Ясько Е.Ю.

М8О-405Б-18

Вариант №6.

7/10

Нет схем и ее описания

Отчет по лабораторной работе „Численное решение интегрального уравнения Винера - Хопфа".

Дана апериодическая ИПФ со скачком: $k(t) = \exp(-t)$

$T = 3$

$K_2(t) = 0{,}01 t \exp(-t)$

Число точек сетки $N \sim 40$.

Формирующий фильтр входа $K_1(t) = \exp(-t)\cos(4t)$

Требуется сравнить решения операторных уравнений с точными данными $Ak = f$ и с неточными $A_h k = f_\delta$, $\|f - f_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_h\| \le h$, с использованием алгоритмов 0 (без регуляризации) и 2 (с регуляризацией).

Для определения параметра регуляризации α с точностью до двух значащих цифр использовать метод его выбора по невязке уравнения - численно найти минимум по $\alpha > 0$ функции $\alpha_1 = \arg\min E_1(\alpha)$, $E_1(\alpha) = \|A_h k_\alpha - f_\delta\|$.

Найденное значение α_1 и само регуляризованное решение $k_{\alpha_1}(t)$ сравнить с полученными по „правильному" параметру, полученному сравнением с точным решением $\alpha_{2*} = \arg\min E_2(\alpha)$, $E_2(\alpha) = \|k(t) - k_\alpha(t)\|$.

Построить графики функций $E_1(\alpha)$, $E_2(\alpha)$ в окрестности найденной точки для доказательства оптимальности.

Рассмотрим алгоритмы поиска решений поставленной задачи.

Известно, что в программе составляется уравнение Винера - Хопфа, которое усекается по времени: взаимная кор $(Bk)(t) = Rzg(t)$, $t \in [0, T]$, где оператор B - полусвертка $k(t)$ с $Rg(t)$, $k(t)$ - ядро системы, $Rg(t)$ - оценка собственной ковариационной функции. Приближенное решение $K_n(t)$ этого уравнения - есть оценка искомого ядра $k(t)$.

В алгоритме <u>без регуляризации</u> исходное уравнение $(Bk)(t) = Rzg(t)$ сразу решается методом коллокаций. Это означает, что решение

ищется на равномерной сетке с шагом $h = \frac{T}{N}$. Для дискретиз... интегралов применяется метод парабол (Симпсона), что приводи... к матричному аналогу: $DBDk = DRzg$.
В силу симметричности матрицы DBD (это следует из симметр-ти и положительной опред-ти м-цы B) можно решить СЛАУ $DBDk = DRzg$ мо-дифицированным методом квадратного корня Холецкого. Сложность алго-ритма $\sim N^3$.
Решая задачу вышеописанным методом, получаем: $\alpha = 0{,}01$
$E = 0{,}0365$. Среднеквадратичная невязка $E_1 = 0$, $E_1 = \| Rzg(t) - (BK_n)(t) \|$.
Сходящееся СКО $E_2 = 1{,}0861$, $E_2 = \| k(t) - K_n(t) \|$. А степень гладкости решения $F = 0{,}5479$, $F = \Omega[K_n(t)]$. (полученные графики см. в приложе-нии).

Так как оператор B является положит.-определенным и самосопря-женным, решение операторного уравнения можно свести к вариацион-ной задаче, используя <u>метод Ритца со штрафом на квадрат про-изводной решения</u>. Вариационная задача заключается в нахождении элемента, минимизирующего функционал „энергии" $E[k] = (Bk,k) - 2(Rzg,k)$.
Минимизирующий элемент k - обобщ-е реш-е исходной задачи. К $E[k]$ добавляется штраф на квадрат $k'(t)$, получаем регуляризованную ва-риационную задачу: $L[k] = E[k] + \alpha(Pk, Pk) \to \min$, $P = \frac{d}{dt}$.
Функция $f(l) = L[k + lv]$. $k'(T) = 0 \Rightarrow f'(0) = 2(Bk,v) - 2(Rzg,v) - 2\alpha\{(PPk,k) - k'(0)v'(0)\} = 0$.
После дискретизации получаем: $f'(0) = 2\langle BDk - Rzg - \alpha\{PP + S\}, v\rangle = 0$, где k, Rzg, v - соответствующие векторы, B - дискретный аналог оператора B, P - дискретный оператор „правого" дифференцирования (т.е. PP - трехдиа-гональная матрица), а S - матрица, переводящая внеинтегральный член в скалярное произвед-е.
Так как $v = v(t)$ произвольна, по основной лемме вариационного исчис-ления получаем регуляризованное дискретное ур-е: $Xk = DRzg$, $X = DBD - \alpha D\{PP + S\}$. Сложность алгоритма $\sim N^2$.
Экспериментально найдя параметр α так, чтобы минимизиро-вать СКО E_2, получили:

Теоретическая выкладка

Нахождение оптимальной ИПФ фильтра Винера

Постановка задачи: $x(t) \xrightarrow{} \oplus \xleftarrow{} v(t)$, $\oplus \xrightarrow{y(t)} \boxed{k(t,\tau)} \xrightarrow{} \hat{x}(t) \approx x(t)$

Необходимо найти наилучшую ИПФ, которая обеспечит точное выделение полезного сигнала из его смеси с шумом.

$M[\hat{x}(t) - x(t)] = 0$ – несмещенность

Мера оценки полезного сигнала: $D[\hat{x}(t) - x(t)] \to \min$ – оптимальность

Уравнение фильтра: $\hat{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} k(t,\tau) y(\tau) d\tau$, $k(t,\tau)$ – ?

t – физич. реализ.

t_0 – время начала работы с-мы

Учитывая усл-я несмещ-ти и опт-ти, получаем ур-ие Винера-Хопфа:

$$\int\limits_{t_0}^{t} k(t,\tau) R_y(\tau,\eta) d\tau = R_{yg}(t,\eta), \quad \eta \in [t_0, t].$$ Не совм.

Нахождение лучшей ИПФ фильтра сводится к решению ур-я В-Х.

УВ-Х – инт-я: $A k(\eta) = R_{gy}(\theta)$, A – лин. оператор с ядром $R_y(\lambda)$.

1) Некорректность и регул-я реш-я лин-х операт-х ур-й:

Пусть $Ax = y$: $x \in X$, $y \in Y$, $A: X \to Y$

$x = A^{-1} y$, A^{-1} – ?

Опр: Корректность по Адамару $Ax = y$:

1. Реш-е $x \in X$ существует
2. Реш-е $x \in X$ единственно
3. Реш-е $x \in X$ устойчиво к откл. исход. данных.

ур-е В-Х не обладает св-вом устойчивости

$A_0 x_0 = y_0$ – точное ур-е

$A_\delta x = y_h$ – приближ-е

$\|A_\delta - A_0\| \le \delta$, $\|y_h - y_0\| \le h$, δ, h – погрешности. Тогда $\|x - x_0\| = f(\delta, h) \xrightarrow[h \to 0]{\delta \to 0} 0$ – устойчивость.

Идея регуляризации по Тихонову:

Исходное операт-е ур-е $Ax = y \iff I[x] = \|Ax - y\|_Y^2 \to \min\limits_{\underline{x \in X}}$ мн-во допуст. реш-й: нет устойчивости $\Rightarrow$

Ограничение на x: $\begin{cases} I[x] = \|Ax - y\|_Y^2 \to \min\limits_{x \in D} \\ D: \underline{\Omega[x]} = d \end{cases}$

регуляризатор из усл-й гладкости

Функц-л Лагранжа: $L[x, \alpha] = I[x] + \alpha(\Omega[x] - d)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Необх условия: $\begin{cases} \delta L[x, \alpha, \delta x] = 0, & \forall \delta x \ne 0 \\ \dfrac{dL[x,\alpha]}{d\alpha} = \underline{\Omega[x] - d = 0} & \text{ограничения} \end{cases}$ $\begin{matrix} \to x_\alpha \\ \to \alpha \end{matrix}$

δL по ф. Гато

лемма Лагранжа

Параметр регуляризации α опред-ся величиной гладкости d. Вместо d выбрать α по виду близости $x_\alpha \approx x_0$.

