1 номера

1 тип - l_p

1 тип

$f: l_{\frac{10}{2}} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = 1{,}81x_{10} + 1{,}62x_{17} + 0{,}48x_{30} + 0{,}65x_{31}$

1) Линейность: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$$f(\alpha x + \beta y) = 1{,}81(\alpha x_{10} + \beta y_{10}) + 1{,}62(\alpha x_{17} + \beta y_{17}) +$$
$$+ 0{,}48(\alpha x_{30} + \beta y_{30}) + 0{,}65(\alpha x_{31} + \beta y_{31}) =$$
$$= 1{,}81\alpha x_{10} + 1{,}81\beta y_{10} + 1{,}62\alpha x_{17} + 1{,}62\beta y_{17} + 0{,}48\alpha x_{30} +$$
$$+ 0{,}48\beta y_{30} + 0{,}65\alpha x_{31} + 0{,}65\beta y_{31} =$$
$$= \alpha(1{,}81x_{10} + 1{,}62x_{17} + 0{,}48x_{30} + 0{,}65x_{31}) +$$
$$+ \beta(1{,}81y_{10} + 1{,}62y_{17} + 0{,}48y_{30} + 0{,}65y_{31}) =$$
$$= \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ — линейность есть}$$

2) Ограниченность:

для l: $\|x\| \le 1 \Rightarrow \underline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}} \le 1}$

$$|f(x)| = |1{,}81x_{10} + 1{,}62x_{17} + 0{,}48x_{30} + 0{,}65x_{31}| \le$$
$$\le 1{,}81|x_{10}| + 1{,}62|x_{17}| + 0{,}48|x_{30}| + 0{,}65|x_{31}| \le$$
$$\le 1{,}81\left(|x_{10}|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}} + 1{,}62\left(|x_{17}|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}} + 0{,}48\left(|x_{30}|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}} +$$
$$+ 0{,}65\left(|x_{31}|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}} \le \left\{ |x_n| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \right\}$$
$$\le \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{2}{10}}}_{\le 1 \text{ (см начало)}} (1{,}81 + 1{,}62 + 0{,}48 + 0{,}65) \le 1{,}81 + 1{,}62 + 0{,}48 +$$
$$+ 0{,}65 = 4{,}56 \Rightarrow \text{ограниченность есть}$$

3) ф-ла Рисса:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$p = \frac{10}{2} \Rightarrow \frac{2}{10} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{8}{10}, \quad q = \frac{10}{8}$$

$$\|f_p\| = \|\tilde{f}_q\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k^{\,q}\right)^{1/q} =$$
$$= \left(1{,}81^{\frac{10}{8}} + 1{,}62^{\frac{10}{8}} + 0{,}48^{\frac{10}{8}} + 0{,}65^{\frac{10}{8}}\right)^{\frac{8}{10}} \text{ — ответ.}$$

2 тип - $L_p([a,b])$

2 тип

$f: L_3([0,1]) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_{[0,1]} x(t^{\frac{1}{6}})t^2\,dt$$

1) Линейность:

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_{[0,1]} \left(\alpha x(t^{\frac{1}{6}})t^2 + \beta y(t^{\frac{1}{6}})t^2\right)dt =$$

$$= \alpha \int_{[0,1]} x(t^{\frac{1}{6}})t^2\,dt + \beta \int_{[0,1]} y(t^{\frac{1}{6}})t^2\,dt = \alpha f(x) + \beta f(y) -$$

линейность есть

2) Ограниченность $\{x(t) \le 1\}$

$$|f(x)| = \left|\int_{[0,1]} x(t^{\frac{1}{6}})t^2\,dt\right| \le \max\left|\int_{[0,1]} \underbrace{x(t^{\frac{1}{6}})}_{\max 1} t^2\,dt\right| \le$$

$$\le \max\left|\int_{[0,1]} t^2\,dt\right| = \max\left|\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

ограниченность есть

3) ф-ла Рисса:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p = 3$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{3}; \quad q = \frac{3}{2}$$

Делаем замену: $t^{\frac{1}{6}} = s$, $t = s^6$ $(t^2 = s^{12})$

$dt = ds^6 = 6s^5 ds$

$$f(x) = \int_{[0,1]} x(t^{\frac{1}{6}})t^2\,dt = \int_{[0,1]} x(s)\,6s^5 \cdot s^{12}\,ds$$

$$\|f\| = \|\tilde{f}\| = \left(\int_{[0,1]} (6s^{17})^{3/2} ds\right)^{2/3} = \left(\int_{[0,1]} \sqrt{216}\, s^{\frac{51}{2}} ds\right)^{2/3} =$$

$$= \left(\sqrt{216}\,\frac{s^{\frac{53}{2}}}{53/2}\Big|_0^1\right)^{2/3} = \left(\frac{2\sqrt{216}}{53}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 216}{53^2}}$$

