РГР №1

Махмудов Орхан
М8О-405Б-18

Два самолёта, принадл. 1-ому игроку, хотят уничтожить цель, принадлеж. второму игроку. К этой цели ведут 3 маршрута, и у второго игрока есть 3 системы защиты, которые он может размещать на любых из этих маршрутов. Если самолёт полетит по маршруту, на котором есть система защиты, то он будет сбит. Одна система защиты может сбить только один самолёт.

У 1-ого игрока есть 2 стратегии:

1) Самолёты на разных маршрутах
2) Самолёты на одном маршруте

У 2-ого игрока есть 3 стратегии:

1) Каждая система защиты на своём маршруте
2) Один маршрут прикрыт двумя системами, ещё один маршрут прикрыт одной системой
3) Все 3 системы на одном маршруте

Плата за разрушение цели равна 1, если цель не разрушена, то 0.
Составить м-цу игры, исп. вероятности выхода на цель.
Решить игру и сделать к ней графич. иллюстрацию

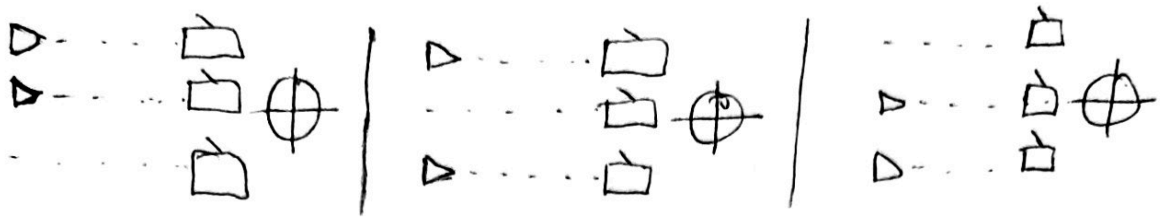
Решение:
Составим м-цу игры:

$$A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix}$$

Найдём каждую вероятность выхода на цель

$P_{11}$: оба игрока выбрали 1-ую стратегию

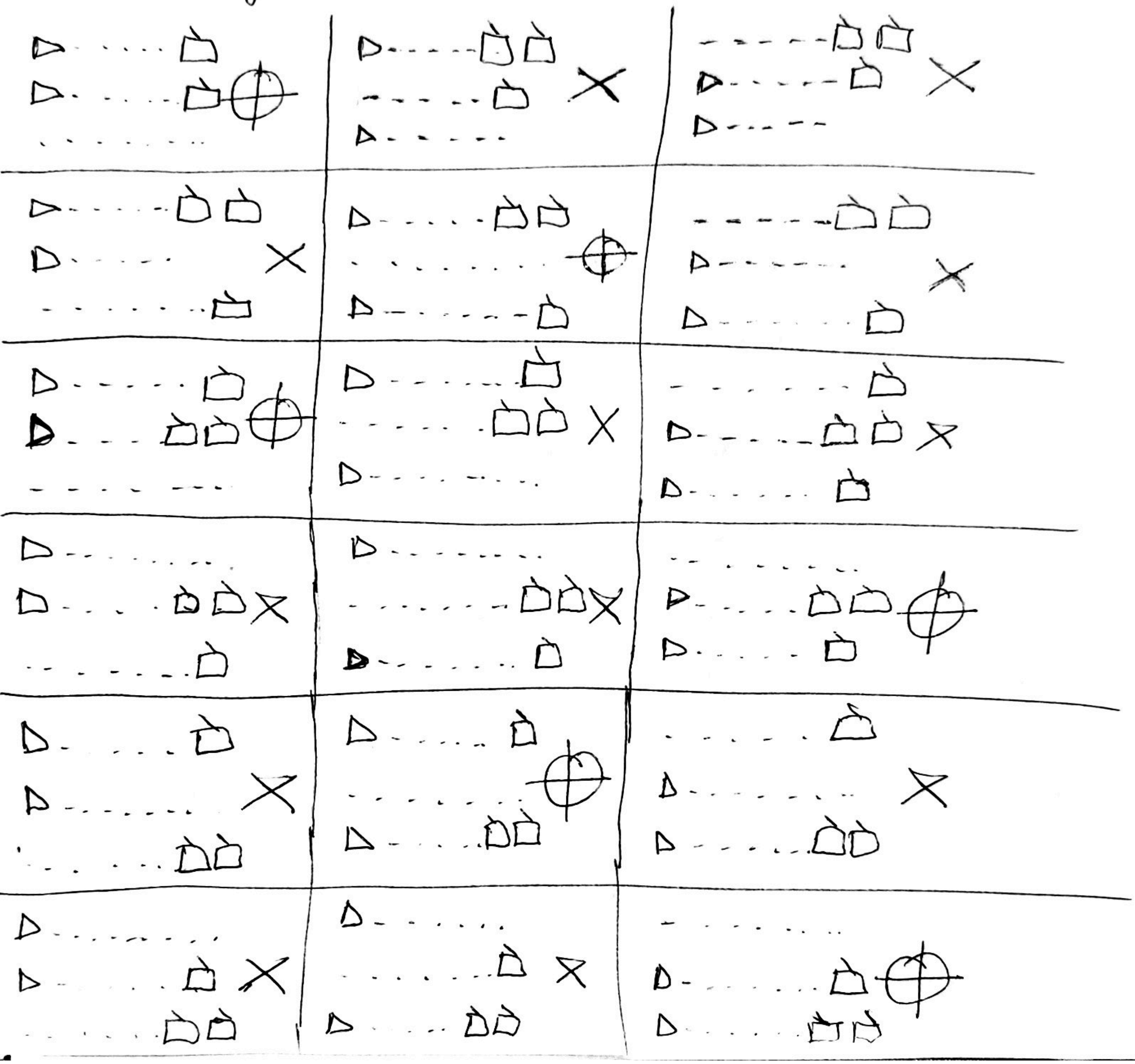
Всего возможно три случая:



Цель не сбита ни в одном из случаев $P_{11}=0$

$P_{12}$: первый игрок выбрал первую стратегию, второй - вторую

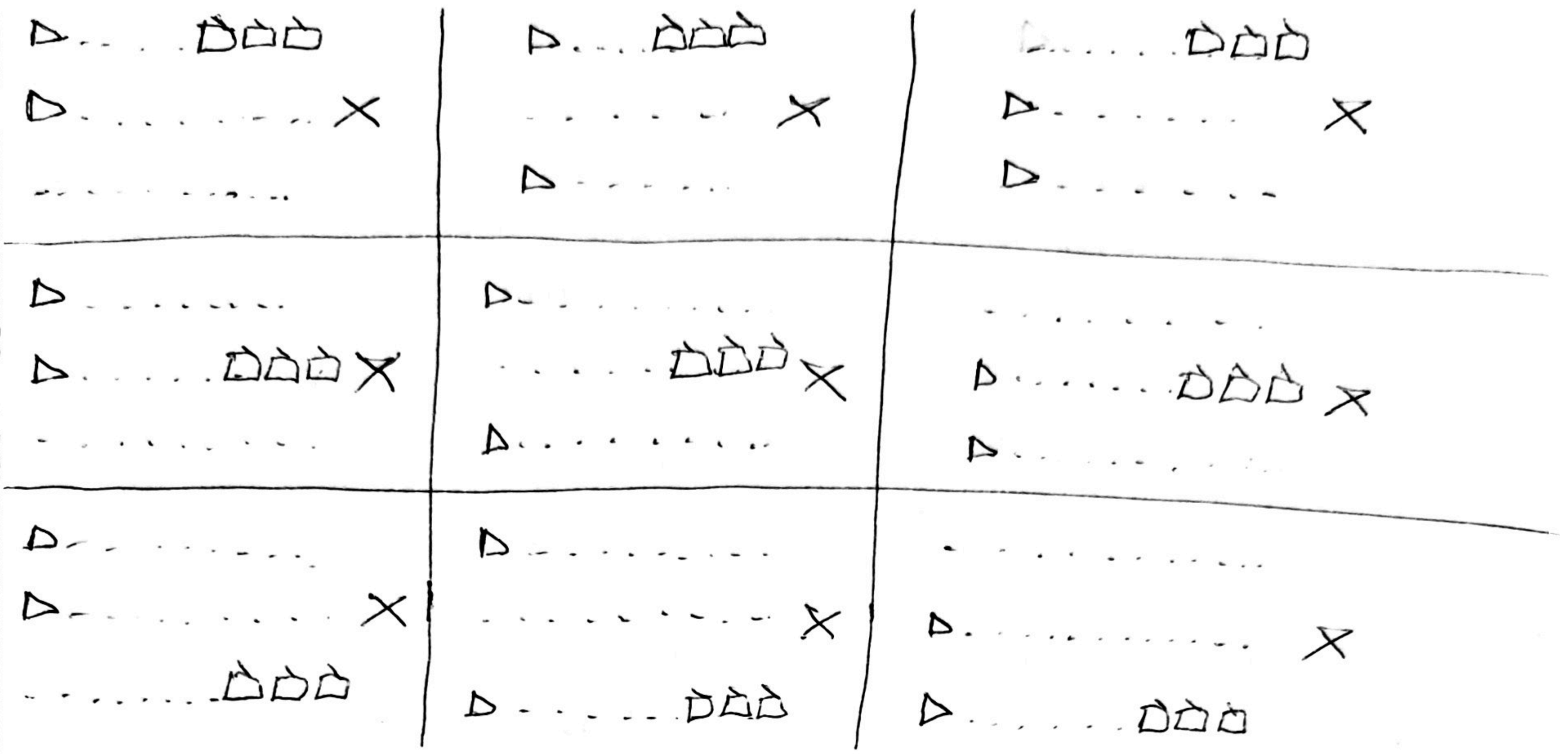
Всего 18 случаев:



Цель сбита в 12 из 18 случаев, $p_{12} = \frac{2}{3}$

$p_{13}$: первый игрок выбрал первую стратегию, второй – третью

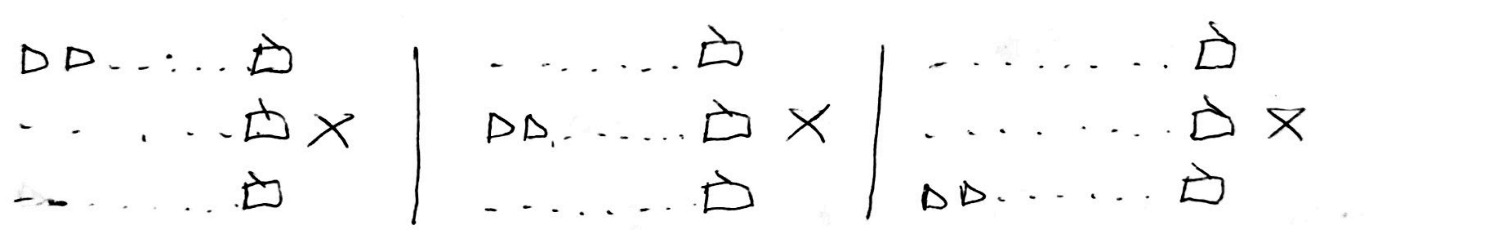
Всего возможно 9 случаев!



