МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования
Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)
Факультет №8
«Информационные технологии и прикладная математика»

Расчётно-графическая работа

по курсу «Механика сплошных сред»
VI семестр

Выполнил студент
3-го курса, 305-ой группы
Махмудов О. С.
____
(подпись)
Научный руководитель
Савин А. А.
____
(подпись)

Работа защищена
«__»___________ 2021
Оценка___________

Москва, 2021

Задание 1

Уравнения движения континуума. Траектории, линии тока. Скорости и ускорения частиц среды.
Задано поле скоростей в переменных Эйлера.

$$V_x = \frac{2}{5}\left(2 + \sin\frac{\pi t}{2}\right)\cos x$$
$$V_y = \frac{3}{2} - \cos\frac{\pi t}{3}$$
$$t_1 = 5$$
$$x_1 = 1$$
$$y_1 = 0$$

1. **Определить уравнения линий тока для момента времени $t = t_1$. Построить линию тока, проходящую через точку $A(x_1, y_1)$.**

$$\frac{dx}{V_x(x,y,t_1)} = \frac{dy}{V_y(x,y,t_1)}$$
$$\frac{dx}{\frac{2}{5}\left(2 + \sin\frac{\pi t}{2}\right)\cos x} = \frac{dy}{\frac{3}{2} - \cos\frac{\pi t}{3}}$$
$$\frac{dx}{\frac{6}{5}\cos x} = \frac{dy}{1}$$
$$dy = \frac{dx}{\frac{6}{5}\cos x}$$

$y = \int \frac{dx}{\frac{6}{5}\cos x} + C_0$

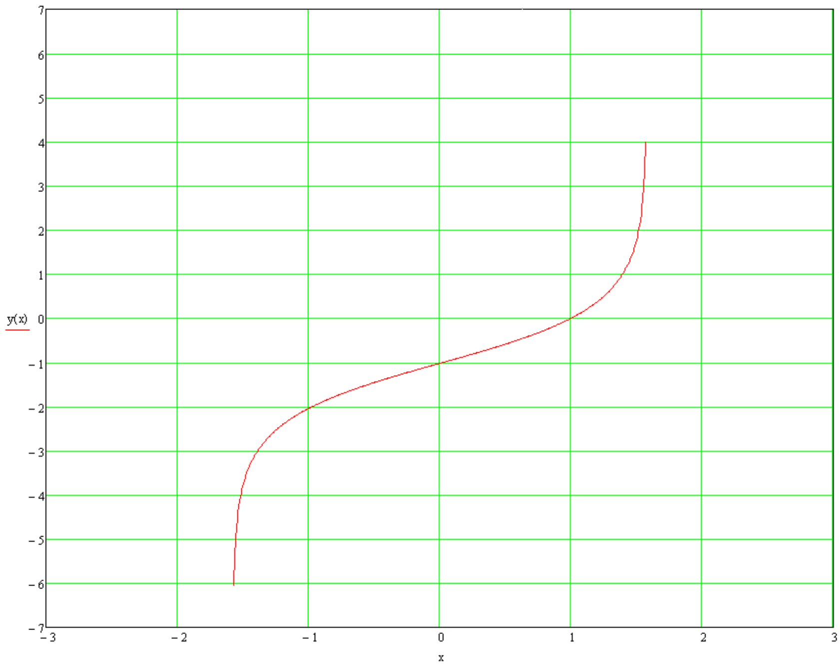
$y = \frac{5}{6} ln(tgx + \frac{1}{\cos x}) + C_0$- уравнения линии тока для t=5

Найдем C_0.

$$0 = \frac{5}{6} ln(tg1 + \frac{1}{\cos 1}) + C_0$$
$$C_0 = -\frac{5}{6} ln(tg1 + \frac{1}{\cos 1})$$

$y(x) = \frac{5}{6} ln(tgx + \frac{1}{\cos x}) - \frac{5}{6} ln(tg1 + \frac{1}{\cos 1})$ - уравнение линии тока, проходящей через точку A(1, 0).

Построим график.



2. На построенной линии тока выбрать точку B(x_2, y_2). Для частицы континуума М, находящейся при t=t$_1$ в точке В, построить траекторию и вычислить ее Лагранжевы координаты.

Выберем точку В:

$$x_2 = 0, y_2 = y(0) \approx -1.$$

Траектория точки М.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V_x(x, y, t) \\ \dfrac{dy}{dt} = V_y(x, y, t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{5}\left(2 + sin\dfrac{\pi t}{2}\right) cos\, x \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{2} - cos\dfrac{\pi t}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{cos\, x} = \dfrac{2}{5}\left(2 + sin\dfrac{\pi t}{2}\right) dt \\ dy = \left(\dfrac{3}{2} - cos\dfrac{\pi t}{3}\right) dt \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{cos\, x} = ln(tgx + \frac{1}{cos\, x}) + C_1$$

$$\int \frac{2}{5}\left(2 + sin\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{4}{5\pi} cos\frac{\pi t}{2} - \frac{4t}{5}$$

$$ln(tgx + \frac{1}{cos\, x}) + C_1 = \frac{4}{5\pi} cos\frac{\pi t}{2} - \frac{4t}{5}$$

$$\int \frac{3}{2} - cos\frac{\pi t}{3} dt = -\frac{3}{\pi} sin\frac{\pi t}{3} + \frac{3t}{2}$$

$$x(t) := 2\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{e^{-\frac{4\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+5\cdot\pi\cdot C1-4\cdot\pi\cdot t}{5\cdot\pi}}-1}{e^{-\frac{4\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)+5\cdot\pi\cdot C1-4\cdot\pi\cdot t}{5\cdot\pi}}+1}\right)$$ - уравнения траектории точки М.

$$y(t) = -\frac{3}{\pi}\sin\frac{\pi t}{3} + \frac{3t}{2} + C_2$$

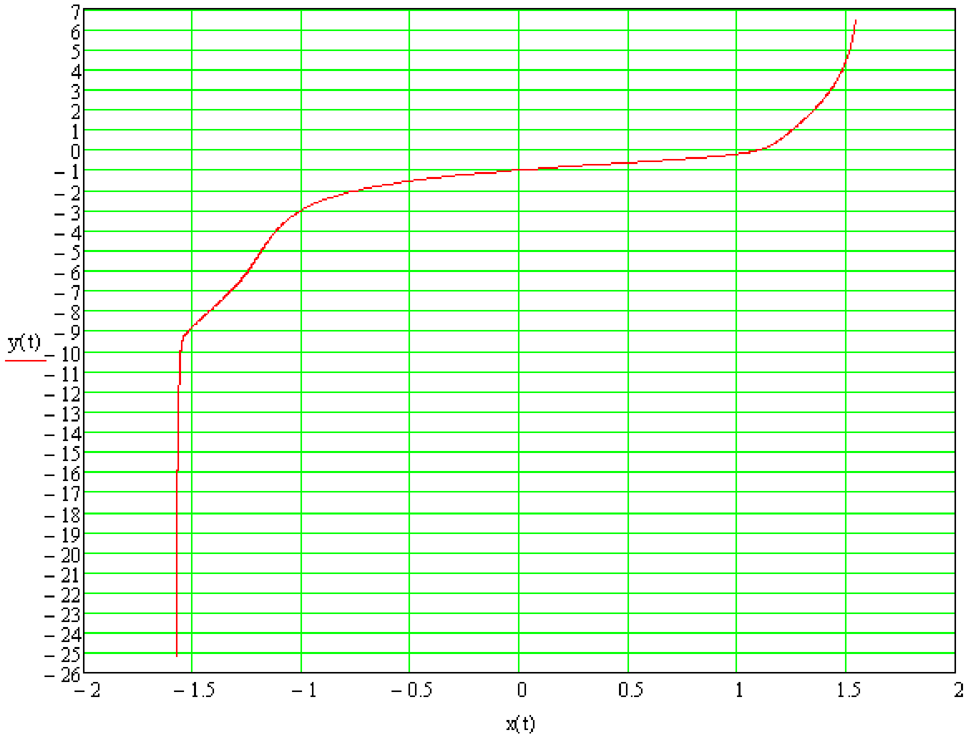
Найдем C_1 и C_2.