2) $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^3 dt\right)^{\frac{1}{3}} \le 1$

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t^{\frac{1}{6}})t^2 dt\right| \le \int_0^1 |x(t^{\frac{1}{6}})|\,t^2 dt = \left\{\begin{matrix} t^{\frac{1}{6}} = s \\ dt = 6s^5 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 |x(s) \cdot 6s^{17}|\,ds \le$$

$$\le \underbrace{\left(\int_0^1 |x(s)|^3 ds\right)^{\frac{1}{3}}}_{\le 1} \left(\int_0^1 |6 \cdot s^{17}|^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2}{3}} \le 6\left(\frac{2}{53} s^{53/2}\Big|_0^1\right)^{\frac{2}{3}} = 6\left(\frac{2}{53}\right)^{\frac{2}{3}} < \infty \quad \text{огр.} \oplus$$

нер-во Гельдера

3 тип - $C([a, b])$ с синусами(косинусами)

3 тип

$f : C([0, 8]) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \int_0^1 x(t)\, t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt$

1) Линейность:

$f(\alpha x + \beta y) =$

$= \int_0^1 \left(\alpha x(t) t^9 \cos(\pi t^{10}) + \beta y(t) t^9 \cos(\pi t^{10})\right) dt =$

$= \alpha \int_0^1 x(t) t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt + \beta \int_0^1 y(t) t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt =$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$ – линейность есть

2) Ограниченность: $\{x(t) = 1\}$

$|f(x)| \le \max \left| \int_0^1 x(t) t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt \right| = \max \left| \int_0^1 t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt \right| =$

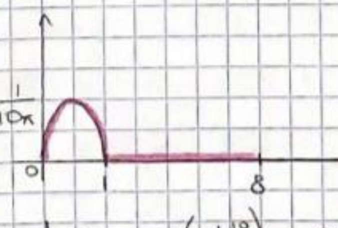
$= \max \left| \frac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi} \Big|_0^1 \right| = \max |0| = 0 \Rightarrow$

$|f(x)| \le 0$ - ограниченность есть

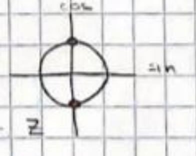
3) Теор Рисса

$\left\{ \int_0^1 x(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, d\varphi(t) \right\}$

$\int_0^1 x(t) t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt = \int_0^1 x(t)\, d\, \frac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi}$



$y' = \cos(\pi t^{10}) = 0$



$\Rightarrow$

$\pi t^{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$t^{10} = \frac{1}{2} + k,$ $\quad$ при $k = 0$ $\quad t^{10} = \frac{1}{2} \in [0, 1]$

при $k = 1$ $\quad t^{10} = 3/2 \notin [0, 1]$ $\Rightarrow k = 0$

Максимальное значение $\frac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi}$ принимает при $k = 0$ (те $\pi t^{10} = \frac{\pi}{2}$).

$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{10\pi} = \frac{1}{10\pi}$

Считаем полную вариацию:

$$\|\tilde{f}(x)\| = V_0^8\left(\frac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi}\right) = \frac{1}{10\pi} + \frac{1}{10\pi} = \frac{2}{10\pi} = \frac{1}{5\pi} \text{ – ответ.}$$

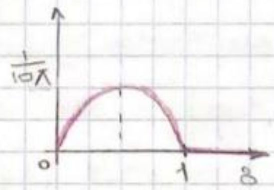
$$\|\tilde{f}(x)\| = \|f(x)\|$$

По Сыроежкину:

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, t^9 \cos(\pi t^{10})\, dt = \int_0^1 x(t)\, \frac{d \sin(\pi t^{10})}{10\pi} =$$

$$= \int_0^1 x(t)\, d\,\frac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi} + \int_1^8 x(t)\, dc$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t^{10})}{10\pi}, & x \in [0,1] \\ c, & x \in (1,8] \end{cases}$$



4 тип - $C([a,b])$ с суммой (ржомба)

4 тип

$f: C([0,7]) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_0^1 x(t^{\frac{1}{3}})t^9\,dt + 8x(6)$

1) Линейность:

$f(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 \left(\alpha x(t^{\frac{1}{3}})t^9 + \beta y(t^{\frac{1}{3}})t^9\right)dt + 8(\alpha x(6) + \beta y(6)) =$

$= \alpha \int_0^1 x(t^{\frac{1}{3}})t^9\,dt + \beta \int_0^1 y(t^{\frac{1}{3}})t^9\,dt + 8\alpha x(6) + 8\beta y(6) =$

