1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке

<u>Определение 1:</u> Множество I = { x € Rn | ai < =xi < =bi, i = 1..n} называется промежутком или координатным параллелепипедом в Rn.
<u>Определение 2:</u> Промежутку I = { x € Rn | ai < xi < bi, i = 1..n} ставится в

$$|I| := \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i)$$

соответствие число
называемое объемом или мерой промежутка.

Если некоторый промежуток является объединением несколько промежутков, и эти промежутки попарно не имеют общих внутренних точек, то мера исходного промежутка равна сумме мер объединяемых промежутков.

Определение 3: Диаметром множества E ⊂ Rn называется d(E) = sup p(x,y) (x ∈ E, y ∈ E)
$x = (x^1..x^n)\ \ y = (y^1..y^n)$
$p(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \quad (y^i - x^i)}$^2
Определение 4: Множество всех $\{I_j\}$ называется разбиением промежутка I
P - определение для разбиения n-мерного промежутка.

Определение 5: Параметром разбиения P называется $\lambda(P) = max\ d(Ij)\ (j = 1..k)$
Пусть $f : I \to R\ (f(x) = f(x^1..x^n)$

Определение 6: Разбиение с отмеченными точками (P, ξ) называется разбиением, в каждом промежутке которого отмечена точка ξ_j

Определение 7: Интегральной суммой функции f на разбиении с отмеченными точками (P, ξ) называется число

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{j=1}^{k} \quad f(\xi_j)|Ij|$$

$$\rho_\varepsilon = \{ P, \lambda(P) < \varepsilon \} \varepsilon > 0$$

$\{\rho_\varepsilon\}$ - база. $\varepsilon_1 < \varepsilon_2\ \rho_{\varepsilon 1} \cap \rho_{\varepsilon 2} \in \ \rho_{\varepsilon 1} \neq 0$

$$\lambda(p) \to 0$$

Определение 8: Интегралом функции f на промежутке I называется число
$\int_I \quad f(x)dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi)$
Необходимое условие интегрируемости (существование конечного предела)

2. Множество Лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Определение 1: Множеством меры 0 называется подмножество Rn, что для $\forall\varepsilon > 0$найдется система n-мерных промежутков, сумма мер которых <εи объединение которых содержит это множество.

Количество промежутков в системе либо конечно, либо счетно.
Примеры: точка, конечное число точек, счетное число точек.

<u>Свойства множеств меры 0</u>

Объединение конечного или счетного числа множеств меры 0 есть множество меры 0.
Подмножество меры 0 имеет меру 0

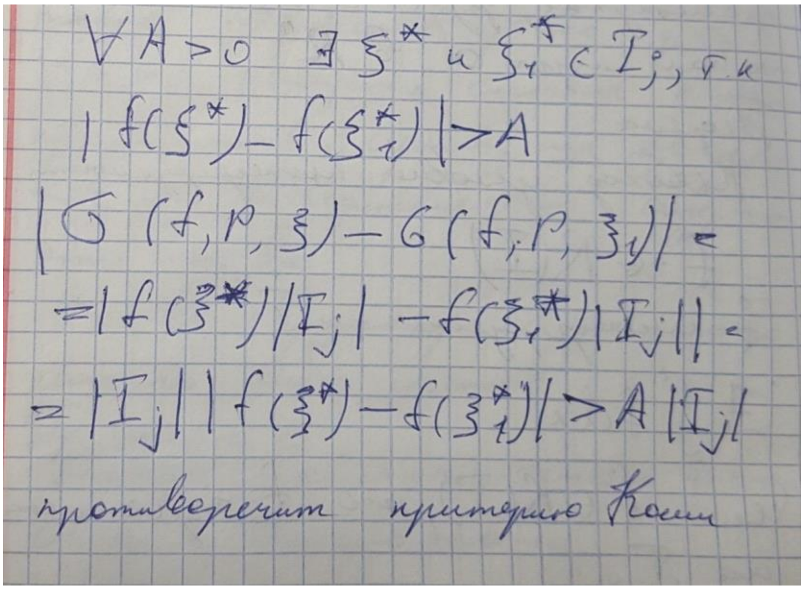
Теорема (необходимое условие интегрируемости)

$$f \in R(I)$$

f - интегрируема на I

$$\exists \int_I f dx$$

Если $f \in R(I)$, то f - ограничена на I
Доказательство:
P - разбиение I
Если f не огр на I, то $\exists Ij \in P$
Пусть ξ_1, ξ_2- 2 набора отмеченных точек на промежутках разбиения P. Эти наборы совпадают для всех промежутков из P, кроме промежутка I_j



<u>Критерий Лебега интегрируемости функции.</u>

Функция ($f \in R(I)$) (интегрируема по риману) ⇔((f - ограничена на I) ∧ (f непрерывна почти во всех точках I))

<u>Комментарий:</u>
Говорят, что некоторое свойство выполняется почти во всех точках множества, если это свойство нарушается только в точках образующих множество меры 0.

<u>Доказательство:</u>

Док-во:

⇒ $f \in R(I)$, то f - ограничена на I

Пусть мн-во E точек разрыва ф-ции f не явл. мн-вом меры 0. ($E \subset I$)

$\forall x \in E: \omega(f,x) > 0$, $E = \bigcup_{n\in N} E_n$, $E_n = \{x, x \in I, \omega(f,x) > \frac{1}{n}\}$

$\exists n_0 \in N$, E_{n_0} не явл. множеством меры 0

$\exists \varepsilon_0 > 0$, что сумма мер любого промежутка покрытия мн-ва E_{n_0} промежутками будет больше ε_0

Пусть P - разбиение I

$P = P_1 \cup P_2$: P_2 - мн-во промежутков из P, у каждого из которых хотя бы одна из внутренних точек принадлежит E_{n_0}

P_1 - мн-во остальных промежутков из P

Зададим два набора (ξ, ξ_1) отмеченных точек

1) Эти наборы совпадают на P_1

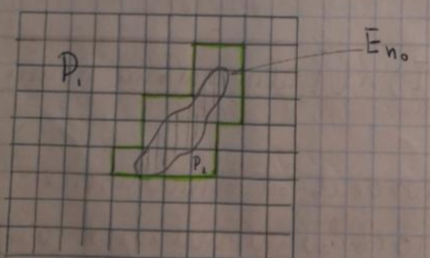
2) Для каждого из промежутков из P_2 элемент ξ^i из ξ и ξ_1^i из ξ_1 выбираются так, что $|f(\xi^i)| - |f(\xi_1^i)| > \frac{1}{2n_0}$

Рассмотрим разность 2-х интегральных сумм

$$\underbrace{|\sigma(f,P,\xi) - \sigma(f,P,\xi_1)|}\ > \frac{1}{2n_0} \cdot \sum |I_k|, \quad I_k \in P_2;\ P_2 \text{ - покрытие } E_{n_0}$$

$$> \frac{\varepsilon_0}{2n_0} > 0$$

<u>Противоречие с критерием Коши</u>



3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции

<u>Определение 1:</u> Нижним и верхним интегралом (Дарбу) от функции $f : I \to R$ на промежутке I называются соответственно величины

$$\underline{\mathcal{J}} = \sup_P s(f, P), \qquad \overline{\mathcal{J}} = \inf_P S(f, P),$$

TV

где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным разбиениям P промежутка I.

