Ясько Е.Ю.

М8О-405Б-18

Вариант №3

Ур-я есть 30/30

Отчет по лабораторной работе „Нелинейная субоптимальная фильтрация"

Математическая модель скалярных объекта наблюдения и измерителя:

$x_{k+1} = a_k(x_k, V_k)$ - ур-е состояния объекта наблюдения

$$X = cX + eXV$$

$y_k = b_k(x_k, W_k)$ - ур-е измерителя

$$y = gX + fX^2W$$

$x_0 \sim N(0;1)$ - гауссовское начальное состояние объекта наблюдения с

$$m = 0,\ d = \sigma^2 = 1$$

$W_k \sim N(0;1)$, $V_k \sim N(0;1)$ - независимые стандартные гауссовские дискретные белые шумы.

$$c = 0{,}9;\quad e = 0{,}05;\quad f = 1;\quad g = 0{,}02$$

1. Вычисление структурных функций нелинейных фильтров в скалярном случае:

1.1. Для линеаризованных фильтров:

$$\tau_k(z,p) = a_k(z, \cancel{m_k^v}^{\,0}) = cz \quad \Rightarrow №2 \qquad a_k(x,v) = cx + exv$$

$$\Theta_k(z,p) = p \cdot \left(\frac{\partial a_k(x,v)}{\partial x}\right)^2_{z,0} + \left(\frac{\partial a_k(x,v)}{\partial v}\right)^2_{z,0} \cdot \cancel{D_k^v}^{\,1} = p \cdot (c)^2 + (ez)^2 = c^2p + e^2z^2 \quad \Rightarrow №15$$

$$h_k(m,d) = b_k(m, \cancel{m_k^v}^{\,0}) = gm \quad \Rightarrow №5 \qquad b_k(x,w) = gx + fx^2w$$

$$G_k(m,d) = \frac{\partial h_k(m,d)}{\partial m} = g \quad \Rightarrow №8$$

$$F_k(m,d) = d \cdot \left(\frac{\partial b_k(x,w)}{\partial x}\right)^2_{m,0} + \left(\frac{\partial b_k(x,w)}{\partial w}\right)^2 \cdot \cancel{D_k^v}^{\,1} = d \cdot (g)^2 + (fm^2)^2 = g^2d + f^2m^4 \quad \Rightarrow №16$$

1.2 Для гауссовских фильтров:

$$\varphi_k(x) = M[a_k(x, V_k)] \Rightarrow \tau_k(z,p) = M_N^{z,p}[\varphi_k(x)]$$

$$\varphi_k(x) = cx \Rightarrow \tau_k^{(z,p)} = cz \quad \Rightarrow №2$$

$$\Xi_k(x) = M[a_k^2(x, V_k)] \Rightarrow \Theta_k(z,p) = M_N^{z,p}[\Xi_k(x)] - \tau_k^2(z,p)$$

$$\Xi_k(x) = M[c^2x^2 + 2cex^2V + e^2x^2V^2] = c^2x^2 + e^2x^2$$

$M_N^{z,p}[\Xi_k(x)] = M_N^{z,p}[c^2x^2+e^2x^2] = c^2(z^2+p)+e^2(z^2+p) \Rightarrow$

$\Theta_k^{(z,p)} = c^2(z^2+p)+e^2(z^2+p)-c^2z^2 = c^2p+e^2z^2+e^2p \Rightarrow №5$

$\vartheta_k(x) = M[\mathcal{B}_k(x,w_k)] \Rightarrow h_k(m,d) = M_N^{m,d}[\vartheta_k(x)]$

$\vartheta_k(x) = M[gx+fx^2w] = gx$

$h_k(m,d) = gm \Rightarrow №5$

$G_k(m,d) = \dfrac{\partial h_k(m,d)}{\partial m} = g \Rightarrow №8$

$\Pi_k(x) = M[\mathcal{B}_k^2(x,w_k)] \Rightarrow F_k(m,d) = M_N^{m,d}[\Pi_k(x)] - h_k^2(m,d)$

$\Pi_k(x) = M[g^2x^2+2gfx^3w+f^2x^4w^2] = g^2x^2+f^2x^4$

$M_N^{m,d}[\Pi_k(x)] = M_N^{m,d}[g^2x^2+f^2x^4] = g^2(m^2+d)+f^2\underbrace{M_N^{m,d}[x^4]} \ominus$

$\alpha_3(m,d) = m\cdot\alpha_2+2d\alpha_1 = m(m^2+d)+2dm = m^3+3md$

$\alpha_4(m,d) = m\cdot\alpha_3+3d\alpha_2 = m(m^3+3md)+3d(m^2+d) = m^4+3dm^2+3m^2d+3d^2$

$\ominus\ g^2(m^2+d)+f^2(m^4+6m^2d+3d^2)$

$F_k(m,d) = g^2(m^2+d)+f^2(m^4+6m^2d+3d^2)-g^2m^2 = g^2d+f^2m^4+6m^2f^2d+$
$+3f^2d^2 \Rightarrow №20$

Номера структурных функций в работе:

	τ	Θ	h	G	F
линеар.	2	15	5	8	16
гаусс.	2	5	5	8	20

2. Уравнения всех исследуемых фильтров с формулами вычисления их параметров.

