

1. Материальная точки и система координат. Основные динамические характеристики: закон движения, перемещения, средняя мгновенная скорость и ускорение, нормальное и тангенциальное ускорение, радиус и центр кривизны траектории; пройденный путь, средняя и мгновенная путевая скорость. Импульс.

Материальная точка - физическое тело, размерами которого можно пренебречь в условиях конкретной задачи, поэтому понятие материальной точки относительно и привязано к конкретной задаче.

Положение точки в пространстве представляется радиус-вектором.

$$\underline{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = \underline{i} * x(t) + \underline{j} * y(t) + \underline{k} * z(t); (1)$$

Радиус-вектор - координаты, которые зависят от системы координат.

Мгновенное положение точки на траектории задается формулами времени. Эти функции задают так называемый закон движения.

Вектор, соединяющий два мгновенных положения, называется перемещением.

$$\frac{\Delta \underline{r}(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \underline{V}_{cp}(t, \Delta t) \quad (3)$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta \vec{r}(t, \Delta t) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{cp}(t, \Delta t) &\rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{r}'(t) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_{cp}(t, 0) = \vec{V}(t) \quad (4) \end{aligned}$$

(4) - мгновенная скорость.

Участок между  $t$  и  $t + \Delta t$  имеет длину  $l(t, t + \Delta t)$ , который называется путем, пройденным точкой на промежутке.

$$l(t, \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{V}(\tau) d\tau \quad (7)$$

(7) - путь за время  $[t, t + \Delta t]$

Если  $\Delta t$  устремить к нулю и разделить путь на  $\Delta t$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{l(t, \Delta t)}{\Delta t} = V_n(t)$  (8), то полученное выражение будет называться мгновенной путевой скоростью, именно ее показывает спидометр. Если (8) рассматривать без предельного перехода, то это средняя путевая скорость.

$$v_{cpn}(t, \Delta t) = \frac{l(t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (9)$$

Если точка А проходит траекторию Г за время Т, то перемещение и скорость за это время оказываются нулевыми. Однако мгновенная скорость, путевая скорость и средняя путевая скорость будут отличны от нуля, поскольку точка двигалась. Поэтому нужно уточнять какая именно скорость подразумевается.

$$\left[ \frac{M}{c^2} \right] \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = a_{cp}(t, \Delta t) \quad (11)$$

(11) - среднее ускорение точки.

Если в (11)  $\Delta t$  устремить к нулю, то получаем мгновенное ускорение, которое с учетом (11)

$$\vec{a}(t) = \vec{V}'(t) = \vec{r}''(t) \quad (12)$$

$$\vec{V}(t) = \vec{V}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau \quad (13)$$

(13) - интегральная связь. Для применения (5) и (13) необходимо знать положение и скорость точки в некоторый момент времени.

Направление ускорения определяется приложенной к телу силой и может быть произвольной.

Так как скорость специально ориентирована на поле, у ускорения удобно выделить касательное (тангенциальное) ускорение, параллельное вектору скорости, и нормальное, перпендикулярное вектору скорости.

Проще всего касательное ускорение как вектор определить с помощью проектирования ускорения на скорость.

$$\begin{aligned} \vec{a}_\tau &= \text{Pr}_{\vec{V}(t)} * \vec{a}(t) \frac{\vec{V}(t)}{V(t)} = \frac{(\vec{a}, \vec{V})}{V} * \frac{\vec{V}}{V} = \\ &= \frac{(\vec{a}, \vec{V})}{V^2} * \vec{V} = \frac{a_x V_x + a_y V_y + a_z V_z}{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} (\vec{i} V_x + \vec{j} V_y + \vec{k} V_z) \quad (15) \end{aligned}$$

Если направление тангенциального вектора и нормального вектора для нас не важны, их величины можно определить с учетом той роли, которую они играют в процессе движения. Так если М имеет только касательное ускорение, М движется по прямой. За

исключением момента возможной остановки и разворота, при таком движении меняется

$$a_{\tau}(t) = \left| \frac{d\vec{V}(t)}{dt} \right| \quad (16)$$

только модуль скорости, поэтому

Модуль нормального ускорения тогда определяется из 2-й формулы (14).

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{a}_{\tau}(t) + \vec{a}_n(t) \\ a^2 &= a_{\tau}^2 + a_n^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Если  $\Gamma$  не имеет излома, то на траектории у точки  $\mathbf{r}(t)$  всегда есть окрестность, в пределах которой траектория совпадает с некоторой окружностью. Такая окружность, ее центр и радиус  $R(t)$  называются окружностью, центром и радиусом кривизны траектории в точке  $\mathbf{r}(t)$  или в момент времени  $t$ . В окрестности момента  $t$  точка как бы вращается по окружности кривизны, что в принципе невозможно без центростремительного нормального ускорения. Если  $V(t)$  и  $a_n(t)$  предварительно определены, из (17) можно рассчитать радиус кривизны траектории.

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)} \quad (17)$$

## 2. Характеристики вращательного движения: угловой закон движения, угловые скорость и ускорение. Связь угловых и линейных характеристик. Момент инерции, импульса и силы. Расчет момента инерции, теорема Штейнера.

Вращением называется такое движение точки, при котором остается постоянным ее расстояние до некоторой фиксированной точки пространства. Такое движение сводится к трем, одновременно происходящим, плоским вращениям, в каждом из которых точка двигается по некоторой окружности. Описать каждое такое вращение можно одной угловой координатой. Совокупность таких трех координат образует множество углов Эйлера.

Пусть  $m$  вращается по окружности радиуса  $R$  в плоскости  $xy$ . Оси системы координат ориентируем так, чтобы ось  $z$  была связана с направлением вращения точки через правило буравчика.

$$x_m(t) = R \cos \alpha(t), y_m(t) = R \sin \alpha(t).$$

Определение:  $\alpha(t)$  называется угловой координатой или вращательным законом движения.

$$V_x(t) = x'_m(t) = -R \sin \alpha(t) * \alpha'(t) = -y_m(t) \omega(t) \quad (19.1)$$

$$V_y(t) = y'_m(t) = R \cos \alpha(t) \alpha'(t) = x_m(t) * \omega(t) \quad (19.2)$$

$$\vec{V}(t) = \vec{i} * \vec{V}_x(t) + \vec{j} * \vec{V}_y(t) = \omega(t)(-\vec{i} y_m + \vec{j} x_m) \quad (19.3)$$

$$= \frac{\omega(t)(-\vec{i} y_m + \vec{j} x_m) * R}{R} = \omega R \vec{\tau} \quad (20)$$

$$R = \sqrt{x_m^2 + y_m^2}$$

$$\vec{V}(t) = V(\tau) \quad (21)$$

$$\vec{V}(t) = \omega(t) R \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{Из (19)} \quad a_x(t) &= V'_x(t) = -y'_m(t)\omega(t) + y_m(t)\omega'(t) = \\ &= V_y\omega + y_m(t)\varepsilon a_y(t) = V'_y(t) = x'_m(t)\omega(t) + x_m(t)\omega'(t) = \\ &= V_x(t)\omega(t) + x_m(t)\varepsilon \quad (23) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \omega(-\vec{i} V_y + \vec{j} V_x) + \varepsilon(\vec{i} y_m + \vec{j} x_m) \quad (24)$$

$$\omega^2(\vec{i} x + \vec{j} y) + \varepsilon R \vec{\tau} = \omega^2(t) \vec{r}(t) + \varepsilon(t) R \vec{\tau} = \vec{a}(t) \quad (25)$$

Соотношение вращательной кинематики можно сделать удобнее, если дать векторное обобщение угловой координате.

Определим вектор угловой координаты как аксиальный (лежащий вдоль оси вращения **z**) вектор, связав направление вдоль этой оси с направлением угла поворота за промежуток  $[0; t]$  через правое винтовое правило.

$\alpha(t) \parallel Oz \Rightarrow$  его приращение и производная лежат вдоль оси вращения

$$\vec{\omega}(t) = \vec{\alpha}'(t) \quad \text{- угловая скорость.}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \\ &= \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad (2) \end{aligned}$$

(1) и (2) - связь угловых и линейных характеристик.

$$\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\bar{\omega}(t + \Delta t) - \bar{\omega}(t)}{dt}$$


---

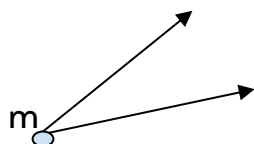
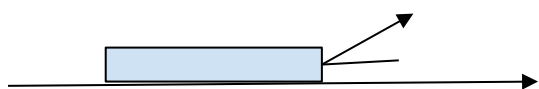
**Теорема Штейнера:** момент инерции тела относительно некоторой оси  $\Gamma$  равен сумме момента инерции тела относительно оси  $\Gamma_0$ , проходящей через центр масс  $O$  тела, параллельно  $\Gamma$ , и величины  $md^2$ , где  $m$  - масса тела,  $d$  - расстояние между осями.  $J_\Gamma = J_{\Gamma_0} + md^2$  (14)

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$  - момент силы

$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$  - момент импульса

$J = mr^2$  - момент инерции

### 3. Работа и мощность силы. Потенциальные силовые поля. Потенциальная функция и сила поля. Работа в потенциальном поле. Интегральные и локальные критерии потенциальности поля. Пример потенциальных полей. Потенциальная энергия поля. Напряженность и потенциал поля.



Если под действием силы  $\underline{F}$  тело совершает перемещение  $\Delta x$  вдоль  $Ox$  (рис 1a), то  $A$  в таком перемещении будет равна:

$$\Delta A = F_x \Delta x = F \cdot \cos \alpha \Delta x \quad (1) \quad [\Delta A] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$$

Если произвольно ориентировано (рис 1b), то

$$\Delta A = (F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z) = F \Delta r \cos \alpha \quad (2)$$

$$* = \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$$

Такое определение  $A$  дает свойства:

1) работы одной силы на разных элементах перемещения складываются

$$A = \underline{F} \Delta \underline{x} + \underline{F} \Delta \underline{y} + \underline{F} \Delta \underline{z}$$

2) работы разных сил на одном перемещении подлежат сложению

$$A = \underline{F}_x \Delta \underline{x} + \underline{F}_y \Delta \underline{y} + \underline{F}_z \Delta \underline{z}$$

Силу можно считать примерно постоянной в пределах бесконечно малого перемещения  $d\underline{F}$  точки вдоль траектории.