<u>Теорема(Дарбу):</u> Для любой ограниченной функции $f : I \to R$ имеют место утверждения:

$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P)\right) \bigwedge \left(\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P) = \underline{\mathcal{J}}\right);$$
$$\left(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P)\right) \bigwedge \left(\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P) = \overline{\mathcal{J}}\right).$$

<u>Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции:</u>

Определенная на промежутке $I \subset Rn$вещественнозначная функция $f : I \to R$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда она ограничена на Iи ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают.

$$f \in \mathcal{R}(I) \iff (f \text{ ограничена на } I) \wedge (\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}).$$

$(*) \le 2\varepsilon(|I| + 2M \cdot 3^n)$

Т.е. справедлив критерий Коши $\exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi) = \int\limits_I f\,dx$ ◀

Интегралы Дарбу

$f: \bar{I} \to \mathbb{R}$ f - ограничена на I

P - разбиение промежутка I

$P = \{I_j\}_{j=1\ldots k}$

$m_j = \inf\limits_{I_j} f(x)$, $M_j = \sup\limits_{I_j} f(x)$, где $x \in I_j$

Нижней интегральной суммой Дарбу называется

$$\bar{\bar{s}}(f, P) = \sum_{j=1}^{k} m_j |I_j|$$

Верхней интегральной суммой Дарбу называется

$$\underline{\underline{S}}(f, P) = \sum_{j=1}^{k} M_j |I_j|$$

Свойства:

1. $\bar{\bar{s}}(f, P) \le \underline{\underline{S}}(f, P)$
2. Пусть P_1 - измельчение P

$$\bar{\bar{s}}(f, P) \le \bar{\bar{s}}(f, P_1)$$

$$\underline{\underline{S}}(f, P) \ge \underline{\underline{S}}(f, P_1)$$

3. Для $\forall P_1, P_2$: $\bar{\bar{s}}(f, P_1) \le \underline{\underline{S}}(f, P_2)$

Док-во:

Пусть P - измельчение P_1 и P_2

$$\bar{\bar{s}}(f, P_1) \le \bar{\bar{s}}(f, P) \le \underline{\underline{S}}(f, P) \le \underline{\underline{S}}(f, P_2)$$

$$\bar{\bar{s}}(f, P_1) \le \underline{\underline{S}}(f, P_2)$$ ◀

Опр

Нижним интегралом Дарбу назыв. точная верхняя грань всевозможных разбиений нижних сумм Дарбу

$$\underline{I} = \sup_P \bar{\bar{s}}(f, P)$$

$\underline{\mathcal{J}}$ всегда сущ для огр. ф-ции, т.к мн-во нижних сумм Дарбу ограничено сверху ($\forall$ верхней суммой)

Опр

Верхним интегралом Дарбу назыв. точная нижняя грань по всем суммам Дарбу $\overline{\mathcal{J}} = \inf\limits_{P} \overset{=}{S}(f,P)$

$\overline{\mathcal{J}}$ всегда сущ. для огр. ф-ции, т.к. мн-во верхних сумм Дарбу ограничено снизу ($\forall$ нижней суммой)

Утв.

$\exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \overset{=}{s}(f,P) = \underline{\mathcal{J}}$

Док-во

$\underline{\mathcal{J}} = \sup\limits_{P} \overset{=}{s}(f,P)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon, \ \overset{=}{s}(f,P_\varepsilon) \leq \underline{\mathcal{J}} \ ; \ \overset{=}{s}(f,P_\varepsilon) \geq \underline{\mathcal{J}} - \varepsilon$

Пусть Δ - мн-во точек границ промежутков, входящих в разбиени P_ε

P  I

Δ - только решетка

Δ - мн-во меры 0

$\exists \lambda_\varepsilon \ \forall P, \ \lambda(P) < \lambda_\varepsilon$: сумма мер промежутков из P, имеющих общие точки с Δ, меньше ε

Пусть P' - измельчение P и P_ε

Сравним $\overset{=}{s}(f,P')$ и $\overset{=}{S}(f,P)$

$$\overset{=}{S}(f,P') - \overset{=}{S}(f,P) \leq 2M\varepsilon$$

В этой разности все слагаемые, связанные с промеж., не затрагивающими Δ сократятся.

$\exists M \ \forall x \in I \ |f(x)| < M$

$$-\overset{=}{S}(f,P) + \underline{\mathcal{J}} = \underbrace{\underline{\mathcal{J}} - \overset{=}{S}(f,P_\varepsilon)}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\overset{=}{S}(f,P_\varepsilon) - \overset{=}{S}(f,P')}_{\leq 0} + \underbrace{S(f,P') - \overset{=}{S}(f,P)}_{\leq 2M\varepsilon} \leq \varepsilon + 2M\varepsilon$$

Для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \lambda_\varepsilon \ \forall P, \ \lambda(P) < \lambda_\varepsilon : \underline{\mathcal{J}} - \overset{=}{s}(f,P) \leq \varepsilon(1+2M) \Rightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \overset{=}{s}(f,P) = \underline{\mathcal{J}}$

Для верхнего интеграла Дарбу аналогично

$$P: \ \overset{=}{s}(f,P) \leq \sigma(f,P,\xi) \leq \underline{S}(f,P)$$

$\lambda(P)\to 0$: $\overset{=}{s}(f,P) \to \underline{\mathcal{J}}$, $\underline{S}(f,P) \to \overline{\mathcal{J}}$

Если $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$, то $f \in R(I)$, $\int\limits_I f\,dx = \underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$

