, -0.72, 4.07, 2.49, -2.16, 0.39, -0.05, 0.37, 0.14, -0.3, -0.07, 0.81, 0.83, -0.68, 2.13, 0.9, -5.55, -0.24, -2.35, 2.97, 1.63, -2.74, 1.59, -0.07, -2.99, -0.54, 2.27, -0.96, -2.46, 2.02, -1.82]

б) x_i = [-6, -5.78, -5.56, -5.33, -5.11, -4.89, -4.67, -4.44, -4.22, -4, -3.78, -3.56, -3.33, -3.11, -2.89, -2.67, -2.44, -2.22, -2, -1.78, -1.56, -1.33, -1.11, -0.89, -0.67, -0.44, -0.22, 0, 0.22, 0.44, 0.67, 0.89, 1.11, 1.33, 1.56, 1.78, 2, 2.22, 2.44, 2.67, 2.89, 3.11, 3.33, 3.56, 3.78, 4, 4.22, 4.44, 4.67, 4.89, 5.11, 5.33, 5.56, 5.78, 6]

y_i = [-71.31, -62.8, -50.95, -37.13, -33.13, -26.21, -19.07, -21.35, -10.83, -7.84, -7.9, -2.06, 0.79, -2.26, -0.73, -2.73, -1.39, -1.14, 2.31, 2.84, -1.62, -0.77, -0.77, -3.41, -1.7, -2.49, 2.97, 2.49, -0.57, 4.13, 6.47, 10.36, 14.35, 18.96, 25.13, 32.9, 40.83, 48.32, 61.28, 71.42, 77.62, 96.93, 110.24, 132.46, 149.57, 165.26, 191.33, 213.15, 235.53, 265.15, 297.07, 324.97, 356.66, 396.48, 430.18] в) Для нахождения параметров по методу наим. квадратов

$F(a,b,c) = \sum(y-(x^3+ax^2+bx+c))^2$

$F_a = 2\sum(y-(x^3+ax^2+bx+c))(-x^2) = 2(\sum x^5 + a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 - \sum yx^2)$

$F_b = 2\sum(y-(x^3+ax^2+bx+c))(-x) = 2(\sum x^4 + a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x - \sum yx)$

$F_c = 2(\sum x^3 + a\sum x^2 + b\sum x + c\cdot n - \sum y$ $\quad n=55$

Получаем систему ур-ий:

$$\begin{cases} a\sum x^4 + b\sum x^3 + c\sum x^2 = \sum yx^2 - \sum x^5 \\ a\sum x^3 + b\sum x^2 + c\sum x = \sum yx - \sum x^4 \\ a\sum x^2 + b\sum x + c\cdot n = \sum y - \sum x^3 \end{cases}$$

$\sum x = 0 \quad \sum x^2 = 684,44 \quad \sum x^3 = 0 \quad \sum x^4 = 15324,79 \quad \sum x^5 = 0$

$\sum y = 3417,99 \quad \sum yx = 19415,57 \quad \sum yx^2 = 76467,43$

$$\begin{cases} 15324,79a + 684,44c = 76467,43 \\ 684,44b = 4090,78 \\ 684,44a + 55c = 3417,99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4,98 \\ b = 5,98 \\ c = 0,11 \end{cases} \Rightarrow f(x)x^3 + 4,98x^2 + 5,98x + 0,11$$

г) $e_i = \sum(f(x) - y)^2 \approx 237,72$

$s^2 = \dfrac{e_i}{n-2} \approx 4,48$

$\gamma = 0,93 \quad \alpha_1 = \dfrac{(1-0,93)}{2} = 0,035 \quad \alpha_2 = \dfrac{(1+0,93)}{2} = 0,965 \quad k = 55-1 = 54$

$\chi^2_{\alpha_1} = 74,28 \quad \chi^2_{\alpha_2} = 36,76 \quad 54 \cdot \dfrac{4,48}{74,27} < \sigma^2 < 54 \cdot \dfrac{4,48}{36,76} \quad \sigma^2 \in (3,26; 6,58)$

д) $4,98 - 1,75 \cdot \sqrt{\dfrac{55}{4,48}} < a < 4,98 + 1,75 \cdot \sqrt{\dfrac{55}{4,48}}$

$a \in (-1,14; 11,11)$

e)