Для расчета  $\Delta A$  такой постоянной силы на малом участке воспользуемся (2) и представим эту работу в одной из следующих 3 форм:

$$\delta A = \underline{F} * d\underline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F \cos \alpha dr = (\underline{F} * \frac{d\underline{r}}{dt} dt = \underline{F} * \underline{v} * dt (\underline{F} * \underline{v} = P)) = P(t) dt \quad (3)$$

Сумма работ на бесконечно малых фрагментах перемещения образует  $d\underline{r}$ - интеграл, имеющий один из следующих видов:

$$\Delta P_\Gamma = \int_\Gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (4.1) = \int_\Gamma F(r) \cos \alpha dl \quad (4.2) = \int_{t_n}^{t_k} P(t) dt \quad (4.3) \quad (4)$$

$$P(t) = \underline{F}(t) * \underline{v}(t) = \underline{F}(r(t)) * \underline{v}(r(t)) = \frac{\delta A}{\delta t} \quad (5)$$

Скалярная функция (5) - мощность силы.

Важная связь работы сил получается при анализе второго закона Ньютона, умножив который скалярно на скорость после тождественных преобразований приходим к виду:

$$\frac{m d\underline{v}}{dt} = \underline{F}_\epsilon | * \underline{v} = \frac{d}{dt} \frac{m v^2}{2} = \frac{\delta A_\epsilon}{\delta t} \quad (6.1) = P_\epsilon(t)$$

$$d \frac{m v^2}{2} = \delta A_\epsilon \quad (6.2)$$

$$m \underline{v} * \frac{d\underline{v}}{dt} = m (v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}) = m \frac{d}{dt} (\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}) = \frac{d}{dt} (m \frac{v^2}{2})$$

Величины  $m \frac{v^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = T \quad (7)$  называются кинетической энергией. Изменение кинетической энергии равняется работе приложенных сил.

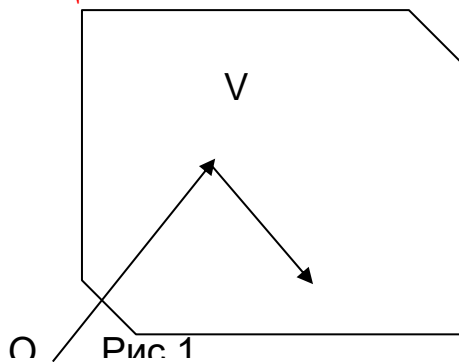
Мощность силы имеет смысл в скорости совершения работы.  $[P] = \frac{[A]}{[t]} = \text{Дж/сек} = \text{Вт}$ .

(6.1) - скорость изменения кинетической энергии.

Элементарная работа при вращении

$$\delta A_{\text{вр}} = \underline{M}_\epsilon * d\underline{\alpha} = \underline{M}_\epsilon * \underline{\omega} dt(\alpha) = P_{\text{вр}}(t)$$

### Потенциальное силовое поле



$$\underline{F}(\underline{r}) = \{F_x(F) \dots\}$$

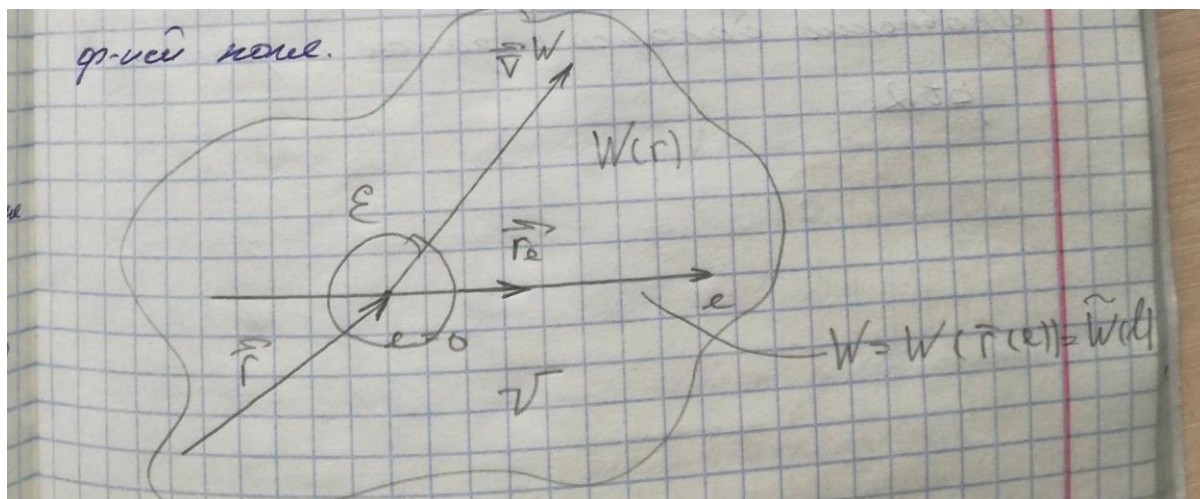
Но если существует такая скалярная функция координат  $W(\underline{r})$ , через которую вектор силы можно записать как:

$$-\text{grad } W = -\underline{\nabla} W = -(\underline{i} \frac{dW}{dx} + \underline{j} \frac{dW}{dy} + \underline{k} \frac{dW}{dz}) \quad (1), \text{ то силовое поле называется}$$

потенциальным, а ф-ция  $W$  - потенциальной функцией поля.

Минус в (1) появляется для правильного описания постоянного (однородного) гравитационного поля.

В таком поле тело массой  $m$  на высоте (над уровнем моря до тела)  $h$  обладает потенциальной энергией.



(Рис 2)

Пусть  $\Gamma$  - некоторая траектория точки,  $d\vec{r}$  - элементарное перемещение (рис 2)

Тогда элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещение:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz\right) = 0 \quad (5)$$

$$dW = W(x + dx, y + dy, z + dz)$$

Элементы работы потенциальной силы равны дифференциалу потенциальной функции со знаком минус.

$$\delta A = -dW \quad (5^*)$$

$$\Delta A_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \delta A_{\Gamma} = - \int_{\Gamma} dW \quad (6) = -\Delta_{\Gamma} W(8) = -(W_{\text{конеч}} - W_{\text{нач}})$$

Свойства потенциального поля:

- 1) Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории и определяется лишь значением потенциальной функции в начале и конце
- 2) Если начало и конец совпадают, то работа нулевая.

(5) и (5\*) - локальный/дифф критерии потенциальности.

В случае гравитационных и электростатических взаимодействий сила  $F$ , действующая на тело со стороны окружающих тел, пропорциональна массе(заряду) тела, причем  $F$  может быть представлена, например, в случае тяготения:

$$F = mG \quad (9)$$

$G$  - некоторый вектор, его называют напряженностью поля.

Поле, образованное несколькими источниками, равно сумме полей, созданных каждым из них.  $G$  результирующее:

$$G = \sum G_i \quad (10)$$

(10) выражает принцип суперпозиции (наложения)

$$mGdr = -dW \quad (W/m = \varphi)$$

$$Gdr = -d\varphi$$

$$\int_1^2 Gdr = \varphi_1 - \varphi_2$$

$\varphi(r)$  - потенциал поля в точке с радиус-вектором  $r$ .

#### 4. Инерциальные системы координат. Преобразования Галилея. Динамические законы Ньютона.

Формулировка. Ограниченность законов. Сила инерции, уравнение движения в инерциальной системе координат.

Преобразования Галилея опираются на принцип относительности Галилея, который подразумевает одинаковость времени во всех системах отсчета («абсолютное время»). Специальная теория относительности дает правило преобразования инерционных систем координат. Для этого использовали преобразования Галилея, которое наиболее просто выглядит для первоначально совпадающих систем, одна из которых движется с постоянной скоростью и относительно оси  $x$  другой (инерциальные системы движутся друг относительно друга с постоянными скоростями).

Преобразования Галилея

$$\begin{aligned}x &= x' + ut, & V'_x &= V_x - u \\ y &= y', & t &= t, \Delta t = 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0 \\ z &= z', \\ t &= t'\end{aligned}$$

Время в обеих системах течет одинаково, то есть оно инвариантно относительно преобразований Галилея, а также преобразование сохраняет вектора перемещения, в том числе и размеры предметов, которые также являются инвариантными.

Неотъемлемый элемент преобразований – следствие из преобразований координат – галилеев закон сложения скоростей, который не всегда работает (тот самый пример с тележкой).

**Этому закону не поддается скорость света.**

Первый закон Ньютона: Существуют такие системы отсчета, в которых свободное тело движется равномерно и прямолинейно или покоится. Такие системы называются изолированными. Переход от одной системы к другой осуществляется с помощью преобразований Галилея. Во всех инерциальных системах время течет одинаково и одинаково выглядят все физические законы.

Замечание: Понятие инерциальности системы зависит от решаемой задачи. Так при движении тел по поверхности земли на расстояние много меньше ее радиуса инерциальную систему можно связать с любой точкой земли. При движении на существенно большее расстояние начало инерциальной системы помещают в центр Земли, а оси ориентируют на наиболее неподвижные звездные объекты. При описании движения тел в солнечной системе и ее окрестности мы помещаем начало системы в центр солнца.

Пусть  $K$  и  $K_1$  - системы, время которых синхронизировано. Тогда векторы положения точки  $m$  связаны соотношением  $\underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) + \underline{r}_0(t)$  (1)



$\vec{r}_0$  - вектор мгновенного положения  $o$  относительно  $o_1$ . Предположим, что  $m$  - свободный объект, а обе системы являются инерциальными. Это значит, что в обеих системах  $m$  движется равномерно и прямолинейно.

Относительное ускорение системы нулевое. Относительная скорость постоянна.