Пусть $f \in R(I) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - ограничена на I (необх. усл. инт) $\Rightarrow \exists \underline{\mathcal{J}}, \overline{\mathcal{J}}$

$$\int\limits_I f\,dx = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$$

$$\underline{\mathcal{J}} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \overset{=}{s}(f,P)$$

$$\int\limits_I f\,dx - \underline{\mathcal{J}} = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} (\sigma(f,P,\xi) - \overset{=}{s}(f,P)) = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \Big(\sum_{i=1}^{k} (f(\xi_i) - \inf\limits_{I_i}(f))|I_i|\Big)$$

Проводя рассуждения, аналогичные док-ву критерия Лебега, получим, что последнее выражение может быть как угодно малым $\Rightarrow$ соотв предел $= 0 \Rightarrow \int\limits_I f\,dx = \underline{\mathcal{J}}$. Аналогично верхнему

Критерий Дарбу интегрируемости по Риману

$$(f \in R(I)) \Longleftrightarrow ((f\text{ - ограничена на } I) \wedge (\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}))$$

Опр

Допустимым назыв мн-во, которое ограничено, и граница которого имеет меру 0 по Лебегу

промежуток, шар interval - не допуст.мн-во?

4. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества и ее геометрический смысл. Критерий Лебега существования интеграла по измеримому множеству

<u>Определение 1:</u> Допустимым называется множество, которое ограничено и границы которого имеют меру 0 по Лебегу.
Примеры: куб, тетраэдр, шар в р3

<u>Определение 2:</u> Если $\exists \int_I \quad f x_E dx$, то $\int_E \quad f dx = \int_I \quad f x_{E_x} dx$

Свойства допустимых множеств:

b) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;
c) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

d) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Объединение и пересечение конечного числа допустимых множеств есть допустимое множество.
Разность допустимых множеств - допустимое множество.

<u>Утверждение:</u>
Пусть $f : I \to R$; $I \supset E$

$$\int_I \quad f x_E dx = \mathcal{T}$$

Тогда $\forall I^*$; $E \subset I^*$ $\exists \int_{I^*} \quad f x_E dx = \mathcal{T}$

<u>Критерий Лебега интегрируемости по Риману на допустимом множестве.</u>
Функция $f : E \to R$ интегрируема на допустимом множестве тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна почти во всех точках множества E.

◀ Функция $f\chi_E$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительно точки разрыва лишь на границе ∂E множества E, которая по условию является множеством меры нуль. ▶

<u>Док-во:</u>

Критерий Лебега интегрируемости по Риману на допуст. мн-ве

Тм. $(f \in R(E)) \Leftrightarrow ((f$ - ограничена на $E) \wedge (f$ - непрерывна почти всюду на $E))$

Док-во

($\Rightarrow$)

$f \in R(E) \Rightarrow \int\limits_{I \supset E} f\chi_E \, dx \Rightarrow f\chi_E$ - ограничена на $I \Rightarrow f$ огран. на E

$f\chi_E$ - непрерывна почти всюду на $I \Rightarrow$

$\Rightarrow$ непрерывна почти всюду на E

($\Leftarrow$)

f ограничена на $E \Rightarrow f\chi_E$ ограничена на I (тем же самым числом)

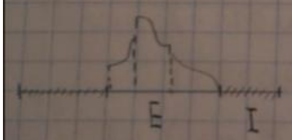
f непрерывна почти всюду на E

Пусть B - мн-во т. разрыва f на E

Если B_1 - мн-во т. разрыва $f\chi_E$ на I, то $B_1 \subset B \cup \partial E \Rightarrow$

$\Rightarrow B_1$ - мн. меры 0, т.е. $f\chi_E$ интегрируема на $I \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - интегрируема на E



Определение: Мерой (Жордана) или объемом ограниченного множества $E \subset Rn$- число

$$\mu(E) = \int_E 1dx$$

Геометрический смысл:

$\mu(E)$ есть общий предел при $\lambda(P) \to 0$объемов вписанных в Е и описанных около Е многогранников, что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел $E \subset Rn$

5.Общие свойства интеграла

1) f, g $\in R(D) \forall \lambda, \mu \in R$

$\exists \int_D \quad (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int_D \quad fdx + \mu \int_D \quad gdx$

Интеграл называется функционалом на множестве классов эквивалентности на множестве функции.

В одном классе две функции отличаются не больше, чем на множество меры 0.

$$f >= 0 \, \forall x \in D \, \exists \int_D \quad fdx = 0 \Rightarrow f = 0 - \text{постоянно всюду на } D$$

2) Аддитивность

$$f \in R(D1), f \in R(D2) \; D1 \cap D2 - \text{имеет меру ноль.}$$

$(D1 \cap D2 \subset \partial D1 \cup \partial D2(\text{Объединение границ})) \Rightarrow \int_{D1 \cap D2} \quad fdx = \int_{D1} \quad fdx + \int_{D2} \quad fdx$

3) f,g - интегрируемы на множестве, для любого x из этого множества если f(x)>=g(x), то с интегралами то же самое.

4) f - интегрируема на множестве Д, модуль интеграла <= модуль интеграла от модуля f

5) $f \in R(D), m = inf(D) \, f, M = sup(D) f$

$m\mu(D) <= \int_D \quad fdx <= M\mu(D)$ - Жорданова мера

6) $f \in C(D \cup \partial D), D - \text{связное множество}$

$$\exists x_0 \in D \cup \partial D, \int_D \quad fdx = f(x_0)\mu(D)$$

7) f,g $\in R(D), \forall x \in D \; g(x) >= 0$

m <= f(x) <= M =>

$m\int_D \quad gdx <= \int_D \quad fgdx <= M \int_D \quad gdx$

6.Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини

<u>Теорема Фубини (в лекции нихуя непонятно):</u>

$$X \subset Rn, Y \subset Rm$$

$f: X \times Y \to R \qquad \Rightarrow \int_{X \times Y} \quad fdxdy = \int_X \quad dx \int_Y \quad f(x,y)dy = \int_Y \quad dy \int_X \quad f(x,y)dx$

$$f \in R(X \times Y)$$

$\int_Y \quad f(x,y)dy = F(x) =$

$\int_X \quad f(x,y)dx$, *если при данном x в этом интеграле* $\exists$ *любое число между* $\underline{J}$ *и* $\overline{J}$

Эта же хуйня из Зорича:

Теорема[1]**.** *Пусть* $X \times Y$ *— промежуток в* $\mathbb{R}^{m+n}$*, являющийся прямым произведением промежутков* $X \subset \mathbb{R}^m$ *и* $Y \subset \mathbb{R}^n$*. Если функция* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *интегрируема на* $X \times Y$*, то интегралы*

$$\boxed{\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy, \quad \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy, \quad \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\,dx}$$

существуют одновременно и равны между собой.