$$\ln(tg0 + \frac{1}{\cos 0}) + C_1 = \frac{4}{5\pi}\cos\frac{5\pi}{2} - \frac{5\cdot 4}{5}$$

C_1=4.

$$C_2 = y2 + \frac{3}{\pi}\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{5}{6}\ln(\cos 1) - \frac{5}{6}\ln(\sin 1 + 1) - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{15}{2}$$

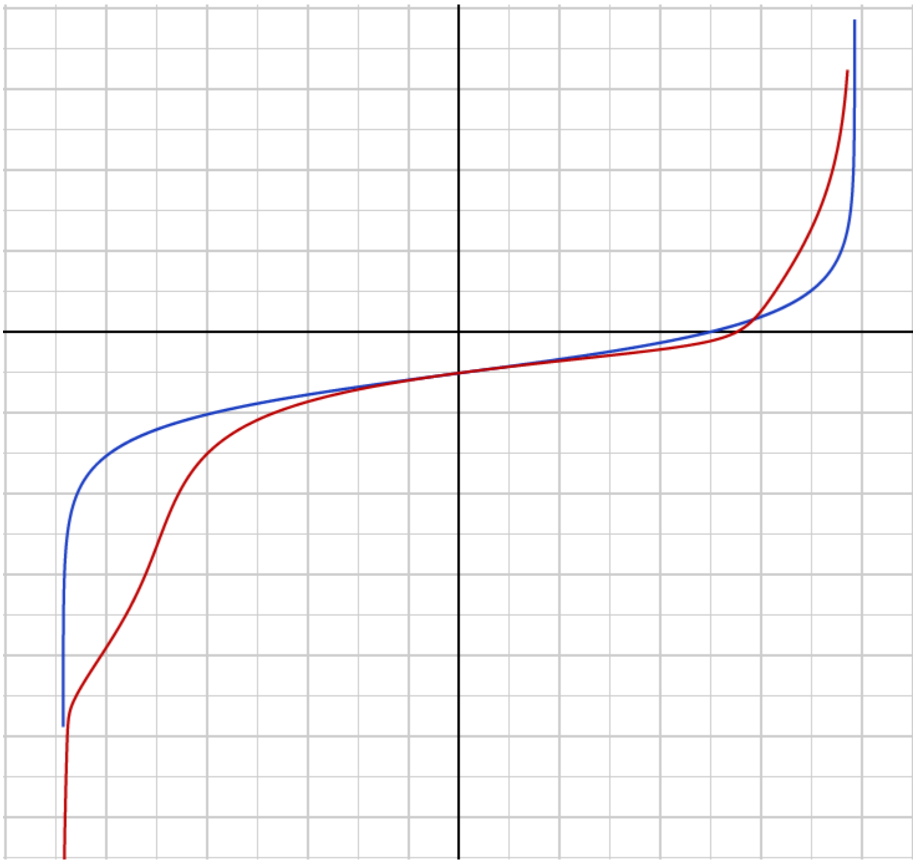
Траектория М лежит на этом графике.



Лагранжевы координаты:

x(0)= - 1.542,
y(0)= - 9.349.

Общий график:



3. Определить поле ускорений в переменных Эйлера.

$$Vx(x,y,t) := \left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(2 + \sin\left(\frac{\pi\, t}{2}\right)\right)\cdot\cos(x)$$

$$Vy(x,y,t) := \left(\frac{3}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi\, t}{3}\right)$$

$$Wx(x,y,t) := \frac{d}{dt}Vx(x,y,t) + Vx(x,y,t)\cdot\left(\frac{d}{dx}Vx(x,y,t)\right) + Vy(x,y,t)\cdot\left(\frac{d}{dy}Vx(x,y,t)\right)$$

$$Wy(x,y,t) := \frac{d}{dt}Vy(x,y,t) + Vx(x,y,t)\cdot\left(\frac{d}{dx}Vy(x,y,t)\right) + Vy(x,y,t)\cdot\left(\frac{d}{dy}Vy(x,y,t)\right)$$

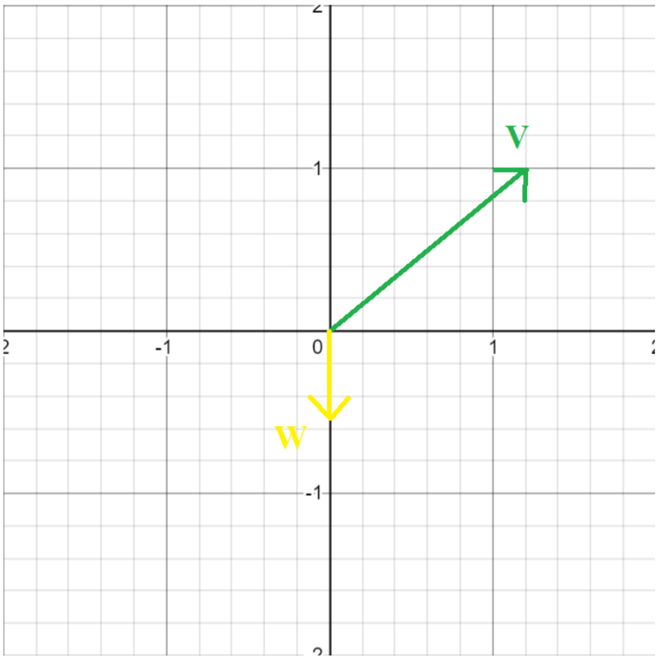
$$Wx(x,y,t) \rightarrow \frac{\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)\cdot\cos(x)}{5} - \cos(x)\cdot\sin(x)\cdot\left(\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{2}\right)}{5} + \frac{4}{5}\right)^2$$

- поле ускорений.

$$Wy(x,y,t) \rightarrow \frac{\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{3}\right)}{3}$$

4. Построить векторы скорости и ускорения частицы М при t=5.

$$V_x(x_2, y_2, t_1) = \frac{6}{5}$$
$$V_y(x_2, y_2, t_1) = 1$$
$$W_x(x_2, y_2, t_1) = 0$$
$$W_y(x_2, y_2, t_1) = -\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$



Задание 2-3

Задано преобразование координат на плоскости (x, y – декартовы координаты, x^1, x^2 – криволинейные координаты), и заданы компоненты вектора скорости в декартовых координатах.

$$x = x^1 \cosh x^2$$
$$y = x^2$$
$$V_x = x \tanh y$$
$$V_y = 1$$

1. **Указать область плоскости, в которой преобразование координат взаимо-однозначно.**

Запишем якобиан:

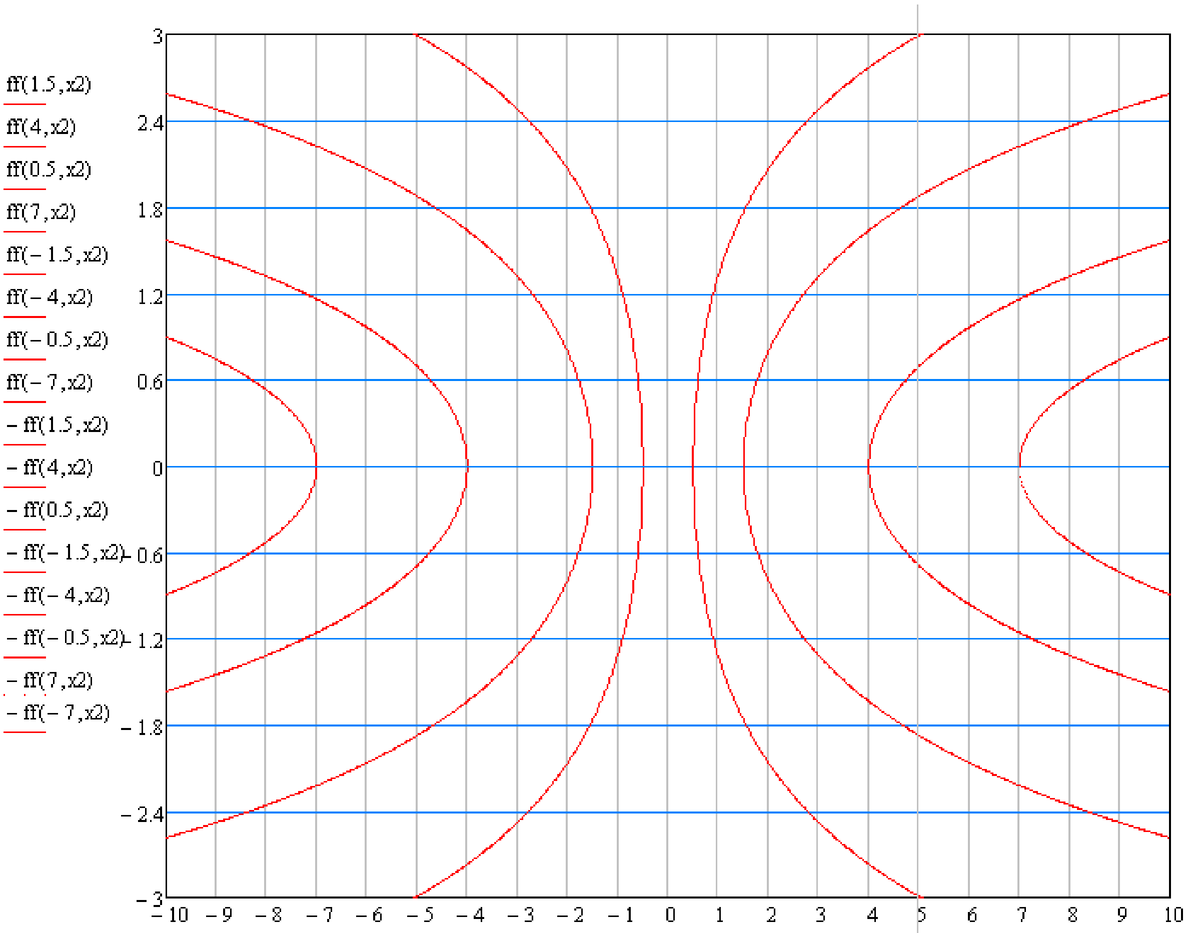
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^1} & \frac{\partial x}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y}{\partial x^1} & \frac{\partial y}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cosh x^2 & x^1 \sinh x^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cosh x^2$$

$$\cosh x^2 = 0 при x^2 = \frac{\pi \cdot i}{2}$$

Якобиан не равен 0 на всей вещественной плоскости, значит для любой точки с декартовыми координатами x, y можно однозначно поставить в соответствие точку с криволинейными координатами x^1 и x^2.

2. **Построить координатную сетку.**

Если $x^1 = const$, то $x = C \cosh x^2$.
Если $x^2 = const$, то $y = C$.



Найти:

3. **векторы основного и взаимного базисов. Изобразить их на чертеже;**

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x^1 \cosh x^2\,\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath}$$

Основной базис:

$$\overrightarrow{Э_1} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^1} = \cosh x^2\,\vec{\imath} = \cosh y\,\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{Э_2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x^2} = x^1 \sinh x^2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} = \frac{x}{\cosh y}\sinh y\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} = x \tanh y\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

Взаимный базис:

$$\overrightarrow{Э^1} = grad x^1 = grad\,\frac{x}{\cosh y} = \frac{1}{\cosh y}\vec{\imath} - \frac{x \sinh y}{\cosh^2 y}\vec{\jmath} = \frac{1}{\cosh x^2}\vec{\imath} - x^1 \tanh x^2\,\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{Э^2} = grad x^2 = grad y = \vec{\jmath}$$

4. **матрицы прямого и обратного преобразования координат;**

$$\alpha = \left\|\frac{\partial x^k}{\partial x'^j}\right\|$$

$$\alpha_1^1 = \frac{\partial x}{\partial x^1} = \cosh x^2$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\partial y}{\partial x^1} = 0$$

$$\alpha_2^1 = \frac{\partial x}{\partial x^2} = x^1 \sinh x^2$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\partial y}{\partial x^2} = 1$$

$\alpha = \begin{pmatrix} \cosh x^2 & 0 \\ x^1 \sinh x^2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица прямого преобразования

$$\beta = \left\|\frac{\partial x'^j}{\partial x^k}\right\|$$

$$\beta_1^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\cosh x^2}$$

$$\beta_1^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 0$$

$$\beta_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial y} = -\frac{x \sinh y}{\cosh^2 y} = -x^1 \tanh x^2$$

$$\beta_2^2 = \frac{\partial x^2}{\partial y} = 1$$

$\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh x^2} & 0 \\ -x^1 \tanh x^2 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица обратного преобразования

5. **матрицы (g_{ij}) и (g^{ij});**

$$g_{ij} = \overrightarrow{Э_i} \cdot \overrightarrow{Э_j}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} cosh^2 y & x\, sinh\, y \\ x\, sinh\, y & x^2\, tanh^2 y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh^2(x^2) & x^1 sinh\, x^2\, cosh\, x^2 \\ x^1 sinh\, x^2\, cosh\, x^2 & (x^1)^2 sinh^2(x^2) + 1 \end{pmatrix}$$

$$|g_{ij}| = cosh^2(x^2) \cdot (x^1)^2 sinh^2(x^2) + cosh^2(x^2) - (x^1 sinh\, x^2\, cosh\, x^2)^2 = cosh^2(x^2)$$

$$g^{ij} = \overrightarrow{Э^i} \cdot \overrightarrow{Э^j}$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{cosh^2 y} + \dfrac{x^2\, sinh^2 y}{cosh^4 y} & -\dfrac{x\, sinh\, y}{cosh^2 y} \\ -\dfrac{x\, sinh\, y}{cosh^2 y} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{cosh^2(x^2)} + (x^1)^2 tanh^2(x^2) & -x^1 tanh\, x^2 \\ -x^1 tanh\, x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **ко- и контравариантные компоненты вектора скорости в криволинейных координатах;**

$V_i^{'} = \alpha_i^j \cdot V_j$ - ковариантные

$$V_1 = \alpha_1^1 \cdot V_1 + \alpha_1^2 \cdot V_2 = cosh\, y \cdot x\, tanh\, y = x\, sinh\, y = x^1 \cdot cosh\, x^2 \cdot sinh\, x^2$$

$$V_2 = \alpha_2^1 \cdot V_1 + \alpha_2^2 \cdot V_2 = x\, tanh\, y \cdot x\, tanh\, y + 1 = x^2\, tanh^2 y + 1 = (x^1)^2 sinh^2 x^2 + 1$$

$V^{'j} = \beta_i^j \cdot V^i$ - контравариантные

$$V^{'1} = \beta_1^1 \cdot V^{\;1} + \beta_2^1 \cdot V^{\;2} = \frac{1}{cosh\, y} \cdot x\, tanh\, y - \frac{x\, sinh\, y}{cosh^2 y} = 0$$

$$V^{'2} = \beta_1^2 \cdot V^{\;1} + \beta_2^2 \cdot V^{\;2} = 1$$

7. **Символы Кристоффеля II рода;**

$$\frac{\partial \overrightarrow{Э_i}}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \cdot \overrightarrow{Э_k} = \Gamma_{ij}^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} + \Gamma_{ij}^2 \cdot \overrightarrow{Э_2}$$

$$\vec{i} = \frac{\overrightarrow{Э_1}}{cosh\, x^2}, \vec{j} = \overrightarrow{Э_2} - x^1 sinh\, x^2 \cdot \frac{\overrightarrow{Э_1}}{cosh\, x^2} = \overrightarrow{Э_2} - x^1 tanh\, x^2\, \overrightarrow{Э_1}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{Э_1}}{\partial x^1} = 0 = \Gamma_{11}^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} + \Gamma_{11}^2 \cdot \overrightarrow{Э_2} \Rightarrow \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{Э_2}}{\partial x^1} = sinh\, x^2 \cdot \vec{i} = sinh\, x^2 \cdot \frac{\overrightarrow{Э_1}}{cosh\, x^2} = tanh\, x^2\, \overrightarrow{Э_1} = \Gamma_{21}^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} + \Gamma_{21}^2 \cdot \overrightarrow{Э_2} \Rightarrow \Gamma_{21}^1 = tanh\, x^2, \Gamma_{21}^2 = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{Э_1}}{\partial x^2} = sinh\, x^2 \cdot \vec{i} = sinh\, x^2 \cdot \frac{\overrightarrow{Э_1}}{cosh\, x^2} = tanh\, x^2\, \overrightarrow{Э_1} = \Gamma_{12}^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} + \Gamma_{12}^2 \cdot \overrightarrow{Э_2} \Rightarrow \Gamma_{12}^1 = tanh\, x^2, \Gamma_{12}^2 = 0$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{Э_2}}{\partial x^2} = x^1 cosh\, x^2 \cdot \vec{i} = x^1 cosh\, x^2 \cdot \frac{\overrightarrow{Э_1}}{cosh\, x^2} = x^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} = \Gamma_{22}^1 \cdot \overrightarrow{Э_1} + \Gamma_{22}^2 \cdot \overrightarrow{Э_2} \Rightarrow \Gamma_{22}^1 = x^1, \Gamma_{22}^2 = 0$$