Цель сбита во всех случаях $p_{13} = 1$

$p_{21}$: первый игрок выбрал вторую стратегию, второй первую

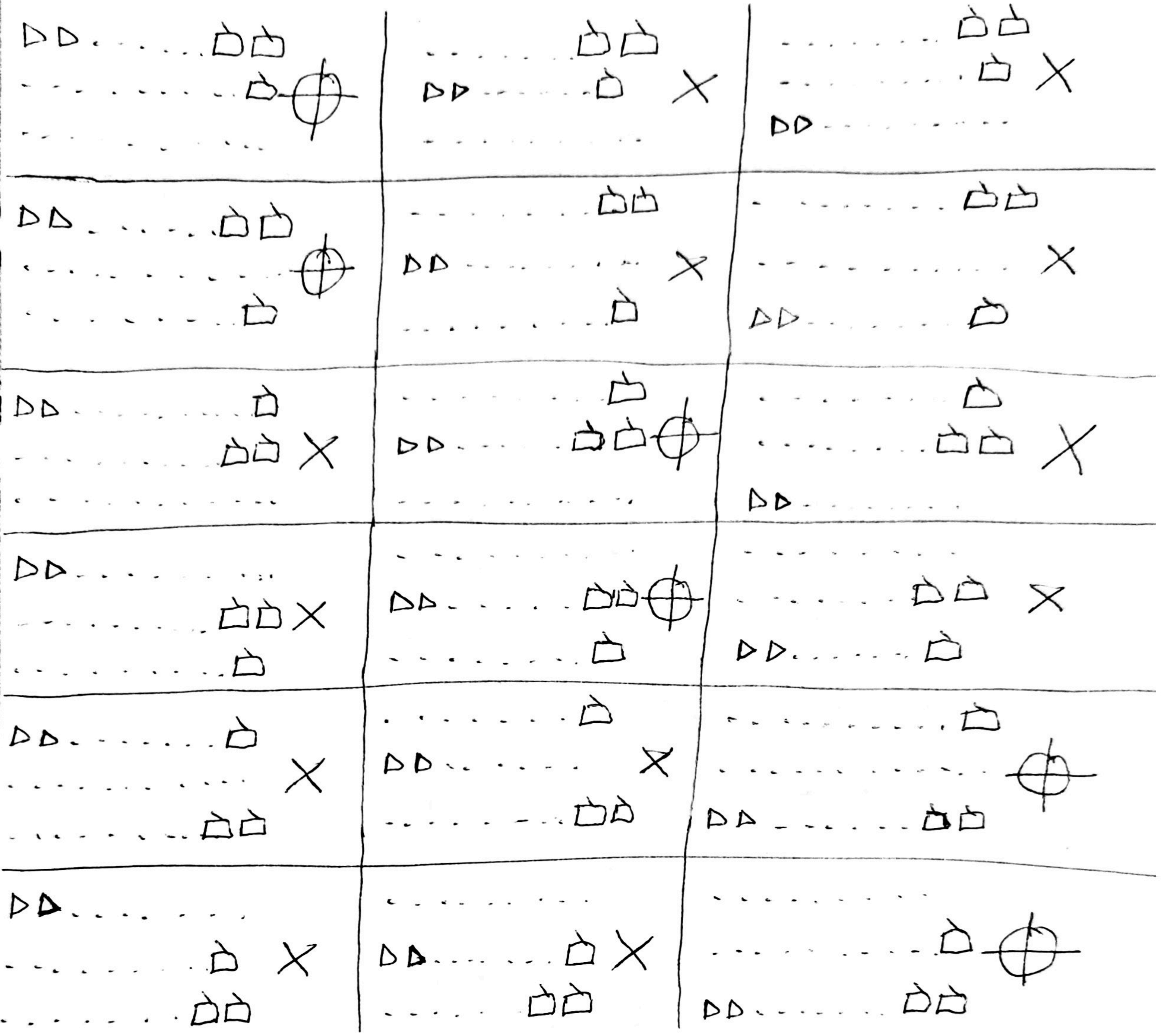
Всего возможно 3 случая



Цель сбита во всех случаях $p_{21} = 1$

$P_{22}$: оба игрока выбрали вторую стратегию

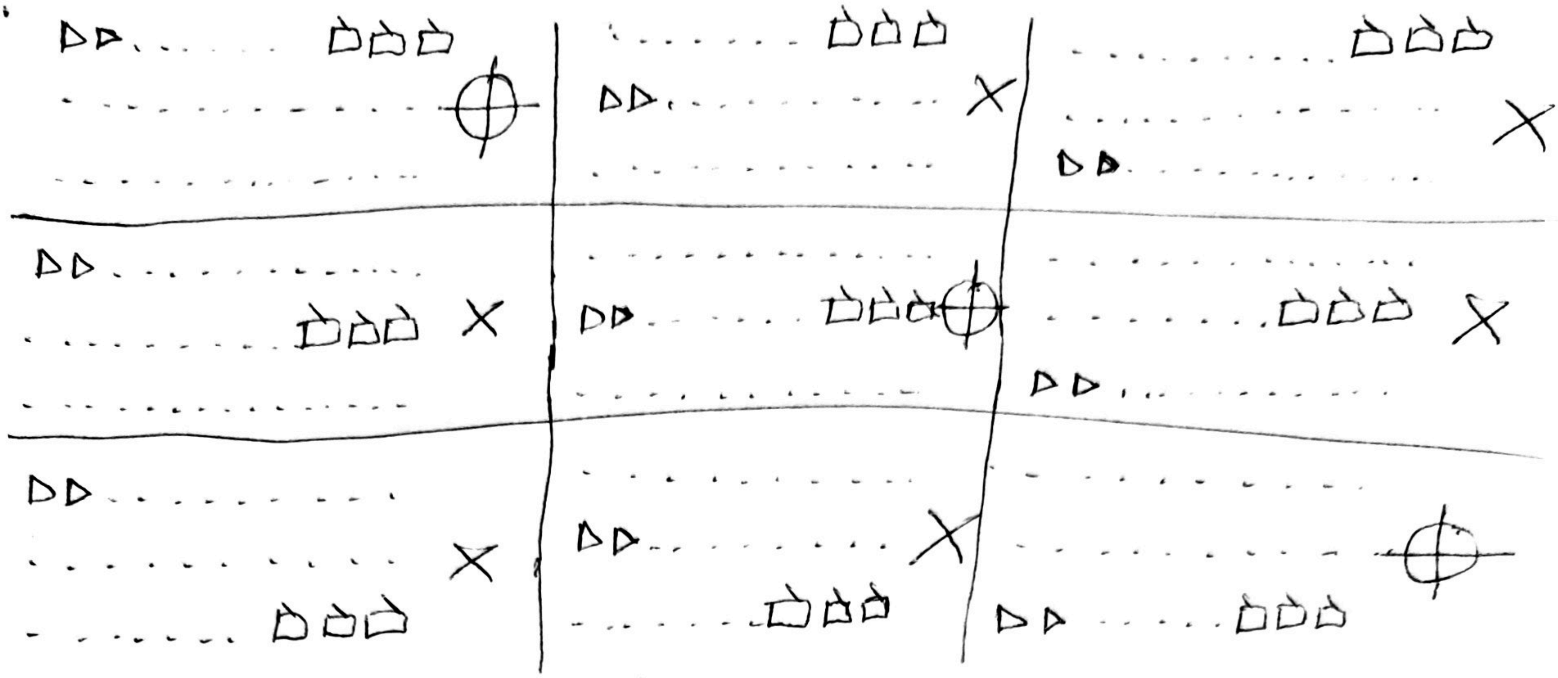
Всего возможно 18 случаев:



Цель сбита в 12 из 18 случаев. $p_{22} = \frac{2}{3}$

$P_{23}$: первый игрок выбрал вторую стратегию, второй - третью.

Всего возможно 9 случаев!



Цель сбита в шести из 9 случаев. $P_{23} = \frac{2}{3}$

Итого, получаем м-цу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1 \\ 1 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$\underline{v} = 2/3$
$\overline{v} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow \underline{v} = \overline{v} \Rightarrow$ задача решаема в чистых стратегиях

Элемент $a_{22} = 2/3$ - является седловой точкой: $a_{12} \leq a_{22} \leq a_{21}$

Следовательно, решение в чистых

ДЗ №2 Махмудов Орхан М8О-405Б-18

Найти оптимальное решение методом уступок для след. крит:

$$g_1(x) = (x_1-10)^2 - (x_2-3)^2$$

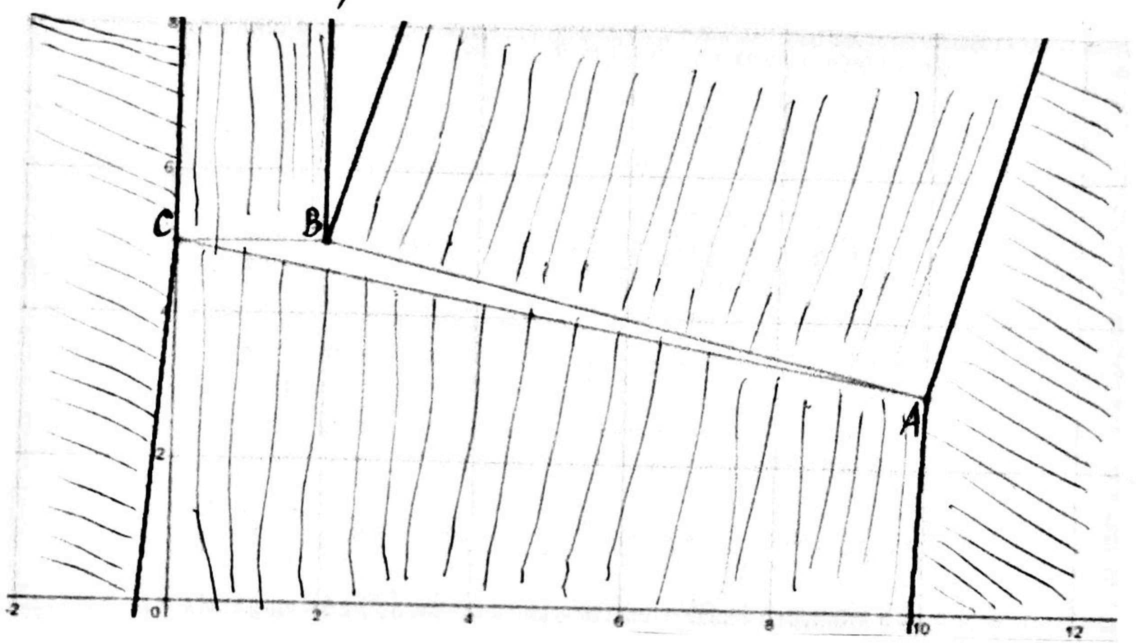
$$g_2(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-5)^2$$

$$g_3(x) - x_1^2 + (x_2-5)^2$$

Решение:

Критерии представляют собой квадраты расстояний до точек $A(10;3)$, $B(2;5)$ и $C(0;5)$. Найдём мн-во Парето

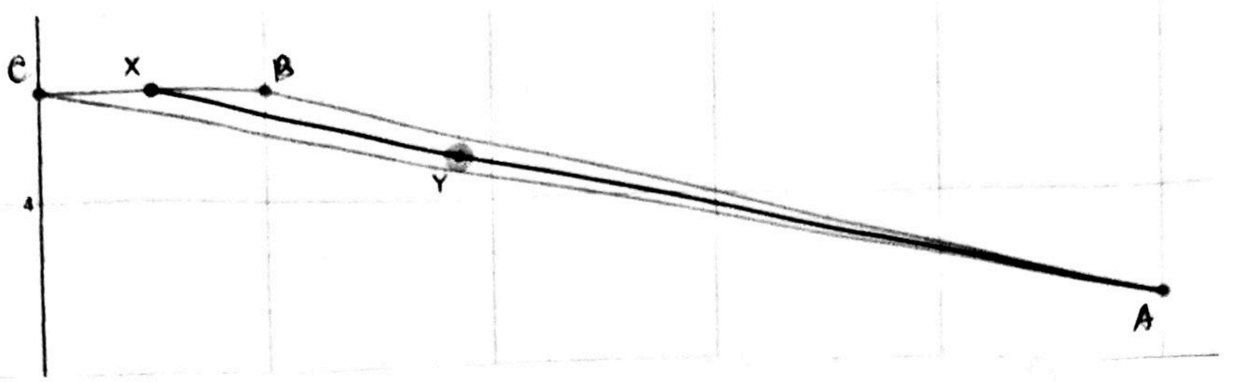
Покажем, что все точки за пределами треугольника ABC не явл. опт. по Парето:




Для точек из обл. с горизонтальной штриховкой знач. всех трёх критериев больше, чем для соотв. вершины треуг. Следовательно, вершина треугольника меньше либо равна расам. точки, а значит не оптим. по Парето.