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

2) Ограниченность: $\{|x(t)| \leq 1\}$

$|f(x)| \leq \sup \left| \int_0^1 \underbrace{x(t^{\frac{1}{3}})}_{1} t^9\,dt + 8\underbrace{x(6)}_{1} \right| =$

$= \sup \left| \int_0^1 t^9\,dt + 8 \right| = \sup \left| \frac{t^{10}}{10}\Big|_0^1 + 8 \right| =$

$= \sup \left| \frac{1}{10} + 8 \right| = 8\frac{1}{10} \Rightarrow |f(x)| \leq 8\frac{1}{10}$ – ограниченность есть

3) Разбиваем функционал на сумму 2х

$f = f_1 + f_2$, где $f_1 = \int_0^1 x(t^{\frac{1}{3}})t^9\,dt$

$f_2 = 8x(6)$

3.1) Работаем с f_1:

$f_1 = \int_0^1 x(t^{\frac{1}{3}})t^9\,dt \;\;=$

Замена:

$t^{\frac{1}{3}} = s;\quad t = s^3 \quad (t^9 = s^{27})$

$dt = ds^3 = 3s^2\,ds$

$= \int_0^1 x(s)\,3s^2 \cdot s^{27}\,ds = \int_0^1 x(s)\,3s^{29}\,ds = \int_0^1 x(s)\,d\underbrace{\frac{3s^{30}}{30}}_{\varphi_1} =$

$= \int_0^1 x(s)\,d\frac{s^{30}}{10}$

Считаем норму (с помощью полной вариации):

$V_0^1\left(\frac{s^{30}}{10}\right) = V_0^1\left(\frac{t^{10}}{10}\right) = \frac{1}{10} = \|f_1\|$

3.2) Работаем с f_2:

$f_2 = 8\chi(6)$; $\mu \sim ([0; 6)) = 0$

$\mu \sim \{6\} = 1$

$\mu \sim ((6; 7]) = 0$

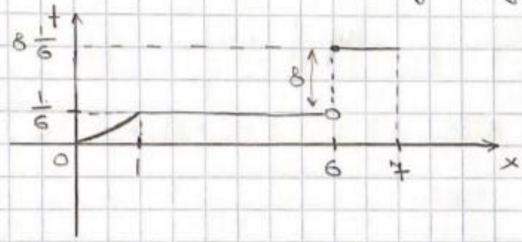
Полная вариация:

$V_0^7[\varphi_2] = 8\underbrace{\mu\{6\}}_{\text{не уверена, что можно так писать}} = 8 = \|f_2\|$

4) { по св-вам: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ }

$V_0^7[\varphi] \leq V_0^7[\varphi_1] + V_0^7[\varphi_2] = \frac{1}{6} + 8 = 8\frac{1}{6}$ – оценим сверху

Начертим общий вид функции:



{ $V_a^b[\varphi] = |\varphi(b) - \varphi(a)|$ } ф-ла полной вариации

$V_0^7[\varphi] \geq |\varphi(0) - \varphi(6-\varepsilon)| + |\varphi(6-\varepsilon) - \varphi(6)| +$

$+ |\varphi(6) - \varphi(7)| =$ (при $\varepsilon \to 0$)

$= \frac{1}{6} + 8 + 0 = 8\frac{1}{6}$ – оценим снизу =>

$$\left.\begin{aligned} \|f\| &= V_0^7[\varphi] \geq 8\tfrac{1}{6} \\ \|f\| &= V_0^7[\varphi] \leq 8\tfrac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|f\| = \underline{8\tfrac{1}{6}} \text{ – ответ}$$

2 номера♡

1 тип (найти ортогональную проекцию)

1 тип

$L_2([-1;1])$ $\quad (x, y) = \int_{[-1;1]} x(t)\, y(t)\, t^2\, dt$

Вычислить ортогональную проекцию $x(t) = t^2$ на $Lin\{\varphi_1, \varphi_2\}$, где $\varphi_1(t) = t^{15}$, $\varphi_2(t) = t^{16}$.

1) Смотрим, ортогональны ли векторы

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} t^{15} \cdot t^{16} \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^{33}\, dt = \frac{t^{34}}{34}\Big|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow$$

они ортогональны

2) Общая ф-ла для проекции:

$$\left\{ \hat{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k x)}{(\varphi_k \varphi_k)} \cdot \varphi_k \right\}$$ — надо записать

$$(\varphi_1, x) = \int_{-1}^{1} t^{15} \cdot t^2 \cdot t^2 dt = \int_{-1}^{1} t^{19}\, dt = \frac{t^{20}}{20}\Big|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow$$

(φ_1, φ_1) не считаем (тк в числителе 0 - дробь обнулится)

$$(\varphi_2, x) = \int_{-1}^{1} t^{16} \cdot t^2 \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^{20}\, dt = \frac{t^{21}}{21}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{21} + \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \int_{-1}^{1} t^{16} \cdot t^{16} \cdot t^2\, dt = \int_{-1}^{1} t^{34}\, dt = \frac{t^{35}}{35}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35}$$ — подставляем.

$$\hat{x} = \frac{(\varphi_1, x)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \varphi_1 + \frac{(\varphi_2 x)}{(\varphi_2 \varphi_2)} \varphi_2 = 0 + \frac{2/21}{2/35} \cdot t^{16} =$$

$$= \underline{\frac{35}{21} t^{16}}$$ ответ.