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 + x_{oo} + V_{ox}t \\ y &= y_1 + y_{oo} + V_{oy}t \\ z &= z_1 + z_{oo} + V_{oz}t \end{aligned} \right\} - \text{Преобразования Галилея}$$

Они позволяют переходить от  $K$  к  $K_1$ . Обратное преобразование получается из этих формул, если выразить индексы 1.

$$\left. \begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_1 \\ \Delta \vec{r} &= \Delta \vec{r}_1 \end{aligned} \right\} (1)$$

(1) описывают инварианты преобразований Галилея.

**Второй закон Ньютона:** под действием приложенной силы тело приобретает пропорциональное ей ускорение, направленное куда и сила.

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} \Rightarrow \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (7)$$

**Третий закон Ньютона:** действие равно противодействию: два тела действуют друг на друга равными по величине, но различными по направлению силами.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (9)$$

Третий закон работает только при непосредственном взаимодействии в центральных (потенциальных) системах, он нарушается в электромагнитных полях иногда.

## 5. Основное уравнение динамики вращения материальной точки и макроскопического тела вокруг фиксированной оси. Вывод. Идентичность форм уравнений поступательного и вращательного движений, таблица соответствия и перекодировка соотношений. Примеры применения. Вращение твердых тел вокруг центра, главные оси инерции тела.

При вращательном движении II-ой закон Ньютона (1) точки целесообразно привести к форме, в которой будут введенные нами величины  $\underline{a}, \underline{\omega}, \underline{r}$ . Для ее получения (1) слева векторно домножим на мгновенный радиус вектора точки. Введем обозначения:

$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F}$  - момент силы

$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$  - момент импульса (2)

$\underline{J} = mr^2$  - момент инерции

Момент силы и момент инерции направлены вдоль оси вращения и могут быть на нее перенесены. После домножения и тождественных преобразований уравнение (1) принимает вид:

$$\underline{M} = J \underline{\varepsilon} = J \frac{d \underline{\omega}}{dt} = \frac{d \underline{L}}{dt} = J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \quad (3)$$

(3) - уравнение для точки

Например:

$$\underline{r} \times \frac{d \underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \underline{r} \times \underline{p} - \frac{d \underline{r}}{dt} \times \underline{p} = \frac{d \underline{L}}{dt}$$

Заметим, что уравнения (1) и (3) имеют идентичные формы. Это означает, что величины, стоящие на одинаковых местах, при движении играют одинаковую роль.

Поступательное	Вращательное
r	α
m	J
v	ω
a	ε
p	L
F	M

Только силы иногда бывает недостаточно для возникновения вращения. Сила должна обладать ненулевым плечом (пример с дверью).

Пример: аналогом уравнения  $\underline{p} = m \underline{v}$  является  $\underline{L} = J \underline{\omega}$ .

Особенность вращательных характеристик - они зависят от расстояния до оси.

## 6. Системы материальных точек и макроскопических тел.

Описание динамики системы как целого. Центр масс системы и уравнение движения центра масс. Замкнутая система. Свойства центра масс замкнутых систем. Закон сохранения импульса тела.

Пусть имеется система N материальных точек с массами  $m_k$ , движение каждой из которых определяется одной из форм 2-го закона Ньютона.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\Sigma k} &= \vec{F}_{k_{\text{вн}}} + \sum_{i \neq k, i=1}^N F_{i \rightarrow k} = m_k \vec{a}_k = m_k \frac{d \vec{V}_k}{dt} = \\ &= \frac{d \vec{P}_k}{dt} = m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \quad k = 1, \dots, N \quad (10) \end{aligned}$$

Если нас интересует только поведение системы как целого, нужно сложить все уравнения (10). Результат:

$$\begin{aligned}\sum_k \vec{F}_{\Sigma k} &= \sum_k F_{k_{\text{внеш}}} \sum_{k=1}^N \sum_{i \neq k}^N \vec{F}_{i \rightarrow k} = \\ &= \sum_k m_k \vec{a}_k = \sum_k m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_k \frac{d\vec{P}_k}{dt} = \\ &= \sum_k m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \quad k = 1, \dots, N \quad (11)\end{aligned}$$

В двойной сумме будут складываться  $F_{i \rightarrow k}$  и  $F_{k \rightarrow i} = -F_{i \rightarrow k}$  (по 3 закону Ньютона), то есть сумма внутренних сил будет равна нулю  $\Rightarrow$  равнодействующая всех сил определяется только внешним воздействием.

Для преобразования остальных компонент уравнения (11) введем точку

$$\vec{r}_{c.m.} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \sum_{k=1}^N \vec{r}_k m_k; \quad m_{\Sigma} = \sum_{k=1}^N m_k \quad (12)$$

(12) - центр масс.

Скорость, ускорение и импульс центра масс определяется как обычно.

Воздействие сил на системы тел, систему материальных точек и макроскопическое тело можно стягивать в центр масс.

Определение: Если все внешние силы компенсируются, то система называется замкнутой. Если все внешние силы равны нулю, то система называется изолированной.

Свойства центра масс замкнутой системы:

- 1) Постоянство скорости центра масс
- 2) Постоянство полного импульса
- 3) Если в какой-то момент времени тела системы покоились, центр масс неподвижен

Закон сохранения импульса тела: Векторная сумма импульсов тел, составляющих замкнутую систему, не меняется с течением времени при любых движениях и взаимодействиях этих тел.

## 7. Закон сохранения момента импульса тела. Следствия: сохранение плоскости движения в центральном поле, сохранение секторальной скорости.

Закон сохранения момента импульса: если результирующий момент внешних сил относительно неподвижной точки тождественно равен нулю, то момент импульса тела относительно этой точки с течением времени не изменяется.

$$\sum_{i=0}^n \vec{L}_i = \text{const},$$

Следствие 1: При движении частицы в центральном поле сила направлена вдоль радиуса, и ее момент относительно силового центра равен нулю. Таким образом, в любом центральном поле момент импульса частицы относительно силового центра сохраняется.

Следствие 2: Рассмотрим геометрический смысл момента импульса частицы, совершающей орбитальное движение (рис. 1). Представим скорость  $\mathbf{v}$  в выражении для момента импульса как отношение вектора элементарного перемещения  $d\mathbf{r}$  к соответствующему промежутку времени  $dt$ :

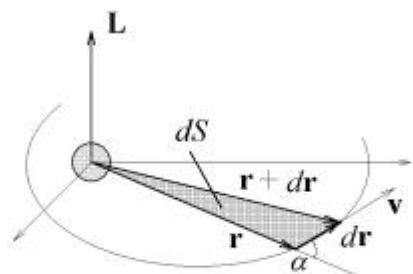


Рис. 1: Геометрический смысл момента импульса частицы.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt. \quad (2)$$

Векторное произведение  $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}$  в правой части (2) представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат сомножители  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$  (т. е.  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ ). Его модуль

$$|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = r dr \sin \alpha = 2dS \quad (3)$$

представляет собой удвоенную площадь элементарного треугольника, заштрихованного на рис. 1. В самом деле, произведение  $dr$  на синус угла  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{r}$  и  $d\mathbf{r}$  равно высоте этого треугольника, опущенной на сторону  $\mathbf{r}$ . Отношение  $dS/dt$  элементарной площади  $dS$  к промежутку времени  $dt$ , в течение которого радиус-вектор  $\mathbf{r}$  «заметает» эту площадь, называется секториальной скоростью. Таким образом, из (3) следует, что модуль момента импульса пропорционален секториальной скорости:

$$L = 2m \frac{dS}{dt}. \quad (4)$$

Таким образом, сохранение модуля момента импульса означает неизменность секториальной скорости.

## 8. Кинетическая энергия и теорема о кинетической энергии. Полная механическая энергия. Уравнение баланса энергии. Закон сохранения полной механической энергии. Консервативные и неконсервативные силы.

Энергия, которой обладает тело вследствие своего движения, называется кинетической. Второй закон Ньютона, умножив скалярно на скорость, можно привести в виду:

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_\Sigma \mid \cdot \vec{v}, \quad d \frac{mv^2}{2} = \delta A_\Sigma, \quad \mid m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \left( V_x \frac{dV_x}{dt} + V_y \frac{dV_y}{dt} + V_z \frac{dV_z}{dt} \right) = \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = T, \quad T - \text{кинетическая энергия тела}$$

Теорема о кинетической энергии:  $\Delta A_\Gamma = \int_\Gamma \delta A_\Pi = - \int_\Gamma dw = -(w_k - w_n)$ .  $\Gamma$  - некоторая кривая.

Изменение кинетической энергии тела равно работе приложенных сил.

Полная механическая энергия:

$$\Pi = \frac{mv^2}{2} + U$$

$d\Pi_\Sigma = \delta A_\Sigma$  - уравнение баланса механической энергии. Из этого уравнения видно, что изменение механической энергии тела обеспечивает работа непотенциальных сил. Если эта работа равна нулю, то полная механическая энергия сохраняется.

$$\begin{cases} \delta A = 0 & \Rightarrow \Pi = \frac{mv^2}{2} + U = const \\ \delta A_\Sigma = 0 & \Rightarrow \Pi_\Sigma = const \end{cases}$$

Определение: Силы, при которых полная механическая энергия сохраняется, называются консервативными. Все потенциальные силы - консервативные, но не наоборот. Консервативная непотенциальная сила - сила Лоренца.

## 9. Гравитационное поле. Закон всемирного тяготения.

Принцип суперпозиции. Примеры применения для расчета силы поля. Гравитационная напряженность и потенциал. Поток векторного поля через поверхность. Теорема Гаусса для гравитационного поля. Расчет поля однородного шара и сфера. Центральный характер поля и следствия: закон Кеплера, космические скорости.

Гравитационное поле - одно из фундаментальных силовых полей.

Далее 9 вопрос по инету. В лекциях не помню такого

**Принцип суперпозиции** (точечное):

- сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется, если присутствуют другие заряды;
- сила, действующая на точечный заряд со стороны двух других точечных зарядов, равна сумме сил, действующих на него со стороны каждого из точечных зарядов при отсутствии другого.