Для точек из обл. с вертикальной штриховкой знач. всех трёх критериев больше, чем у проекции данной точки на соотв. сторону треугольника

Покажем, что точки треугольника $ABC$ оптимальны по Парето



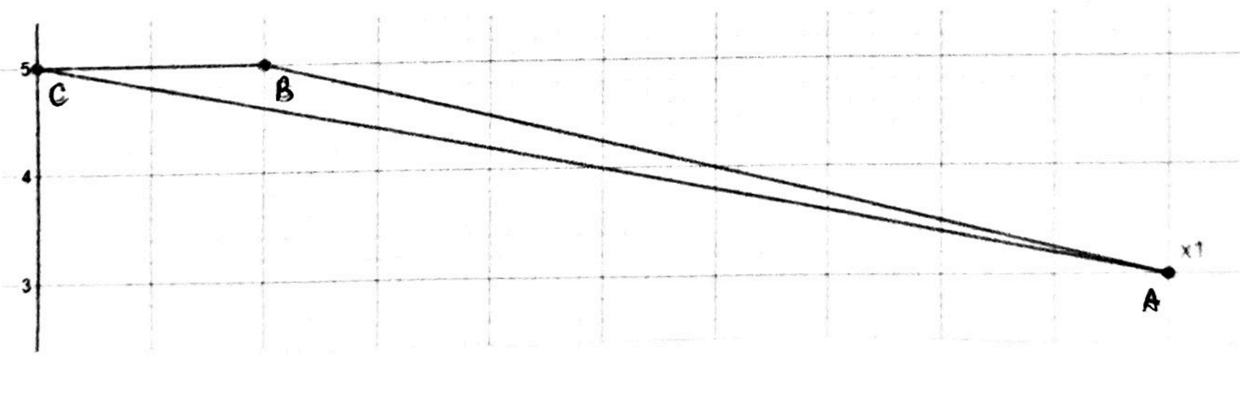

Пусть точка $X$ лежит на отрезке $BC$. Покажем, что отр. $AX$ оптим. по Парето:

Рассм. $Y$, принадлеж. отр. $AX$. Если двигаться вдоль отрезка к т. $A$, то $g_2$ и $g_3$ будут увеличиваться. Если двигаться вдоль отрезка к т. $X$, то $g_1$ будет увеличиваться. Если двигаться в левую полуплоскость относительно отрезка, то один из критериев $g_1$ или $g_2$ будет увеличиваться. Если двигаться в правую полуплоскость относительно отрезка, то один из критериев $g_1$ или $g_3$ будет увеличиваться

Таким образом любые плоскости хуже точки $Y$. След. $Y$ оптим. по Парето. Так как $Y$ - любая точка отрезка $AX$, то и отр. $AX$ опт. по Парето. Т.к. $X$ - любая точка отр. $BC$, то все отр. $AX$ опт. по Парето. След. $\triangle ABC$ опт. по Парето.

Найдём опт. решение методом уступок.

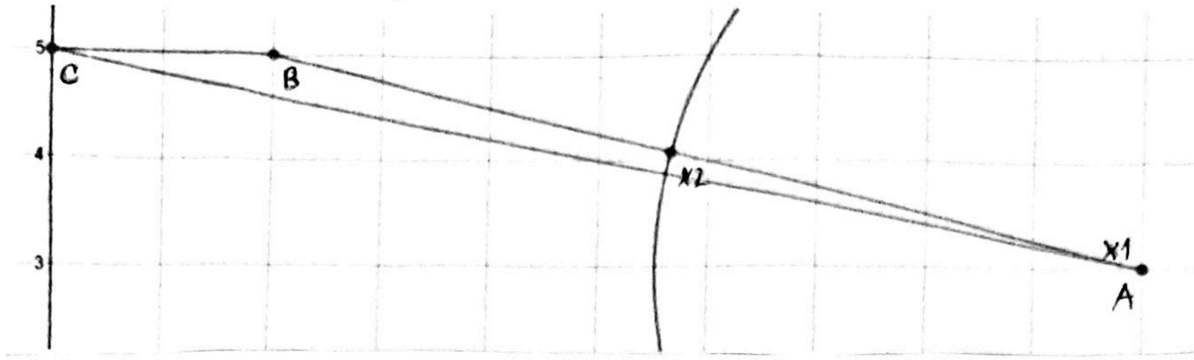
$x^1 = \arg\min\limits_{x\in P} g_1(x)$ Данный минимум дост. в т. $A$, $x^1 = \begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}$



Вторая итерация:

Введём уступку по перв. крит. $\Delta g_1 = 20$. Решение находится как минимум второго критерия:

$$x^2 = \underset{x\in P}{\arg\min}\{g_2(x) \mid g_1(x) \le g_1(x^1) + \Delta g_1\}$$




Решение будет находиться на пересечении отр. AB и окружн.

$$(x_1-10)^2 + (x_2-3)^2 = 20$$

$$x_2 = 3 + \frac{5-3}{2-10}(x_1-10)$$

$$x_2 = 3\ \ \frac{1}{4}(x_1-10) = 3 - \frac{x_1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} - \frac{x_1}{4}$$

$$(x_1-10)^2 + \left(-\frac{x_1}{4} + \frac{5}{2}\right)^2 = 20$$

$$17x_1^2 - 340x_1 + 1380 = 0$$

$$(x_1)_{1,2} = \frac{340 \pm 16\sqrt{85}}{34} = 10 \pm \frac{8\sqrt{85}}{17}$$

$10 + \frac{8\sqrt{85}}{17}$ правее, чем конец отр. A. Поэтому:

$$x_1 = 10 - \frac{8\sqrt{85}}{17}$$

$$x_2 = 3 + \frac{2\sqrt{85}}{17}$$

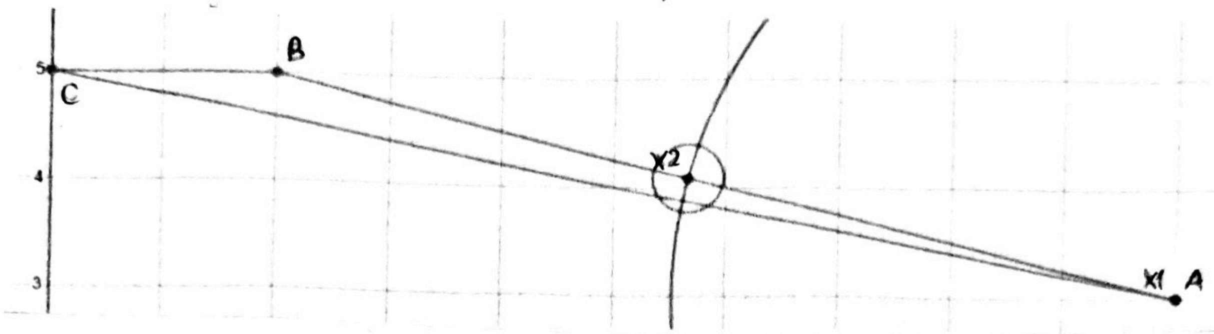
Тогда новое решение $x^2 = \begin{pmatrix} 10 - \frac{8\sqrt{85}}{17} \\ 3 + \frac{2\sqrt{85}}{17} \end{pmatrix}$

Третья итерация!

Введём уступку по второму критерию $\Delta g_2 = 0.1$. Решение находится как минимум третьего критерия:

$$x^3 = \arg\min_{x \in D} \{ g_3(x) \mid g_1(x) \le g_1(x^1) + \Delta g_1,\ g_2(x) \le g_2(x^2) + \Delta g_2 \}$$

Ближайшая к C точка наход. на границе окружн, провед. вокруг A. Из них, ближ. к C лежит на пересечении окружн. и отрезка AC.




$$\begin{cases} (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 3)^2 = 20 \\ x_2 = 3 + \dfrac{5-3}{0-10}(x_1 - 10) \end{cases}$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{5}(x_1 - 10) = 5 - \frac{x_1}{5}$$

$$(x_1 - 10)^2 + \left(-\frac{x_1}{5} + 2\right)^2 = 20$$

$$13x_1^2 - 260x_1 + 1050 = 0$$

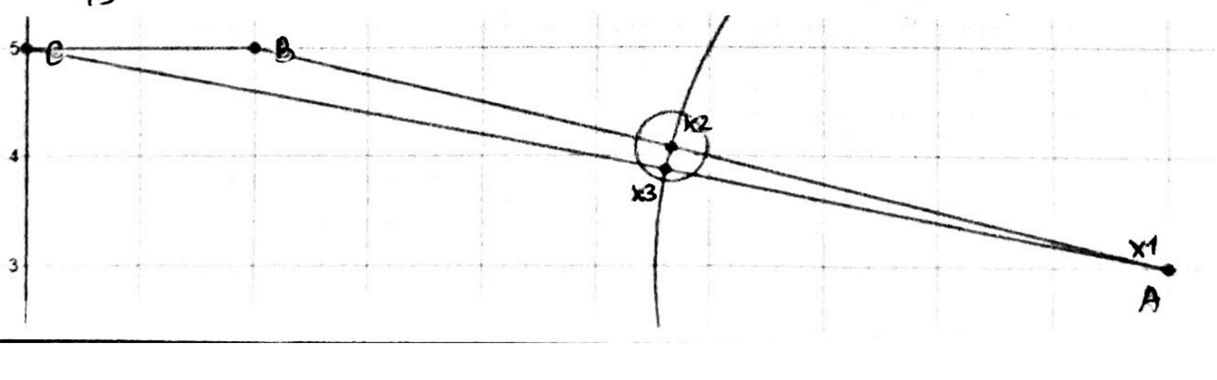
$$(x_1)_{1,2} = \frac{260 \pm 10\sqrt{130}}{26} = 10 \pm \frac{5\sqrt{130}}{13}$$

$10 + \frac{5\sqrt{130}}{13}$ правее, чем конец отр. A. Поэтому:

$x_1 = 10 - \frac{5\sqrt{130}}{13}$

$x_2 = 3 + \frac{\sqrt{130}}{13}$

Тогда новое решение $x^3 = \begin{pmatrix} 10 - \frac{5\sqrt{130}}{13} \\ 3 + \frac{\sqrt{130}}{13} \end{pmatrix}$



РГР №3

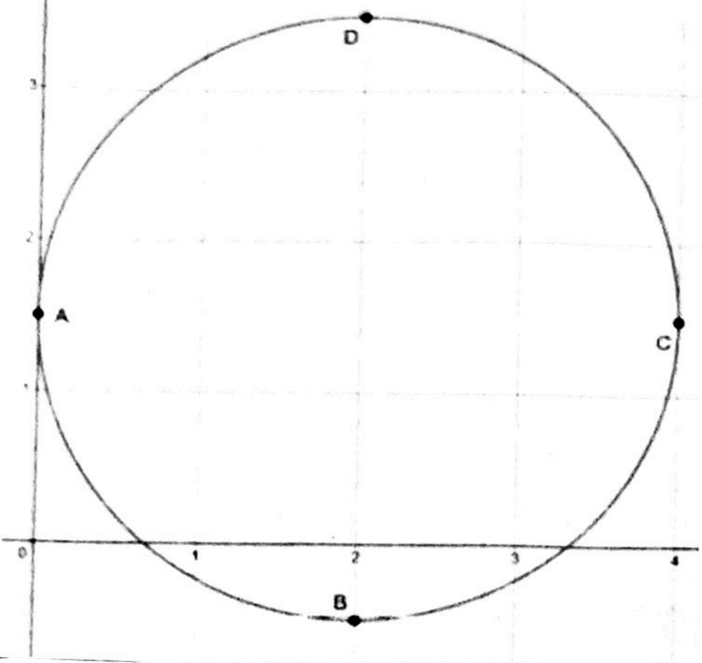
Махмудов Орхан
М80-405Б-18

Найти эффективные по Джоффриону точки на мн-ве вект. оценок:

$$Y = \{(y_1-2)^2 + (y_2-1,5)^2 = 4\}$$

Решение:

Найдём эффект. по Парето точки, Разобьём окружность на 4 точки A, B, C, D и 4 дуги AB, BC, CD, DA. Дуги находятся строго между точками A, B, C, D, потому не включают их.