Формулировка, док-во и следствия:

Теорема Фубини

Пусть X - промежуток $X \subset \mathbb{R}^n$

Y - промежуток $Y \subset \mathbb{R}^m$

$f: X \times Y \to \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}(X \times Y)$

$\Rightarrow \int\limits_{X \times Y} f\, dx dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\, dy = \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\, dx$

$$\int\limits_Y f(x,y)\,dy = F(x) = \begin{cases} \int\limits_Y f(x,y)\,dy, & \text{если при данном } x \text{ интеграл } \exists \\ \forall \text{ число между } \underline{J} \text{ и } \overline{J}, & \text{если } \nexists \int\limits_Y f(x,y)\,dy \end{cases}$$

Док-во

P_X - разбиение X, $P_X = \{X_i\}\ i=1\dots q$
P_Y - разбиение Y, $P_Y = \{Y_j\}\ j=1\dots r$
$\Rightarrow P = \{X_i \times Y_j\}$ - разбиение $X \times Y$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i,j} \inf_{x\in X_i,\ y\in Y_j} f(x,y) \cdot \mu(X_i \times Y_j);\quad \mu(X_i)\mu(Y_j) \leq \sum_i \mu(X_i) \inf_{X_i}$$

$$\Big(\underbrace{\sum_j \inf_{Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)}_{\leq \underline{S}(f(x,y))}\Big) \leq \sum_i \mu(X_i) \inf_{X_i} F(x) \leq \sum_i \mu(X_i) \sup_{X_i} F(x) \leq$$

$$\leq \sum_i \mu(X_i) \sup_{X_i}\Big(\sum_j \sup_{Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)\Big) \leq \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)\mu(X_i)\mu(Y_j) =$$

$$= \overline{S}(f,P)$$

Т.к. $f(x,y)$ - интегрируема, то при $\lambda(P)\to 0$ $\quad \underline{S}(f,P) \to \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy$, $\quad \overline{S}(f,P) \to \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\underline{\int} F(x)\,dx \to,\quad \overline{\int} F(x)\,dx \to\ = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Следствие

$\int\limits_Y f(x,y)\,dy$ существует почти при всех $x \in X$

Следствие

Пусть $f(x): I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}^n$
$f(x) \in R(I)$
$x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$
$I = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \dots \times [a^n, b^n]$

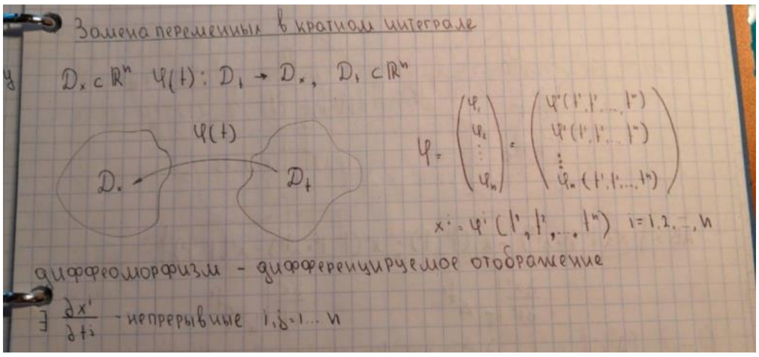
Тогда $\int\limits_I f\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx^1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx^2 \dots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx^n$

Следствие

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$
$\varphi_1(x), \varphi_2(x): D \to \mathbb{R}$ (непрерывны)
$\forall x \in D:\ \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$
$M \subset \mathbb{R}^{n+1}:\ M = \{(x,y),\ x \in D,\ y \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$
Пусть $f(x,y): M \to \mathbb{R}$
$f(x,y) \in R(M)$

Тогда $\int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

7. Замена переменных


Замена переменных в кратном интеграле

$D_x \subset \mathbb{R}^n$ $\varphi(t): D_t \to D_x$, $D_t \subset \mathbb{R}^n$

$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi^1(t^1,t^2,\dots,t^n)\\ \varphi^2(t^1,t^2,\dots,t^n)\\ \vdots \\ \varphi_n(t^1,t^2,\dots,t^n)\end{pmatrix}$

$x^i = \varphi^i(t^1,t^2,\dots,t^n)$ $i=1,2,\dots,n$

диффеоморфизм - дифференцируемое отображение

$\exists \frac{\partial x^i}{\partial t^j}$ - непрерывные $i,j=1\dots n$

Определение: Носителем функции называется замыкание множества точек области определения, в которых функция не равна нулю.

Теорема: Пусть D_x - открытое множество в R^n. Пусть f интегрируема на D_x, причем носитель функции - компакт. Пусть $\varphi(t)$ - диффеоморфизм φ:D_t -> D_x, тогда $f(\varphi(t))*|J|$ интегрируема на D_t.

$$\int_{D_x} f dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))|J|dt$$

J - Якобиан.

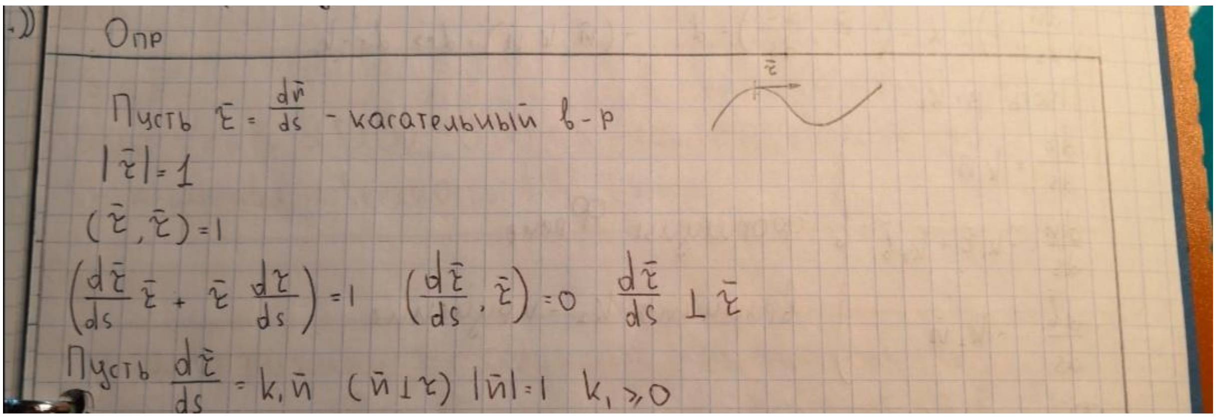
8.Параметрически заданная кривая. Касательная к кривой