8. **ко- и контравариантные компоненты вектора ускорения в криволинейных координатах;**

$$\vec{w} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{\partial V^k}{\partial t} + V^i \nabla_i V^k\right) \cdot \overrightarrow{Э_k}$$

$$= \left(\frac{\partial V^1}{\partial t} + V^1 \nabla_1 V^1 + V^2 \nabla_2 V^1\right) \cdot \overrightarrow{Э_1} + \left(\frac{\partial V^2}{\partial t} + V^1 \nabla_1 V^2 + V^2 \nabla_2 V^2\right) \cdot \overrightarrow{Э_2}$$

$$\nabla_i V^k = \frac{\partial V^k}{\partial x^i} + V^j \Gamma^k_{ji}$$

$$\nabla_1 V^1 = \boxed{\frac{\partial V^1}{\partial x^1}} + \boxed{V^1 \Gamma^1_{11}} + V^2 \Gamma^1_{21} = V^2 \Gamma^1_{21} = \tanh x^2$$

$$\nabla_2 V^1 = \boxed{\frac{\partial V^1}{\partial x^2}} + \boxed{V^1 \Gamma^1_{12}} + V^2 \Gamma^1_{22} = V^2 \Gamma^1_{22} = x^1$$

$$\nabla_1 V^2 = \boxed{\frac{\partial V^2}{\partial x^1}} + \boxed{V^1 \Gamma^2_{11}} + \boxed{V^2 \Gamma^2_{21}} = 0$$

$$\nabla_2 V^2 = \boxed{\frac{\partial V^2}{\partial x^2}} + \boxed{V^1 \Gamma^2_{12}} + \boxed{V^2 \Gamma^2_{22}} = 0$$

$w^1 = \boxed{V^1 \nabla_1 V^1} + V^2 \nabla_2 V^1 = x^1$

$w^2 = 0$ - контравариантные

$w_i = w^k \cdot g_{ik}$

$w_1 = w^1 \cdot g_{11} + w^2 \cdot g_{12} = x^1 \cosh^2 x^2$

$w_2 = w^1 \cdot g_{21} + w^2 \cdot g_{22} = (x^1)^2 \sinh x^2 \cosh x^2$ - ковариантные

9. **дивергенцию и ротор вектора скорости;**

$$div\vec{V} = \nabla_i V^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} \cdot V^i\right)$$

$$div\vec{V} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g} \cdot V^1\right)} + \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g} \cdot V^2\right) = \frac{1}{\cosh x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x^2}(\cosh x^2) = \tanh x^2$$

$$rot\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x^1} - \frac{\partial V_1}{\partial x^2}\right) \cdot \overrightarrow{Э_3}$$

$$rot\vec{V} = \frac{1}{\cosh x^2}\left(2x^1 \sinh^2 x^2 - x^1\right) \cdot \overrightarrow{Э_3}$$

10. **Получить явные формулы для вычисления градиента и лапласиана скалярной функции $\boldsymbol{\varphi = \varphi(x^1, x^2)}$ в заданных криволинейных координатах.**

Градиент скалярного поля $\varphi(x^1, x^2)$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \cdot \overrightarrow{Э^i}$$

$$\overrightarrow{Э_1} = \cosh x^2\, \vec{\imath} \Rightarrow \vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{Э_1}}{\cosh x^2}$$

$$\overrightarrow{Э_2} = x^1 \sinh x^2\, \vec{\imath} + \vec{\jmath} \Rightarrow \vec{\jmath} = -\overrightarrow{Э_2} - x^1 \sinh x^2 \frac{\overrightarrow{Э_1}}{\cosh x^2} = -\overrightarrow{Э_2} - x^1 \tanh x^2\, \overrightarrow{Э_1}$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot \overrightarrow{Э^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \cdot \overrightarrow{Э^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot \left(\frac{1}{\cosh x^2}\vec{\imath} - x^1 \tanh x^2\, \vec{\jmath}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \cdot \vec{\jmath} =$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot \frac{1}{\cosh x^2}\vec{\imath} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot x^1 \tanh x^2\right) \cdot \vec{\jmath} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x^2}\overrightarrow{Э_1} +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot x^1 \tanh x^2\right) \cdot \left(\overrightarrow{Э_2} + x^1 \tanh x^2\, \overrightarrow{Э_1}\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot \frac{1}{\cosh^2 x^2} + x^1 \tanh x^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot (x^1)^2 \tanh^2 x^2\right)\overrightarrow{Э_1}$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \cdot x^1 \tanh x^2\right)\overrightarrow{Э_2}$$

Лапласиан скалярного поля $\varphi(x^1, x^2)$

$$\Delta\varphi = \nabla^i\nabla_i\varphi = \nabla^1\nabla_1\varphi + \nabla^2\nabla_2\varphi$$

$$\Delta\varphi = \nabla^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + \nabla^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = g^{1j}\nabla_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + g^{2j}\nabla_j \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} =$$
$$= g^{11}\nabla_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + g^{12}\nabla_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + g^{21}\nabla_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} g^{22}\nabla_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} =$$
$$= g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} + g^{21} \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} =$$
$$= \left(\frac{1}{\cosh^2(x^2)} + (x^1)^2 \tanh^2(x^2)\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} - x^1 \tanh x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^1} - x^1 \tanh x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}$$

<u>Задание 4</u>

Теория деформаций
Задано преобразование, определяющее плоскую конечную деформацию сплошной среды.

$$x = \xi^1; y = \xi^2 e^{\xi^1}$$
$$\xi^1 = 0, \xi^2 = 1.$$

Найти:

1. **ковариантные компоненты тензоров деформации в базисах сопутствующей системы (для частиц с указанными лагранжевыми координатами)**

$$\left[\begin{aligned} &\overrightarrow{\overset{o}{Э}_1} = \vec{i} \\ &\overrightarrow{\overset{o}{Э}_2} = \vec{j} \end{aligned}\right.$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \xi^1 \cdot \vec{i} + \xi^2 e^{\xi^1} \cdot \vec{j}$$

$$\left[\begin{aligned} &\overrightarrow{\overset{\wedge}{Э}_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1} = \vec{i} + \xi^2 e^{\xi^1} \cdot \vec{j} = \vec{i} + \vec{j} \\ &\overrightarrow{\overset{\wedge}{Э}_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2} = e^{\xi^1} \cdot \vec{j} = \vec{j} \end{aligned}\right.$$

Ковариантные компоненты:
- в начальном пространстве:

$$\overset{o}{g}_{ij} = \overset{o}{Э}_i \cdot \overset{o}{Э}_j, \hat{g}_{ij} = \overset{\wedge}{Э}_i \cdot \overset{\wedge}{Э}_j$$
$$\overset{o}{g}_{11} = \overset{o}{Э}_1 \cdot \overset{o}{Э}_1 = \overset{o}{g}_{22} = \overset{o}{Э}_2 \cdot \overset{o}{Э}_2 = 1$$
$$\overset{o}{g}_{12} = \overset{o}{Э}_1 \cdot \overset{o}{Э}_2 = \overset{o}{g}_{21} = \overset{o}{Э}_2 \cdot \overset{o}{Э}_1 = 0$$