2 тип (вычислить расстояние от точки)

2 тип

$L_2([0,1])$ $\quad (x,y) = \int\limits_{[0,1]} x(t)\,y(t)\,e^{6t}\,dt$

Вычислить расстояние до точки $y(t) = e^{-10t}$ до множества $A = \{x \in L_2([0,1]) : \int\limits_{[0,1]} e^{13t} x(t)\,dt = 0\}$

1) $A = \{x \in L_2([0,1]) : (e^{7t}, x) = 0$

// чем отличается A от (x,y) см. условие : e^{13t} и e^{6t} – разница e^{7t}

2) $$y - \hat{y} = \frac{(y, e^{7t})}{(e^{7t}, e^{7t})} e^{7t} =$$

см условие

$$(y, e^{7t}) = \int\limits_0^1 e^{-10t} \cdot e^{7t} \cdot e^{6t}\,dt = \int\limits_0^1 e^{3t}\,dt = $$
$$= \frac{e^{3t}}{3}\Big|_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}$$

$$(e^{7t}\ e^{7t}) = \int\limits_0^1 e^{7t} e^{7t} e^{6t}\,dt = \int\limits_0^1 e^{20t}\,dt = \frac{e^{20t}}{20}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{e^{20} - 1}{20}$$

$$= \frac{(e^3 - 1)20}{3(e^{20} - 1)} e^{7t}$$

3) Ищем скалярное произведение $(y - \hat{y}, y - \hat{y})$:

$$(y - \hat{y}; y - \hat{y}) = \int\limits_0^1 \left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)} e^{7t}\right)\left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)} e^{7t}\right) e^{6t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)}\right)^2 e^{14t} e^{6t}\,dt =$$

$$= \left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)}\right)^2 \int\limits_0^1 e^{20t}\,dt = \left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)}\right)^2 \cdot \frac{e^{20t}}{20}\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{20(e^3-1)}{3(e^{20}-1)}\right)^{20} \cdot \frac{e^{20}-1}{20} = \frac{20\,(e^3-1)^2}{9\,(e^{20}-1)}$$

4) Берем $\sqrt{\ }$ от предыдущего:

$$\sqrt{(y - \hat{y}, y - \hat{y})} = \sqrt{\frac{20\,(e^3-1)^2}{9\,(e^{20}-1)}} = \frac{2\sqrt{5}\,(e^3-1)}{3\sqrt{e^{20}-1}}$$ – ответ.

3 номера

1 Тип - обобщенные функции

$$\delta_n(t) = \frac{n}{\sqrt{14\pi}} \exp\left(-\frac{n^2(t+6.4)^2}{14}\right)$$

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{14\pi}} \exp\left(\frac{-n^2(t+6.4)^2}{14}\right)\varphi(t)\,dt = \left[\begin{matrix} s = n(t+6.4) \\ t = \frac{s}{n} - 6.4\end{matrix}\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi\left(\frac{s}{n}-6.4\right)\cdot\exp\left(\frac{-s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}}\,ds \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(-6.4)\cdot\exp\left(\frac{-s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}}$$

2) Пусть $R>0$: $\varphi(t)\equiv 0$, $|t|>R$. $\sup|\varphi(t)| = \max|\varphi(t)| = C$

$$\left|\frac{\varphi(-6.4)\cdot\exp\left(\frac{-s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}}\right| \le \frac{C\cdot\exp\left(-\frac{s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}}$$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C\cdot\exp\left(-\frac{s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}} = C$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(-6.4)\cdot\exp\left(\frac{-s^2}{14}\right)}{\sqrt{14\pi}}\,ds = \varphi(-6.4) = \delta(t+6.4)$$

3. Вычислить предел последовательности $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в смысле обобщённых функций, если

$$f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{14\pi}} e^{-\frac{n^2(t+6.4)^2}{14}}.$$

Теорема (Лебега)

Пусть $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ измерима на A. Также выполнены условия

- $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ *на* A;
- $|f_n(t)| \leqslant g(t)$, $t \in A$;
- $\int\limits_A g(t)d\mu < \infty$.

