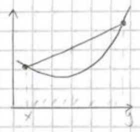
1. Необходимое и достаточное условие выпуклости положительно однородного функционала.

Определение

Пусть L – лин. пр-во, $p: L \to \mathbb{R}$ – выпуклый функционал, если $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x, y \in L$
$p(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y)$.

Определение

Если $\forall \alpha > 0$ $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, то
p – положительно-однородный функц-л.



Лемма

Пусть $p: L \to \mathbb{R}$ – положит.-одкор. ф-л, тогда p – выпукл $\Leftrightarrow \forall x, y \in L$ $p(x+y) \le p(x) + p(y)$.

Д-во

Пусть p – выпуклое.
Тогда $p(x+y) = p(2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)) = 2p(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \le$
$\le 2(\frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(y)) = p(x) + p(y)$

Пусть $p(\tilde{x} + \tilde{y}) \le p(\tilde{x}) + p(\tilde{y})$
$\forall x, y \in L$, $\lambda \in [0,1]$
$p(\underbrace{\lambda x}_{\tilde{x}} + \underbrace{(1-\lambda) y}_{\tilde{y}}) \le p(\lambda x) + p((1-\lambda) y) =$
$= \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y)$

$\boxtimes$

2. Лемма о выпуклости ядра выпуклого множества.

Лемма: Пусть $M \subseteq L$ – выпуклое множ-во, тогда $J(M)$ – выпуклое.

Доказательство: $\forall x, y \in J(M)$, $\lambda \in [0;1]$.

Тогда $\forall z \in L$ $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$: $\forall t_1, t_2$: $|t_1| < \varepsilon_1$, $|t_2| < \varepsilon_2$.

$x + t_1 z \in M$; $x + t_2 z \in M$.

$$\lambda(x + t_1 z) + (1-\lambda)(y + t_2 z) = \underbrace{[\lambda x + (1-\lambda) y]}_{\in M} + z\underbrace{(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)}_{t} \in M.$$

$|t| < \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

$\lambda x + (1-\lambda) y \in J(M)$.

3. Теорема Минковского (часть 1).

Df 5

Будем называть функционалом Minkowskiego мн-ва A функционал $p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}$, $x \in L$, если A – выпуклое тело и $0 \in \mathcal{J}(A)$.

Th

1. Если: p_A – функционал Minkowskiego,

То: p_A положительно однородный и выпуклый.

4. Теорема Минковского (часть 2).

2. Если: p - неотрицательный, положительно однородный, выпуклый функционал, $p: L \to \mathbb{R}$;

То: $\forall a > 0$ мн-во $A_a = \{x \in L: p(x) \le a\}$ явл. выпуклым,

$\mathcal{I}(A_a) = \{x \in L: p(x) < a\}$,

p - функционал Minkowskiдо для мн-ва $A_1 = \{x \in L: p(x) \le 1\}$.

5. Теорема Хана-Банаха в линейных пространствах.

Теорема 4 (Хана-Банаха)

Пусть $p: \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ - выпуклый положит. - однородный функционал.

$\mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}$ - лин. подпространство.

$f_0: \mathbb{L}_0 \to \mathbb{R}$ - лин. ф-л: $\forall x \in \mathbb{L}_0 \; f_0(x) \le p(x)$

Тогда $\exists \; f$ - продолжение f_0: $\forall x \in \mathbb{L} \; f(x) \le p(x)$

6. Общая теорема отделимости в линейных пространствах.

Теорема 5 (Об отделимости)

Пусть $A, B \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ – ЛП, A, B – выпукл.

$J(A) \cap B = \varnothing$

$J(A) \neq \varnothing$

Тогда $\exists f: \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ – ненулевой и линейный, кот. разделяет A и B.

7. Лемма об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

Лемма

Пусть $\mathbb{L}$ – конечномерное линейное пространство, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – нормы. Тогда $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, т.е. существуют $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{L}$

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1. \tag{1}$$

8. Неравенство Коши-Буняковского и лемма о введении нормы в евклидовом пространстве.

2. Неравенство Коши-Буняковского

Лемма

Пусть $\mathbb{L}$ – евклидово пространство. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{L}$

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)(y,y)}.$$

Доказательство

Рассмотрим $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y).$$

Значение $g(\lambda) \geqslant 0$ для всех λ.

$$0 \leqslant g\left(-\frac{(x,y)}{(x,x)}\right) = \frac{(x,y)^2}{(x,x)} - 2\frac{(x,y)^2}{(x,x)} + (y,y).$$

$$\frac{(x,y)^2}{(x,x)} \leqslant (y,y), \quad (x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

9. Лемма о размере ортогональной системы в сепарабельном евклидовом пространстве.

7. Лемма о размере ортогональной системы

Лемма

Пусть $\mathbb{L}$ – сепарабельное евклидово пространство. Тогда любая ортогональная система $\{\varphi_\alpha\}$ не более, чем счётна.

Доказательсство.

