Исследование устойчивости и аппроксимации схем.

Махмудов Орхан
М80-405Б-18

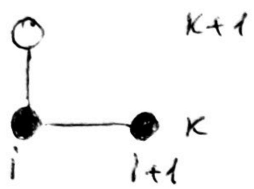
Дано ур-ие вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(x,0) = \psi(x)$$

Необходимо исслед. уст. и аппрокс. след. схем

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a\,\frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} = 0$$

Аппроксимация:

Получим невязку — остаток от подстановки точного решения:

$$r = \frac{u(x_i, t^k+\tau) - u(x_i, t^k)}{\tau} + a\,\frac{u(x_i+h, t^k) - u(x_i, t^k)}{h}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\frac{u(x_i,t^k) + \tau\cdot u_t(x_i,t^k) + \frac{\tau^2}{2}\cdot u_{tt}(x_i,t^k) - u(x_i,t^k)}{\tau} +$$

$$a\,\frac{u(x_i,t^k) + h\cdot u_x(x_i,t^k) + \frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i,t^k) - u(x_i,t^k)}{h} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial t^2} + a\cdot\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial x} + \frac{ah}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial x^2} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t} + a\,\frac{u(x_i,t^k)}{\partial x} = 0 \Rightarrow r = O\left(\frac{\tau}{2} + \frac{ah}{2}\right) = O(h+\tau) \to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k \cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega x_i} - \lambda^k \cdot e^{i\omega x_i}}{\tau} + a \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{i\omega(x_i+h)} - \lambda^k \cdot e^{i\omega x_i}}{h} = 0$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau} + \frac{a}{h}\cdot(e^{i\omega h}-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{a\tau}{h}\cdot(e^{i\omega h}-1)$$

Найдём модуль λ, считая, что $\frac{a\tau}{h} = \sigma$, $\omega \cdot h = \theta$

$$|\lambda|^2 = (1+\sigma-\sigma\cos\theta)^2 + \sigma^2\sin^2\theta \Rightarrow$$

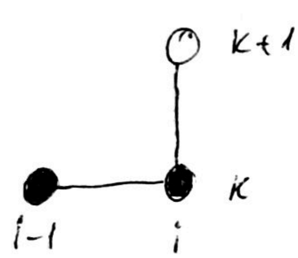
$$\Rightarrow 1 + 2\sigma^2(1-\cos\theta) + 2\sigma(1-\cos\theta)$$

Для уст. необходимо выполн. усл. $|\lambda| \le 1$

$$(1-\cos\theta)\cdot(\sigma+1) \le 0$$

Неравенство выполняется $\forall\theta$. Имеем: $\sigma \in [-1;0]$

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a\,\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} = 0$$

Аппроксимация:

Получим невязку-остаток от подстановки точного решения:

$$r = \frac{u(x_i, t^k+\tau) - u(x_i, t^k)}{\tau} + a\,\frac{u(x_i, t^k) - u(x_i - h, t^k)}{h}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\frac{u(x_i,t^k) + \tau \cdot u_t(x_i;t^k) + \frac{\tau^2}{2}\cdot u_{tt}(x_i,t^k) - u(x_i,t^k)}{\tau} +$$

$$a\,\frac{u(x_i,t^k) + h\cdot u_x(x_i,t^k) - \frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i,t^k) - u(x_i;t^k)}{h} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial t^2}+a\cdot\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial x}-\frac{ah}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial x^2}=$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t}+a\cdot\frac{u(x_i,t^k)}{\partial x}=0$$

$$r=O\left(\frac{\tau}{2}-\frac{ah}{2}\right)=O(h+\tau)\to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k\cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}e^{i\omega x_i}-\lambda^k e^{i\omega x_i}}{\tau}+a\,\frac{\lambda^k\cdot e^{i\omega x_i}-\lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i-h)}}{h}=0$$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}+\frac{a}{h}\cdot(-e^{i\omega h}+1)=0$$

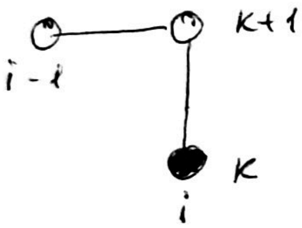
$$\lambda=1-\frac{a\tau}{h}(e^{-i\omega h}+1)$$

Аналогично схеме 1:

$$-\frac{a\tau}{h}\in[-1;0]$$

$$\frac{a\tau}{h}\in[0;1]$$

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau}+a\,\frac{u_i^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{h}=0$$

Аппроксимация:

Получим невязку - остаток от подстановки точного решения:

$$r=\frac{u(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k)}{\tau}+a\,\frac{u(x_i,t^k+\tau)-u(x_i-h,t^k+\tau)}{h}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\frac{u(x_i,t^k+\tau)+\tau\cdot u_t(x_i,t^k+\tau)-\frac{\tau^2}{2}\cdot u_{tt}(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k+\tau)}{\tau}+$$

$$+a\frac{u(x_i,t^k+\tau)+h\cdot u_x(x_i,t^k+\tau)-\frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k+\tau)}{h}=r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t}-\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t^2}+a\cdot\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial x}-\frac{ah}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k}{\partial x^2}=r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t}+a\cdot\frac{u(x_i,t^k+\tau)}{\partial x}=0$$

$$r=O\left(-\frac{\tau}{2}-\frac{ah}{2}\right)=O(h+\tau)\to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k\cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega x_i}-\lambda^k\cdot e^{i\omega x_i}}{\tau}+a\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega x_i}-\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega(x_i-h)}}{h}=0$$

$$\frac{1-\lambda^{-1}}{\tau}+\frac{a}{h}(-e^{-i\omega h}+1)=0$$

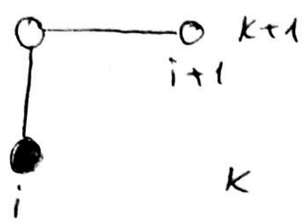
$$\lambda=\left(1-\frac{a\tau}{h}(-e^{-i\omega h}+1)\right)^{-1}$$

$$\lambda=\frac{1}{1+\sigma(1-e^{i\theta})},\ \text{где } \sigma=\frac{a\tau}{h} \text{ и } \theta=-\omega h$$

$$|1-\sigma(e^{i\theta}-1)|\geq 1$$

$$\frac{a\tau}{h}\in(-\infty,-1]\cup[0;+\infty)$$

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^{k}}{\tau} + a\,\frac{u_{i+1}^{k+1}-u_i^{k+1}}{h} = 0$$

Аппроксимация:

Получим невязку-остаток от подстановки точно решение:

$$r = \frac{u(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k)}{\tau} + a\,\frac{-u(x_i,t^k+\tau)+u(x_i+h,t^k+\tau)}{h}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\frac{u(x_i,t^k+\tau)+\tau\cdot u_t(x_i,t^k+\tau)-\frac{\tau^2}{2}\cdot u_{tt}(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k+\tau)}{\tau}+$$

$$+a\,\frac{u(x_i,t^k+\tau)+h\cdot u_x(x_i,t^k+\tau)+\frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i,t^k+\tau)-u(x_i,t^k+\tau)}{h} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t} - \frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t^2} + a\cdot\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial x}\quad \frac{ah}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k+\tau)}{\partial x^2} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k+\tau)}{\partial t} + a\cdot\frac{u(x_i,t^k+\tau)}{\partial x} = 0$$

$$r = O\left(-\frac{\tau}{2}+\frac{ah}{2}\right) = O(h+\tau)\to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k\cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}e^{i\omega x_i}-\lambda^{k}\cdot e^{i\omega x_i}}{\tau} + a\cdot\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega(x_i+h)}-\lambda^{k+1}e^{i\omega x_i}}{h} = 0$$

$$\frac{1-\lambda^{-1}}{\tau}+\frac{a}{h}\cdot(e^{i\omega h}-1)=0$$

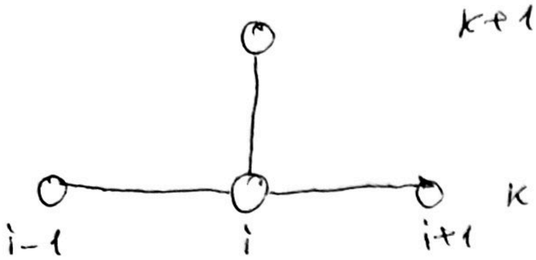
$$\lambda = (1-\frac{a\tau}{h}\cdot(-e^{i\omega h}+1)$$

$$\lambda = \frac{1}{1+\sigma(1-e^{i\theta})}, \text{ где } \sigma = -\frac{a\tau}{h} \text{ и } \theta = \omega h$$

$$-\frac{a\tau}{h} \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$$

$$\frac{a\tau}{h} \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$$

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a\,\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} = 0$$

Аппроксимация:

Получим невязку-остаток от подстановки точного решения:

$$r = \frac{u(x_i, t^k+\tau) - u(x_i, t^k)}{\tau} + a\,\frac{u(x_i+h, t^k) - u(x_i-h, t^k)}{2h}$$