**Полевая трактовка:** напряженность поля двух точечных зарядов есть сумма напряженностей, создаваемых каждым из зарядов при отсутствии другого.

**Первый закон Кеплера:** планеты Солнечной системы движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Доказательство по существу повторяет вывод уравнения конических сечений.

**Второй закон Кеплера:** площади, заметенные радиус-вектором, идущим от Солнца к планете, пропорциональны промежуткам времени, в которые они были заметены.

**Третий закон Кеплера:** квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их больших полуосей.

По определению, **космическая скорость** — это минимальная начальная скорость, которую необходимо придать объекту (например, космическому аппарату) на поверхности небесного тела в отсутствие атмосферы, чтобы:

- $v_1$  — объект стал искусственным спутником центрального тела, то есть стал вращаться по круговой орбите вокруг него на нулевой или пренебрежимо малой высоте относительно поверхности;  $v_1 = \sqrt{gR_s} = 8 \text{ км/с}$ .

- $v_2$  — объект преодолел гравитационное притяжение центрального тела и начал двигаться по параболической орбите, получив тем самым  $v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$ .  $v_2 = \sqrt{2}v_1$ .  
удалиться на бесконечно большое расстояние от него;
- $v_3$  — при запуске с планеты объект покинул планетную систему, преодолев притяжение звезды, то есть это параболическая скорость относительно звезды;
- $v_4$  — при запуске из планетной системы объект покинул галактику.
- Ещё реже в некоторых источниках встречается понятие «пятая космическая скорость». Это скорость, позволяющая добраться до иной планеты звездной системы вне зависимости от разности плоскостей эклиптики планет.

10. Общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Базис решений однородного уравнения. Характеристическое уравнение и корни. Условия возникновения колебаний и апериодического затухания решений однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения на больших временах. Интерференционная компонента решен

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x - \frac{F_{\text{пост}}}{m} = 0$$

$$\beta = \frac{r}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Для получения единственного решения к уравнению добавим два начальных условия  $x(0) = x_0, x'(0) = V_0$

У последних двух слагаемых выносим  $\omega_0^2$  за скобку

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 \left(x - \frac{F_{\text{пост}}}{k}\right) = 0, \text{ где } \frac{F_{\text{пост}}}{k} = x_p$$

обозначив содержимое круглой скобки на  $y(t) = x(t) - x_p$  отметим, что у функции  $x(t)$  и  $y(t)$  производные совпадают, так как функции отличаются на постоянные слагаемые. Приводим к виду:

$$y'' + 2\beta y' + \omega_0^2 y = 0$$

$$y(t) = P_{x-1}(t)e^{j_k t},$$

где  $j_k$  — корни характеристического уравнения

Уравнение принимает вид:

$$j^2 + 2\beta j + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{корни: } j_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$1 \text{ случай: } \beta^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \frac{r^2}{4m^2} > \frac{k}{m}, r^2 > 4mk$$

В этом случае базисные решения представляют собой затухающие экспоненты, такое движение груза называется аperiodическим затуханием начального возмущения

$$2 \text{ случай: } r^2 > 4mk, \beta^2 < \omega_0^2$$

В этом случае решение представляет собой затухающие гармонические колебания

**II. Задача о пружинном маятнике в поле сил упругости, динамического трения и внешней гармонической силы. Влияние однородного поля тяжести и постоянной силы на движение маятника. Условие возникновения колебаний и его интерпретация. Декремент и логарифмический декремент колебаний. Вынужденные колебания. Резонанс. Условия наблюдения резонанса в колебательной системе.**

Пусть пружинный маятник - это тело  $m$ , подвешенное на пружине жесткостью  $k$ , погруженное в некоторую жидкость, из-за которой на тело действует выталкивающая сила Архимеда, и сила сопротивления  $F_c$ , которую мы будем считать пропорциональной  $V$ . Кроме того, на груз будет действовать сила тяготения и упругости. Запишем для  $m$  второй закон Ньютона:

$$mx'' = mg - F_{\text{Арх}} - kx - rv_x$$

Заменим постоянные силы:



$$x'' + x\beta x' + \omega_0^2 x - \frac{F_{\text{Пост}}}{m} = 0$$

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Если  $r^2 > 4mk$ , то в системе действует мощная сила трения. Иначе малая мощность силы трения позволяет системе многократно проходить через положение равновесия.

$$\delta = \frac{A_0(t)}{A_0(t+T)} = e^{\beta T}$$

- декремент, а его логарифм - логарифмический декремент.

Постоянные силы не влияют ни на частоту, ни на начальные данные, ни на затухание.

Резонанс - процесс неограниченного возрастания амплитуды при приближении частоты гармонической силы к собственной частоте свободных колебаний маятника.

## 12. Механические волны. Фаза, фронт волны.

Волновой вектор и число, связь с длиной волны.

Частота и период волны. Классификация волн. Фазовая скорость. Интерференция волн в волновом пакете.

Групповая скорость волн.

Волна – это процесс распространения колебаний в среде

Механические волны - механические возмущения, деформации, распространяющиеся в упругой среде.

Среда - упругая, если ее деформации, вызываемые внешними воздействиями, полностью исчезают после прекращения этих воздействий.

Классификация волн (механические)

1. Поперечная волна: частицы среды смещаются в направлении, перпендикулярном направлению распространения механической волны.

Пример: волны, распространяющиеся по струне или резиновому жгуту в натяжении

2. Продольная волна: частицы среды смещаются в направлении распространения механической волны

Пример: волны, распространяющиеся в газе или упругом стержне.

Классификация волн (в целом, с вики)

Имеется множество классификаций волн, различающихся по своей физической природе, по конкретному механизму распространения, по среде распространения и т. п.

По своему характеру волны подразделяются на:

- По признаку распространения в пространстве: [стоячие](#), [бегущие](#).
- По характеру волны: [колебательные](#), уединённые ([солитоны](#)).
- По типу волн: [поперечные](#), [продольные](#), смешанного типа.
- По законам, описывающим волновой процесс: линейные, нелинейные.
- По свойствам субстанции: волны в дискретных структурах, волны в непрерывных субстанциях.

- По геометрии: сферические (пространственные), одномерные (плоские), спиральные.

Бегущие волны, как правило, способны удаляться на значительные расстояния от места своего возникновения (по этой причине волны иногда называют «колебанием, оторвавшимся от излучателя»)

Фаза волны определяет по заданной амплитуде состояние колебательной системы в любой момент времени.

Фронт волны - поверхность, до которой дошла волна в определенный момент времени.

Фазовая скорость, длина, частота

Фазовая скорость  $v_\phi$  - это скорость распространения данной фазы колебаний, т.е. скорость волны.

Связь длины волны  $\lambda$ , фазовой скорости  $v_\phi$  и периода колебаний  $T$  задается соотношением:

$$\lambda = v_\phi T.$$

Учитывая, что  $T = \frac{1}{\nu}$ , где  $\nu$  - линейная частота волны,  $T$  - период, а циклическая

частота волны  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ , получим разные формулы для фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}.$$

Для волнового процесса характерна периодичность по времени и по пространству.

$T$  - период колебаний точек среды. Роль пространственного периода играет длина волны  $\lambda$ . Соотношение между периодом и циклической частотой задается формулой:  $T\omega = 2\pi$ . Аналогичное соотношение можно записать для длины волны и величиной  $k$ , называемой *волновым числом*:  $\lambda k = 2\pi$ .

Таким образом. Можно добавить еще одно уравнение для фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

### 1.2.3. Фазовая скорость различна для разных сред

типы волновых фронтов (ВФ):

- 1) сферический ВФ  
(точечный источник)

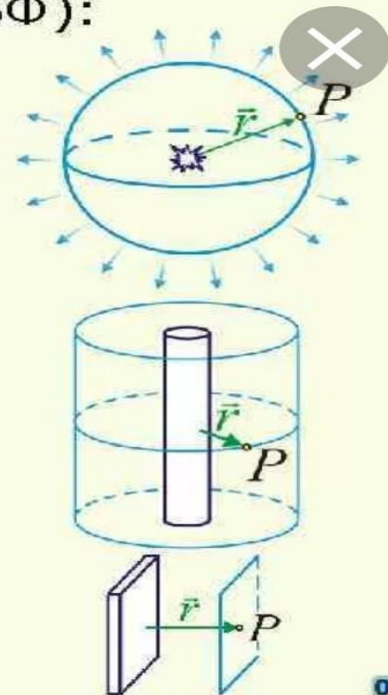
$$\xi_P = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi)$$

- 2) цилиндрический ВФ  
(источник в виде нити)

$$\xi_P = \frac{A}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - kr + \varphi)$$

- 3) плоский ВФ

$$\xi_P = A \cos(\omega t - kr + \varphi)$$



13. Преобразования инерциальных систем координат.  
Инварианты и постулаты Галилея и Эйнштейна преобразований. Скорость света и интервал.  
Преобразования Лоренца. Следствия: преобразование скорости, относительность одновременности, релятивистское сокращение длины.

Преобразования Галилея для систем, одна из которых движется с постоянной скоростью  $u$  относительно другой:

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Наличие второго инварианта позволяет построить преобразования инерциальных систем при специальной взаимоориентации, если считать, как и в случае преобразований Галилея, преобразования линейными. Необходимо только учитывать, что факт инвариантности скорости заставляет нас работать не в 3-мерном, а в 4-мерном пространстве времени (временная координата рассматривается наряду с пространственными). Такое пространство называется пространством событий.

Пусть существует т.А с координатой  $r_1$  и т.В с координатой  $r_2$ . В момент времени  $t$  происходит пуск светового сигнала из А и его прием в В. Если А и В в вакууме, то

$$C^2 * \Delta t^2 - \Delta r^2 = \Delta S^2 = 0$$

Величина  $\Delta S^2$  называется интервалом между указанными событиями. Эта величина имеет 0 значение для событий в любой инерциальной системе координат (т.е. она истинный скаляр в пространстве).