Тогда $\int\limits_A f_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int\limits_A f d\mu$.

$$f_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{14\pi}} e^{-\frac{n^2(t+6.4)^2}{14}} \cdot \varphi(t)\,dt =$$

$$= \left\{ \boxed{\frac{n(t+6,4)}{\sqrt{7}} = s} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi\left(\frac{s\sqrt{7}}{n} - 6,4\right) ds \to$$

1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi\left(\frac{s\sqrt{7}}{n} - 6,4\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \varphi(-6,4)$$

2) $$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \varphi\left(\frac{s\sqrt{7}}{n} - 6,4\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot C$$

Т.к. $R > 0 : \varphi(t) = 0,\ |t| > R$, $\sup|\varphi(t)| = \max|\varphi(t)| = C < \infty$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot C\,ds = C < \infty$$

$$\to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \varphi(-6,4)\,ds = 1 \cdot \delta(t+6,4)$$

2 Тип - обобщенные функции

№ 3.4

$$f=\begin{cases}(n^{8.6}t-7.8n^{4.3})e^{-n^{4.3}t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$f_n(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}(n^{8.6}t-7.8n^{4.3})e^{-n^{4.3}t}\varphi(t)\,dt=\int_0^{\infty}n^{4.3}(n^{4.3}t-7.8)e^{-n^{4.3}t}\varphi(t)\,dt=$$

$$\int_0^{\infty}(n^{4.3}t-7.8)e^{-n^{4.3}t}\varphi(t)\,d(n^{4.3}t)\overset{n^{4.3}t=s}{=}\int_0^{\infty}(s-7.8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4.3}}\right)ds$$

1) $(s-7.8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4.3}}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(s-7.8)e^{-s}\varphi(0)$

2) Пусть $R>0:\ \varphi(t)\equiv 0\ \ |t|>R$ $\quad \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)|=\max\limits_{t\in[-R,R]}|\varphi(t)|=C$

$$\left|(s-7.8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4.3}}\right)\right|\leq|(s-7.8)e^{-s}|\,C$$

3) $\int_0^{\infty}(s-7.8)e^{-s}C\,ds=-6.8\,C$

По теореме Лебега.

$$\xrightarrow{n\to\infty}\int_0^{\infty}(s-7.8)e^{-s}\varphi(0)\,ds=-6{,}8\,\varphi(0)=-6{,}8\,\delta(t)$$

$$\boxed{f_n\xrightarrow{n\to\infty}-6{,}8\,\delta(t)}$$

3. Вычислить предел последовательности $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в смысле обобщённых функций, если

$$f_n(t)=\begin{cases}(n^{8.6}t-7.8n^{4.3})e^{-n^{4.3}t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$n^{4,3}(n^{4,3}t-7{,}8)e^{-n^{4,3}t}$$

$$f_n(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)\varphi(t)\,dt=\int_0^{+\infty}(n^{8.6}t-7.8n^{4.3})e^{-n^{4.3}t}\cdot\varphi(t)\,dt=\left\{\begin{aligned}n^{4,3}t&=s\\ dt&=\frac{ds}{n^{4,3}}\end{aligned}\right\}=$$

$$=\int_0^{+\infty}(s-7{,}8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4,3}}\right)ds\longrightarrow$$

1) $(s-7{,}8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4,3}}\right)\xrightarrow{n\to\infty}(s-7{,}8)e^{-s}\varphi(0)$

2) Пусть $R>0:\ \varphi(t)\equiv 0,\ |t|>R,\ \sup|\varphi(t)|=\max|\varphi(t)|=C<\infty$

$$\left|(s-7{,}8)e^{-s}\varphi\left(\frac{s}{n^{4,3}}\right)\right|\leq(s-7{,}8)e^{-s}\cdot C$$

3) $\int_0^{\infty}(s-7{,}8)e^{-s}\cdot C\,ds=-6{,}8C$ (по частям)

$$\longrightarrow\int_0^{\infty}(s-7{,}8)e^{-s}\varphi(0)\,ds=\underbrace{\delta(\varphi)\cdot(-6{,}8)}$$

3 Тип - $C([a,b])$ сильная, слабая сходимость

№3

$x_n \subset C([0,1])$

$x_n(t) = n^{1.96}\cdot t\cdot e^{-n^{7.84}t^4}$

$x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \in C([0;1])$

$\|x_n(t)\| = \max\limits_{t\in[0,1]} \left(n^{1.96}\cdot t\cdot e^{-n^{7.84}t^4}\right)$

$x_n'(t) = n^{1.96} e^{-n^{7.84}t^4} - 4\underbrace{n^{7.84}\cdot n^{1.96}} t\cdot t^3\cdot e^{-n^{7.84}t^4} =$

