7-я тема

Махмудов Эрхан
М80-405Б-18

№ 33

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u_x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < T \\ u|_{x=0} = \sin \omega t, \quad u|_{x=\pi} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

где $\varphi \in H_0^1(0,\pi)$, $\psi \in L_2(0,\pi)$, $\omega > 0$ - зад. параметр. Рассм. $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$

1) $u = V + W$

$W|_{x=0} = \sin \omega t \; W|_{x=\pi} = 0$

$$W(x,t) = \frac{(e^{ix} + 1)\sin \omega t}{2}$$

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{xx} + 3V_x = \dfrac{\omega^2 (e^{ix} + 1)\sin \omega t}{2} + \dfrac{e^{ix} \sin \omega t}{2} - \dfrac{i e^{ix} \sin \omega t}{2} \\ V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=\pi} = 0 \\ V|_{t=0} = \varphi(x), \quad V_t|_{t=0} = \psi(x) - \dfrac{(e^{ix} + 1)\omega}{2} \end{cases}$$

$$f(x,t) = \frac{\omega^2 (e^{ix} + 1)\sin \omega t}{2} + \frac{e^{ix} \sin \omega t}{2} - \frac{i e^{ix} \sin \omega t}{2}$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{(e^{ix} + 1)\omega}{2}$$

2) $V = X(x)Y(t)$

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{xx} + 3V_x = 0 \\ V|_{x=0} = 0 \quad V|_{x=\pi} = 0 \end{cases}$$

$$Y''X - YX'' + 3YX' = 0$$

$$Y''X = YX'' - 3YX'$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{X'' - 3X'}{X} = -\lambda = const$$

$$\begin{cases} X'' - 3X' = -\lambda X, \quad 0 < x < \pi \\ X(0) = 0, \; X(\pi) = 0 \end{cases}$$

3) $\lambda < 0$, $\omega = \sqrt{-\lambda}$

$$X = C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} - \frac{3}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} + \frac{3}{2}\right)x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} - \frac{3}{2}\right)\pi} + C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} + \frac{3}{2}\right)\pi} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} - \frac{3}{2}\right)\pi} & e^{\left(\frac{\sqrt{4\omega^2+9}}{2} + \frac{3}{2}\right)\pi} \end{vmatrix} = 0$$

Невозможно, т.к. $\omega = \sqrt{-\lambda} < 0$

$\lambda = 0$

$$X = C_1 e^{3x} + C_2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{3\pi} + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ — не собств. знач.}$$

$\lambda > 0$

$\omega = \sqrt{\lambda}$

$$X = C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2} - \frac{3}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2} + \frac{3}{2}\right)x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2} - \frac{3}{2}\right)\pi} + C_2 e^{\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2} + \frac{3}{2}\right)x} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2}-\frac{3}{2}\right)\pi} & e^{\left(\frac{\sqrt{9-4\omega^2}}{2}+\frac{3}{2}\right)\pi} \end{vmatrix} = 0$$

Невозможно

т.к. $\omega = \sqrt{5} > 0$