- в актуальном пространстве:

$$\hat{g}_{11} = \overset{\wedge}{Э}_1 \cdot \overset{\wedge}{Э}_1 = 1 + \left(\xi^2 e^{\xi^1}\right)^2$$
$$\hat{g}_{12} = \overset{\wedge}{Э}_1 \cdot \overset{\wedge}{Э}_2 = \hat{g}_{21} = \overset{\wedge}{Э}_2 \cdot \overset{\wedge}{Э}_1 = \xi^2 \cdot e^{2\xi^1}$$
$$\hat{g}_{22} = \overset{\wedge}{Э}_2 \cdot \overset{\wedge}{Э}_2 = e^{2\xi^1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - \overset{o}{g}_{ij}\right)$$

$$||\varepsilon_{ij}|| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\xi^2 e^{\xi^1}\right)^2 & \frac{1}{2}\xi^2 \cdot e^{2\xi^1} \\ \frac{1}{2}\xi^2 \cdot e^{2\xi^1} & \frac{1}{2}e^{2\xi^1} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$ - тензор деформации

2. **главные компоненты и главные направления этих тензоров (численный расчет)**

$\varepsilon\overline{\rho} = \lambda\overline{\rho} = \lambda G\overline{\rho}$ - главный вектор для данного тензора
λ - главные значения

$$(\varepsilon - \lambda G)\overline{\rho} = 0$$
$$||\varepsilon_{ij} - \lambda g_{ij}|| \cdot \left\|\begin{matrix}\rho^1 \\ \rho^2\end{matrix}\right\| = 0$$

Для совместности системы нужно, чтобы

$$det\,||\varepsilon_{ij} - \lambda g_{ij}|| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \varepsilon_1, \lambda_2 = \varepsilon_2$$
$$|\varepsilon - \lambda G| = \begin{vmatrix}\frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4} = 0$$
$$\overset{o}{\varepsilon}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \overset{o}{\varepsilon}_2 = \lambda_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$
$$\varepsilon\overline{\rho_1} = \overset{o}{\varepsilon}_1\overline{\rho}_1$$

Подставим $\lambda_1 = \overset{o}{\varepsilon}_1$.

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1^1 \\ \rho_1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$
$$\rho_1^1 = 4 \Rightarrow 1 - \sqrt{5} + \frac{1}{2}\rho_1^2 = 0 \Rightarrow \rho_1^2 = 2\sqrt{5} - 2$$
$$\overrightarrow{\rho_1} = \begin{pmatrix}4 \\ 2\sqrt{5} - 2\end{pmatrix}$$

Подставим $\lambda_2 = \overset{o}{\varepsilon}_2$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho_1^1 \\ \rho_1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$
$$\rho_1^1 = 4 \Rightarrow 1 + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\rho_1^2 = 0 \Rightarrow \rho_1^2 = -2\sqrt{5} - 2$$
$$\overrightarrow{\rho_2} = \begin{pmatrix}4 \\ -2\sqrt{5} - 2\end{pmatrix}$$

Главные направления тензоров:

$$\left[\begin{aligned}\overrightarrow{\overset{o}{\rho}_1} &= 4 \cdot \vec{\imath} + 2(\sqrt{5} - 1) \cdot \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\overset{o}{\rho}_2} &= 4 \cdot \vec{\imath} + 2(-\sqrt{5} - 1) \cdot \vec{\jmath}\end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned}\overrightarrow{\hat{\rho}_1} &= 4 \cdot \overrightarrow{\hat{Э}_1} + 2(\sqrt{5} - 1) \cdot \overrightarrow{\hat{Э}_2} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2(\sqrt{5} - 1)\vec{\jmath} = 4\vec{\imath} + 2(1 + \sqrt{5}) \cdot \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{\hat{\rho}_2} &= 4 \cdot \overrightarrow{\hat{Э}_1} + 2(-\sqrt{5} - 1) \cdot \overrightarrow{\hat{Э}_2} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2(-\sqrt{5} - 1)\vec{\jmath} = 4\vec{\imath} + 2(-\sqrt{5} + 1)\vec{\jmath}\end{aligned}\right.$$

Главные компоненты тензоров:

$$\overset{o}{\varepsilon}_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}, \overset{o}{\varepsilon}_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\overset{o}{\varepsilon}_i}{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_i}$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\overset{o}{\varepsilon}_1}{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\overset{o}{\varepsilon}_1}{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{6 - 2\sqrt{5}} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

3. **относительные удлинения координатных волокон сопутствующей системы, а также главных осей тензора деформаций**

$$l_i^{г} = \sqrt{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_i} - 1$$

$$l_i^k = \sqrt{1 + 2\frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{o}{g}_{ii}}} - 1$$

Относительные удлинения главных осей:

$$l_1^{г} = \sqrt{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_1} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} - 1 \approx 0.62$$

$$l_2^{г} = \sqrt{1 + 2\overset{o}{\varepsilon}_2} - 1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} - 1 \approx -0.38$$

Относительные удлинения координатных волокон:

$$l_1^k = \sqrt{1 + 2\frac{\varepsilon_{11}}{\overset{o}{g}_{11}}} - 1 = \sqrt{1 + 2\frac{1}{2}} - 1 \approx 0.41$$

$$l_2^k = \sqrt{1 + 0} - 1 = 0$$

4. **Изменение угла между векторами базиса сопутствующей системы координат и угол поворота главных осей**

$\cos\alpha = \frac{\left(\overset{o}{\rho}_1, \hat{\rho}_1\right)}{\left|\overset{o}{\rho}_1\right| \cdot \left|\hat{\rho}_1\right|}$ - угол поворота главных осей

$$\overrightarrow{\overset{o}{\rho}_1} = 4 \cdot \vec{\imath} + 2\left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\hat{\rho}_1} = 4\vec{\imath} + 2(1 + \sqrt{5}) \cdot \vec{\jmath}$$

$$\cos(\Upsilon) = 0.851 -> \gamma = 31^O$$

$$\cos\alpha = \frac{16 + 2(\sqrt{5}-1)\cdot 2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{16 + 4(5 - 2\sqrt{5} + 1)}\cdot\sqrt{16 + 4(5 + 2\sqrt{5} + 1)}} = \frac{32}{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}\cdot\sqrt{40 + 8\sqrt{5}}} \approx 0.894$$

$$\alpha \approx 26^O$$

$\cos\gamma_{ij} = \frac{\overset{O}{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\overset{O}{g}_{ii} + 2\varepsilon_{ii}}\cdot\sqrt{\overset{O}{g}_{jj} + 2\varepsilon_{jj}}}$ - новое значение угла между i и j волокнами.

$$\cos\gamma_{11} = \frac{\overset{O}{g}_{11} + 2\varepsilon_{11}}{\sqrt{\overset{O}{g}_{11} + 2\varepsilon_{11}}\cdot\sqrt{\overset{O}{g}_{11} + 2\varepsilon_{11}}} = \frac{1 + 2\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + 2\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1 + 2\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 1$$

$$\cos\gamma_{12} = \frac{\overset{O}{g}_{12} + 2\varepsilon_{12}}{\sqrt{\overset{O}{g}_{11} + 2\varepsilon_{11}}\cdot\sqrt{\overset{O}{g}_{22} + 2\varepsilon_{22}}} = \frac{0 + 2\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + 2\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1 + 2\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}} \approx 0.7$$

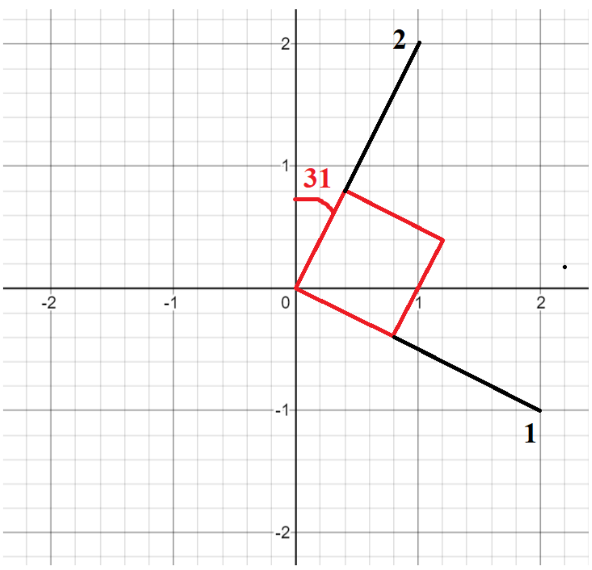
$$\cos\gamma_{21} = \frac{\overset{O}{g}_{21} + 2\varepsilon_{21}}{\sqrt{\overset{O}{g}_{22} + 2\varepsilon_{22}}\cdot\sqrt{\overset{O}{g}_{11} + 2\varepsilon_{11}}} = \frac{0 + 2\frac{1}{2}}{\sqrt{1 + 2\cdot 0}\cdot\sqrt{1 + 2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}} \approx 0.7$$