Для близких точек пространства и моментов времени

$$\Delta S^2 = dS^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = inv(c = inv).$$

Т.о., переход из k в k' описывается соотношением под названием преобразования Лоренца:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

В преобразованиях Лоренца координаты y и z не меняются.

Обратное преобразование из k' в k:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

$$\beta \rightarrow -\beta = -\frac{u}{c}$$

Следствие 1: равносильность всех инерциальных систем координат.

Следствие 2: видно, что комплекс ct в таких преобразованиях изменяется по абсолютно таким же правилам, что и координата x. Т.о., время становится практически такой же координатой, как и x, y, z.

Следствие 3: релятивистское сокращение длины:

$$y = y'$$

$$b = b' \sqrt{1 - \beta^2}$$

Относительность одновременности (парадокс близнецов, возникающий из-за непонимания правил применения преобразований Лоренца):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

#### 14. Релятивистский импульс и сила. Основное уравнение релятивистской динамики. Полная, кинетическая энергия покоя. Связь и преобразования энергии и импульса. 4-векторы событий и энергии-импульса. Пространство-время Минковского и геометрический смысл преобразований Лоренца.

Для замкнутой системы из релятивистских частиц закон сохранения ньютоновского импульса не выполняется. Учитывая громадную роль, которую играют законы сохранения, в теории относительности за фундаментальный принимают закон сохранения импульса и уже от него находят выражение для самого импульса.

Релятивистский импульс частицы:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Чтобы удовлетворить требованиям принципа относительности, основное уравнение динамики должно также иметь отличный от ньютоновского вид (и переходить в него только при  $v \ll c$ ).

Основное уравнение релятивистской динамики:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = \mathbf{F}.$$

Выражение для релятивистской кинетической энергии частицы:

$$K = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right),$$

Энергия покоя:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Полная энергия частицы:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + K.$$

Пусть частица движется со скоростью  $v = dl/dt$  в  $K$ -системе отсчета. Из формулы (7.13) следует, что элементарный интервал между двумя событиями, которые происходят с частицей, есть

$$ds = \sqrt{c^2(dt)^2 - (dl)^2} = cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Имея в виду это выражение, представим проекции импульса. Координаты и время входят в преобразования Лоренца линейно, поэтому выделим в выражениях для  $p$  и  $E$  одинаковую часть ( $m_0c$ ).

Делая эту замену в преобразованиях Лоренца (7.8), получим сразу искомые преобразования импульса и энергии:

$$p'_x = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad (8.17)$$

4-мерное пространство с векторами, подобными  $dS_4$  называется пространством Минковского.

$dS_4 = \{cdt; idx; idy; idz\}$  - вектор событий

В пространстве Минковского преобразования Лоренца описываются матрицами вращения, в таком пр-ве поворот осуществляется одновременно вокруг осей  $y$  и  $z$ , то есть он меняет только координату  $x$  и  $ct$ .

$$W_4 = \{W; ip_x c; ip_y c; ip_z c\}$$

где  $W_4$  - вектор энергии импульса частицы

4-вектор (четыре-вектор, четырёхвектор) — вектор в четырёхмерном пространстве Минковского. Координаты 4-вектора при переносе или повороте системы отсчёта преобразуются как соответствующие им координаты в пространстве Минковского.

- Геометрический смысл преобразований Лоренца

$$x\ddot{y} = \gamma (x - \beta ct), \quad ct\ddot{y} = \gamma (ct - \beta x).$$

Важнейшим свойством преобразования поворота является сохранение расстояния между любыми двумя точками:  $r_{12} = r\ddot{y}_{12}$ .

Итак, основной результат состоит в том, что преобразования Лоренца можно интерпретировать, как **псевдоевклидово вращение** системы координат в пространстве Минковского.

## 1. Способы описания эволюции макросистем. Подходы кинетической теории и термодинамики.

Микроописание: фазовое пространство и одночастичная функция распределения. Концентрация частиц и плотность вероятности распределения частиц по скорости. Свойства плотности вероятности.  
Кинетические средние.

Описать динамику макросистемы можно определяя некоторые эффекты характеристики макросистем, через которые можно получить достаточно подробную информацию по ней. Степень подробности будет зависеть от решения задачи.

Кинетический подход требует конкретных деталей внутреннего устройства системы.

Термодинамический подход: описание через взаимодействие с другими системами.

Кинетическое микроописание макросистем:

В основу описания газов заложено понятие одночастичной функции:

$$f_{\alpha}(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v} d\underline{r} = dN_{\alpha} \quad (1)$$

Состоит из 5 переменных и ее физ. смысл уст (1).

$dN_{\alpha}$  — количество частиц сорта  $\alpha$  многокомпонентного газ, которое находится в малой окрестности  $d\underline{v} = d\underline{r} = dx dy dz$  точки  $\underline{r}$  в момент времени  $t$  и имеют там скорости, принадлежащие диапазону:

$$(\underline{v}, \underline{v} + d\underline{v}) = (\text{по каждой координате то же самое})$$

$\frac{dN_{\alpha}}{dv}$  — малая часть концентрации  $n_{\alpha}$  (общее количество частиц в эффективном кубометре), которая связана с узким диапазоном скоростей.

$$dn_{\alpha} = \frac{dN_{\alpha}}{dv} = f_{\alpha}(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v} \quad (3)$$

Замечание: Скорость меняется  $(-\infty, \infty)$

В результате из (3):

$$n_{\alpha}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{v}} dn_{\alpha} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha}(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v} \quad (4)$$

$n_a(\underline{r}, t)m_{1a} = p_m(\underline{r}, t)$ - массовая плотность (общая масса в-ва рода альфа в эф кубометре)

$n_a(\underline{r}, t)q_{1a} = p_3(\underline{r}, t)$ - плотность заряда.

Эти величины важны, поскольку экспериментально количество части не определяется.

Разделим (4) на концентрацию и внесем под знак интеграла:

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{f_a(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v}}{n_a(\underline{r}, t)} = \int \int \int \varphi_a(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v} = dP_a (P - \text{вероятность, что скорость окажется в нашем диапазоне})(6)$$

Слагаемые, образующие первый интеграл, имеют смысл отношения числа частиц в одной скоростной группе эффективного кубометра к общему их числу. Это вероятность того, что скорость частицы сорта альфа будет близкой к  $\underline{v}$ , функция  $\varphi$ - плотность вероятности распределения частиц по скорости. Заключительная часть (6) - условие нормировки.

Информация о вероятности тех или иных значений скорости позволяет произвести расчет среднего арифметического для любой функции газа.

В частности для любой  $\langle \Psi(\underline{v}) \rangle_a(\underline{r}, t)$  (векторной или скалярной) ее среднее значение в эф кубометре определяется:

$$\langle \Psi(\underline{v}) \rangle_a(\underline{r}, t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \Psi_a(\underline{v}) dP_a(\underline{v}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \Psi_a(\underline{v}) \varphi_a(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v} = \frac{1}{n_a(\underline{r}, t)} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \Psi_a(\underline{v}) f_a(t, \underline{r}, \underline{v}) d\underline{v}$$

## 2. Элементы теории вероятностей. Относительные частоты и вероятности. Средние арифметические значения дискретных случайных величин. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности. Условие нормировки плотности вероятности. Средние характеристики непрерывных величин.

Пусть  $X(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N(m_1, \dots, m_k)$

Измерим значение величины  $N$  раз и рассчитаем средний арифметический результат измерений. Рассмотрим неслучайную функцию  $\Psi(x)$  от случайного аргумента  $x$ .  $m_k$  для случайной величины  $\Psi(x)$  будут точно такие же, как для аргументов.



$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle_{\vec{m}} = \frac{(x_1 + \dots + x_1) + (x_2 + \dots + x_2) + \dots + (x_n + \dots + x_n)}{N} = \\ = \sum_{k=1}^N x_k \frac{m_k}{N} = \sum_{k=1}^n x_k \omega_k \\ \langle \Psi_n(x) \rangle_{\vec{m}} = \dots = \sum_{k=1}^n \Psi(x) \omega_k \\ \sum_{k=1}^n \omega_k = 1 \end{array} \right.$$

Проведя еще ряд  $N$  измерений получится другой вектор  $\mathbf{m}$ . Компоненты 1 и 2 в (9) окажутся такими же, а значения функции могут оказаться совершенно другими.  $\omega$ - называется относительными частотами появления случайных значений аргумента или функции от аргумента в конкретной суммарной серии. Чтобы снять зависимость от конкретной серии в (9) необходимо прийти к другой серии решений, которая любую другую будет содержать как подмножество. Нужно сделать предельный переход.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N} = P_k \quad (10)$$

(10) - вероятность получения значения  $x_k$  случайной величины  $X$ . Тогда соотношения (9) принимают вид:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle = \sum_{k=1}^n x_k P_k \\ \langle \Psi(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \Psi(x_k) P_k \end{array} \right.$$

Первое из соотношения (11) называется нормировкой вероятностей. Можно найти среднюю скорость:

$$(12) \quad \vec{J}_\alpha \langle \vec{V} \rangle_\alpha (\vec{r}, t) n_\alpha(\vec{r}, t) = \\ = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{V} f_\alpha(t, \vec{r}, \vec{V}) d\vec{V} \varphi(V) dx = dP(x) = P$$

### 3. Основные интегральные характеристики макросистем: вектор плотности тока, температура, вектор теплового потока. Их физический смысл и связь с функцией распределения. Моменты функции распределения по скоростям. Эквивалентность произвольной функции распределения бесконечной системы моментов.

### 4. Понятие кинетического уравнения. H-теорема Больцмана и необратимость эволюции макросистем. Кинетическое (статистическое) определение энтропии.

Кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_\alpha(t, \vec{r}, \vec{V})}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{V}} = \sum_\beta J_{\alpha\beta}$$

$$J_{\alpha\beta} = \int \int \int (f_\gamma^* f_\delta^* - f_\alpha f_\beta) P_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(\vec{V}, \vec{V}_\beta) d\vec{V}_\beta$$

В нем  $\vec{F}$  - результирующая сила, которая в момент времени  $t$  действует на частицу сорта альфа со скоростью  $\vec{V}$  вблизи точки  $\vec{r}$ . Величины  $J$  в правой части называются интегралами столкновений частиц сортов альфа и бета. Их конкретный вид определяет кинетическое уравнение. В нашем случае это вид для уравнения Больцмана, которое определяет на эволюцию газа химической реакции. \* показывает, что скорости частиц не являются произвольными.

