4-я тема

Махмудов Орхан

№2

М80-405Б-18

Определим главную часть $\wp\frac{1}{|x|}$ посредством ф-лы

$$\left\langle \wp\frac{1}{|x|}, \varphi \right\rangle = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}dx$$

Док-ть, что преобр. Фурье $F\left[\wp\frac{1}{|x|}\right] = -2c - 2\ln|\xi|$, где c - пост. Эйлера.

Решение:

$$\left(F\left[\wp\frac{1}{|x|}\right], \varphi\right) - \left(\wp\frac{1}{|x|}, F[\varphi]\right) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{F[\varphi](x) - F[\varphi](0)}{|x|}dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|>1} \frac{F[\varphi](x)}{|x|}dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{|x|}\int \varphi(\xi)(e^{ix\xi}-1)\,d\xi\,dx + \int\limits_{|x|>1}\frac{1}{|x|}\int\varphi(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1\int\varphi(\xi)\frac{\cos x\xi - 1}{x}d\xi\,dx + 2\int\limits_1^\infty\int\varphi(\xi)\frac{\cos x\xi}{x}d\xi\,dx =$$

$$= 2\int\varphi(\xi)\int\limits_0^1\frac{\cos\xi x - 1}{x}dx\,d\xi - 2\int\limits_1^\infty\int\varphi'(\xi)\frac{\sin x}{x^2}d\xi\,dx =$$

$$= 2\int\varphi(\xi)\int\limits_0^{|\xi|}\frac{\cos u - 1}{u}du\,d\xi - 2\int\varphi'(\xi)\int\limits_1^\infty\frac{\sin x\xi}{x^2}dx\,d\xi =$$

$$= 2\int\varphi(\xi)\left[\int\limits_0^{|\xi|}\frac{\cos u - 1}{u}du + \frac{d}{d\xi}\int\limits_1^\infty\frac{\sin x\xi}{x^2}dx\right]d\xi = -2\int\varphi(\xi)(C+\ln|\xi|),$$

где

$$C = \int\limits_0^1\frac{1-\cos u}{u}du - \int\limits_1^\infty\frac{\cos u}{u}du \Longrightarrow \underline{\underline{F\left[\wp\frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2\ln|\xi|}}$$