Определение: Кривой в R3 называется отображение $f(t)$: $[a,b] -> R3$

$$f = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$$

Определение: Кривая называется непрерывной, если x(t), y(t), z(t) - непрерывна на [a,b]

Определение: Кривая называется гладкой с порядком гладкости n, если $\exists x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t)$ - непрерывна


Опр

Пусть $\bar\tau = \frac{d\bar r}{ds}$ - касательный в-р

$|\bar\tau| = 1$

$(\bar\tau,\bar\tau)=1$

$\left(\frac{d\bar\tau}{ds}\bar\tau + \bar\tau\frac{d\bar\tau}{ds}\right)=1$ $\left(\frac{d\bar\tau}{ds},\bar\tau\right)=0$ $\frac{d\bar\tau}{ds}\perp\bar\tau$

Пусть $\frac{d\bar\tau}{ds} = k_1\bar n$ $(\bar n\perp\tau)$ $|\bar n|=1$ $k_1\geqslant 0$

9.Длина дуги кривой. Натуральная параметризация.

<u>Определение:</u> Если существует sup{σ} = l, то l называется длиной кривой.
<u>Утверждение:</u> Если кривая имеет длину, то существует конечный $\lim_{\lambda(p)\to 0} \sigma = l$.

Вычисление длины:
x(t), y(t), z(t) - C^1[a, b]

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} |A_{i-1} - A_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(x\xi_i - x\xi_{i-1})^2 + (y\xi_i - y\xi_{i-1})^2 + (z\xi_i - z\xi_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\dot{x}^2\hat{\eta}_i + \dot{y}^2\eta_i + \dot{z}^2\tilde{\eta}_i}(\xi_i - \xi_{i-1})$$

$$\lim_{\lambda(p)\to 0} \sigma = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$\text{Гладкая кривая - } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

---

t ∈ [0, T]
s = s(t). s = s(t) <-> t = t(s). Подставим t(s) в x, y, z вместо t и получим кривую в виде

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

- натуральная параметризация.

s ∈ [0, L] - натуральный параметр.

10. Естественный трехгранник кривой. Формулы Френе.

$$\overrightarrow{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

Определение: Пусть $\underline{J} = \frac{dr}{dS}$ - касательный вектор. $|\underline{J}| = 1$.

Определение: $\underline{n}$ - главная нормаль к кривой в рассматриваемой точке.

Определение: k_1 - кривизна в рассматриваемой точке.

Определение: k_2 - кручение кривой в рассматриваемой точке.

Определение: $\underline{b} = [\underline{t}, \underline{n}]$ - вектор бинормали.

$\underline{r}, \underline{n}, \underline{b}$ - трехгранник Френе.

$$\frac{d\overrightarrow{J}}{dS} = k_1\overrightarrow{n}; \quad \frac{d\overrightarrow{n}}{dS} \perp \overrightarrow{n}; \quad \frac{d\overrightarrow{n}}{dS}\alpha\overrightarrow{J} + \beta\overrightarrow{b}; \quad \frac{d\overrightarrow{b}}{dS} = \omega\overrightarrow{J} + \delta\overrightarrow{n};$$

$$\text{Формулы Френе - } \begin{cases} \frac{d\overrightarrow{J}}{dS} = k_1\overrightarrow{n} \\ \frac{d\overrightarrow{n}}{dS} = -k_1\overrightarrow{J} + k_2\overrightarrow{b} \\ \frac{d\overrightarrow{b}}{dS} = -k_2\overrightarrow{n} \end{cases}$$

11. Кривизна и кручение кривой

Пусть $\beta = k_2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= k_1\bar{n} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} &= -k_1\bar{\tau} + k_2\bar{b} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} &= -k_2\bar{n} \end{aligned}\right\}$$

формулы Френе

величина k_2 - кручение

Ф-ции $k_1(s)$ $k_2(s)$ определяют кривую с точностью до движение пр-ва

$R = \frac{1}{k_1}$ - радиус кривизны

$$\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k_1\bar{n}$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -k_1\bar{\tau} + k_2\bar{b}$$

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{|\dot{\bar{r}}|} = \bar{\tau}\frac{ds}{dt}$$

$$\ddot{\bar{r}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \bar{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3\left[\tau, \frac{d\tau}{ds}\right] + \frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\cancel{[\bar{\tau}, \bar{\tau}]}^{0}$$

$$[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}] = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3[\tau, k_1\bar{n}]$$

$$[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}] = k_1|\dot{\bar{r}}|^3[\bar{\tau}, \bar{n}]$$

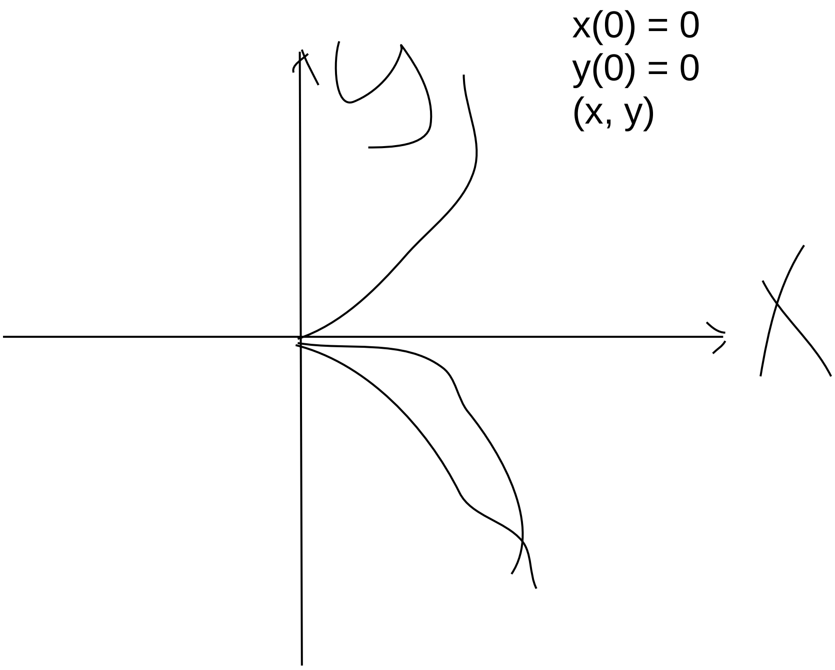
$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= \frac{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|}{|\dot{\bar{r}}|^3} \\ k_2 &= \frac{(\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}, \dddot{\bar{r}})}{|[\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}]|} \end{aligned}}$$