Без ограничения общности будем полагать, что $\{\varphi_\alpha\}$ нормирована. Тогда для любых $\alpha \neq \beta$

$$\|\varphi_\alpha - \varphi_\beta\| = \sqrt{(\varphi_\alpha - \varphi_\beta, \varphi_\alpha - \varphi_\beta)} = \sqrt{2}.$$

Рассмотрим совокупность шаров вида $B_{\frac{1}{2}}(x_\alpha)$. Данные шары не пересекаются. Пусть $A \subset \mathbb{L}$ счётное и всюду плотное. Тогда в каждом шаре $B_{\frac{1}{2}}(x_\alpha)$ содержится свой элемент $a \in A$. Таким образом число шаров не более размера множества A, т.е. не более, чем счётно.

10. Теорема об ортогонализации.

8. Теорема об ортогонализации

Теорема

Пусть $x_1, \dots, x_n, \dots \in \mathbb{L}$ – ЛНЗ векторы. Тогда существуют $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \in \mathbb{L}$ – ортонормированные векторы. Причём для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $\varphi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{in} x_i$, $\alpha_{nn} \neq 0$.

Доказательство.
Пусть $\psi_1 = x_1$. Представим $\psi_2 = \beta_{12}\psi_1 + x_2$. Определим β_{12} из условия ортогональности:

$$0 = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, \beta_{12}\psi_1 + x_2) = \beta_{12}(\psi_1, \psi_1) + (\psi_1, x_2),$$

$$\beta_{12} = -\frac{(\psi_1, x_2)}{(\psi_1, \psi_1)}.$$

Аналогично для всех $i = \overline{1, n-1}$ из условия ортогональности

$$0 = (\psi_i, \psi_n) = (\psi_i, \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{jn}\psi_j + x_n) = \beta_{in}(\psi_i, \psi_i) + (\psi_i, x_n),$$

$$\beta_{in} = -\frac{(\psi_i, x_n)}{(\psi_i, \psi_i)}, \qquad \varphi_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{(\psi_n, \psi_n)}}.$$

11. Неравенство Бесселя.

Лемма (Неравенство Бесселя)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|x\|^2.$$

10. Доказательство неравенства Бесселя

Доказательство.
Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots \in \mathbb{R}$.

$$\|x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k\|^2 = (x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k) =$$

$$= (x, x) - 2(x, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k) + (\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k - c_k)^2.$$

Выберем $\alpha_k = c_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k\|^2 \geqslant 0.$$

12. Связь полноты и замкнутости ортонормированной системы в сепарабельном евклидовом пространстве.

12. Равенство Парсеваля

Определение

Ортонормированная система $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ называется замкнутой, если для всех $x \in \mathbb{L}$ выполнено равенство Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Замечание

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ – замкнутая система, то $x = \hat{x}$.

Теорема (НДУ замкнутости ортонормированной системы)

В сепарабельном евклидовом пространстве всякая полная ортонормированная система (т.е. базис) является также замкнутой и наоборот.

13. Доказательство теоремы

Доказательство.
Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ замкнута. Тогда для любого $x \in \mathbb{L}$ частичная сумма ряда Фурье стремится к x в смысле нормы:

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_k\varphi_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_k^2 \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0.$$

То есть $x \in \mathrm{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. По определению система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна.
Пусть система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна, то есть является базисом в $\mathbb{L}$. Тогда для всякого $x \in \mathbb{L}$ существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_k^2 = \|x - \sum_{i=1}^{n} c_k\varphi_k\|^2 \leqslant \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_k\varphi_k\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

что эквивалентно равенству Парсеваля. Тогда по определению система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ замкнута.

13. Теорема Рисса-Фишера.

Определение

Полное евклидово пространство называется гильбертовым.

Теорема (Рисса-Фишера)

Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– ортонормированная система в гильбертовом пространстве* $\mathbb{L}$. *Пусть последовательность* $c = (c_1, c_2, \ldots) \in l_2$, *т.е.* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$. *Тогда существует* $x \in \mathbb{L}$ *такой, что*

$$c_k = (x, \varphi_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2.$$

. Доказательство теоремы Рисса-Фишера

Обозначим $\hat{x}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$. Тогда

$$\|\hat{x}_{n+k} - \hat{x}_n\|^2 = \|\sum_{i=n+1}^{n+k} c_i\varphi_i\|^2 = \sum_{i=n+1}^{n+k} c_i^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

То есть по определению последовательность $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальная. Поскольку $\mathbb{L}$ полное, $\hat{x}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \mathbb{L}$. Тогда для всех $n \geqslant i$

$$(x, \varphi_i) = (x - \hat{x}_n, \varphi_i) + \underbrace{(\hat{x}_n, \varphi_i)}_{c_i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_i,$$

т.к. в силу неравенства Коши-Буняковского $|(x - \hat{x}_n, \varphi_i)| \leqslant \|x - \hat{x}_n\|\|\varphi_i\|$.
Поскольку по построению

$$\|x - \hat{x}_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то в силу равенства Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2.$$

14. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

16. Теорема об изоморфизме гильбертовых пространств

Определение

Два евклидовых пространства $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ называются изоморфными, если существует биекция $f\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{L}_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x),$$
$$(x, y)_{\mathbb{L}_1} = (f(x), f(y))_{\mathbb{L}_2}.$$

Теорема (Об изоморфизме)

Пусть $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_1$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Тогда $\mathbb{L}_1 \cong \mathbb{L}_2$.