2.1 АОФ

Уравнения гауссовского приближения к АОФ:

$$\begin{cases} K_k = \Psi_k G_k^T(\Lambda_k,\Psi_k)F_k^{-1}(\Lambda_k,\Psi_k) \\ \hat{X}_k = \Lambda_k + K_k(\Lambda_k,\Psi_k)[Y_k - h_k(z_k,P_k)] \text{ - ур-е коррекции} \\ P_k = \Psi_k - K_k(\Lambda_k,\Psi_k)G_k^T(\Lambda_k,\Psi_k)\Psi_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_{k+1} = \tau_k(z_k,p_k) \\ \Psi_{k+1} = \Theta_k(z_k,p_k) \text{ - ур-я прогноза} \end{cases}$$

Линеаризованное прибл-е к АОФ:

Линеаризуем ур-е: $x_{k+1} = a_k(x_k,v_k) \approx a_k(z_k,m_k^v) + \left(\dfrac{da_k}{dx}\right)_*(x_k-z_k) + \left(\dfrac{da_k}{dv}\right)_* \mathring{V}_k$,

где $*$: $x_k = z_k$; $v_k = m_k^v$

$$y_k = b_k(x_k, w_k) \approx b_k(\Lambda_k, m_k^w) + \left(\frac{db_k}{dx}\right)_\# (x_k - \Lambda_k) + \left(\frac{db_k}{dw}\right)_\# \mathring{w}_k,$$

где $\#: \; x_k = \Lambda_k, \; w_k = m_k^w$

Тогда:

$$\tau_k(z,p) \approx a_k(z, m_k^v)$$

$$\Theta(z,p) \approx \left(\frac{da_k}{dx}\right)_* p \left(\frac{da}{dx}\right)_*^T + \left(\frac{da}{dv}\right)_* Q_k \left(\frac{da}{dv}\right)_*^T$$

$$h_k(\lambda, \psi) \approx b_k(\lambda, m_k^w)$$

$$F_k(\lambda, \psi) \approx \left(\frac{db_k}{dx}\right)_\# \psi \left(\frac{db_k}{dx}\right)_\# + \left(\frac{db_k}{dw}\right)_\# R_k \left(\frac{db_k}{dw}\right)_\#$$

$$G(\lambda, \psi) \approx \left(\frac{db_k}{dx}\right)_\#$$

2.2 ДУОФ

$$\begin{cases} z_k = \Lambda_k + H_k[y_k - b_k(\Lambda_k, m_k^w)] + e_k & \text{- коррекции} \\ \Lambda_{k+1} = F_k G_k(z_k, m_k^v) + g_k & \text{- прогноза} \end{cases}$$

• (H_k, e_k): $I_k = M[(x_k - z_k)^2] \to I_k(H_k, e_k) \to \min\limits_{H,e}$

$$H_k = D_{kk}^{\Delta x \Delta y}(D_k^{\Delta y})^{-1}, \quad \Delta x_k = x_k - \Lambda_k$$

$$e_k = m_k^{\Delta x} - H_k m_k^{\Delta y}, \quad \Delta y_k = y_k - b_k(\Lambda_k, m_k^w)$$

• (F_k, g_k): $J_k = M[(x_{k+1} - \Lambda_{k+1})^2] \to \min J_k(F_k, g_k) \to \min\limits_{F,g}$

$$F_k = D_{k+1}^{x,u}(D_k^u)^{-1}$$

$$g_k = m_{k+1}^x - F_k m_k^z, \quad u_k = a_k(z_k, m_k^v)$$

2.3 ФОС

Уравнение для фильтра:

$$\begin{cases} \Gamma_k = D_{kk}^{xz}(D_k^z)^{-1} \\ \varkappa_k = m_k^x - \Gamma_k m_k^z \\ T_k = D_k^x - \Gamma_k (D_{kk}^{xz})^T \end{cases}$$

коррекции $\begin{cases} z_k = \Lambda_k + K_k[y_k - h_k(\Lambda_k, \psi_k)], \text{ где } K_k = \psi_k G_k^T(\Lambda_k, \psi_k) F_k^{-1}(\Lambda_k, \psi_k) \\ u_k = \Gamma_k z_k + \varkappa_k \end{cases}$

прогноза $\begin{cases} \Lambda_{k+1} = \tau_k(u_k, T_k) \\ \psi_{k+1} = \Theta_k(u_k, T_k) \end{cases}$ - отличается от ГАОФ аргументами (вместо z_k, p_k выступает u_k, T_k)

Структурные ф-ии $\tau_k, \Theta_k, h_k, b_k, \Gamma_k$ для АФОС и ГФОС - аналогично.

2.4 МФОС

Уравнения МФОС:

$$z_k = \Lambda + H_k \{\psi_k G_k^T(\Lambda_k, \psi_k) F_k^{-1}(\Lambda_k, \psi_k)[y_k - h_k(\Lambda_k, \psi_k)]\} + e_k$$

$$u_k = \Gamma_k z_k + \varkappa_k$$

$$\Lambda_{k+1} = z_k \tau_k(u_k, T_k)$$

$$\begin{cases} H_k = D_{kk}^{x-\lambda,\Delta y}\left(D_k^{\Delta y}\right)^{-1} \\ e_k = m_k^{x-\lambda} - H_k m_k^{\Delta y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_k = D_{k+1,k}^{x,w}\left(D_k^{w}\right)^{-1}, \\ \eta_k = m_{k+1}^{x} - L_k m_k^{w} \end{cases} \qquad \varphi_k = \tau_k(u_k, T_k)$$

Графики сравнения точности фильтров см. в приложении.

Анализируя графики, полученные после визуализации данных, которые были посчитаны прикладной программой, можно оценить точность по критерию дисперсии ошибки оценивания и сделать вывод, что наилучшими по точности оказались приближения к НФОС, а самый худший результат показали ДУОФ.