12.Поверхность в евклидовом пространстве. Примеры

<u>Определение:</u>

$S \subset Rn$Если для любого x ∈ $S \exists V(x): V(x) \cap S$- гомеоморфно R^k, то S - называется k-мерной поверхностью в R^n (k<n).
Гомеоморфизмом 2-х множеств назыв биективное отображение этих множеств друг на друга, непрерывное в обе стороны.
<u>Определение:</u> $\varphi: V_{s(x)} \Leftrightarrow Rk$называется картой поверхности S.
Отображение φ вводит координатную структуру в множестве $V_{s(x)}$
<u>Определение:</u> Множество всех карт, определяющих поверхность S называется атласом этой карты.
Замечание: объединение двух атласов - атлас
<u>Определение:</u> Если атлас состоит из 1 карты, то поверхность называется элементарной.
Пример:
f: D -> R (D $\subset R^n$) График f - элементарная поверхность R^{n+1}
Будем считать, что все функции, опред карты, явл k - минимум непрерывно дифференцированными
Пример: непрерывно дифференцируемая, но не гладкая

x = t^2
y = t^3



Поверхность называется гладкой, если все скалярные функции, опред карты которой поверхности являются гладкими и для любой карты ранг φ' максимален в любой точке области определения карты(=k)

Пример 3. Цилиндр

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 = r^2 \qquad (r > 0),$$

при $k < n$ есть $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, являющаяся прямым произведением $(r-1)$-мерной сферы плоскости переменных $(x^1, \ldots, x^k)$ и $(n-k)$-мерной плоскости переменных $(x^{k+1}, \ldots, x^n)$.

Локальная параметризация этой поверхности, очевидно, может быть получена, если в качестве первых $k-1$ из $(n-1)$ параметров $(t^1, \ldots, t^{n-1})$ взять полярные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ точки $(k-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^k$, а $t^k, \ldots, t^{n-1}$ положить равными $x^{k+1}, \ldots, x^n$ соответственно.

13. Ориентация поверхности. Ориентируемые и неориентируемые поверхности

Определение: Две локальные карты поверхности называют согласованными, либо когда районы их действия не пересекаются, либо когда это пересечение непусто и взаимные переходы в общей области действия этих локальных карт осуществляются диффеоморфизмами с положительным якобианом.
Определение: Атлас поверхности называется ориентирующим атласом поверхности, если он состоит из попарно согласованных карт.
Определение: Поверхность называется ориентируемой, если она обладает ориентирующим атласом. В противном случае поверхность называется неориентируемой.
Определение: Класс эквивалентности ориентирующих атласов поверхности по указанному отношению эквивалентности называется классом ориентации атласов поверхности или просто ориентацией поверхности.
Определение: Ориентированной поверхностью называется поверхность с фиксированным классом ориентации ее атласов (те с фиксированной на ней ориентацией)
Определение: Ориентировать поверхность - тем или иным способом указать определенный класс ориентации ориентирующих атласов этой поверхности.
Утверждение: На ориентируемой связной поверхности существует точно две ориентации. (взаимно противоположные)

14. Край поверхности. Согласованная ориентация поверхности и ее края

Пусть R^k - Евклидово пространство.
Определение: Полупространством H^k называется множество вида $H^k = \{(t^1, t^2, \ldots, t^k), t^1 \geq 0\}$.
Определение: Краем полупространства называется множество $\delta H^k = \{(t^1, t^2, \ldots, t^k), t^1 = 0\}$
Определение: Поверхностью с краем размерности k называется подмножество S пространства R^n ($n \geq k$) такое, что для любого x из S $\exists U(x)$ и $U(x) \cap S$ гомеоморфная либо R^k, либо H^k.
Определение: Если S - поверхность с краем и преобразование точки x из S при соответствующем гомеоморфизме является точка из δH^k, то точка x называется точкой края поверхности S.
Определение: Множество точек края называется краем поверхности.
Если поверхности ориентированы, всегда можно согласовать ориентации поверхности и ее края.

15. Площадь поверхности в евклидовом пространстве

Определение: Кусочно-гладкой поверхностью размерности 1 называется множество, которое после удаления из него конечного или счетного числа точек распадается на одномерные гладкие поверхности.
Определение: Кусочно-гладкой поверхностью размерности k называется множество, которое после удаления из него конечного или счетного числа кусочно-гладких поверхностей размерности, не превышающей k-1, на гладкие k-мерные поверхности.
Определение: Если поверхность гладкая, то в каждой точкой этой поверхности существует базис касательного пространства.
Определение: Объемом k-мерной поверхности называется $V = \int_D \sqrt{I} du^1 du^2 \ldots du^k$
I - определитель Грамма рассматриваемого базиса. $I = A^T * A$

16. Первая квадратичная форма поверхности. Площадь поверхности в R3

3. $k=3 \quad n=3$

$x = x(u,v,w)$

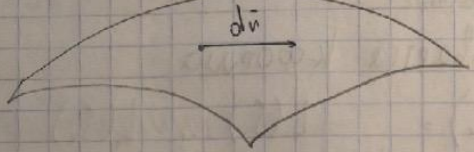
$y = y(u,v,w)$

$z = z(u,v,w)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{I} = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & & \\ & & \\ & & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right|$$

$$V = \iiint_D (J)\, dx\, dy\, dz$$ - замена переменных



$d\bar{r} = \bar{e}_1 du + e_2 dv$

$(d\bar{r}, d\bar{r}) = (e_1 e_1) du^2 + 2(e_1 e_2) du dv + (e_2 e_2) dv^2$

$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

$$ds^2 = (du \; dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

первая квадратичная формо поверхности

17. Алгебра форм. Кососимметрические формы. Операция внешнего умножения

L : V -> W

$$\forall x, y \in v, \lambda, \mu \in R$$

L($\lambda x + \mu y) \ = \ \lambda L(x) + \mu L(y)$- линейная форма
L : V^2 -> W, L(x,y) - линейна по каждому аргументу
билинейная форма 2-форма
Пример: скалярное и векторное произведения
<u>Определение:</u> Линейная k-форма называется кососимметрической при перестановке любых 2 аргументов форма меняет знак.