H-теорема:

$$\frac{dH_\alpha}{dt} \leq 0 \Leftrightarrow f_\alpha = f_{\alpha 0}$$

$$H_\alpha = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha \ln f_\alpha d\vec{V}$$

H - функция Больцмана.

H-теорема отражает закон возрастания энтропии.

$S_\alpha = -kH_\alpha$ ,  $k$  - постоянная Больцмана.

Определение: S называется энтропией газа. Она в ходе эволюции газа только возрастает. Энтропия - мера беспорядка системы.

## 5. Длина свободного пробега, частота, сечение столкновений и эффективный диаметр частиц.

Функция распределения Максвелла по скорости и ее свойства: условия возникновения, максимальная неупорядоченность движения частиц. Равновесный и аттрактивный характер распределения Максвелла.

Распределение Максвелла по модулю скорости:

$$\varphi_{\alpha_0}(V_x) = \left( \frac{m_{\alpha_1}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_{\alpha_1} V_x^2}{2k T_{\alpha}}}$$

Если для газа создать другое распределение по скоростям, а затем снять внешнее воздействие, то степень беспорядка в газе начнет расти и через некоторое время газ окажется в Максвелловском состоянии, после чего эволюция газа прекратится. Процесс перехода из вынужденного состояния, созданного внешним воздействием, в состояние Максвелловского равновесия называется релаксация. Состояния равновесия как бы притягивают газ, поэтому они называются аттракторами. Процесс релаксации является необратимым.

## 6. Распределение Максвелла по модулю скорости, импульса и энергии. Средние характеристики равновесной системы. Наиболее вероятная по модулю скорость, средний модуль и среднеквадратичная скорость. Гипотеза Больцмана о равном распределении энергии по степеням свободы в состоянии равновесия. Распределение Больцмана для потенциального поля. Барометрическая формула. Распределение Максвелла-Больцмана.

Распределение Максвелла по модулю скорости:

$$\varphi_{\alpha_0}(V_x) = \left( \frac{m_{\alpha_1}}{2\pi k T_{\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m_{\alpha_1} V_x^2}{2k T_{\alpha}}}$$

Наиболее вероятная скорость - средняя скорость системы.

Средняя скорость равна нулю в этой формуле. В таком случае наиболее вероятная скорость - нулевая, то есть состояние покоя газа.

В Максвелловском состоянии частица может отправиться в любом направлении и хаотично (из-за столкновения частиц).

Итак, **закон Максвелла даёт распределение частиц по значениям кинетической энергии** а **закон Больцмана – распределение частиц по значениям потенциальной энергии**. Оба распределения можно объединить в единый **закон Максвелла-Больцмана**, согласно которому, **число молекул в единице объёма, скорости которых лежат в пределах от  $v$  до  $v + dv$  равно:**

$$dn_{U,K} = n_0 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{U+K}{kT}} v^2 dv. \quad (2.6.3)$$

7. Зависимость распределения Максвелла от конечного числа макропараметров. Явления переноса как необратимые процессы релаксации. Модель локального равновесия Максвелла. Диффузия, закон Фика, коэффициент диффузии. Вязкость, формула Ньютона, коэффициент вязкости. Теплопроводность, закон Фурье, коэффициент теплопроводности.

Распределение Максвелла однозначно определяется тремя параметрами:  $n_a$ ,  $\langle V \rangle_a$ ,  $T_a$ . Для удобства целесообразно добавить характеристики, показывающие “размер” системы: объем.  $P = nkT \Rightarrow$  информативность  $n$  и  $T$  такая же как и у  $P$  и  $T \Rightarrow$  для задания системы используют  $P, V, T$ .

Процесс перехода из вынужденного состояния, созданного внешним воздействием, в состояние Максвелловского равновесия называется релаксация. Состояния равновесия как бы притягивают газ, поэтому они называются аттракторами. Процесс релаксации является необратимым.

Сила сопротивления движения в жидкости:  $F_c = -rV$ .  $r$  - коэффициент динамической вязкости.

## 8. Возможность описания макросистем в состоянии равновесия на уровне макропараметров.

Происхождение термодинамических координат  $P, V, T$ . Термодинамическое пространство состояний и термодинамический процесс. Уравнение процессов и состояний. Примеры уравнений состояний: уравнение Клапейрона-Менделеева и Ван дер Ваальса. Примеры уравнений процессов, понятие изопроцесса.

Будем рассматривать неподвижную макросистему  $\langle v \rangle_\alpha = 0$ , тогда для удобства решения задач к оставшимся параметрам  $n_\alpha, T_\alpha$  целесообразно добавить характеристики, показывающие общий размер системы, либо количество частиц  $N_\alpha$ , либо объем  $V_\alpha$ .

Но количество частиц – неудобная для экспериментального определения величина.

Вспомнив соотношение  $P = nkT$ , понимаем, **что информативность  $n, k$  такая же, как у  $P, T$** , поэтому для задания состояния макросистем можно использовать набор параметров  $P_\alpha, T_\alpha, V_\alpha$ , каждый из которых легко определяется экспериментально.

Этот набор применяется при описании состояния макросистем в равновесной термодинамике

Если состояние макросистемы однозначно определено набором  $P, V, T$ , так называемыми термодинамическими координатами, то в этом случае мы можем рассматривать термодинамическое состояние с помощью координат. Точка – состояние макросистемы, линия – термодинамический процесс. Для описания этого процесса эволюции состояния можно использовать алгебраические уравнения.

$$F_1'(P, V, T) = 0 \Rightarrow T = \Psi_1(P, V) \quad (31)$$

Поскольку выражение (31) описывает поверхность, только этого уравнения недостаточно. Добавим к (31) независимое уравнение (32)

$$\begin{cases} F_1'(P, V, T) = 0 \Rightarrow T = \Psi_1(P, V) & (31) \\ F_2'(P, V, T) = 0 \Rightarrow T = \Psi_2(P, V) & (32) \end{cases}$$

Пересечение плоскостей - искомая линия. Происхождение (31) и (32): каждое вещество обычно находится в условиях на которые мы можем влиять, следовательно (31) может отражать возможность нашего воздействия на состояние системы. Такое уравнение называется уравнением процесса. (32) можно получить, учитывая, что каждое вещество обладает определенными физическими свойствами. Также установим определение связи между термодинамическими координатами. Уравнение такого происхождения

называются уравнениями состояния вещества

Примеры уравнений состояния:

Ур-е Клапейрона-Менделеева – описывает идеальный газ

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

Идеальный газ – состоит из частиц, которые большую часть времени проводят в состоянии свободного движения. Взаимодействие краткое

Альтернативные записи ур-я:

$$P = nkT$$

$$P\vartheta_\mu = RT, \vartheta_\mu = \frac{v}{\vartheta_\mu}$$

Ур-е Ван дер Ваальса – описывает реальный газ

Каждая частица окружается сферой взаимодействия с некоторыми эффектив радиусами

$$\left(P + \frac{a}{v_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT \quad (36)$$

$a, b$  – постоянные Ван дер Ваальса (в справочнике – характеристики частиц).

На самом деле – непостоянны, зависят от термодин координат.

Примеры уравнений изопроцессов

Изопроцессы – процессы, в которых наряду с массой в-ва (понятие процесса можно ввести только для фиксир массы в-ва) фиксируется одна из термодин координат

Изотерма  $m, T = \text{const}$

Изобара  $m, P = \text{const}$

Изохора  $m, V = \text{const}$

Адиабата  $m, PV^\alpha = \text{const}$  – ур-е Пуассона

$\alpha$  – показатель политропа

$\alpha = 1$  - изотерма

$\alpha = 0$  - изобара

$\alpha = \infty$  - изохора

$\alpha = \gamma$  – адиабата

В адиабате сохраняется энтропия газа, которая тоже термодин координата. Т.е. это тоже изопроцесс.

9. Теплообмен в термодинамике. Работа и количество теплоты переданной теплоты. Эквивалентность теплоты и работы. Геометрическая интерпретация работы в  $P, V$  - координатах. Работа в процессах идеального газа. Теплостойкость системы.  
Термодинамические функции процессов и состояний (термодинамические координаты и потенциал). Математический критерий термодинамических координат. Первое начало термодинамики. Внутренняя энергия как термодинамическая координата.

Математические критерии термодинамических координат такие же как и для математических: любому состоянию газа должен соответствовать единственный и уникальный набор координат. Термодинамические координаты также называются функциями состояния или потенциалами. Координаты, зависящие от способа перехода из состояния в состояние, называются функциями процессов.

Первое начало термодинамики:

$$\Delta Q - \Delta A = \Delta U$$

$$\delta Q - \delta A = dU$$

Количество теплоты  $\Delta Q(\delta Q)$ , которое макросистема получает в ходе термодинамического процесса (его малой части), и работа  $\Delta A(\delta A)$ , которую в этом процессе (на его малом участке) вещество совершит против внешних сил является функциями процесса. Однако их разность от процесса не зависит и дает термодинамическую координату  $\Delta U (dU)$ , которая называется внутренней энергией макросистемы и является функцией состояния.

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$$

$U$  отличается от  $T$  не только постоянным множителем, так как существует зависимость  $i$  от  $T$ .

10. Внутренняя энергия идеального газа. Опыты и эффект Джоуля и Томпсона. Энтальпия. Теорема Джоуля для идеального газа. Применение гипотезы Больцмана для определения внутренней энергии идеального газа. Свойства “числа степеней свободы”.

11. Уравнение Майера. Связи  $C_p$  и  $C_v$ . Адиабатический процесс и способы его реализации. Политропический процесс. Примеры использования 1-го начала для определения теплоемкости в процессах идеального газа. Уравнение Пуассона для адиабатического процесса в идеальном газе. Показатель адиабаты.