17. Доказательство теоремы об изоморфизме

Покажем, что произвольное сепарабельное гильбертово пространство $\mathbb{L}$ изоморфно l_2. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – замкнутая ортонормированная система в $\mathbb{L}$. Сопоставим произвольному $x \in \mathbb{L}$ последовательность $\tilde{x} = (c_1, c_2, \ldots)$, где $c_k = (x, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$. В силу неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|x\|^2$. Тогда $\tilde{x} \in l_2$. Определим отображение $f\colon \mathbb{L} \to l_2$ в виде $f(x) = \tilde{x}$. Так как для любых $x, y \in \mathbb{L}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

$$(x+y, \varphi_k) = (x, \varphi_k) + (y, \varphi_k), \quad (\alpha x, \varphi_k) = \alpha(x, \varphi_k),$$

то f сохраняет линейные операции. В силу теоремы Рисса-Фишера f – биекция.
Обозначим через $d_k = (y, \varphi_k)$. Тогда с учётом равенства Парсеваля

$$(x,x) + (y,y) + 2(x,y) = (x+y, x+y) = \|x+y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(c_k + d_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k. \qquad (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k = (\tilde{x}, \tilde{y})_{l_2}.$$

15. Тождество параллелограмма.

Теорема (Тождество параллелограмма)

Нормированное пространство $\mathbb{L}$ является также и евклидовым тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in \mathbb{L}$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

Тогда скалярное произведение имеет вид:

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

16. Связь непрерывности и ограниченности линейных функционалов.

Теорема

Линейный функционал $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ непрерывен тогда и только тогда, когда f ограничен на некотором $O_\delta(0)$.

Доказательство.
Пусть f ограничен на некотором $O_\delta(0)$. То есть найдётся $C > 0$ такое, что $\sup\limits_{x \in O_\delta(0)} |f(x)| < C$. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in O_{\frac{\delta\varepsilon}{C}}(0)$

$$|f(x-0)| = |f(\frac{\varepsilon}{C} \cdot \frac{C}{\varepsilon} x)| = \frac{\varepsilon}{C} |f(\underbrace{\frac{C}{\varepsilon} x}_{y \in O_\delta(0)})| < \varepsilon.$$

Тогда по определению f непрерывен в 0, что эквивалентно непрерывности во всём $\mathbb{L}$.

17. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах.

Теорема

Пусть $\mathbb{L}$ – нормированное пространство, $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L}$ – линейное подпространство, $f_0\colon \mathbb{L}' \to \mathbb{R}$ – линейный и ограниченный на $\mathbb{L}'$ функционал. Тогда f_0 может быть продолжен на $\mathbb{L}$ с сохранением нормы.

Замечание

Теорема Хана-Банаха утверждает, что любую гиперплоскотьс в $\mathbb{L}'$ можно достроить до гиперплоскости в $\mathbb{L}$, не приблизив её при этом к 0.

Доказательство.
Пусть $\|f_0\|_{\mathbb{L}'} = k$. Тогда $p(x) = k\|x\|$ – выпуклый и положительноoднородный функционал по определению нормы. При этом для всех $x \in \mathbb{L}'$

$$|f_0(x)| \leqslant \|x\|k = p(x). \tag{1}$$

В силу общей теоремы Хана-Банаха существует продолжение f функционала f_0 на $\mathbb{L}$, сохраняющее условие (1). То есть для всех $y \in \mathbb{L}$ верно, что

$$|f(y)| \leqslant \|y\|k, \quad \sup_{y \in \mathbb{L}\setminus\{0\}} \frac{|f(y)|}{\|y\|} \leqslant k.$$

С другой стороны, поскольку $\mathbb{L}' \subset \mathbb{L}$,

$$\sup_{y \in \mathbb{L}\setminus\{0\}} \frac{|f(y)|}{\|y\|} \geqslant \sup_{x \in \mathbb{L}'\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = k, \quad \|f\|_{\mathbb{L}} = k = \|f_0\|_{\mathbb{L}'}.$$

Рассмотрим для некоторого линейнйного и ограниченного функционала f в нормированном пространстве $\mathbb{L}$ множество

$$H = \{x \in \mathbb{L} \colon f(x) = 1\}.$$

Фактически H – некоторая гиперплоскость: если $x_0 \in H$, то $H = \operatorname{Ker} f + x_0$. Вычислим расстояние от 0 до H.

$$\rho(0, H) = \inf_{x \in H} \|x - 0\| = \inf_{f(x)=1} \|x\|,$$

$$|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|, \quad \|x\| \geqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|}, \quad \rho(0, H) \geqslant \frac{1}{\|f\|}.$$

С другой стороны, по определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой $x_\varepsilon \in H$, что

$$1 > (\|f\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|, \quad \rho(0, H) \leqslant \|x_\varepsilon\| < \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Т.к. $\varepsilon > 0$ произвольный, то

$$\rho(0, H) \leqslant \frac{1}{\|f\|}, \quad \boxed{\rho(0, H) = \frac{1}{\|f\|}}.$$

18. Первая теорема отделимости.