$= n^{1.96} e^{-n^{7.84}\cdot t^4} - 4n^{9.8}\cdot t^4 e^{-n^{7.84}\cdot t^4} = 0$

$e^{-n^{7.84}\cdot t^4}\left(n^{1.96} - 4n^{9.8}\cdot t^4\right) = 0$

$n^{1.96} - 4n^{9.8}\cdot t^4 = 0 \Rightarrow t^4 = \frac{n^{1.96}}{4n^{9.8}} \Rightarrow t = \sqrt[4]{\frac{n^{1.96}}{4n^{9.8}}} =$

$t_n = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} n^{-1.96}$

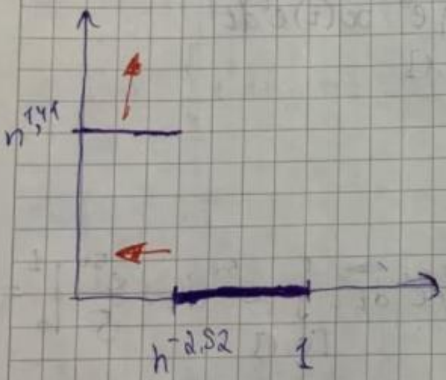
$x_n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{4}} n^{-1.96}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \underbrace{n^{1.96}\cdot n^{-1.96}}_{n^0} \cdot e^{-n^{7.84}\cdot \frac{n^{1.96}}{4n^{9.8}}} =$ $\frac{1}{4}\cdot n^{-7.84}$

$\frac{1}{\sqrt[4]{4}} e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4e}} \Rightarrow$ Слабая сходимость, но нет сильной!

4 Тип - $L_p([a,b])$ сильная, слабая сходимость

$x_n \subset L_2([0,1])$

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{1.41}, & t\in[0, n^{-2.82}] \\ 0, & t\in[n^{-2.82}, 1]\end{cases}$$



$$\|x_n\| = \Big(\int\limits_{[0,n^{-2.82}]} |x_n|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int\limits_{[0,n^{-2.82}]} |n^{2.82}| dt\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Big(n^{2.82}\cdot t \Big|_0^{n^{-2.82}}\Big)^{\frac{1}{2}} = \left(n^{2.82}\cdot n^{-2.82}\right)^{\frac{1}{2}} = n^0 =$$

$$= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ - ограничено.}$$

$\|x_n - 0\| = \|x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 1$ - сильной сх. нет.

Проверим слабую сходимость по Теореме Рисса

$$f(x) = \int\limits_{[0,1]} \hat{f}(t)\, x(t)\, dt$$

$$f(x_n - 0) = \int\limits_{[0,n^{-2.82}]} \tilde{f}(t)\, n^{1.41} dt \le \Big(\int\limits_{[0,n^{-2.82}]} n^{2.82} dt\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_{[0,n^{-2.82}]} |\tilde{f}(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$\to 1$ $\qquad \to 0$ по опр.

$x_n \xrightarrow{w} 0$, но $x_n \not\xrightarrow{s} 0 \Rightarrow x_n \not\xrightarrow{s}$

4 номера

1 Тип - сходимость последовательности

4 номер

1 тип

Найти сильный, слабый, равномерный предел послед-ти операторов $\{A_n\}_{n\in N}$, вычислить норму A_n, где $A: \ell_8 \to \ell_8$

$$Ax = (0,\ 0{,}84x_1,\ 0{,}84^2 x_2,\ \ldots) \qquad A_n = \underbrace{A\circ \ldots \circ A}_{n}$$

1) $$\|A_n x\| = \Big\|\big(\underbrace{0 \ldots 0}_{n},\ 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}} x_1,\ 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}+n} x_2,\ \ldots\big)\Big\| =$$ ← условие сх.

$$= 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_n \cdot 0{,}84^{n(k-1)}\right|^8\right)^{1/8} \le$$

$$\le 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^8\right)^{1/8} = 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}}\|x\|$$

$$\|x\| \le 1 \Rightarrow \|A_n x\| \le 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

2) $$\tilde{x} = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots) \qquad \|\tilde{x}\| = 1 \qquad (A_n\tilde{x}) = \tilde{x}$$

$$\|A_n \tilde{x}\| = 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\|A_n\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A_n x\| \ge 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow \|A_n\| = 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\|A_n - 0\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A_n x - 0x\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|A_n x\| =$$

$= 0{,}84^{\frac{n(n+1)}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$ сходится равномерно $\Rightarrow$ сходится сильно $\Rightarrow$ сходится слабо.