Разложим в ряд Тейлора

$$\frac{u(x_i, t^k) + \tau\cdot u_t(x_i, t^k) + \frac{\tau^2}{2}\cdot u_{tt}(x_i, t^k) - u(x_i, t^k)}{\tau} +$$

$$+ a\,\frac{u(x_i, t^k) + h\cdot u_x(x_i, t^k) + \frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i, t^k) + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x_i, t^k) - u(x_i, t^k)}{2h}$$

$$-h\,u_x(x_i, t^k) + \frac{h^2}{2}\cdot u_{xx}(x_i, t^k) - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x_i, t^k)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t^k)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\,\frac{\partial^2 u(x_i, t^k)}{\partial t^2} + a\cdot\frac{\partial u(x_i, t^k)}{\partial x} + \frac{a h^2}{6}\cdot\frac{\partial^3 u(x_i, t^k)}{\partial x^3} = r$$

$$\frac{\partial u(x_i, t^k)}{\partial t} + a\cdot\frac{u(x_i, t^k)}{\partial x} = 0$$

$$r = O\left(\frac{\tau}{2} + \frac{a h^2}{6}\right) = O(h^2 + \tau) \to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k \cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega x_i} - \lambda^k e^{i\omega x_i}}{\tau} + a\cdot \frac{\lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i+h)} - \lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i-h)}}{2h} = 0$$

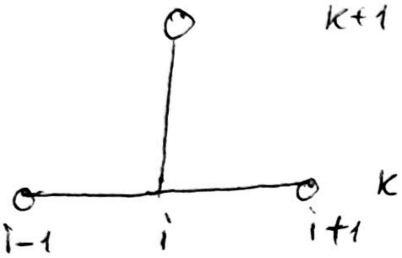
$$\frac{\lambda-1}{\tau} + \frac{a}{2h}\cdot(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) = 0$$

$$\lambda = 1 - i\frac{a\tau}{h}\sin(\omega h)$$

$$|\lambda| = 1+\delta^2\cdot\sin^2\theta \le 1, \text{ где } \delta = \frac{a\tau}{h} \text{ и } \theta = \omega\cdot h$$

$$\delta^2\cdot\sin^2\theta\le 0 \Rightarrow a=0 \text{ т.к. } \tau,h\ne 0$$

Схема:



$$\frac{u_i^{k+1} - \frac{u_{i-1}^k + u_{i+1}^k}{2}}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} = 0$$

Аппроксимация:

Получим невязку-остаток от подстановки точного решения

$$r = \frac{u(x_i,t^k+\tau) - \frac{u(x_i-h,t^k)+u(x_i+h,t^k)}{2}}{\tau} + a\frac{u(x_i+h,t^k)-u(x_i-h,t^k)}{2h}$$

Разложим в ряд Тейлора

$$\frac{u(x_i,t^k)+\tau u_t(x_i,t^k)+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}(x_i,t^k) - I}{\tau} + a\frac{u(x_i,t^k) - h u_x(x_i,t^k) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i,t^k) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i,t^k) - u(x_i,t^k) - h u_x(x_i,t^k) - \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i,t^k) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i,t^k)}{2h}$$

где $I = \overline{u(x_i,t^k) - hu_x(x_i,t^k) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i,t^k) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i,t^k)} +$

$$+\frac{u(x_i,t^k) + hu_x(x_i,t^k) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_i,t^k) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x_i,t^k)}{2h}$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t}+\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial t^2}+a\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial x}-\frac{h^2}{2\tau}\cdot\frac{\partial^2 u(x_i,t^k)}{\partial x^2}+\frac{ah^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t^k)}{\partial x^3}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u(x_i,t^k)}{\partial t}+a\cdot\frac{u(x_i,t^k)}{\partial x}=0$$

$$r=O\left(\frac{\tau}{2}+\frac{ah^2}{6}-\frac{h^2}{2\tau}\right)=O\left(\frac{h^2}{\tau}+\tau+h^2\right)\to 0$$

Устойчивость:

Подставим решение в виде $\lambda^k\cdot e^{i\omega x}$

$$\frac{\lambda^{k+1}\cdot e^{i\omega x_i}-\dfrac{\lambda^k\cdot e^{i\omega x_i}+\lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i+h)}}{2}}{\tau}+a\cdot\frac{\lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i+h)}-\lambda^k\cdot e^{i\omega(x_i-h)}}{2h}=0$$

$$\frac{2\lambda-e^{-i\omega h}-e^{i\omega h}}{\tau}+\frac{a}{h}\cdot\left(e^{i\omega h}-e^{-i\omega h}\right)=0\Rightarrow$$

$$2\lambda=-i\frac{a\tau}{h}+2\cos(\omega h)\Rightarrow\lambda=\cos\theta-i\delta\sin\theta$$

где $\delta=\frac{a\tau}{2h}$, $\theta=\omega\cdot h$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta+(\delta^2-1)\cdot\sin^2\theta\le 1$$

$$(\delta^2-1)\sin^2\theta\le 0$$

$$-\frac{a\tau}{2h}\in[-1;1]\Rightarrow\frac{a\tau}{2h}\in[-1;1]$$