Следствия из теоремы Хана-Банаха

Следствие (Первая теорема отделимости)

Пусть $A, B \subset \mathbb{L}$ – выпуклые, $\mathbb{L}$ – нормированное пространство, причём $J(A) \neq \varnothing$, $J(A) \cap B = \varnothing$.
Тогда существует ненулевой непрерывный линейный функционал $f \colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, разделяющий A и B.

Доказательство.
Линейный функционал, разделяющий A и B существует в силу общей теоремы отделимости. Докажем, что он непрерывен.
Пусть $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant C \leqslant \inf\limits_{x \in B} f(x)$. Тогда f ограничен сверху на A. Пусть $x_0 \in J(A) = \operatorname{int} A$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(x_0) \subset A$.

$$\sup_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) \leqslant C < \infty,$$

Так как $x_0 - (x - x_0)$ – точка симметричная x относительно центра шара x_0,

$$\sup_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) = \sup_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(2x_0 - x) = 2f(x_0) - \inf_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) \leqslant C,$$

$$\inf_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) \geqslant 2f(x_0) - C.$$

Тогда f ограничен на $O_\varepsilon(x_0)$, что в нормированном пространстве эквивалентно непрерывности.

19. Вторая теорема отделимости.

Следствия из теоремы Хана-Банаха

Следствие (Вторая теорема отделимости)

Пусть $A \subset \mathbb{L}$ – замкнутое выпуклое множество в нормированном пространстве $\mathbb{L}$, $x_0 \notin A$.
Тогда существует ненулевой непрерывный линейный функционал $f\colon \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, строго разделяющий A и x_0.

Доказательство.
Если A замкнутое, то его дополнение открытое. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(x_0) \cap A = \varnothing$. $\operatorname{int} O_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing$. Тогда в силу первой теоремы отделимости существует линейный непрерывный функционал f, который разделяет $O_\varepsilon(x_0)$ и A:

$$\sup_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) \leqslant C \leqslant \inf_{x \in A} f(x).$$

Предположим, что $f(x_0) = C$. Тогда для всех $y \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$ верно включение $x_0 \pm \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \in O_\varepsilon(x_0)$.

$$f(x_0) = \sup_{x \in O_\varepsilon(x_0)} f(x) \geqslant f(x_0 \pm \frac{y}{\|y\|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}) = f(x_0) \pm \frac{\varepsilon}{2\|y\|} f(y),$$

$$f(y) \geqslant 0, \quad -f(y) \geqslant 0, \quad f(y) \equiv 0.$$

Получаем противоречие. То есть $f(x_0) < C$.

20. Теорема о самосопряжённости гильбертовых пространств.

Теорема Рисса для гильбертовых пространств

Теорема (Рисса)

Пусть $\mathbb{L}$ – гильбертово пространство. Тогда $\mathbb{L}^* \cong \mathbb{L}$, т.е. для любого $f \in \mathbb{L}^*$ существует $x_0 \in \mathbb{L}$ такой, что $f(x) = (x_0, x)$, $\|f\|_{\mathbb{L}^*} = \|x_0\|_{\mathbb{L}}$.

Доказательство.
В силу линейности скалярного произведения $f(x) = (x_0, x)$ – линейный функционал. Так как $|(x_0, x)| \leqslant \|x\|\|x_0\|$, f непрерывен и $\|f\| \leqslant \|x_0\|$. С другой стороны, $f(x_0) = (x_0, x_0) = \|x_0\| \cdot \|x_0\|$, откуда $\|f\| \geqslant \|x_0\|$.
Покажем, что всякий $f \in \mathbb{L}^*$ представим в виде $f(x) = (x_0, x)$. Если $f = 0$, то $x_0 = 0$. Иначе $\operatorname{Ker} f$ – замкнутое линейное подпространство в $\mathbb{L}$, не совпадающее с $\mathbb{L}$. Тогда найдется $y_0 \in \mathbb{L}$ такой, что $\|y_0\| = 1$ и

$$\operatorname{Ker} f^\perp = \{x \in \mathbb{L} \colon f(x) = 0\}^\perp = \{x \in \mathbb{L} \colon x = \alpha y_0, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{L}$ найдутся $y \in \operatorname{Ker} f$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $x = y + \alpha y_0$.
Тогда $f(x) = \alpha f(y_0)$,

$$(x, \underbrace{f(y_0) y_0}_{x_0}) = \alpha(y_0, f(y_0) y_0) = \alpha f(y_0)(y_0, y_0) = \alpha f(y_0) = f(x).$$

21. Лемма о сохранении нормы при естественном отображении нормированного пространства во второе сопряжённое.

Лемма

Если $\mathbb{L}$ *и* $\mathbb{L}^*$ *нормированные, то естественное отображение* π *сохраняет норму:* $\|\psi_{x_0}\| = \|x_0\|$.

Доказательство.
Пусть $f \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$, $x_0 \in \mathbb{L}$. Тогда

$$|(f, x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\|, \quad \|x_0\| \geqslant \frac{|(f, x_0)|}{\|f\|}, \quad \|x_0\| \geqslant \sup_{f \neq 0} \frac{|(f, x_0)|}{\|f\|} = \|\psi_{x_0}\|.$$

В силу следствия из теоремы Хана-Банаха существует $f_0 \in \mathbb{L}^* \setminus \{0\}$ такой, что $f(x_0) = \|x_0\|\|f_0\|$. Тогда

$$\|\psi_{x_0}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|(f, x_0)|}{\|f\|} \geqslant \|x_0\|.$$

22. Необходимое и достаточное условие слабой сходимости.