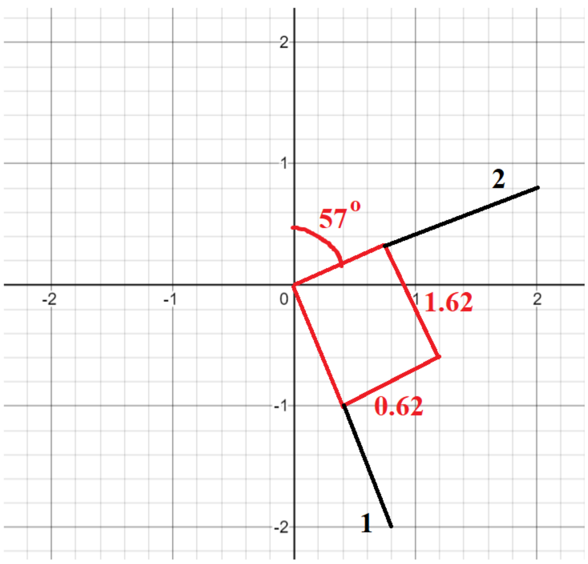
$$\cos\gamma_{22} = \frac{\overset{O}{g}_{22} + 2\varepsilon_{22}}{\sqrt{\overset{O}{g}_{22} + 2\varepsilon_{22}}\cdot\sqrt{\overset{O}{g}_{22} + 2\varepsilon_{22}}} = \frac{1 + 2\cdot 0}{\sqrt{1 + 2\cdot 0}\cdot\sqrt{1 + 2\cdot 0}} = \frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1}} = 1$$

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0^O$$
$$\gamma_{12} = \gamma_{21} \approx 45^O$$

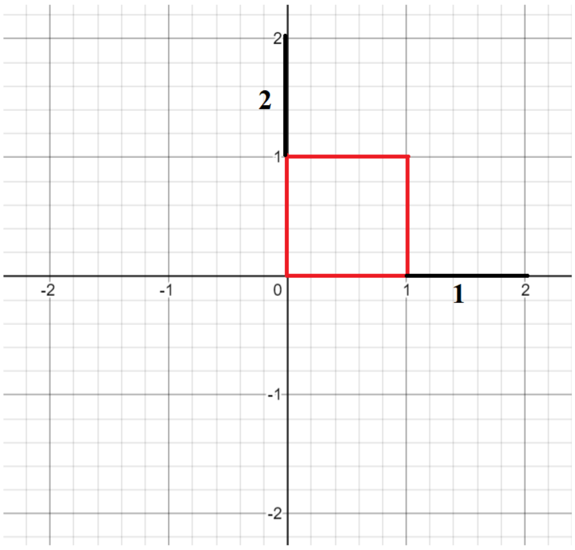
5. Определить изменение единичных квадратных площадок, построенных до деформации на координатных и главных векторах-волокнах, а также построить эти площадки после деформации для указанной точки (ξ_1, ξ_2)

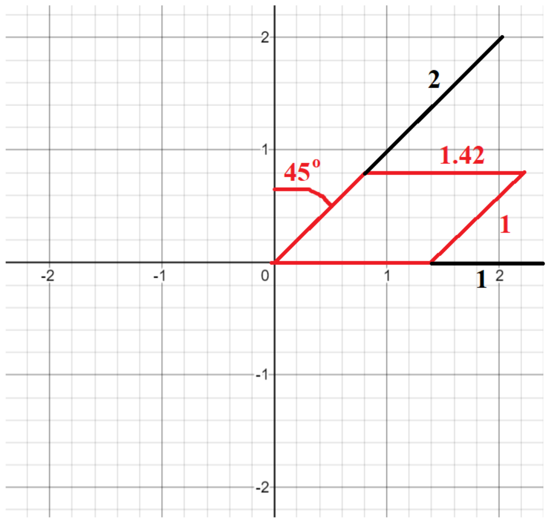
а) главные оси (поворот на 26 градусов, удлиняем ось x в 1.62 раз, а ось y укорачиваем в 0.62 раз





б) координатные линии (поворот на 45 градусов, удлиняем по оси х в 1.41 раз, по оси у удлинения не происходит





Задание 5

Теория напряжений

В некоторой точке сплошной среды задан тензор p^{ij}напряжений (в декартовых координатах). Компоненты имеют размерность н/м^2.

$$p^{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

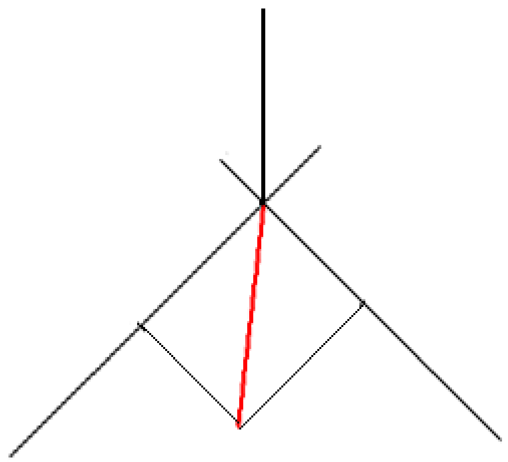
$$\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{k}$$

Найти:

1. **векторы напряжений на координатных площадках (изобразить на рисунке)**

$$\overrightarrow{P_n} = p\vec{n}$$

$\vec{p}_i = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{p}_j = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{p}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ - векторы напряжений на координатных площадках



2. **вектор напряжения на площадке с заданной нормалью, его нормальную и касательную составляющие**

$\vec{P}_n = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ - вектор напряжения

$$\vec{P}_n \cdot \vec{n} = \frac{3}{2} = P_{nn}$$

$\vec{P}_{nn} = \frac{3}{2} \cdot \vec{n} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \vec{\imath} + \frac{3}{4} \cdot \vec{k}$ - нормальная составляющая

$\vec{P}_{n\tau} = \vec{P}_n - \vec{P}_{nn} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \vec{\imath} + \sqrt{3} \cdot \vec{\jmath} - \frac{3}{4} \cdot \vec{k}$ - касательная составляющая

3. главные напряжения и направляющие косинусы главных осей

Найдем главные значения тензора напряжения:

$$\left|\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2-\lambda)^2 + 4\lambda = 0$$

$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 4$ - главные значения (главные напряжения)

Найдем главные векторы:

$$\lambda_1 = 0:$$

$$\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 + y_1 = 0\\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1\\ z_1 = 1\end{cases}$$

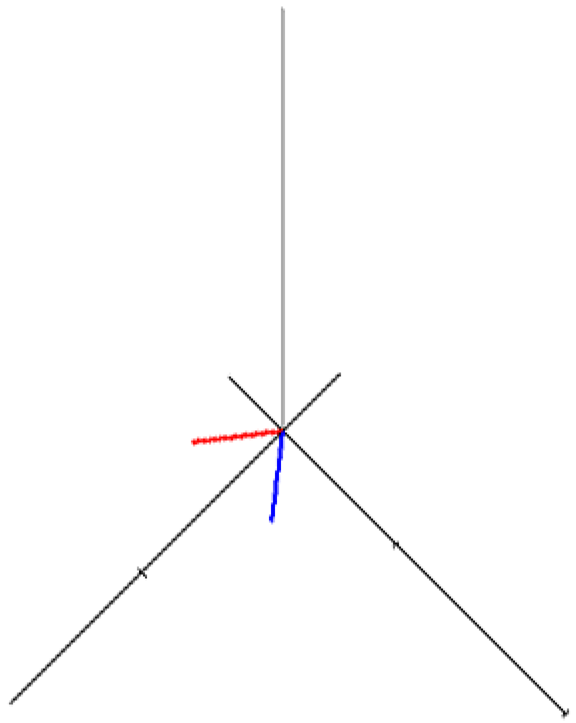
$$\begin{cases}x_2 + y_2 = 0\\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1\\ z_2 = 0\end{cases}$$

$$\vec{l}_1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \vec{l}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{l}_3 = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2 = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j}$$