2 Тип - сопряженный

2 тип

Доказать, что оператор $A: \ell_2 \to \ell_2$ явл-ся линейным и ограниченным, построить сопряж к нему оператор и вычислить норму:

$$Ax = (-6x_1 - 3x_2; -6x_3 - 3x_4; \dots)$$

1) $x = (x_1; x_2; x_3 \dots)$

$$Ax = (-6x_1 - 3x_2; -6x_3 - 3x_4; \dots)$$

1.1) Линейность:

$$A(\alpha x + \beta y) = (-6\alpha x_1 - 3\alpha x_2 - 6\beta y_1 - 3\beta y_2; \dots) =$$

$$= \alpha(-6x_1 - 3x_2; \dots) + \beta(-6y_1 - 3y_2; \dots) =$$

$$= \alpha A(x) + \beta A(y) \Rightarrow \text{линейный}$$

1.2) Ограниченность

$$\|x\| \le 1 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le 1$$

$$\|Ax\| = \|(-6x_1 - 3x_2; -6x_3 - 3x_4; \dots)\| =$$

$$= \|(-6x_1; -6x_3; \dots) + (-3x_2; -3x_4; \dots)\| =$$

$$= \|(|-6x_1|^2 + |-6x_3|^2 + \dots)^{1/2} + (|-3x_2|^2 + |-3x_4|^2 + \dots)^{1/2}\| \le$$

$$\le 6\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} + 3\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} \le 6 + 3 = 9 \Rightarrow \text{ограничено.}$$

2) Ищем сопряж. оператор и вычисл норму:

$$(f, x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \alpha_k \tilde{f}_k, \text{ где } \alpha_k = \begin{cases} -6, & \text{при } k \text{ - нечетных} \\ -3, & \text{при } k \text{ - четных} \end{cases}$$

$$(f, A_x) = \tilde{f}_1(-6x_1 - 3x_2) + \tilde{f}_2(-6x_3 - 3x_4) + \dots$$

$$\tilde{g} = (-6\tilde{f}_1; -3\tilde{f}_1; -6\tilde{f}_2; -3\tilde{f}_2) \text{ - (норму от нее)}$$

$$\|A_x^*\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_k|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |6x_k|^2\right)^{1/2} =$$

$$= (9 + 36)^{1/2} = \sqrt{45} \text{ - ответ}$$

3 Тип - спектр

3 тип

Доказать, что оператор $A: C([-1;1]) \to C([-1;1])$ является линейным и огранич, вычислить его спектр.

$$(Ax)(t) = 5x(t) + 13x(-t)$$

1) Линейность:

$$A(\alpha x + \beta y) = 5\alpha x(t) + 5\beta y(t) + 13\alpha x(-t) + 13\beta y(-t) =$$
$$= \alpha(5x(t) + 13x(-t)) + \beta(5y(t) + 13y(-t)) =$$
$$= \alpha A(x) + \beta A(y)$$ — линейность есть

2) Ограниченность:

$$\|x\| \le 1, \quad \max_{[-1;1]} |x(t)| \le 1$$

$$\|Ax\| = \max_{t\in[-1;1]} |5x(t) + 13x(-t)| \le \max_{t\in[-1;1]} |5\underbrace{x(t)}_{\le 1}| +$$
$$+ \max_{t\in[-1;1]} |13\underbrace{x(-t)}_{\le 1}| \le 5 + 13 = 18$$ — ограниченность есть

3) Вычислим собственные значения A:

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{cases} (Ax)(t) = 5x(t) + 13x(-t) = \lambda x(t) \\ (Ax)(-t) = 5x(-t) + 13x(t) = \lambda x(-t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-\lambda)x(t) + 13x(-t) = 0 \\ (5-\lambda)x(-t) + 13x(t) = 0 \end{cases}$$

// Система имеет ненулевое реш-е тогда, когда определитель $\neq 0$.

$$\begin{array}{cc} (t) & (-t) \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} (5-\lambda) & 13 \\ 13 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda - 144 = 0, \quad \lambda_1 = 18, \ \lambda_2 = 8, \quad \lambda \in \{8; 18\}$$

// Построим резольвенту A. Для этого решим относительно $x \in C[-1;1]$ уравнение

$$(A - \lambda I)x = y; \quad \boxed{Ax - \lambda x = y}$$

$$\begin{cases} (Ax)(t) - \lambda x(t) = 5x(t) + 13x(-t) - \lambda x(t) = y(t) \\ (Ax)(-t) - \lambda x(-t) = 5x(-t) + 13x(t) - \lambda x(-t) = y(-t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5-\lambda)x(t) + 13x(-t) = y(t) \\ (5-\lambda)x(-t) + 13x(t) = y(-t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (5-\lambda) & 13 \\ 13 & (5-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y(-t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5-\lambda) & 13 \\ 13 & (5-\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(-t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\lambda-5}{\lambda^2-10\lambda-144} & \frac{169}{-13\lambda^2+130\lambda+1872} \\ \frac{13}{-\lambda^2+10\lambda+144} & -\frac{\lambda-5}{\lambda^2-10\lambda-144} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(-t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-8)(\lambda-18)} \begin{pmatrix} (5-\lambda) & -13 \\ -13 & (5-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y(-t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda-8)(\lambda-18)} \begin{pmatrix} (5-\lambda)y(t) - 13y(-t) \\ -13y(t) + (5-\lambda)y(-t) \end{pmatrix}$$

$$\left((A-\lambda I)^{-1} y(t) \right) = \frac{(5-\lambda)y(t) - 13y(-t)}{(\lambda-8)(\lambda-18)} =$$