Необходимое и достаточное условие слабой сходимости

Теорема

Последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ – нормированное пространство, сходится слабо к $x \in \mathbb{L}$ тогда и только тогда, когда

- *существует $C > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\|x_n\| < C$;*
- *$f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ для любого $f \in \Delta$, где $\overline{\operatorname{Lin}\Delta} = \mathbb{L}^*$.*

Доказательство.
Пусть $\varphi \in \mathbb{L}^*$. Тогда существует $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Lin}\Delta$ такая, что $\varphi_k \xrightarrow{n\to\infty} \varphi$. Причём в силу линейности всех $f \in \Delta$ и операции предельного перехода для всех $k \in \mathbb{N}$ верно $\varphi_k(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_k(x)$.

$$|\varphi(x_n)-\varphi(x)| \leqslant |\varphi(x_n)-\varphi_k(x_n)|+|\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)|+|\varphi_k(x)-\varphi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi-\varphi_k\|\|x_n\| + |\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)| + \|\varphi-\varphi_k\|\|x\| \xrightarrow{k,n\to\infty} 0.$$

23. Необходимое и достаточное условие слабой сходимости в пространстве непрерывных функций.

3. Ограниченная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a;b])$ сходится слабо к $x \in C([a;b])$ тогда и только тогда, когда для всех $t \in [a;b]$

$$x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t).$$

Поскольку для любой $t \in [a;b]$ верно включение $\delta_t \in C^*([a;b])$, где $\delta_t(x) = x(t)$, то

$$x_n(t) = \delta_t(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \delta_t(x) = x(t).$$

Также можно показать и обратное, продемонстрировав, что $\overline{\operatorname{Lin}\{\delta_t : t \in [a;b]\}} = C^*([a;b])$. Для любого $f \in C^*([a;b])$ существует $\tilde{f} \in V([a;b])$ такая, что

$$f(x) = \int_a^b x(t)d\tilde{f}(t).$$

С другой стороны по определению интеграла для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, что для всякой непрерывной функции x, удовлетворяющей условию $\max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|$, верно неравенство

$$\varepsilon > \left|\int_a^b x(t)d\tilde{f}(t) - \sum_{k=1}^n x(t_k)\big(\tilde{f}(t_k)-\tilde{f}(t_{k-1})\big)\right| = \left|f(x) - \sum_{k=1}^n \delta_{t_k}(x)\big(\tilde{f}(t_k)-\tilde{f}(t_{k-1})\big)\right|.$$

$$\|f - \sum_{k=1}^n \delta_{t_k}\big(\tilde{f}(t_k)-\tilde{f}(t_{k-1})\big)\| \leqslant \varepsilon.$$

24. Лемма о достаточности запаса основных функций.

Достаточность запаса основных функций

Лемма

Пусть $f, g \in C(\mathbb{R})$ порождают регулярные обобщённые функции $f, g \in D^*$ соответственно. При этом сущетсвует $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $f(t_0) \neq g(t_0)$. Тогда существует $\varphi \in D$ такая, что

$$f(\varphi) \neq g(\varphi).$$

Доказательство.
Пусть $h = f - g \in C(\mathbb{R})$. Без ограничения общности будем полагать, что $h(t_0) > 0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такая, что $h(t) > 0$, $t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$. Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon), \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{(t_0+\varepsilon-t)(t-(t_0-\varepsilon))}}, & t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon) \end{cases} \in D.$$

Тогда

$$(f - g, \varphi) = (h, \varphi) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} h(t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{(t_0+\varepsilon-t)(t-(t_0-\varepsilon))}}\, dt > 0.$$

25. Необходимое и достаточное условие непрерывности линейного оператора в нормированном пространстве.

Определение

*Линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$, называется **ограниченным**, если $D_A = \mathbb{L}_1$ и для любого ограниченного множества $D \subset \mathbb{L}_1$ верно, что $\operatorname{diam} AD < \infty$.*

Лемма

Если $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ – нормированные пространства, то линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ непрерывен тогда и только тогда, когда ограничен.

Доказательство.
Пусть A ограничен. Тогда найдётся $R > 0$ такое, что $AO_1(0) \subset O_R(0)$. Пусть $\|x - y\| < \delta$, т.е. $x - y \in O_\delta(0) = \delta \cdot O_1(0)$. Тогда $A(x - y) \in \delta \cdot O_R(0)$, откуда $\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| < R\delta = \varepsilon$, то есть A непрерывен.
Пусть A непрерывен. Тогда для любого $O_\delta(x) \subset \mathbb{L}_1$ верно, что $AO_\delta(x) \subset O_\varepsilon(Ax)$. То есть A ограничен.

26. Теорема об альтернативном представлении нормы линейного и ограниченного оператора.