$\vec{l}_1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \vec{l}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}, \vec{l}_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$ - главные векторы (их компоненты являются направляющими косинусами)

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 4$$



4. **Максимальное касательное напряжение. На какой площадке оно действует? Найти нормальное напряжение на этой площадке.**

Максимальное касательное напряжение достигается на некотором из векторов: $\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{l}_1 \pm \vec{l}_2), \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{l}_2 \pm \vec{l}_3), \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{l}_3 \pm \vec{l}_1)$
и равна максимальному из чисел:

$$\left|\frac{T_1 - T_2}{2}\right|, \left|\frac{T_2 - T_3}{2}\right|, \left|\frac{T_3 - T_1}{2}\right|$$

Максимальное значение = 2

$\overrightarrow{n^*} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{l}_2 + \vec{l}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \vec{\imath} = \vec{\imath}$ - нормаль к площадке
$P_{n\tau max}$ - максимальное касательное напряжение

Нормальное напряжение на этой площадке:

$$\overrightarrow{P_n^*} = p \cdot \overrightarrow{n^*} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_{n^*}} \cdot \overrightarrow{n^*} = 2 = P_{n^*n^*}$$

$$\overrightarrow{P_{n^*n^*}} = 2\vec{\imath}$$

$$\vec{P}_{n^*\tau} = \overrightarrow{P_{n^*}} - \vec{P}_{n^*n^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. проверить результаты пункта 3 с помощью формул преобразования компонент тензора при переходе от исходных осей к главным

$$[T'_{ij}] = A \cdot [T_{ij}] \cdot A^T$$
$$[T_{ij}] = p^{ij}$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$[T'_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

Результаты совпадают.

Задание 6

Гидродинамика идеальной жидкости

Конец A тонкой трубки присоединен к большому резервуару с водой, другой конец B открыт. В начальный момент времени вода начинает поступать в трубку из резервуара. В сечении A поддерживается постоянное давление равное 2p0, где p0 = 105 Pa - атмосферное давление.

Составить дифференциальное уравнение движения границы жидкости в трубке. Рассчитать (используя PC) время заполнения всей трубки, длина которой 0,2 м. Трубка имеет переменное сечение.

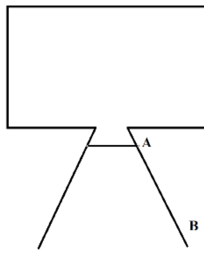
Начальные условия: Принять, что в начальный момент в трубке уже находился столбик воды длиной 1 см, начальная скорость всех частиц - нулевая.

Задание.

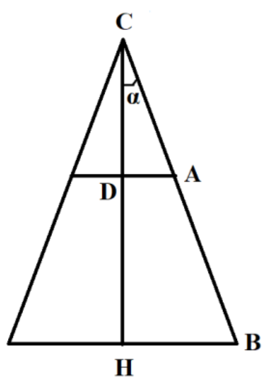
Трубка расположена вертикально, концом B вниз. Трубка представляет собой усеченный конус, площадь сечения которого в точке A равна 0,5 см2, а в точке B - 1 см2.

Решение.

Пусть S(x) – площадь сечения трубки.
По условию S(A) = 0.5 см^2, S(B) = 1 см^2.



Найдём функцию S(x)



$$AD = \sqrt{\frac{S_A}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,(см)$$

$$HB = \sqrt{\frac{S_B}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,(см)$$

ΔCDA ~ ΔCHB => $\frac{CH}{CD} = \frac{HB}{AD} = \sqrt{2}$,

$$\frac{CD + DH}{CD} = \sqrt{2}, \qquad \frac{CD + 20}{CD} = \sqrt{2},$$

$$CD = 20\sqrt{2} + 20$$

$$S(x) = \pi((CD + x)tg(\alpha))^2 = \left(\frac{20\sqrt{2} + 20 + x}{20\sqrt{2} + 40}\right)^2$$

Будем считать течение жидкости одномерным. В случае несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид $div\bar{v} = 0$.
По теореме Остроградского–Гаусса ($\oint_S v_n dS = 0$) получим, что поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

$$v(x_1, t)S(x_1) \overset{t}{\equiv} v(x_2, t)S(x_2) = Q(t)$$

$$x_1, x_2 \in [0, x_\Gamma(t)]$$

$$Q(t) \overset{x}{\equiv} v(x, t)S(x) - \text{объёмный расход}$$

$x_\Gamma(t)$ – расстояние до границы жидкости по оси трубки в момент времени t.
Таким образом, в нашем случае уравнение неразрывности перейдет в уравнение

$$v(x, t) = \frac{Q(t)}{S(x)}$$

Для такой жидкости уравнение движения имеет вид (уравнение Эйлера):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p,$$

где F – плотность массовых сил.

Т.к на жидкость действует только сила тяжести $F = \vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} * \nabla)\vec{v}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

Подставим ускорение в уравнение Эйлера:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho\left(\frac{\dot{Q}(t)}{S(x)} - \frac{Q^2(t)}{S^3(x)}\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right) = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x}$$

Проинтегрируем уравнение по всему столбику воды

$$\int_0^{x_\Gamma} \rho\left(\frac{\dot{Q}(t)}{S(x)} - \frac{Q^2(t)}{S^3(x)}\frac{\partial S(x)}{\partial x}\right)dx = \rho g x_\Gamma - (p(x_\Gamma) - p(0))$$

$$Q(t) = v(x_\Gamma, t)S(x_\Gamma) = \dot{x_\Gamma}S(x_\Gamma)$$

$$\dot{Q}(t) = \ddot{x_\Gamma}(t)S(x_\Gamma) + \dot{x_\Gamma}^2 S'(x_\Gamma)$$

Обозначим

$$I_1(x_\Gamma) = \int_0^{x_\Gamma} \frac{\rho dx}{S(x)} = \rho\left(20\sqrt{2} + 40\right)^2 \left(\frac{-1}{20\sqrt{2} + 20 + x_\Gamma} + \frac{1}{20\sqrt{2} + 20}\right)$$

$$I_2(x_\Gamma) = \int_0^{x_\Gamma} \frac{\rho}{S^3(x)}\frac{\partial S(x)}{\partial x}dx = \frac{\rho}{2}\left(-\left(\frac{20\sqrt{2} + 40}{20\sqrt{2} + 20 + x_\Gamma}\right)^4 + 4\right)$$

Уравнение движения принимает вид:

$$\dot{Q}(t) \cdot I_1(x_\Gamma) - Q^2(t) \cdot I_2(x_\Gamma) = \rho g x_\Gamma + p_0$$

$$(\ddot{x_\Gamma}(t)S(x_\Gamma) + \dot{x_\Gamma}^2 S'(x_\Gamma)) \cdot I_1(x_\Gamma) - \dot{x_\Gamma}^2 S(x_\Gamma)^2 \cdot I_2(x_\Gamma) = \rho g x_\Gamma + p_0,$$

$$\ddot{x_\Gamma} = \frac{\dfrac{\rho g x_\Gamma + p_0 + \dot{x_\Gamma}^2 S(x_\Gamma)^2 \cdot I_2(x_\Gamma) - \dot{x_\Gamma}^2 S'(x_\Gamma)}{I_1(x_\Gamma)} - \dot{x_\Gamma}^2 S'(x_\Gamma))}{S(x_\Gamma)}$$

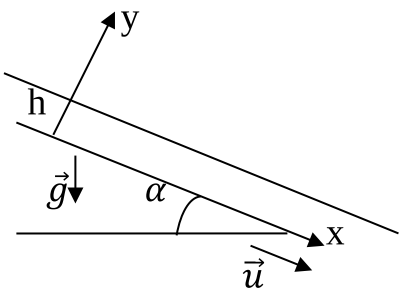
Задание 7

Динамика вязкой жидкости

Найти распределение скоростей и давлений при медленном, стационарном (по отношению к стенке) течении слоя толщины h = 3см вязкой (коэффициент кинематической вязкости $\nu = 200 м^2/с$) однородной несжимаемой жидкости (плотность $\rho = 10^3$кг/м^3), ограниченного с одной стороны плоской стенкой, а с другой стороны – плоской свободной поверхностью (внешнее давление $p_0 = 10^5 Pa$).
Найти величину силы вязкого трения, действующей на единицу площади стенки.