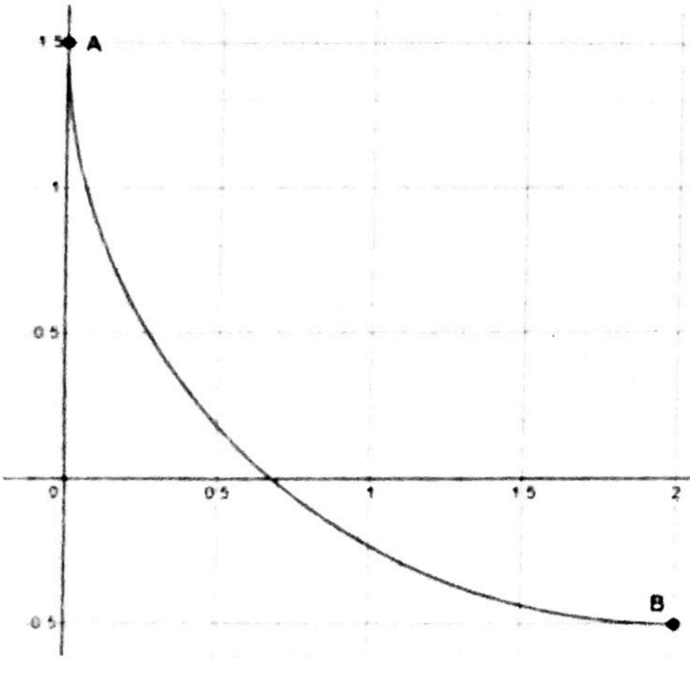



Точки C и D не опт. по Парето, т.к. $A \le C$, $A \le D$

Дуги CD и DA не опт. по Парето, т.к. для любых точек $X \in CD$, $Y \in DA$: $X \le A$, $Y \le A$

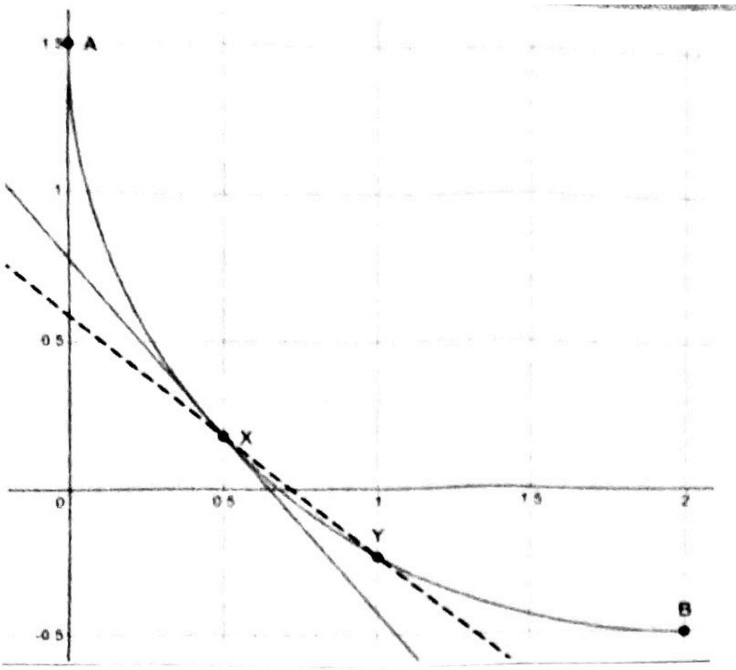
Дуга BC не опт. по Парето, т.к. для любой точки $X \in BC$: $X \le B$.

Точки A и B опт. по Парето, так как в них достигается минимум по $y_1$ и $y_2$ соотв.




При движении по дуге AB $y_1$ возрастает, $y_2$ убывает. Таким образом для любых двух различных точек $X, Y \in AB$ либо $y_{x_1} < y_{y_1}$, $y_{x_2} > y_{y_2}$, либо $y_{x_1} > y_{y_1}$, $y_{x_2} < y_{y_2}$

Следовательно, дуга AB и т. A и B опт. по Парето




Найдём, какие точки из них опт. по Джоффриону. Рассм. точку X на дуге AB и сравним её с другими точками Y из мн-ва Парето.

Первый случай: Y правее и ниже X

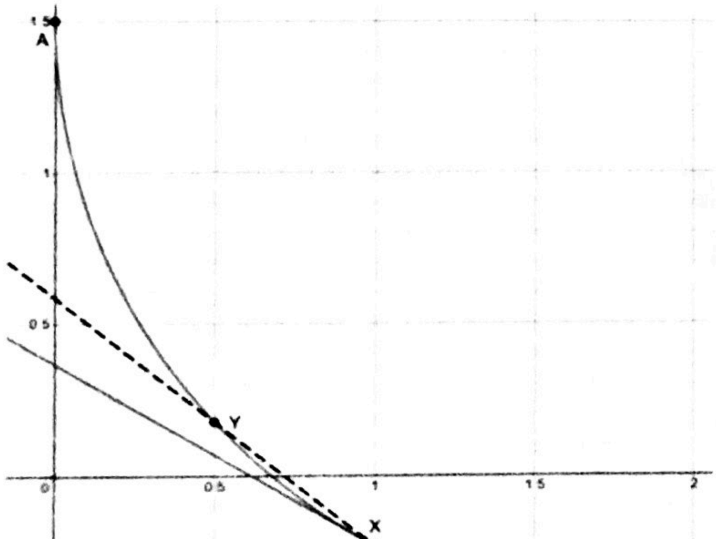
Тогда $I_1=\{2\}, I_1=\{1\}$ $\quad \frac{y_{x_2}-y_{y_2}}{y_{y_1}-y_{x_1}} \le \theta_1$

