ЗАДАНИЕ №8 «ПОСТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ КЛИКИ ГРАФА»

Теоретические сведения

Задача о клике относится к классу NP-полных задач в области теории графов. Впервые она была сформулирована в 1972 году Ричардом Карпом.

Кликой в неориентированном графе называется подмножество вершин, каждые две из которых соединены ребром графа. Иными словами, это полный подграф первоначального графа. Размер клики определяется как число вершин в ней. Задача о клике существует в двух вариантах: в задаче распознавания (англ.) требуется определить, существует ли в заданном графе G клика размера k, в то время как в вычислительном варианте требуется найти в заданном графе G клику максимального размера.

- Будем рассматривать простые (без петель и кратных ребер) неориентированные графы G = (V, E).
- Кликой Q (или полным подграфом) графа G называется такое подмножество его вершин, в котором любые две вершины соединены ребром.
- Клика, которая не содержится в клике большего размера, называется максимальной по включению (maximal clique).
- Задача о максимальной клике состоит в том, чтобы для заданного графа G найти клику максимального размера (maximum clique).

Описание алгоритма

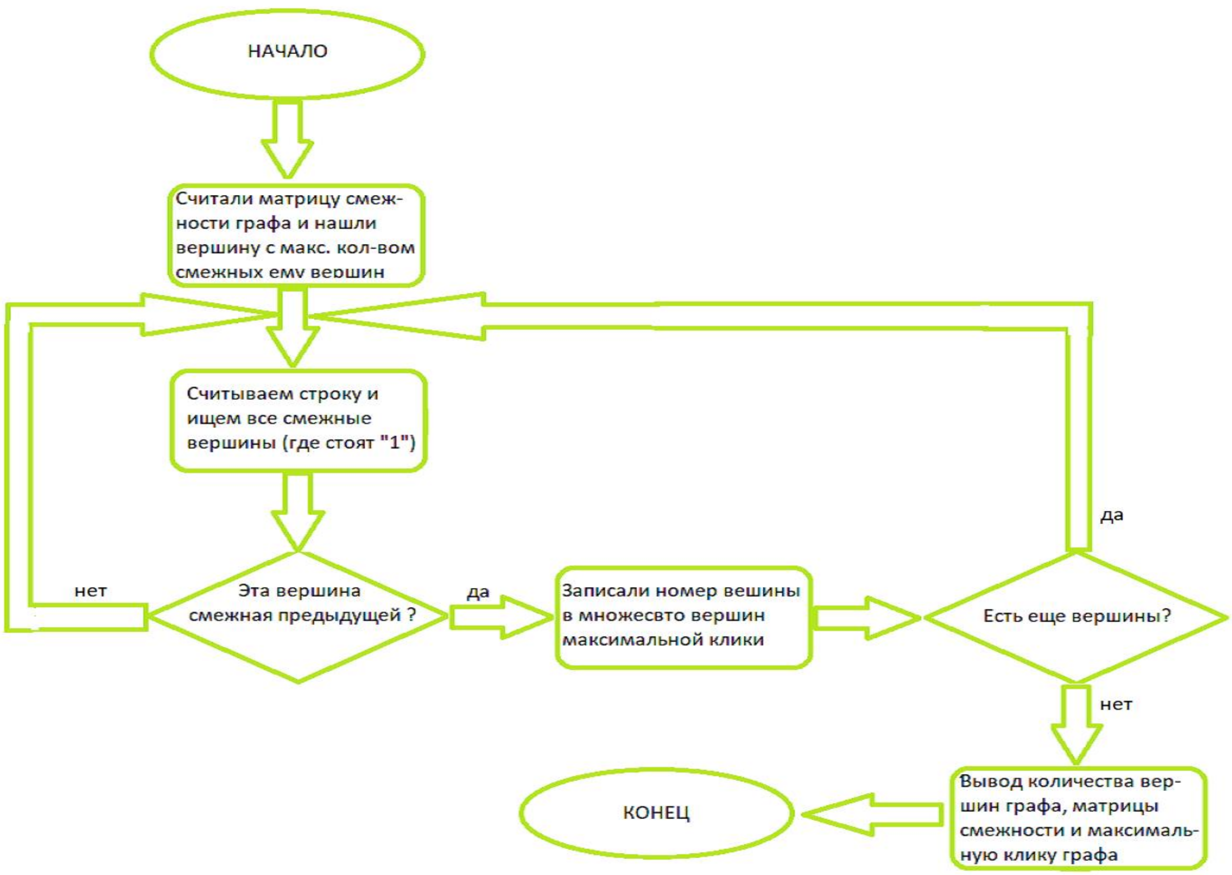
В данной задаче использовался алгоритм Магу. Принцип его работы:

Представим себе произвольный граф, состоящий из множества вершин и множества дуг (стрелок), соединяющих некоторые вершины. Для вычислений на компьютеретакой граф удобно представить в виде "матрицы смежности".