Стенка наклонна под углом $\alpha = 30^O$ к горизонтали и движется, опускаясь сама по себе с постоянной скоростью $u = 0{,}01 м/с$.

Решение



В случае несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид:
$div\vec{v} = 0$.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Уравнения Навье-Стокса имеют вид:
$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{b} - \nabla p + \eta \Delta \vec{v}$, где $\eta = \nu\rho$ - динамическая вязкость.

$$b_x = g \sin\alpha\,, b_y = -g\cos\alpha$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} div\vec{v} = 0 \\ \rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{b} - \nabla p + \eta\Delta\vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \rho b_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \rho b_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \\ \rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = \rho b_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

Предположим

$$v_x = v_x(y), v_y = 0, v_z = 0$$

Тогда

$$\begin{cases} \rho b_x + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0(1) \\ \rho b_y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0(2) \end{cases}$$

Из (1)

$$v_x(y) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\eta}y^2 + C_1 y + C_2$$

$$v_x|_{y=0} = u = C_2$$

Условие на свободной поверхности: касательные напряжения равны нулю.

$$\tau_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=H} = \eta\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}}\right)\Bigg|_{y=H} = \eta\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\Bigg|_{y=H} = \eta\left(-\frac{\rho g}{2\eta}y + C_1\right)\Bigg|_{y=H} = \eta\left(-\frac{\rho g}{2\eta}H + C_1\right) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g H}{2\eta}$$

$v_x(y) = -\frac{\rho g}{4\eta}y^2 + \frac{\rho g H}{2\eta}y + u$

$v_y = 0$

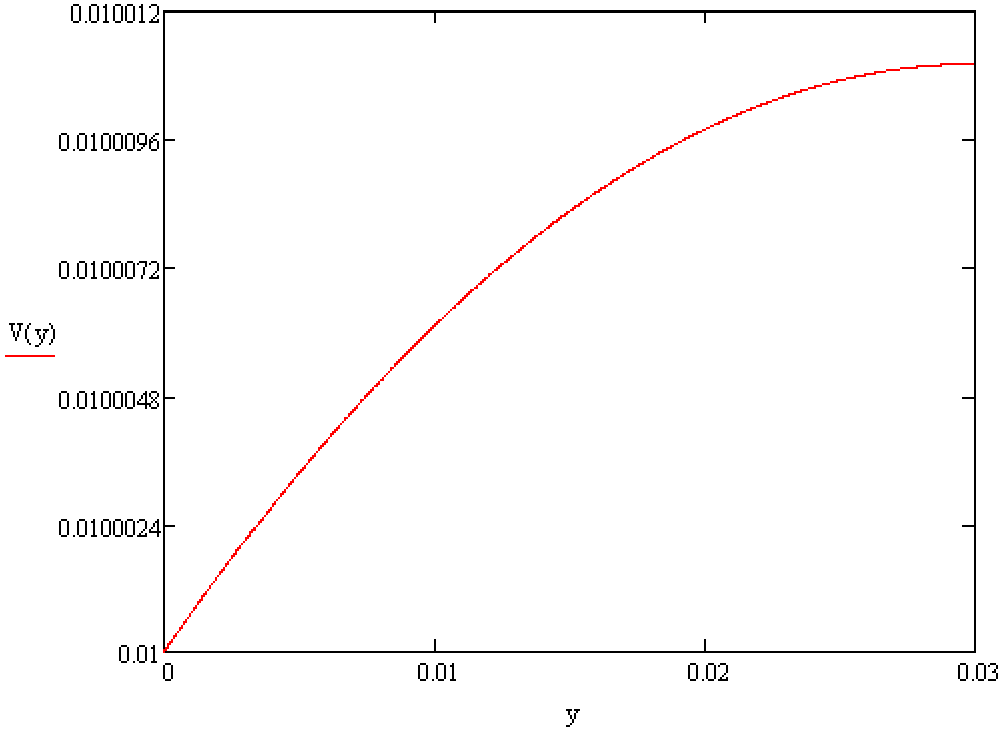
$v_z = 0$ - распределение скоростей.

Построим график распределения скоростей:

$\nu := 200 \quad \rho := 10^{5} \quad H := 0.03 \quad g := 9.8 \quad u := 0.01 \quad p0 := 10^{5}$

$\eta := \rho \cdot \nu$

$V(y) := \left(\frac{-\rho \cdot g}{4\eta}\right) \cdot y^{2} + \left(\frac{\rho \cdot g \cdot H}{2\eta}\right) \cdot y + u$



И

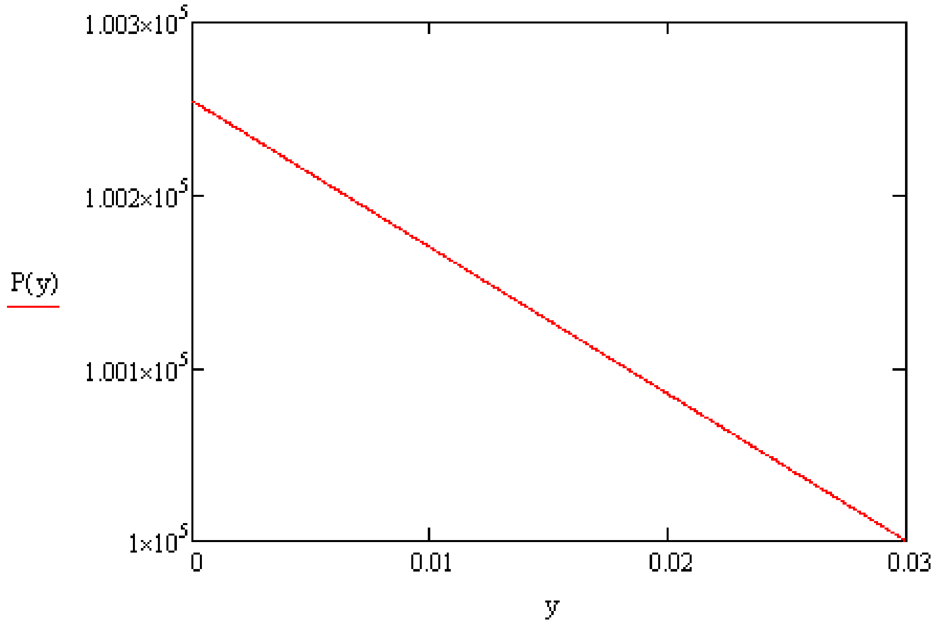
р($V(0) = 0.01 \qquad V(0.03) = 0.01$

Построим график распределения давлений:

$\nu := 200 \quad \rho := 10^3 \quad H := 0.03 \quad g := 9.8 \quad u := 0.01 \quad p0 := 10^5$

$\eta := \rho \cdot \nu$

$P(y) := \left(\frac{-\sqrt{3} \cdot \rho \cdot g}{2}\right) \cdot y + p0 + \frac{\sqrt{3} \cdot \rho \cdot g \cdot H}{2}$



$P(0) = 1.003 \times 10^5$

$P(H) = 1 \times 10^5$

Сила вязкого трения на единичной площади равна величине касательного напряжения на этой площадке.

$\tau_{xy}\big|_{y=0} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big|_{y=0} = \eta \left(-\frac{\rho g}{2\eta} y + \frac{\rho g H}{2\eta}\right)\Big|_{y=0} = \frac{\rho g H}{2} = 147 \, \frac{Н}{м^2}$ - сила вязкого трения, действующая на единицу площади стенки.