$\frac{y_{x_2}-y_{y_2}}{y_{y_1}-y_{x_1}}$ - это модуль коэфф. наклона прямой проходящей через точки X и Y. Очевидно, что коэфф наклона этой прямой по модулю меньше, чем коэфф. наклона $\theta_1$ касательной, проходящей через X.

$$\theta_1 = \frac{2-y_{x_1}}{y_{x_2}-1{,}5}$$

Следовательно $\exists\, \theta_1 = \frac{2-y_{x_1}}{y_{x_2}-1{,}5} : \frac{y_{x_2}-y_{y_2}}{y_{y_1}-y_{x_1}} \le \theta_1$

Второй случай: Y левее и выше X




Тогда $I_1=\{1\}, I_1=\{2\}$ $\quad \frac{y_{x_1}-y_{y_1}}{y_{y_2}-y_{x_2}} \le \theta_2$

Очевидно, что коэфф. наклона этой прямой по модулю больше, чем коэфф. наклона $\frac{1}{\theta_2}$ касат., проходящей через X

$$\frac{1}{\theta_2} = \frac{2-y_{x_1}}{y_{x_2}-1{,}5}$$

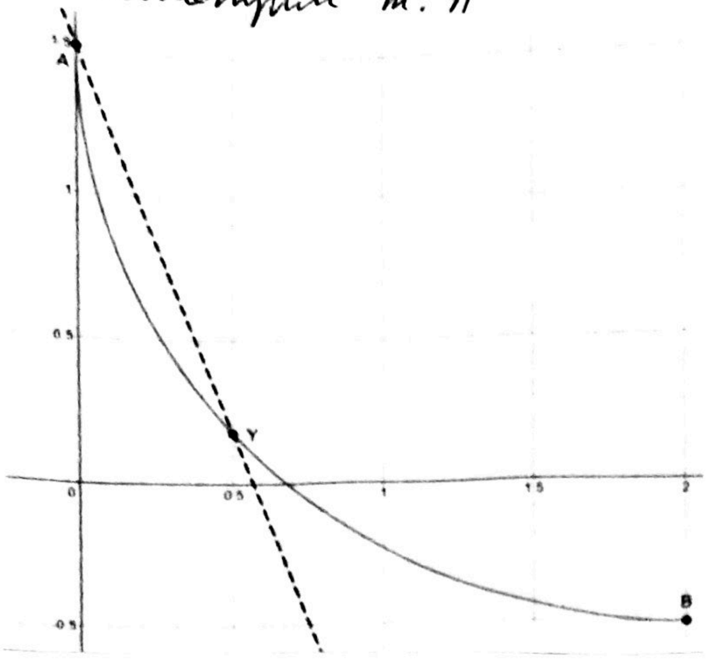
Следовательно, $\exists\, \theta_2 = \frac{y_{x_2}-1{,}5}{2-y_{x_1}} : \frac{y_{x_1}-y_{y_1}}{y_{y_2}-y_{x_2}} \le \theta_2$

Итого $\exists\, \theta = \max\{\theta_1, \theta_2\} : \frac{y_{x_i}-y_{y_i}}{y_{y_j}-y_{x_j}} \le \theta$

$i \in I_1, j \in I_2$ для всех точек дуги AB.

Следовательно дуга AB опт. по Джоффриону

Рассмотрим т. А




Для неё все точки мн-ва Парето лежат правее и ниже, потому проводим аналогичные рассуждения, как и в первой случае дуги AB

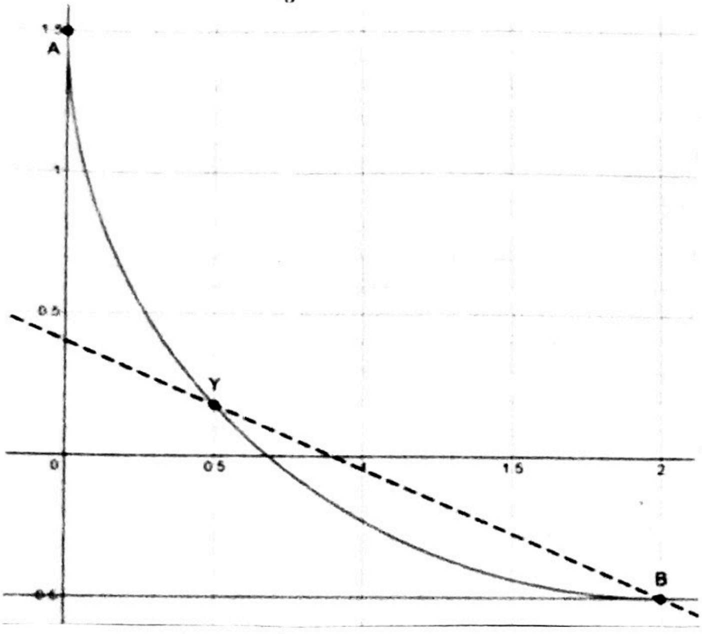
Получаем $\Theta = \Theta_1$, а коэфф. наклона касат. в A равен бесконечности. Следов.

$$\frac{y_{A_2} - y_{y_2}}{y_{y_1} - y_{A_1}} \to \infty$$

След. $\forall \Theta: \frac{y_{Ai} - y_{Yi}}{y_{yj} - y_{Aj}}, i \in I_1, j \in I_2$

A не явл. опт. по Джоффриону.

Аналогично для точки B.




Для неё все точки левее и выше

Получаем $\Theta = \Theta_2$. Коэфф наклона $\frac{1}{\Theta_2}$ должен равняться нулю $\Rightarrow \Theta_2 \to \infty$

Следовательно $\forall \Theta: \frac{y_{Bi} - y_{yi}}{y_{yj} - y_{Bj}}, i \in I_1, j \in I_2$

B не явл. опт. по Джоффриону

Итог:

Оптимальны по Парето: дуга AB и т. A и B

Оптимальны по Джоффриону: только дуга AB без т. A и B