Московский Авиационный Институт

(Национальный Исследовательский Университет)

Факультет прикладной математики и информационных технологий

Отчёт по курсовой работе.

Выполнил: студент Махмудов О.С.

Группы: М8О-205Б-18

Руководитель: Пунтус А.А.

Оценка:

Дата:

Москва, 2019

№1. Методом изоклин построить приближённо семейство интегральных кривых дифференциального уравнения 1-ого порядка $\boldsymbol{y' = y - x^2}$.

Решение:

Уравнение *y'= f(x,y)* устанавливает связь между координатами точки *(x,y)* и угловым коэффициентом *y'* касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, это уравнение даёт совокупность направлений на плоскости *Oxy.* Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется изоклиной. Уравнение изоклины можно получить, если положить *y'= c,* т.е. *f(x,y) = c.*

Положим $y - x^2 = c \Rightarrow y = x^2 + c$

При $c = 0$ $y = x^2$

$c = 1$ $y = x^2 + 1$

$c = -1$ $y = x^2 - 1$

$c = 4$ $y = x^2 + 4$

$c = -4$ $y = x^2 - 4$

№2. Найти фундаментальную систему решений и общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\boldsymbol{\frac{dX}{dt} - AX = 0,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.\ \begin{pmatrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 + i \\ \lambda_3 = 3 - i \end{pmatrix}}$$

Решение:

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, $(-\lambda + 2)^2(\lambda^2 - 6\lambda + 9) + 1 - 3(3 - \lambda) + 3(2 - \lambda) = 0$

Получаем корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 3 \pm i$.

Подставляя последовательно найденные значения λ, находим векторы H_1, H_2, H_3

$$\lambda_1 = 1 => \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$=> \begin{cases} h_3 = 0 \\ -h_1 + h_2 + 2h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 + h_3 = 0 \end{cases} => H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 3 + i => \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 1 \\ -1 & -i & 2 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$=> \begin{cases} (-1-i)h_1 + h_3 = 0 \\ -h_1 - ih_2 + 2h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 - ih_3 = 0 \end{cases} => H_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 - i => \begin{pmatrix} -1+i & 0 & 1 \\ -1 & i & 2 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$=> \begin{cases} (-1+i)h_1 + h_3 = 0 \\ -h_1 + ih_2 + 2h_3 = 0 \\ h_1 - h_2 + ih_3 = 0 \end{cases} => H_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Выделяем действительную и мнимую часть, используя формулу Эйлера:

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-3i \\ 2 \end{pmatrix} e^{it} = e^{t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-3i \\ 2 \end{pmatrix} (cost + isint)$$
$$= \begin{pmatrix} cost + sint \\ cost + 3sint \\ 2cost \end{pmatrix} e^{t} + i \begin{pmatrix} sint - cost \\ sint - 3cost \\ 2sint \end{pmatrix} e^{t}$$

Таким образом, получаем фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}; X_2 = \begin{pmatrix} cost + sint \\ cost + 3sint \\ 2cost \end{pmatrix} e^{3t};\ X_3 = \begin{pmatrix} sint - cost \\ sint - 3cost \\ 2sint \end{pmatrix} e^{3t}$$

Общее решение имеет вид $\mathrm{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$. Следовательно, получаем общее решение:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} cost + sint \\ cost + 3sint \\ 2cost \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} sint - cost \\ sint - 3cost \\ 2sint \end{pmatrix} e^{3t}$$

№3. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} — AX = F,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{cost} \\ sint \end{pmatrix}.$$

Решение:

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 => -1+\lambda^2+2 = 0 => \lambda^2 = -1 => \lambda_{1,2} = \pm i$$

При $\lambda = i$ получим: $\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} => (1-i)h_1 - h_2 = 0$

$=> H_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Аналогично, при $\lambda = -i, H_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

Выделяем действительную и мнимую часть по формуле Эйлера:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} cost + isint \\ (1-i)(cost + isint) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cost + isint \\ cost + sint + i(sint - cost) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} cost \\ cost + sint \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} sint \\ sint - cost \end{pmatrix}$$

Получаем два частных решения: $X_1 = \begin{pmatrix} cost \\ cost + sint \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} sint \\ sint - cost \end{pmatrix}$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений $\frac{dX}{dt} — AX = 0$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} cost \\ cost + sint \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} sint \\ sint - cost \end{pmatrix}$$

Считаем, что $C_1 = C_1(t), C_2 = C_2(t)$ и найдём их из системы:

$$\begin{cases} C'_1 x_{11} + C'_2 x_{21} = f_1(x) \\ C'_1 x_{12} + C'_2 x_{22} = f_2(x) \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} C'_1 cost + C'_2 sint = \dfrac{1}{cost} \\ C'_1(cost + sint) + C'_2(sint - cost) = sint \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} cost & sint \\ (cost + sint) & (sint - cost) \end{vmatrix} = costsint - cos^2 t - sintcost - sin^2 t$$
$$= -1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{cost} & sint \\ sint & (sint - cost) \end{vmatrix} = tgt - 1 - sin^2 t$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cost & \frac{1}{cost} \\ (cost + sint) & sint \end{vmatrix} = costsint - 1 - tgt$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -tgt + 1 + sin^2 t =>$$

$$C_1(t) = \int (= -tgt + 1 + sin^2 t)dt \ = \ln|cost| + \frac{3t}{2} - \frac{sin2t}{4} + C_1$$

$$C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -costsint + 1 + tgt => C_2(t) = \int (-costsint + 1 + tgt)dt$$
$$= \frac{cos^2 t}{2} + t - \ln|cost| + C_2$$