$// \; Ax(t) = 5x(t) + 13x(-t)$

$$= \frac{(10-\lambda)y(t)}{(\lambda-8)(\lambda-18)} - \frac{5y(t) - 13y(-t)}{(\lambda-8)(\lambda-18)} =$$

$$= \frac{(10-\lambda)y(t)}{(\lambda-8)(\lambda-18)} - \frac{Ay(t)}{(\lambda-8)(\lambda-18)} \rightarrow$$ не определена при $\lambda = 8$ и $\lambda = 18$

$$\sigma A = \{8; 18\} \text{ - спектр}$$

готово

4 тип - спектр и резольвента

4. Доказать, что оператор $A\colon C([0;3]) \to C([0;3])$ является линейным и ограниченным, построить его резольвенту и вычислить спектр.

$$(Ax)(t) = \int_0^t 3x(s)ds.$$

1) $(A(\alpha x+\beta y))(t) = \int_0^t (\alpha 3x(s)+\beta 3y(s))ds = \alpha\int_0^t (3x(s))ds + \beta\int_0^t (3y(s))ds = \alpha A(x) + \beta A(y) \to$ линейно

2) $\|Ax\| = \max\limits_{t\in[0;3]} \left|3\int_0^t x(s)ds\right| \le \max\limits_{t\in[0;3]} \left|3\int_0^3 x(s)ds\right| \le$

$\le \max\limits_{t\in[0;3]} \left|3\int_0^3 ds\right| \le \underline{9} \to$ ограничена

будет важно в ответе

3) Построим резольвенту A. Для этого решим относительно $x \in C([0;3])$ уравнение

$$(A-\lambda I)x = y,$$

$$\int_0^t 3x(s)ds - \lambda x(t) = y(t).$$

Предположим, что $x, y \in C^1([0;3])$ и сведём полученное интегральное уравнение к задаче Коши:

$$\begin{cases} 3x(t) - \lambda x'(t) = y'(t), \\ -\lambda x(0) = y(0), \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) - \frac{3}{\lambda}x(t) = -\frac{1}{\lambda}y'(t), \\ x(0) = -\frac{1}{\lambda}y(0), \end{cases}$$

$$x_{\text{однородн.}}(t) = Ce^{+\frac{3}{\lambda}t} \implies x(t) = C(t)e^{+\frac{3}{\lambda}t},$$

$$\begin{cases} C'(t)e^{+\frac{3}{\lambda}t} + C(t)\frac{3}{\lambda}te^{+\frac{3}{\lambda}t} - \frac{3}{\lambda}C(t)e^{+\frac{3}{\lambda}t} = -\frac{1}{\lambda}y'(t), \\ C(0)e^{+\frac{3}{\lambda}\cdot 0} = -\frac{1}{\lambda}y(0), \end{cases} \qquad \begin{cases} C'(t) = -\frac{1}{\lambda}y'(t)e^{-\frac{3}{\lambda}t}, \\ C(0) = -\frac{1}{\lambda}y(0), \end{cases}$$

$$C(t) = -\frac{1}{\lambda}y(0) - \int_0^t \frac{1}{\lambda}y'(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}ds = -\frac{1}{\lambda}y(0) - \frac{1}{\lambda}y(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}\Big|_0^t - \int_0^t \frac{3}{\lambda^2}y(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}ds =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}y(0) - \frac{1}{\lambda}y(t)e^{-\frac{3}{\lambda}t} + \frac{1}{\lambda}y(0)e^{-\frac{3}{\lambda}\cdot 0} - \int_0^t \frac{3}{\lambda^2}y(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}ds =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}y(t)e^{-\frac{3}{\lambda}t} - \int_0^t \frac{3}{\lambda^2}y(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}ds,$$

$$x(t) = \left((A-\lambda I)^{-1}y\right)(t) = -\frac{1}{\lambda}y(t)e^{-\frac{3}{\lambda}t} - \int_0^t \frac{3}{\lambda^2}y(s)e^{-\frac{3}{\lambda}s}ds,$$

$\lambda \in [-9; 9] \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ из 2 пункта см. ограниченность