Определение

Пусть $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ – нормированные пространства, $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный и ограниченный оператор. Тогда ***нормой*** *оператора A называется величина*

$$\|A\| = \inf\{C > 0\colon \|Ax\| \leqslant C\|x\|,\ x \in \mathbb{L}_1\}.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ – нормированные пространства, $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – линейный и ограниченный оператор. Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Доказательство теоремы

В силу линейности A и положительной однородности нормы справедливо равенство

$$\alpha = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{L}_1 \setminus \{0\}$

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \alpha, \quad \|Ax\| \leqslant \alpha\|x\|, \quad \|A\| \leqslant \alpha.$$

Предположим, что $\|A\| < \alpha$. То есть существует $\tilde{\alpha} > 0$ такая, что $\|A\| < \tilde{\alpha} < \alpha$. Тогда для всех $x \in \mathbb{L}_1 \setminus \{0\}$ верно, что

$$\|Ax\| < \tilde{\alpha}\|x\| < \alpha\|x\|, \quad \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \tilde{\alpha} < \alpha, \quad \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \tilde{\alpha} < \alpha.$$

Пришли к противоречию. То есть $\|A\| = \alpha$.

27. Теорема о линейности оператора обратного к линейному оператору.

Определение

*Линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ называется **обратимым** если для любого $y \in \operatorname{Im} A$ уравнение*

$$Ax = y \tag{1}$$

имеет единственное решение.
*Тогда оператор $A^{-1}\colon \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_1$ называется **обратным** к A, если сопоставляет каждому $y \in \operatorname{Im} A$ решение уравнения (1).*

Теорема

Пусть $A\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ – обратимый и линейный оператор. Тогда A^{-1} также линейный.

Доказательство.
Заметим, что $D_{A^{-1}} = \operatorname{Im} A$ – линейное многообразие. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Тогда существуют $x_1, x_2 \in D_A$ такие, что $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. В силу линейности A

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2. \tag{2}$$

Поскольку A обратим, то уравнение $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = y$ имеет единственное решение. Откуда с учётом (2)

$$A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2.$$

28. Теорема об открытости класса обратимых линейных и ограниченных операторов.

Пусть $\mathfrak{GL}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) = \{A \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)\colon \operatorname{Im} A = \mathbb{L}_2,\ A \text{ – обратим}\}$.

Теорема

Пусть $A_0 \in \mathfrak{GL}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$, $\Delta A \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$ такой, что $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. Тогда $(A_0 + \Delta A)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$.

Доказательство. Фиксируем $y \in \mathbb{L}_2$. Рассмотрим $B\colon \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$:

$$Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x.$$

Поскольку $\|\Delta A\| < \|A_0^{-1}\|^{-1}$, то $\|A_0^{-1} \Delta A\| \leqslant \alpha < 1$,

$$\|Bx_1 - Bx_2\| = \|A_0^{-1} \Delta A x_2 - A_0^{-1} \Delta A x_1\| \leqslant \|A_0^{-1} \Delta A\| \cdot \|x_2 - x_1\| < \|x_2 - x_1\|.$$

Т.е. отображение B сжимающее. Тогда в силу теоремы Банаха о неподвижной точки и полноты $\mathbb{L}_1$ существует единственная неподвижная точка $x \in \mathbb{L}_1$ отображения B:

$$x = Bx = A_0^{-1} y - A_0^{-1} \Delta A x, \quad x + A_0^{-1} \Delta A x = A_0^{-1} y, \quad (A_0 + \Delta A)x = y.$$

Таким образом решением уравнения $(A_0 + \Delta A)x = y$ может быть только неподвижная точка оператора B. Откуда следует, что $(A_0 + \Delta A)$ обратим, а в силу теоремы Банаха об обратном операторе также и ограничен.

29. Теорема о представлении обратного оператора в виде ряда.

Теорема о представлении обратного оператора в виде ряда

Теорема

Пусть $\mathbb{L}$ *– банахово пространство,* $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$, $\operatorname{Im} A = \mathbb{L}$, $\|A\| < 1$. *Тогда*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L}).$$

Доказательство.
В силу теоремы $(I - A)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$.

$$\left\| \sum_{k=0}^{n+i} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+i} A^k \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+i} \|A\|^k \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A\|^k = \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

То есть последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n} A^k$ фундаментальна. Поскольку $\mathbb{L}$ полное, то $\mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ также полное, а следовательно $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$(I - A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I - A) = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I - A^{n+1}.$$

С учётом того, что $\|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, перейдём к пределу по n:

$$(I - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I.$$

30. Теорема о норме сопряжённого оператора.

14. Норма сопряжённого оператора

Теорема

Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$. *Тогда* $\|A\| = \|A^*\|$.

Доказательство.
Для всех $x \in \mathbb{L}_1$ и $f \in \mathbb{L}_2^*$ верно, что

$$|(A^* f, x)| = |(f, Ax)| \leqslant \|f\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|.$$

Тогда в силу определения нормы функционала $\|A^* f\| \leqslant \|f\| \cdot \|A\|$. Тогда в силу определения нормы оператора $\|A^*\| \leqslant \|A\|$.
Пусть $x \in \mathbb{L}_1 \setminus \operatorname{Ker} A$. Обозначим $y_0 = \frac{Ax}{\|Ax\|} \in \mathbb{L}_2$. Тогда $\|y_0\| = 1$. В силу следствия из теоремы Хана-Банаха существует такой $f \in \mathbb{L}_2^*$ такой, что $\|f\| = 1$, $(f, y_0) = \|y_0\| = 1$.

$$\|Ax\| = \big\|y_0 \cdot \|Ax\|\big\| = (f, y_0) \cdot \|Ax\| = (f, Ax) = |(A^* f, x)| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^* f\| \cdot \|x\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = \|A^*\| \cdot \|x\|.$$

Откуда по определению нормы оператора $\|A\| \leqslant \|A^*\|$.