<u>Внешнее произведение:</u>
Пусть $L_1(\xi_1), L_2(\xi_2)..L_k(\xi_k)$ - 1-формы
Внешнее произведение этих форм называется k-форма.

$$L(\xi_1, \xi_2..\xi_k) \ = \ L_1 \wedge L_2 \wedge..\wedge L_k = \ det|L_1(\xi_1)...L_k(\xi_1)|$$
$$|L_1(\xi_k)...L_k(\xi_k)|$$

1)$L_1 \wedge L_2 = \ - L_2 \wedge L_1$- кососимметрическая
2)$L_1 \wedge (L_2 + L_3) \ = \ L_1 \wedge L_2 + L_1 \wedge L_3$

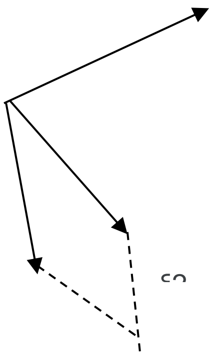
18. Дифференциальные формы в областях евклидова пространства. Определения и примеры: дифференциал функции, форма работы, форма потока

<u>Определение:</u> Пусть D - область Rn. Пусть в каждой точке этой области определена некоторая k-форма, тогда говорят, что в этой области определена дифференциальная форма.
<u>Утверждение:</u> Если функция f - дифференцируема в области D, то ее дифференциал является дифференциальной 1-формой в области D
Пусть в области D задано векторное поле V(x)
D, $\forall x \in D : x -> \forall(x) \ < -вектор$

Определение: $W_V^1(x)(\xi) = (V(x), \xi)$ – форма работы(дифференциальная 1-форма на D)

T, $\forall(x)\ \xi_1, \xi_2 \in T \times D \times W_V^2(x)(\xi_1, \xi_2) = (V, \xi_1, \xi_2)$ – дифференциальная 2-форма, форма потока.

Пример:



$$W_V^{n-1}(x)(\xi_1..\xi_{n-1}) = det\left|V^1...V^n\right|$$

$\left|\xi_1^1... \xi_1^n\ \right|$

...

$\left|\xi_{n-1}^1... \xi_{n-1}^n\right|$

19. Координатная запись дифференциальной л

Пусть у нас есть дифференциальная форма W^Pпорядка P

$$W^P(x)(\xi_1..\xi_P) =$$

x ∈ D, $\bar{e}_1(x)..\bar{e}_p(x)$ - базис в пространстве в T

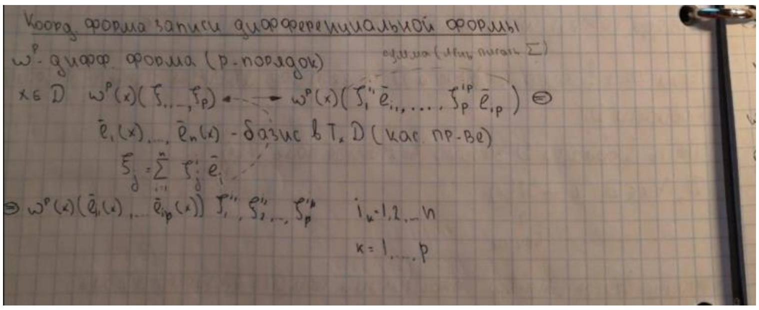
$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} \quad \xi_j^i \bar{e}_i$- разложение по базису

= и$W^p(x)(\xi_1^{i1}\bar{e}_{i1}..\xi_p^{ip}\bar{e}_{ip}) = W^p(x)(\bar{e}_{i1}(x)..\bar{e}_{ip}(x))$

Общий случай:

Акккаааи п$W^P(x)(\xi_1..\xi_P) = \sum_{1 \le i1 \le i2 < ... < ip} \quad a_{i1..ip}$

Тоже самое только подробнее + пример:



Коорд. форма записи дифференциальной формы

ω^p - дифф. форма (p-порядок)

одна (мы пишем Σ)

$x \in D \quad \omega^p(x)(\xi_1, ..., \xi_p) \longleftrightarrow \omega^p(x)(\xi_1^{i_1}\bar{e}_{i_1}, ..., \xi_p^{i_p}\bar{e}_{i_p}) =$

$\bar{e}_1(x), ..., \bar{e}_n(x)$ - базис в $T_x D$ (кас. пр-ве)

$\xi_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_j^i \bar{e}_i$

$= \omega^p(x)(\bar{e}_{i_1}(x), ... \bar{e}_{i_p}(x))\ \xi_1^{i_1}, \xi_2^{i_2}, ..., \xi_p^{i_p} \qquad i_k = 1, 2, ... n$

$k = 1, ..., p$

20. Внешний дифференциал формы

$\omega^P(x)$- дифференциальная форма

$\omega^P(x) \; = \sum \qquad a_{i1..ip} dx^{i1} \wedge .. \wedge dx^{ip}$

Дифференциалом формы $\omega^P(x)$ называется форма $d\omega^P(x) \; = \sum \qquad da_{i1..ip}(x) \wedge dx^{i1} \wedge .. \wedge dx^{ip}$

<u>Замечание:</u> При внешнем дифференцировании порядок формы увеличивается на 1.

Часто функция - дифференциальная форма нулевого порядка.

21. Скалярные и векторные поля в областях евклидова пространства. Связь с дифференциальными формами

<u>Определение</u>: Пусть D - некоторая область. Будем говорить, что в D задано скалярное поле, если каждой точке M этой области сопоставлено по некоторому закону определенное число u(M).

<u>Определение</u>: Пусть D - некоторая область. Будем говорить, что в D задано векторное поле, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону определенный вектор a(M).

<u>Определение</u>: Скалярное поле u = f(x, y, z) = f(M) называется дифференцируемым в точке M(x, y, z) области D, если его полное приращение Δu(M) в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u(M) = A_1\Delta x + A_2\Delta y + A_3\Delta z + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + \alpha_3\Delta z,$$

где A_1, A_2, A_3 - некоторые не зависящие от Δx, Δy, Δz числа, а α_1, α_2, α_3 - бесконечно малые при Δx -> 0, Δy -> 0, Δz -> 0.

<u>Определение</u>: Векторное поле a(M) называется дифференцируемым в точке M области D, если его полное приращение Δa(M) представляется в виде

$$\Delta \mathbf{a}(M) = A\mathbf{h} + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|),$$

где A — некоторый линейный оператор в E^3,

$$\mathbf{h} = \{\Delta x, \ \Delta y, \ \Delta z\}, \ \|\mathbf{h}\| = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2},$$

o(||h||) - вектор, длина которого стремится к нулю при ||h|| -> 0.