Для нахождения множества внутренней устойчивости , то есть максимального множества несмежных вершин (не имеющих между собой стрелок), запишем " Условие Несовместимости". Выпишем парные дизъюнкции соответствующие единицам матрицы. Каждая единица говорит о наличии стрелки из одной вершины в другую, а значит, либо вершина А, либо вершина В, либо обе одновременно не могут входить в множество несмежных вершин (логическое "ИЛИ"). Далее свяжем конъюнкцией все эти дизъюнкции, поскольку все условия несовместимости должны выполняться одновременно (логическое "И").

Приведем полученное выражение к ДНФ перемножением парных дизъюнкций (дистрибутивный закон) и выполнив все поглощения. В результате получим минимальные конъюнкции, соответствующие несовместимым множествам вершин. Выписав для каждой конъюнкции вершины из полного списка, получим максимальные множества несмежных между собой вершин.

Логическая блок-схема



Оценка сложности алгоритма

Наибольшую сложность имеет подпрограммы работы с матрицей смежности и нахождения смежных вершин графа, сложность алгортима O(n^2), что соотвествует числу вложенных циклов – два.

Тестовые примеры

Пример №1.

Матрица смежности графа:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1-я строчка матрицы вся заполнена единицами, что означает, что 0-ая вершина графа входит в максимальную клику графа, дальше мы включаем 1, 3 и 4-ую вершину графа, а вторая отсекается, так как смежна только с 0-ой.

Максимальная клика графа: 0 1 3 4

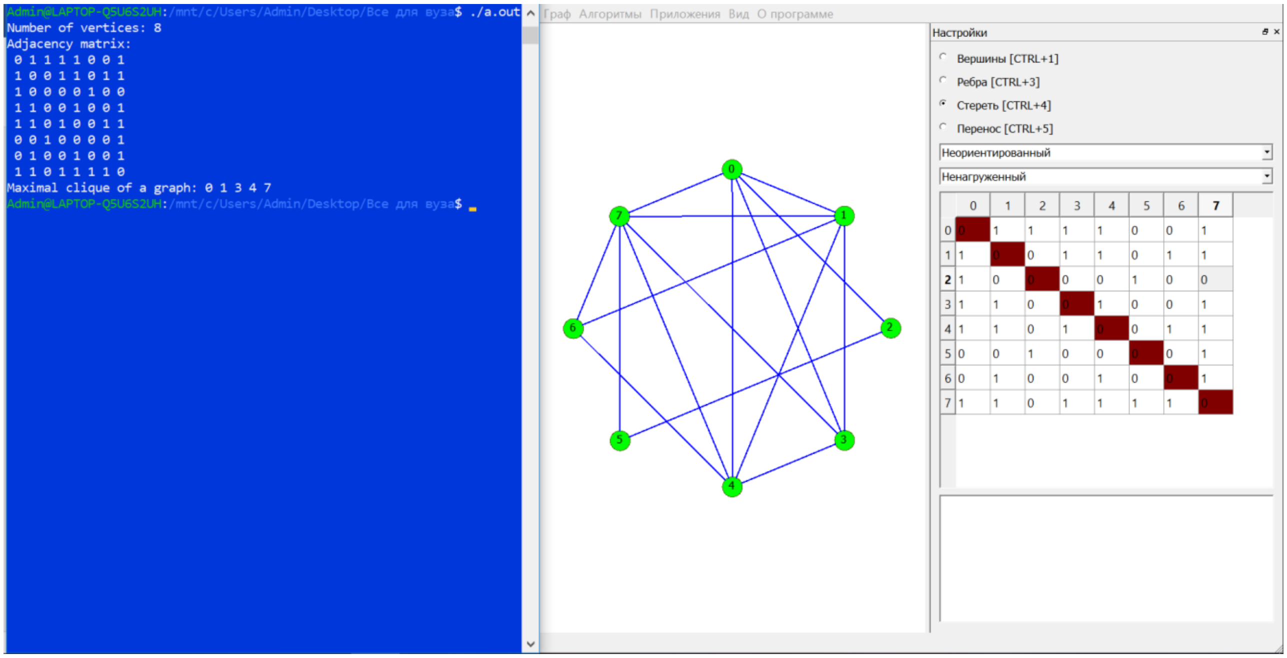
Пример №2

Матрица смежности графа:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Максимальная клика графа: 0 1 3 4 7

Скриншоты программы



Прикладная задача

Задача о максимальной клике встречается довольно часто, в том числе при анализе коммуникаций в социальных сетях. Данный алгоритм можно применить для нахождения самого большого сообщества людей в соц. сетях.