№5

Махмудов Орхан

М80-405Б-18

1) Решить задачу Коши для трёхмерного волнового ур-я

$$u_{tt} - \Delta u = xe^{-t}\cos(3y+4z),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ t>0$$

$$u|_{t=0} = xy\cos z,\quad u_t|_{t=0} = yze^x$$

$a=1$

$\varphi(x) = xy\cos z \qquad \psi(x) = yze^x \qquad f(x,t) = xe^{-t}\cos(3y+4z)$

$\Delta^0\varphi = xy\cos z \qquad \Delta^0\psi = yze^x \qquad \Delta^0 f = xe^{-t}\cos(3y+4z)$

$\Delta^1\varphi = -xy\cos z \qquad \Delta^1\psi = yze^x \qquad \Delta^1 f = -25xe^{-t}\cos(3y+4z)$

$\Delta^2\varphi = xy\cos z \qquad \Delta^2\psi = yze^x \qquad \Delta^2 f = 625xe^{-t}\cos(3y+4z)$

$\Delta^k\varphi = (-1)^k xy\cos z \qquad \Delta^k\varphi = yze^x \qquad \Delta^k f = (-25)^k xe^{-t}\cos(3y+4z)$

$$u = \sum_0^\infty \frac{t^{2k}}{(2k)!}\cdot(-1)^k xy\cos z + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}yze^x + \frac{1}{(2k+1)!}\int_0^t (t-\tau)^{2k+1}\cdot$$

$$\cdot\left[(-25)^k xe^{-t}\cos(\ y+4z)\right]d\tau = xy\cos z\cdot S_1 + yze^x S_2 + x\cos(3y+4z)S_3$$

$$S_1 = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos t$$

$$S_2 = \sum_0^\infty \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh} t$$

$$S_3 = \sum_0^\infty \frac{(-25)^k}{(2k+1)!}\cdot\int_0^t (t-\tau)^{2k+1}e^{-\tau}d\tau = \frac{1}{5}\int_0^t e^{-\tau}\sum_0^\infty (-1)^k\frac{(5(t-\tau))^{2k+1}}{(2k+1)!}d\tau =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^t e^{-\tau}\cdot\sin(5t-5\tau)d\tau = -\frac{\cos 5t}{26} + \frac{\sin 5t}{130} + \frac{e^{-t}}{26}$$

$$u(x,t) = xy\cos z\cdot\cos t + yze^x\operatorname{sh} t + x\cos(3y+4z)\cdot\left(\frac{\sin 5t}{130} - \frac{\cos 5t}{26} + \frac{e^{-t}}{26}\right)$$

2) Показать, что для существования классич. решения задачи Коши для трёхмерного волнового ур-я

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ t>0$$

$$u|_{t=0} = \alpha(r), \quad u_t|_{t=0} = \beta(r)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, достаточно, чтобы $\alpha \in C^3[0, +\infty)$, $\beta \in C^2[0, +\infty)$, $\alpha'(0) = 0$

$a = 1, \ n = 3, \ r > 0$

Сведём задачу Коши в R^3 к одномерной задаче на полуоси $r > 0$

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r, & t>0, \ r>0 \\ u|_{t=0} = \alpha(r) & u_t|_{t=0} = \beta(r) \end{cases}$$

$$\varphi(r,t) = r u(r,t) \Rightarrow u(r,t) = \frac{\varphi(r,t)}{r}, \quad \varphi(r,t)|_{r=0} = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_{tt} = \varphi_{rr}, & t>0, \ r \geq 0 \\ \varphi|_{t=0} = r \cdot \alpha(r), \ \varphi_t|_{t=0} = r\beta(r), \ \varphi|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

Используя ф-лу Даламбера, продолжая нач. ус-я на отриц полуось

$$u(r,t) = \frac{1}{2r}\left((r+t)\alpha(r+t) + (r-t)\alpha(r-t)\right) + \frac{1}{2r}\int_{r-t}^{r+t} r\beta(r)\,dr$$

3) Найти решение задачи Коши для ур-я теплопроводности по ф-ле Пуассона:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \ t > 0 \\ u|_{t=0} = e^{2x - x^2} \end{cases}$$

Преобразование экспонент в ф-лу Пуассона

$$e^{-\frac{(\xi - x)^2}{t}} \cdot e^{2\xi - \xi^2} = e^{-\frac{(\xi - x)^2}{t} + 2\xi - \xi^2} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{t} - \frac{\xi x}{t} - \frac{x^2}{t} + 2\xi - \xi^2\right)$$

$$\exp\left(-\left(\xi\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)^2 + \frac{\xi x}{t} - \frac{x^2}{t} + 2\xi\right) = \exp\left(-\left(\xi\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)^2 + \xi\left(2 + \frac{x}{t}\right) - \frac{x^2}{t}\right) =$$

$$= \exp\left(-\left(\left(\xi\sqrt{1+\frac{1}{t}}\right)^2 - \frac{\xi\sqrt{1+\frac{1}{t}}\left(\frac{x}{t}+2\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}} + \frac{\left(1+\frac{x}{2t}\right)^2}{1+\frac{1}{t}} + \frac{\left(1+\frac{x}{2t}\right)^2}{1+\frac{1}{t}} - \frac{x^2}{t}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\left(\xi\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \frac{2t+x}{\sqrt{4t^2+4t}}\right)^2 + \frac{4t^2+4xt+x^2}{4t^2+4t} - \frac{x^2}{t}\right) = K$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} K \, d\xi = \left\{ \eta = \xi\sqrt{1+\frac{1}{t}} - \frac{2t+x}{\sqrt{4t^2+4t}} ; \ \xi = \frac{\eta + \frac{2t+x}{\sqrt{4t^2+4t}}}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}} \right.$$

$$\left. d\xi = \frac{d\eta}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{4t^2+4xt+x^2-x^2(4+4t)}{4t^2+4t}\right) \cdot \frac{\exp(-\eta^2)}{\sqrt{1+\frac{1}{t}}} d\eta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{4t^2+4xt-4x^2t-3x^2}{4t(t+1)}\right) \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}$$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right) \cdot \exp\left(\frac{4t^2+4xt-4x^2t-3x^2}{4t(t+1)}\right)$$