<u>Определение</u>: производной векторного поля a(M) в точке M по направлению e называется предел отношения (если этот предел существует)

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta \mathbf{a}(M)}{\rho} = \frac{\partial \mathbf{a}(M)}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{e}}$$

22. Общая формула Стокса

Пусть S - k-мерная поверхность, компактна и ориентируема
∂S - край поверхности S
будем считать, что ориентация S и ∂S согласованы. Пусть ω^{k+1}-
дифференциальная форма на S порядка k-1

$$\int_{\partial S} \omega^{k+1} = \int_{S} d\omega^{k+1}$$

<u>Замечание(Формула Ньютона-Лейбница):</u>
k=1
форма степени 0 - функция
F(b)-F(a) = $\int_a^b f dx, \partial S \ = \ [a,b]$
f = F'
Частные случаи общей формулы стокса
1)Формула Грина
n=2
G - область в Rk (компактная) k=2
∂G - край G
ω^1 = Pdx+Qdy - 1-форма на G

$$d\omega^1 = \frac{-\partial P}{\partial y} dx \times dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \times dy$$

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy \ = \ \int_G \int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

2) Формула стокса (см 23)

23. Классические интегральные формулы Ньютона-Лейбница, Стокса, Остроградского-Гаусса

Теория поля:

1) Градиент - векторное поле вида

grad F = $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$

2) Ротор

rot(P,Q,R) = | i j k |
|$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}$|
| P Q R|

3) Дивергенция векторного поля

div(A,B,C) = $\frac{\partial A}{\partial x}$+$\frac{\partial B}{\partial y}$+$\frac{\partial C}{\partial z}$

<u>Формула Остроградского-Гаусса:</u>

$$\int_S (\underline{F}, \underline{n}) dS \ = \int \int_V \int divFdv$$

поток, через поверхность сколько родилось	Риманов интеграл сколько вытекло

dif F - внешний дифференциал формы потока в k-мерном пространстве k-форма имеет одно слагаемое

<u>Общая формула Стокса(см 22)</u>

<u>Частная формула Стокса:</u>

n=3

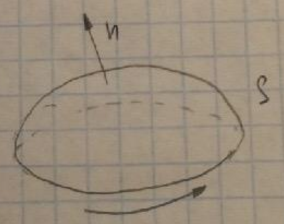
S - двумерная компактная поверхность k=1

dS - край поверхности

$$\omega^1 = Pdx + Qdy + Rdz$$

$$d\omega^1 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

$$\int_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$



$$\oint (\underline{F}, d\underline{e})ds = \int \int (rot\ \underline{F}, \underline{n})dS$$

слева - циркуляция, справа - поток rot $\underline{F}$через поверхность S

$\underline{F} = (\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R})$

24. Интегральные формулы в векторных обозначениях. Дивергенция, ротор

Ротор

rot(P,Q,R) = | i j k |

$|\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}|$

| P Q R|

Дивергенция векторного поля

div(A,B,C) = $\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}$

25. Криволинейные интегралы первого и второго рода

Определение: f: I -> R задана на множестве I.

$\int_I f(x,y,z)dS = \int f(x(t),y(t),z(t))|\underline{r}'(t)|dt$называется криволинейным интегралом первого рода.

Свойства криволинейного интеграла:

1) для существования интеграла необходимо и достаточно, чтобы функция переменной t была интегрируема на своем отрезке.
2) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от параметризации гладкой кривой I.

Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

I-го рода

$$L = \int dL = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

II - го рода

$$I = \int_s Pdx + Qdy + Rdz$$

§ 11. Криволинейные интегралы

1°. **Криволинейный интеграл 1-го рода.** Если $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках гладкой кривой C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1}$$

и ds — дифференциал дуги, то по определению полагают

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Особенность этого интеграла состоит в том, что он не зависит от направления кривой C.

2°. **Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.** Если $\rho = \rho(x, y, z)$ — линейная плотность в текущей точке (x, y, z) кривой C, то *масса кривой* C равна:

$$M = \int_C \rho(x, y, z)\,ds.$$

Координаты центра тяжести (x_0, y_0, z_0) этой кривой выражаются формулами

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_C x\rho(x, y, z)\,ds, \quad y_0 = \frac{1}{M}\int_C y\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M}\int_C z\rho(x, y, z)\,ds.$$

3°. **Криволинейный интеграл 2-го рода.** Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывны в точках кривой (1), пробегаемой в направлении возрастания параметра t, то полагают

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \{P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\}\,dt. \tag{2}$$

При изменении направления обхода кривой C этот интеграл изменяет свой знак на обратный. Механически интеграл (2) представ-

ляет собой *работу переменной силы* $\{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую C.

4°. **Случай полного дифференциала.** Если

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = du,$$

где $u = u(x, y, z)$ — однозначная функция в области V, то независимо от вида кривой C, целиком расположенной в области V, имеем:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная и (x_2, y_2, z_2) — конечная точка пути. В простейшем случае, если область V односвязна и функции P, Q и R обладают непрерывными частными производными первого порядка, для этого необходимо и достаточно, чтобы в области V были тождественно выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Тогда в простейшем случае стандартной параллелопидальной области V, функцию u можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz + c,$$

где (x_0, y_0, z_0) — некоторая фиксированная точка области V и c — произвольная постоянная.

Механически этот случай соответствует работе силы, имеющей потенциал.

26. Поверхностные интегралы первого и второго рода

§ 14. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл 1-го рода. Если S — кусочно гладкая двусторонняя поверхность

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \qquad ((u, v) \in \Omega) \quad (1)$$

и $f(x, y, z)$ — функция, определенная и непрерывная в точках поверхности S, то

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В частном случае, если уравнение поверхности S имеет вид

$$z = z(x, y) \qquad ((x, y) \in \sigma),$$

где $z(x, y)$ — однозначная непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS =$$

$$= \iint_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Этот интеграл не зависит от выбора стороны поверхности S.

Если функцию $f(x, y, z)$ рассматривать как плотность поверхности S в точке (x, y, z), то интеграл (2) представляет собой массу этой поверхности.

2°. Поверхностный интеграл 2-го рода. Если S — гладкая двусторонняя поверхность, $S+$ — ее сторона, характеризуемая направлением нормали $n\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — три функции, определенные и непрерывные на поверхности S, то

$$\iint_{S+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \tag{3}$$

Если поверхность S задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали n определяются по формулам:

Если поверхность S задана в параметрическом виде (1), то направляющие косинусы нормали n определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $\quad A = \dfrac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)}, \quad B = \dfrac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)}, \quad C = \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$, и знак перед радикалом выбирается надлежащим образом.

При переходе к другой стороне S^- поверхности S интеграл (3) меняет свой знак на обратный.