**Молярная теплоемкость  $C_p$  газа в процессе с постоянным давлением всегда больше молярной теплоемкости  $C_v$  в процессе с постоянным объемом. Из этой теоремы следует, что молярные теплоемкости газа  $C_p$  и  $C_v$  и их отношение  $\gamma$  могут быть записаны в**

$$\text{виде: } C_v = \frac{i}{2} R, \quad C_p = C_v + R = \frac{i+2}{2} R, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$$

19

$\gamma$  - показатель адиабаты

величина  $\gamma$  зависит исключительно от внутренних свойств самого газа (от многоатомности его молекул) и не зависит от количества вещества в системе

Адиабатический процесс - это процесс без теплообмена с внешней средой. При адиабатном процессе энергообмен рабочего тела с окружающей средой происходит



только в форме работы, энергообмена в форме теплоты нет. Эти условия выражаются соотношением  $dQ=0$ . Тогда уравнение первого закона термодинамики для адиабатного процесса имеет вид  $dU=-dA=-pdV$

Осуществить адиабатический процесс в реальных условиях можно тремя способами.

1) Система должна иметь оболочку, теплопроводность которой равна нулю.

Приближением к такой оболочке может служить сосуд Дьюара, т.е. сосуд с двойными посеребренными стенками, из пространства между которыми выкачан воздух.

2) Процессы, протекающие очень быстро (расширение, сжатие), при которых теплопередача не успевает произойти. Например, накачивание велосипедной шины вызывает ее нагревание вследствие адиабатического сжатия.

3) Процессы, протекающие в очень больших объемах газа, например, в атмосфере. Этот способ, строго говоря, сводите ко второму, так как расширение и сжатие происходит быстрее, чем передача теплоты по всему объему.

Политропический процесс это процесс, в котором  $V$  и  $p$  связаны соотношением  $pV^n=\text{const}$ , где  $n$ -произвольное число, в том числе 0. В таком процессе  $C=\text{const}$ . (все изопроцессы и адиабатический это частные случаи политропического)

Используя первое начало термодинамики  $C=(\Delta U+A)/\Delta T=(imR\Delta T/(2\mu)+A)/\Delta T$   
 $C=(dU+pdV)/dT$ , для идеального газа  $C=(imRdT/(2\mu)+pdV)/dT= imR/(2\mu)+pdV/dT$   
В изохорном процессе ( $m,V=\text{const}$ ) :  $C_v=dU/dT=imR/(2\mu)=iRv/2$  (последняя  $v$ -кол.молей)

В изобарном процессе ( $m,p=\text{const}$ ) :  $C_p=(dU+pdV)/dT=(i+2)Rv/2$  (последняя  $v$ -кол.молей)

В изотермическом теплоемкость считают бесконечной, в адиабатном теплоемкость равна нулю.

## 12. Понятие тепловой машины. Ее составные элементы и к.п.д. Алгоритм расчета к.п.д. Идеальная обратимая тепловая машина Карно. Теоремы (1-я и 2-я) Карно. Второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса и Кельвина.

Тепловой машиной называется устройство, использующее тепловую энергию для совершения механической работы.

Тепловая машина состоит из нагревателя, рабочего тела (например, пар или горячая смесь в ДВС) и холодильника. Холодильником, в конечном счете, служит окружающая среда. Тепловая машина работает по принципу замкнутого цикла, совершая круговой процесс.

выгоднее. Поэтому тепловую машину принято характеризовать коэффициентом полезного действия  $\eta$  (сокращенно к.п.д.), который определяется как отношение совершаемой за цикл работы  $A$  к получаемому за цикл теплу  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (125.4)$$

Поскольку согласно (125.3)  $A = Q_1 - Q_2'$ , выражение для к.п.д. можно записать в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - Q_2'/Q_1 \quad (125.5)$$

Из определения к.п.д. следует, что он не может быть больше единицы. по II закону не может быть = 1

Цикл Карно (рис 3.4) состоит из нагревателя  $T_1$ , холодильника  $T_2$  и рабочего тела, которое является цилиндром с поршнем с идеальным газом. Две изотермы, две адиабаты (рис 3.5). При изотермическом расширении 1-2 газ нагревается от  $T_1$  и получает тепло  $Q_1$ . На изотерме 3-4 отдает тепло  $Q_2'$  холодильнику  $T_2$ . Кпд= $1-Q_2'/Q_1$ . Данный цикл является обратимым (если проводить беск. медленно). Он может быть проведен в обратном направлении, и при этом газ совершает отрицательную работу, нагреватель получит обратно  $Q_1$ , холодильник отдает газу  $Q_2'$ , которое он получил в прямом цикле. Как бытовой холодильник с кухни.

Далее см рис 3.6. Изотермы 1-2,3-4. Адиабаты 2-3,4-1.  $Q_1 = T_1(S_2 - S_1) = \text{площадь}_{1-2}$   
 $Q_2' = T_2(S_2 - S_1) = \text{площадь}_{3-4}$

Площадь прямоугольник =  $A$  (совершенная за цикл) =  $Q_1 - Q_2' \Rightarrow \text{кпд} = 1 - T_2/T_1$

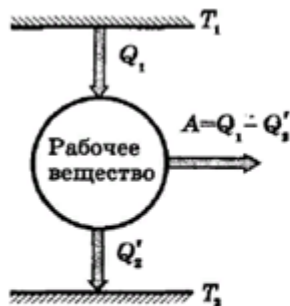


Рис. 3.4

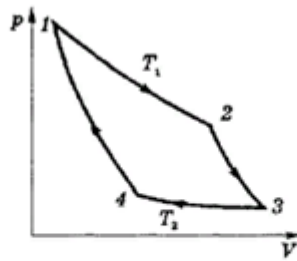


Рис. 3.5

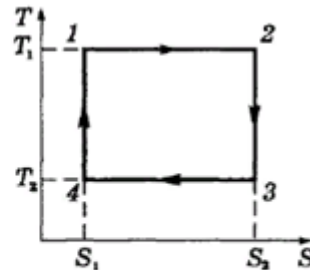


Рис. 3.6

(3.11)

1 теорема Карно: КПД обратимых двигателей, работающих по циклу Карно, зависит только от температур  $T_1$  и  $T_2$  – нагревателя и холодильника, но не зависит ни от устройства двигателя, ни от рода рабочего вещества.

2 теорема Карно: КПД любой тепловой машины, работающей по необратимому циклу, меньше КПД машины с обратимым циклом Карно, при условии равенства температур их нагревателей и холодильников.

Второе начало термодинамики:

**Формулировка Кельвина** невозможен процесс, единственным результатом которого является получение системой теплоты от одного источника (теплового резервуара) и выполнение ею эквивалентного количества работы. Из принципа Томсона следует теорема Карно, на основании которой удаётся построить абсолютную термодинамическую шкалу температур[11].

**Формулировка Клаузиуса** невозможен процесс, единственным результатом которого является получение системой теплоты от одного тела и передача её другому телу, имеющему более высокую температуру, чем первое («Теплота не может переходить сама собой от более холодного тела к более тёплому»).

13.      Энтропия как термодинамическая  
            координата процессов равновесия.  
            Термодинамическое определение энтропии.  
            Теорема Нерста и третье начало  
            термодинамики. Док-во 1-ой теоремы Карно  
            (КПД машины Карно). Закон возрастания  
            энтропии в спонтанных процессах  
            изолированных макросистем. Энтропия и  
            время макросистем. Примеры расчёта энтропии.

Понятие энтропии было впервые введено в 1865 году Рудольфом Клаузиусом. Он определил *изменение энтропии* термодинамической системы при *обратимом процессе* как отношение изменения общего количества тепла  $\Delta Q$  к величине абсолютной температуры  $T$ :

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}.$$

Третье начало термодинамики или теорема Нернста – Планка: энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

#### 14. Реальные вещества. Эффективный потенциал взаимодействия молекул. «Связанное» давление реальных веществ. Причина преобразования уравнения Клапейрона-Менделеева в уравнения Ван дер Ваальса. Внутренняя энергия реальных веществ. Понятие вириального уравнения.

Идеальный газ состоит из частиц, которые большую часть времени проводят в состоянии свободного движения. Определить идеальный газ, как газ из не взаимодействующих частиц, так как в таком газе макроописание состояния невозможно.

Модель идеального газа хорошо работает в условиях близких к нормальным, но при сжатии газа в уравнении состояния необходимо учитывать взаимодействующие частицы. Такие газы называются реальными и у них каждая частица окружается сферой взаимодействия с некоторым эффект. радиус., где за пределами которых полями частиц - центром сфер пренебрегают.

В таких системах, к которым можно относить как жидкости, так и газы используют обобщение уравнения идеального газа Менделеева-Клапейрона:

$$\left(P + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT \quad (36)$$

- уравнение Ван дер Ваальса

$a, b$  – постоянные Ван дер Ваальса (в справочнике – характеристики частиц).

На самом деле – непостоянны, зависят от термодин координат.

Т.к. сфера взаимодействия идеального газа стянута в точку  $V_\mu$  – объем движения идеального газа.

Для реальных веществ он должен быть уменьшен на суммарный объем сфер взаимодействия частиц одного поля

$$b = \frac{4}{3} \pi r_{\text{взаим}}^3 N_A$$

Поправка к давлению в (36) - это так называемое “связанное” давление.

Возникновение поправки – частицы веществ обычно взаимодействуют с помощью потенциального поля.

При малых расстояниях частицы отталкиваются, при больших – притягиваются.