2) Регуляр-я ур-я В-Х

$$\underbrace{\int\limits_0^{\infty} \underbrace{k(\lambda)}_{x} R_y(\theta - \lambda) d\lambda}_{Ax} = \underbrace{R_{gy}(\theta)}_{y}, \quad \theta \in [0; +\infty)$$ ✓

Фун-ал квадрата невязки: $I[x] = \|Ax - y\|_Y^2$?

$y = L_2\,[0;\infty)$ $\quad \|y\|^2 = \int\limits_0^\infty y^2(t)\,dt$

$I[k] = \int\limits_0^\infty d\theta \left[\int\limits_0^\infty k(\lambda)\, R_y(\theta-\lambda)\, d\lambda - R_{gy}(\theta) \right]^2 \to \min\limits_{k(\cdot)\in D}$

$D: \Omega[k] = d \qquad \Omega[k] = \int\limits_0^\infty k^2(\lambda)\, d\lambda$

Или: $\Omega[k] = \int\limits_0^\infty \left(\frac{dk}{d\lambda}\right)^2 d\lambda$

Тогда $L = I + \alpha(\Omega - d) \to \delta L = 0, \ \forall \delta k$

Применим ф. Гато для вычисл. δL
- теор Рисса предст мин. δL
- осн. лемма вар. исч. (Лагранжа)

Необх и дост. усл. (выпуклого) экстр:

$\alpha k_\alpha(\theta) + \int\limits_0^\infty k_\alpha(\lambda)\, \tilde{R}_y(\theta,\lambda)\, d\lambda = \tilde{R}_{gy}(\theta)$, $\theta \in [0; +\infty)$, $\checkmark$

где модифицир-е ковар-е ф-ии

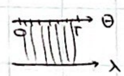
$\tilde{R}_y(\theta,\lambda) = \int\limits_0^\infty R_y(\theta-\mu)\, R_y(\mu-\lambda)\, d\mu$ - мод. ядро

$\tilde{R}_{gy} = \int\limits_0^\infty R_{gy}(\theta-\mu)\, R_y(\mu)\, d\mu$ - мод. прав. части.

Ур-е В-Х как инт. ур-е Iго рода превращ. в инт. ур-е IIго рода.

Тогда числ. реш-е регул-го ур-я В-Х:

$\theta \in [0, T]$
$\lambda \in [0, T]$, $\quad h = \frac{T}{N} \quad \theta_i = \lambda_i = ih, \quad i = \overline{0, N}$



$\int\limits_0^T d\lambda$ - правило прямоуг

метод коллокаций $\Rightarrow [\alpha E + \tilde{R}_y]\,\bar{k}_\alpha = \bar{\tilde{R}}_{gy}$, где $\bar{k}_\alpha = \begin{bmatrix} k_\alpha(h) \\ k_\alpha(2h) \\ \vdots \\ k_\alpha(Nh) \end{bmatrix}$, $\bar{\tilde{R}}_{gy} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{gy}(h) \\ \vdots \\ R_{gy}(Nh) \end{bmatrix}$, $Nh = T$

$\bar{\tilde{R}}_y = [\tilde{R}_y(hi, hj)]^{j=\overline{1..N}}_{i=\overline{1..N}} \qquad \det(\alpha E + \bar{\tilde{R}}_y) \xrightarrow{h\to 0} \alpha \neq 0$

числ. реш-е регул-го ур-я вып-ся лучше, чем обычного.
обращ-ся в хорошо обусловл.

$\alpha = 0,000012$, $d = 0$, $h = 0$.

$E = 0,0333$, $E_1 = 0,0015$; $E_2 = 0,1276$; $D = 0,0015$; $F = 0,4927$. (полученные графики см. в приложении).

Анализируя проделанную работу, можно сделать вывод, что для решения операторных уравнений лучше использовать алгоритмы с регуляризацией, так как использованный в работе алгоритм с регуляризацией позволил получить более точный результат. Оценка точности производилась по сходящемуся СКО E_2 и степени гладкости F. При использовании 2-го алгоритма оба параметра оказались меньше, чем в 1-ом. Однако во многом результат работы 2-го алгоритма зависит от значения минимизирующего параметра α, это может занять больше времени для поиска решения, чем в случае с 1-ым алгоритмом.