Сравнительный анализ методов моделирования пуассоновских потоков

Научно-исследовательская работа студента Махмудова Орхана

Научный руководитель: Рыбаков К. А.

Актуальность

- Моделирование пуассоновского потока событий – это прикладная задача. Примерами потоков событий являются: поток звонков на телефонную станцию, в милицию или на станцию скорой помощи; поток заявок в системе массового обслуживания; поток автомобильных аварий на дорогах города и т. д.
- Для того, чтобы смоделировать все эти процессы, нужно знать методы моделирования и уметь сравнивать их между собой, чтобы выявить наилучший метод.

Постановка задачи

- Изучить методы моделирования пуассоновского потока событий
- Провести сравнительный анализ методов моделирования
- Выявить наилучший среди методов
- Применить выбранный метод для решения практических задач

Описание случайных процессов

- Пусть в случайные моменты времени происходят однотипные события, т.е. имеем поток событий. Обозначим через P(t) число событий к определённому моменту t > t0 – момент времени с которого ведётся наблюдение. т.е P(t) – считающий случайный процесс, P(t0) = 0.
- Рассмотрим следующую формулу:

$$\mathcal{P}\{P(t+\Delta t) - P(t) = 1\} = \mu(t)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathcal{P}\{P(t+\Delta t) - P(t) > 1\} = o(\Delta t),$$

- Получается, что в маленьком промежутке времени, вероятность того, что произойдёт одно событие равно вероятности наступления события. А вероятность наступления нескольких событий за тот же промежуток времени бесконечно мала.

- Обозначим через Nk, k = 1,2… число событий потока на подмножестве интервала времени. Если составить несколько таких подмножеств и эти подмножества не пересекаются, то случайные величины Nk должны быть независимыми.
- Эти свойства потока событий называются ординарностью и отсутствием последствия. Поток событий, обладающий этими свойствами, называется пуассоновским потоком событий, а считающий процесс P(t) – считающим процессом.
- Функция $\mu(t)$ называется интенсивностью потока событий. Если $\mu(t)$ = const, то поток событий называется однородным, иначе неоднородным.

Методы моделирования

- 1-ый способ основан на непосредственном моделировании моментов времени Tk, k = 1,2… Если поток событий является однородным, то промежуток времени ΔTk между двумя последовательными событиями с номерами k – 1 и k имеет показательное распределение с параметром μ

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta\tau_k, \quad \tau_0 = t_0,$$

- где ΔTk – реализация случайной величины, которая моделируется следующим образом:

$$\xi = -\frac{\ln\alpha}{\mu},$$

- где α имеет равномерное распределение на интервале (0,1)

- 2-ой способ предполагает, что события могут происходить только в заранее определённые моменты времени, при этом пуассоновский поток моделируется приближённо
- Пусть задана последовательность точек временного интервала {Tk} k = 1,2…, таких, что

$$t_k \in [t_0, +\infty), \quad t_k < t_{k+1}.$$

- Тогда согласно определению из введения, вероятность того, что на полуинтервале [Tk, Tk+1) произойдёт событие, приблизительно равна μ(Tk) ΔTk+1

$$\mathcal{P}\{\Delta t < \Delta t_{k+1}\} = 1 - \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(\tau)\,d\tau},$$

- Поэтому событие в момент Tk+1 реализуется, если выполнено условия

$$\alpha \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mu(\tau)\,d\tau}$$

- где α имеет равномерное распределение на интервале (0,1)