Для сил с потенциалом потерь в регистрации давления обратно пропорциональна  $(V^2)_\mu$  (ребята это  $v$  в квадрате с нижним индексом  $\mu$ )

Очевидное обобщение (36)

$$\left(P + \frac{a}{V_\mu^2}\right)(V_\mu - b) = RT + a_1 T^2 + a_2 T^3 + \dots \quad (39)$$

Уравнение состояния вида (39) называется вириальным, а коэффициенты  $a_k$  - вириальными коэффициентами, каждый из которых достигается большой кривью поскольку они получаются по результатам очень точных и трудоемких экспериментов в экстремальных условиях. Так как погрешность уравнений (36, 39) при нормальных условиях невелика

15. Изотермы Ван дер Ваальса. Критическая точка вещества. Невозможность реализации изотерм Ван дер Ваальса. Неустойчивые состояния веществ и их применения. Фазы и фазовые переходы. Температура и теплота перехода. Переходы первого и второго рода. Изотермы Эндрюса (реальные изотермы). Области фазового перехода и равновесия. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса для кривой фазового равновесия. Тройная точка вещества. Связь с абсолютной шкалой температур.

## 16. Свойства жидкостей. Жидкие кристаллы (понятие). Поверхностный слой и потенциальная энергия поверхностного слоя. Сила и коэффициент поверхностного натяжения. Физический смысл коэффициента поверхностного натяжения как поверхностной плотности потенциальной или свободной энергии. Поверхностные эффекты в жидкости. Создание дополнительного давления под выпуклой поверхностью. Формула Лапласа. Эффекты на границе раздела жидкости и твердого тела. Смачивание и несмачивание жидкостью твердой поверхности. Краевой угол. Капиллярные явления.

В жидкой фазе молекулы находятся вплотную друг к другу, но как и в газе, обладают большой подвижностью и расположены неупорядоченно. Энергия взаимодействия молекул сравнима с их кинетической энергией, и это проявляется в том, что жидкость занимает определенный объем.

Свойства жидкостей:

Текучесть, сохранение объема (трудно сжать механически. Расширяется при охлаждении, сжимаются при охлаждении), вязкость (сопротивление перемещению одной из частей относительно другой — то есть как внутреннее трение,  $\eta = 1/3 < v > < \lambda > \rho$ , где 1 — средняя скорость движения, 2 — средняя длина свободного пробега, 3 — плотность)), образование свободной поверхности и поверхностное натяжение (Из-за сохранения объёма жидкость способна образовывать свободную поверхность;

Поверхностное натяжение может быть объяснено притяжением между молекулами жидкости. Каждая молекула притягивает другие молекулы, стремится «окружить» себя ими, а значит, уйти с поверхности. Соответственно, поверхность стремится уменьшиться.), испарение (постепенный переход вещества из жидкости в газообразную фазу) и конденсация (переход вещества из газообразного состояния в жидкое), кипение (процесс парообразования внутри жидкости), смачивание (поверхностное явление, возникающее при контакте жидкости с твёрдой поверхностью в присутствии пара, то есть на границах раздела трёх фаз.

Смачивание характеризует «прилипание» жидкости к поверхности и растекание по ней (или, наоборот, отталкивание и нерастекание)), смешиваемость (способность жидкостей растворяться друг в друге), диффузия, перегрев и охлаждение, волны плотности В расположении частиц жидкости наблюдается ближний порядок (по отношению к любой частице расположение ближайших частиц - упорядоченное).

В кристаллах – дальний порядок.

Жидкие кристаллы – в жидкостях с удлинёнными молекулами наблюдается одинаковая ориентация их в пределах значительного объема, что приводит к появлению

анизотропии ряда свойств. Вещества, у которых измеряемые физические свойства не зависят от направления, называют изотропными.

Жидкие кристаллы - вещества в состоянии, промежуточном между твёрдым кристаллическим и изотропным жидким. Ж. к., сохраняя осн. черты жидкости (напр., текучесть), обладают характерной особенностью твёрдых кристаллов – анизотропией свойств.

Поверхностный слой и потенциальная энергия поверхностного слоя

Поверхностный слой - тонкий слой вещества близ поверхности соприкосновения двух фаз (тел, сред), отличающийся по свойствам от веществ в объёме фаз.

Особые свойства его обусловлены сосредоточенным в нём избытком свободной энергии, а также особенностями его строения и состава.

Поверхностный слой на границе конденсированных фаз - межфазным слоем. Толщина П. с. зависит от разных термодинамических параметров системы.

Физический смысл поверхностного натяжения

Молекулы жидкости располагаются настолько близко друг к другу, что силы притяжения между ними имеют значительную величину. Взаимодействие быстро убывает с расстоянием, начиная с некоторого расстояния  $r$  (радиус молекулярного действия). На каждую молекулу, находящуюся в поверхностном слое толщиной  $r$ , будет действовать сила, направленная внутрь жидкости на увеличение потенциальной энергии молекулы. То есть в поверхностном слое молекулы обладают дополнительной потенциальной энергией - поверхностной.

Из-за наличия действующих на молекулы в поверхностном слое сил, направленных внутрь жидкости, жидкость стремится к сокращению своей поверхности, как если бы она была заключена в упруго растянутую плёнку, стремящуюся сжаться (никакой плёнки на самом деле нет).

Коэффициент поверхностного натяжения — это физическая величина, численно равная силе поверхностного натяжения, которая действует на линию разрыва единичной длины. Это так называемый динамический смысл коэффициента поверхностного натяжения. Тогда динамическое определение коэффициента поверхностного натяжения запишем в виде формулы:

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

где  $F$  — модуль силы поверхностного натяжения, которая действует на линию разрыва поверхности. Она направлена по касательной к поверхности раздела двух фаз в направлении сокращения площади поверхности и нормально по отношению к линии разрыва.  $l$  — длина линии разрыва поверхности.

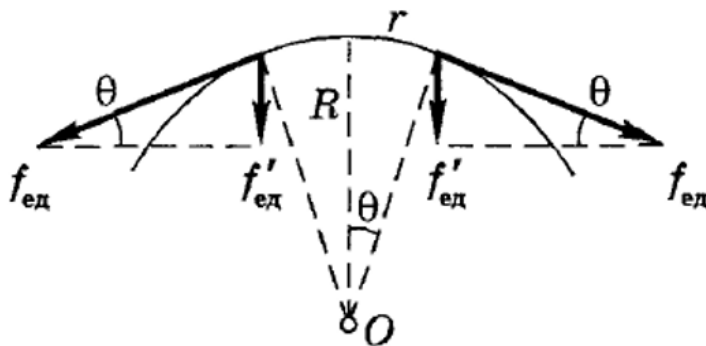
Физический смысл коэффициента поверхностного натяжения как поверхностной плотности потенциальной или свободной энергии

Рассмотрим другой физический смысл - энергетический. Он исходит из того, что при увеличении площади поверхности жидкости некоторое количество молекул из её объёма поднимается на слой поверхности. Внешние силы совершают работу против сил сцепления молекул.

$$\delta A = \sigma dS$$

Тогда  $\sigma = \frac{\delta A}{\delta S}$ . Потенциальную энергию поверхностного слоя можно вычислить:  
 $E = \sigma S$

### Создание дополнительного давления под выпуклой поверхностью, Формула Лапласа



Участок поверхности, где есть кружок радиуса  $r$ , растягивают силы поверхностного натяжения, направленные почти радиально (как зонт). Из-за этих сил **возникает доп** давление

$$\Delta p = \frac{f'_{ед} 2\pi r}{\pi r^2}$$

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}$$

Здесь учтено, что  $f'_{ед} = f_{ед} \theta = \frac{\alpha r}{R}$

$R > 0$  — центр кривизны в жидкости. Иначе — вне

$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  — формула Лапласа

### Эффекты на границе раздела жидкости и твердого тела

Если речь идет о границе раздела двух сред: поверхностная энергия на границе раздела зависит от свойств обеих сред.

Рассмотрим каплю жидкости на поверхности твердого тела (рис. 5.12). Для равновесия необходимо, чтобы все силы, действующие на элемент контура, перпендикулярный рисунку в точ-

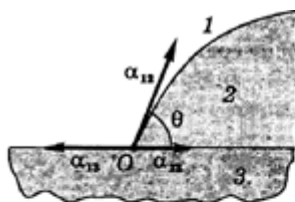


Рис. 5.12

ке  $O$ , уравнивались. Эти силы состоят из сил поверхностного натяжения  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\alpha_{13}$ , действующих вдоль границ раздела между средами. Равнодействующая этих сил  $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{13}$  уравнивается молекулярными силами твердого тела, которые направлены вниз. Поэтому равновесие обеспечивается

равенством нулю суммарной проекции сил на горизонтальное направление, или  $\alpha_{13} = \alpha_{12} \cos \theta + \alpha_{23}$ . Отсюда

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{23}}{\alpha_{12}}, \quad (5.8)$$

где  $\theta$  — так называемый *краевой угол*. Его обычно выбирают в области, занятой жидкостью (как на рис. 5.12).

### Краевой угол, Смачивание и несмачивание жидкостью твердой поверхности



$$\cos \theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{23}}{\alpha_{12}}, \quad (5.8)$$

где  $\theta$  — так называемый *краевой угол*. Его обычно выбирают в области, занятой жидкостью (как на рис. 5.12).

Если  $\theta < \pi/2$ , то говорят, что жидкость *смачивает* поверхность твердого тела. При  $\theta \rightarrow 0$  имеет место *полное смачивание*. Оно будет и при условии, когда правая часть (5.8) окажется больше единицы, т.е. при условии

$$\alpha_{13} > \alpha_{12} + \alpha_{23}.$$

Если  $\theta > \pi/2$ , то жидкость не смачивает поверхность. При  $\theta \rightarrow \pi$  мы имеем *полное несмачивание*. Оно будет наблюдаться и при условии, когда правая часть (5.8) окажется менее  $-1$ , т.е. при условии

$$\alpha_{23} > \alpha_{13} + \alpha_{12}.$$

## Капиллярные явления

Явления, обусловленные втягиванием смачивающих жидкостей в капилляры или выталкиванием несмачивающих жидкостей из капилляров, - **капиллярные явления**.

Поверхность жидкости вблизи стенок сосуда искривляется. Изогнутые поверхности называют менисками. Все явления, связанные с искривлением поверхности жидкости, называют капиллярными. Если жидкость смачивающая, то уровень жидкости в капилляре поднимается, в обратном случае опускается.