Таким образом, общее решение заданной системы дифференциальных уравнений $\frac{dX}{dt} —\ AX \ = F$ имеет вид:

$$X = \left(\ln|cost| + \frac{3t}{2} - \frac{sin2t}{4} + C_1\right)\binom{cost}{cost + sint} + (\frac{cos^2 t}{2} + t$$
$$- \ln|cost| + C_2)\binom{sint}{sint - cost}$$

№4. Методом вариации произвольных постоянных найти общее решение $\boldsymbol{y'' + 4y = \frac{1}{cos2x}}$

Решение:

Найдём решение соответствующего однородного уравнения: $y'' + 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \;\; => \;\; \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

Решение однородного уравнения: $y_o = C_1 cos2x + C_2 sin2x$

Решение неоднородного уравнения: $y_н = C_1(x)cos2x + C_2(x)sin2x$

$$G(x) = \frac{dC}{dx} = F(x)$$

$$\begin{pmatrix} cos2x & sin2x \\ -2sin2x & 2cos2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{cos2x} \end{pmatrix}$$

Решим уравнение методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos2x & sin2x \\ -2sin2x & 2cos2x \end{vmatrix} = 2\,; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & sin2x \\ \dfrac{1}{cos2x} & 2cos2x \end{vmatrix} = -tg2x;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cos2x & 0 \\ -2sin2x & \dfrac{1}{cos2x} \end{vmatrix} = 1;$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{tg2x}{2}\,; C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2};$$

$$C_1(x) = \tilde{C}_1 - \frac{1}{2}\int tg2x\, dx\,; \quad C_2(x) = \tilde{C}_2 - \frac{1}{2}\int dx\,;$$

Подставляя полученные выражения $C_1(x), C_2(x)$ в решение $y_н = C_1(x)cos3x + C_2(x)sin3x$, запишем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y_н = \left(\tilde{C}_1 - \frac{1}{2}\ln|sin2x|\right)cos2x + \left(\tilde{C}_2 - \frac{x}{2}\right)sin2x$$
$$= \tilde{C}_1 cos2x - \frac{cos2x}{2}\ln|sin2x| + \tilde{C}_2 sin2x - \frac{x}{2}sin2x$$

№5. Записать вид общего решения ЛНДУВП с постоянными коэффициентами (методом подбора в случае специальной правой части):

$$\boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = 6cos2x - 2e^{-2x}}$$

Найдём решение соответствующего однородного уравнения:

$y''-4y' + 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad =>$

$$=> \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 2;$$

Тогда решение однородного уравнения: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

Права часть исходного уравнения имеет вид:$f(x) = 6cos2x - 2e^{-2x} =>$

$$f_1(x) = 6cos2x, f_2(x) = -2e^{-2x}$$

Найдём два частных решения:

$$f_1(x) = 6cos2x => \alpha = 0, \beta = 2, q = 0, p = 6 \ => m = 0$$

$$f_2(x) = -2e^{-2x} => \alpha = 2, \beta = 0, p = -2 \ => m = 2$$

Тогда $y_{ч1} = (a_1 cos2x + a_2 sin2x)$, $y_{ч2} = a_3 x^2 e^{2x}$.

$y'_{ч1} = (-2a_1 sin2x + 2a_2 cos2x)$

$y''_{ч1} = -4cos2x - 4a_2 sin2x$

Подставим получившиеся $y_{ч1}, y'_{ч1}, y''_{ч1}$ в уравнение $y'' - 4y' + 4y = 6cos2x$. Получаем: $8a_1 sin2x - 8a_2 cos2x = 6cos2x =>$

$a_2 = -\dfrac{3}{4} => \ a_1 = 0$

Тогда $y_{ч1} = \ -\frac{3}{4} sin2x$

А, $y_{ч2} = a_3 x^2 e^{2x}$.

$y'_{ч2} = 2a_3 x e^{2x} + 2a_3 x^2 e^{2x}, y''_{ч2} = 8x a_3 e^{2x} + 4a_3 x^2 e^{2x} + 2a_3 e^{2x}$

Подставим получившиеся $y_{ч2}, y'_{ч2}, y''_{ч2}$ в уравнение $y'' - 4y' + 4y = -2e^{-2x}$

Получаем: $a_3 e^{2x}(2 + 8x + 4x^2 - 8x - 8x^2 + 4x^2) = -2e^{-2x} => \ a_3 = -1$

Тогда $y_{ч2} = -x^2 e^{-2x}$.

Общее решение заданного ЛНДУВП:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{3}{4} sin2x - x^2 e^{2x}$$