31. Свойства спектра линейного и ограниченного оператора.

19. Свойства спектра

Лемма

Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$, где $\mathbb{L}$ – банахово пространство. Тогда

- $\sigma(A)$ *– замкнутое множество;*
- $\sigma(A) \subset [-\|A\|; \|A\|]$.

Доказательство.
1) Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ – регулярное значение, т.е. $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$. Тогда в силу свойств обратимого оператора существует достаточно малое $\delta < \frac{1}{\|(A-\lambda I)^{-1}\|}$ такое, что $(A - (\lambda \pm \delta)I)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L})$. Тогда множество всех регулярных λ открыто. Тогда его дополнение $\sigma(A)$ замкнуто.
2) Пусть $|\lambda| > \|A\|$. Тогда в силу теоремы о представлении обратного оператора в виде ряда

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k} \in \mathfrak{L}(\mathbb{L}, \mathbb{L}),$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k} = -\frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = (A - \lambda I)^{-1} = R_\lambda.$$

То есть $\lambda \notin \sigma(A)$.

17. Понятие собственного значения, спектра и резольвенты

Определение

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется ***собственным числом*** *линейного и ограниченного оператора $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, соответствующим* ***собственному вектору*** *$h \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$, если $Ah = \lambda h$. Множество всех собственных значений называют* ***точечным спектром*** *оператора A.*

Замечание

Фактически число λ является собственным, если оператор $(A - \lambda I)$ не обратим. Тем не менее в бесконечномерном пространстве оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ может существовать, но быть неограниченным или определённым не на всём $\mathbb{L}$.

Определение

Множество всех $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ неограничен или определён не на всём $\mathbb{L}$, называется ***непрерывным спектром****.* ***Спектром*** *оператора A называется $\sigma(A)$ совокупность точечного и непрерывного спектра.*

Определение

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется ***регулярным*** *для оператора A, если $\lambda \notin \sigma(A)$. Тогда линейный и ограниченный оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ называется* ***резольвентой****.*

32. Лемма Рисса.

Лемма (Рисса)

Пусть $\mathbb{L}$ – нормированное пространство, $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}$ – подпространство, $\mathbb{L} \setminus \mathbb{L}_1 \neq \emptyset$.
Тогда для любого $\varepsilon \in (0;1)$ найдётся $z_\varepsilon \in \mathbb{L}$ такой, что $\|z_\varepsilon\| = 1$, $\rho(z_\varepsilon, \mathbb{L}_1) \geqslant 1 - \varepsilon$.

Доказательство.
Выберем $x_0 \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{L}_1$. Обозначим через

$$d = \rho(x_0, \mathbb{L}_1) = \inf_{y \in \mathbb{L}_1} \|x_0 - y\| > 0.$$

Выберем произвольное $\varepsilon \in (0;1)$. Заметим, что в этом случае $\frac{1}{1-\varepsilon} > 1$.
Тогда по определению точной нижней грани найдётся $y_\varepsilon \in \mathbb{L}_1$ такой, что

$$\|x_0 - y_\varepsilon\| < \frac{1}{1-\varepsilon} d.$$

Обозначим через

$$z_\varepsilon = \frac{x_0 - y_\varepsilon}{\|x_0 - y_\varepsilon\|}.$$

Тогда $\|z_\varepsilon\| = 1$. Также для любого $y \in \mathbb{L}_1$ справедливы соотношения

$$\|z_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_\varepsilon - y\|x_0 - y_\varepsilon\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} \right\| = \frac{\|x_0 - (y_\varepsilon + y\|x_0 - y_\varepsilon\|)\|}{\|x_0 - y_\varepsilon\|} > \frac{d}{\frac{1}{1-\varepsilon} d} = 1 - \varepsilon.$$

33. Критерий бесконечной размерности нормированного пространства.

3. Критерий бесконечной размерности нормированного пространства

Теорема

Пусть $\mathbb{L}$ – нормированное пространство, $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{L}$ – замкнутый шар.
Тогда $\mathbb{L}$ конечномерное тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}_1(0)$ – компакт.

Доказательство.
Пусть $\mathbb{L}$ – бесконечномерное пространство. Тогда для любого набора $x^1, \dots x^n \subset \mathbb{L}$ выполнено соотношение

$$\mathbb{L} \neq \operatorname{Lin}\{x^1, \dots, x^n\}. \tag{1}$$

Выберем произвольный $y^1 \in \partial\mathcal{B}_1(0)$. В силу леммы Рисса найдётся $y^2 \in \partial\mathcal{B}_1(0) \setminus \operatorname{Lin}\{y^1\}$ такой, что

$$\rho(y^2, \operatorname{Lin}\{y^1\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Но также найдётся $y^3 \in \partial\mathcal{B}_1(0) \setminus \operatorname{Lin}\{y^1, y^2\}$ такой, что

$$\rho(y^3, \operatorname{Lin}\{y^1, y^2\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Продолжая данные рассуждения по индукции с учётом (1) получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $y^{n+1} \in \partial\mathcal{B}_1(0) \setminus \operatorname{Lin}\{y^1, \dots, y^n\}$ такой, что

$$\rho(y^{n+1}, \operatorname{Lin}\{y^1, \dots, y^n\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

То есть для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$

$$\|y^i - y^j\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда любая ε-сеть при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ не менее, чем счётна, откуда следует, что $\mathcal{B}_1(0)$ не компактен.
Пусть $\mathbb{L}$ – конечномерное пространство размерности n.
Тогда $\mathbb{L}$ изоморфно $\mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{B}_1(0)$ компактен, так как любое замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ компактно.

Замечание

Из теоремы следует, что в бесконечномерном пространстве оператор I, который переводит $B_1(0)$ в $B_1(0)$ не является компактным.

34. Теорема о пределе последовательности компактных операторов.

8. Теорема о пределе последовательности компактных операторов.

Теорема

Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{L}(\mathbb{L},\mathbb{L})$ – последовательность компактных операторов, $\mathbb{L}$ – банахово пространство, $A_n \xrightarrow{u} A$. Тогда A компактен.

Доказательство.
Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ограниченная последовательность. Тогда в силу компактности A_1 в $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует такая подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $\{A_1 x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится. Тогда в силу компактности A_2 в $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ существует такая подпоследовательность $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, что $\{A_2 x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится.
Продолжив по индукции, построим последовательность $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $y_n = x_n^{(n)}$. Каждый оператор из операторов $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ переводит $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в сходящуюся последовательность.

$$\|Ay_n - Ay_m\| \leqslant \|Ay_n - A_k y_n\| + \|A_k y_n - A_k y_m\| + \|A_k y_m - Ay_m\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A - A_k\|\|y_n\| + \|A_k y_n - A_k y_m\| + \|A_k - A\|\|y_m\| \xrightarrow{k,n,m\to\infty} 0.$$

Тогда $\{Ay_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна. Поскольку $\mathbb{L}$ банахово, то $\{Ay_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится.

35. Теорема о собственных значениях компактного оператора.

. Собственные значения компактного оператора

Теорема

Пусть $A\colon \mathbb{L}\to\mathbb{L}$ компактен, $\mathbb{L}$ – банахово пространство. Тогда для любого $\delta > 0$ существует конечное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственным значениям $|\lambda| > \delta$.

Доказательство.
Предположим обратное. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$ – какая-либо последовательность собственных значений оператора A (возможно, с повторениями), где $|\lambda_n| > \delta$. $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ – соответствующие линейно независимые собственные векторы.
В силу леммы Рисса существует последовательность $y_1,\ldots,y_n,\ldots \in \mathbb{L}$ такая, что

$$1)\ y_n \in \mathbb{L}_n = \mathrm{Lin}\{x_1,\ldots,x_n\},\quad 2)\ \|y_n\| = 1,$$

$$3)\rho(y_n,\mathbb{L}_{n-1}) = \inf_{x\in\mathbb{L}_{n-1}} \|y_n - x\| > \frac{1}{2}.$$

В силу ограничения $|\lambda_n| > \delta$, последовательность $\left\{\frac{y_n}{\lambda_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена.
Покажем, что у последовательности $\left\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ не существует ограниченной подпоследовательности.

Обозначим $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Тогда

$$\frac{Ay_n}{\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k\lambda_k}{\lambda_n} x_k + \alpha_n x_n = y_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1\right) x_k}_{z_n\in\mathbb{L}_{n-1}}.$$

$$\left\|A\left(\frac{y_p}{\lambda_p}\right) - A\left(\frac{y_q}{\lambda_q}\right)\right\| = \|y_p - (y_q + z_q - z_p)\| > \frac{1}{2},\quad p > q.$$

Что противоречит компактности оператора A.

36. Свойства собственных векторов и значений самосопряжённых компактных операторов. Теорема Гильберта-Шмидта (формулировка).

Самосопряжённые компактные операторы

Лемма

Пусть $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – компактный оператор, $\mathbb{L}$ – гильбертово пространство, $A^* = A$. Тогда

- *все собственные значения A действительны;*
- *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство.
Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu$. Тогда

1) $\lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$,

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

$$2)\ \lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = (x, Ay) = \mu(x, y),$$

$$(x, y) = 0.$$

14. Теорема о приведении компактного самосопряжённого оператора к диагональному виду

Теорема (Гильберта-Шмидта)

Пусть $\mathbb{L}$ – гильбертово пространство, $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ – самосопряжённый компактный оператор. Тогда существует такая ортонормированная система $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{I}}$ собственных векторов, соответствующих ненулевым собственным значениям $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{I}}$, что любой вектор $x \in \mathbb{L}$ единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{k\in\mathbb{I}} x_k\varphi_k + x_0, \quad x_0 \in \operatorname{Ker} A.$$

При этом

$$Ax = \sum_{k\in\mathbb{I}} \lambda_k x_k \varphi_k.$$

Если $\mathbb{I}$ бесконечно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.