1. Числовые ряды. Необходимое условие сходимости числового ряда. Гармонический ряд

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Ряды

Опр.

Рядом (числовым) наз. $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$, где $a_i \in \underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}}$, $i \in N$

Опр.

Частичной суммой ряда $a_1+a_2+\ldots$ наз. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i$

Замеч.

$\{S_n\}$, $n \in N$ - числовая послед-ть

Опр.

Ряд наз. сход-ся, если $\{S_n\}$ сходится, причём к нек. числу S ($\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $S \in \mathbb{R}$), при этом S наз. суммой ряда ($\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = S$)

Опр.

Если $\{S_n\}$ расход. или её предел есть ∞, то её ряд - расход-ся

Пр.

1.) $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$ $\qquad S_n = \dfrac{1\times(1-\frac{1}{10^n})}{\frac{9}{10}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{10}{9} \Rightarrow$ сход.

2.) $1-1+1-1+\ldots$ $\qquad S_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow$ расх.

3.) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ гармонический ряд

$\underset{\downarrow \atop \infty}{S_n} > \underset{\downarrow \atop \infty}{\frac{3}{2}+(n+1)\frac{1}{2}}$ - расх.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

4.) $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ Ряд Дирихле

$\alpha>1$ (сход.)

5.) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ - сход.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

2. Критерий Коши сходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов.

Критерий Коши сход-ти числ-го ряда

Ряд $a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ сход. тогда и т. тогда, когда $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$, $\forall n,m>N$ $(m>n)$: $|a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_m|<\varepsilon$

Док-во:

Данная формул-ка факт-ки совп. с фор-кой крит. Коши для послед. частичных сумм.

След. 1

Е. из ряда вычеркнуть конечное число слаг-ых, кар-р сход-ти не изм.

Если два ряда сходятся, то и их сумма сходится.
Если один ряд сходится, а другой расходится, то их сумма расходится.
~~Ещё что-то про умножение на число.~~ Если все члены сходящегося ряда умножить на число, то полученный ряд тоже будет сходиться.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

3. Признаки сравнения числовых рядов с неотрицательными членами.

Теор. (Признак сравнения)

П. $a_1+a_2+\dots$ и $b_1+b_2+\dots$ – полож-ые ряды. Пусть для $\forall n$ $a_n \le b_n$, тогда, если ряд $b_1+b_2+\dots$ сход., то $a_1+a_2+\dots$ – ~~расх.~~ сход.

Е. $a_1+a_2+\dots$ – расх., то $b_1+b_2+\dots$ – расх.

Док-во:

П. $b_1+b_2+\dots$ – сход. П. $S_n=\sum_{i=1}^{n} b_i$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S<\infty$

Очевидно, что для $\forall n$ $S_n \le S$.

П. $T_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Очевидно, что для $\forall n\in N$ $T_n \le S_n$. Тогда $\{T_n\}$ не убыв-ая

$\forall n: T_n < S$, $\Rightarrow T_n$ огр. сверху

Т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, $T<\infty$

П. $a_1+a_2+\dots$ – расх., а $b_1+b_2+\dots$ – сход. Тогда по уже док-му $a_1+a_2+\dots$ – сход. $\Rightarrow$ противоречие!

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

$\sum a_n$, $\sum b_n$ – полож. ряды

Е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, $A>0$, $A\in R$, то $\sum a_n$, $\sum b_n$ сход. или расх. одновр

Док-во сводится к признаку сравнения.

<u>Опр.</u>

Суммой рядов $\sum a_n$, $\sum b_n$ наз. ряд вида $\sum(a_n+b_n)$.

<u>Утв.</u>

Е. оба исх-ых ряда сходятся, то $\sum(a_n+b_n)$ – сход.

<u>Док-во:</u>

П. S_n – част. сумма $\sum a_n$. П. R_n – част. сумма $\sum b_n$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i, \quad R_n=\sum_{i=1}^{n} b_i. \quad P_n=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) \Rightarrow P_n=S_n+R_n$$

$$\left.\begin{array}{l}\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} R_n = R\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(S_n+R_n) = S+R$$

Е. один из рядов сход., а др. расх., то сумма расх.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

4. Интегральный признак Коши сходимости числового ряда.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

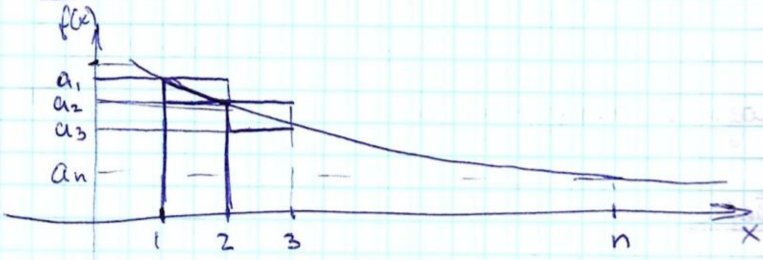
Интегральный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad a_n = f(n), \quad f(x) \in C[1;+\infty), \quad f(x)\downarrow$

Если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ – сход., то ряд сход.

Если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ – расх., то ряд расх.

Док-во:



$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} f(x)dx \xleftrightarrow[\text{расх.}]{\text{сх.}} \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$

$a_{n+1} < \int\limits_n^{n+1} f(x)dx < a_n$

Пример

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha > 0 \quad \left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}\downarrow$

$y = f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^{+\infty}$ $\quad \alpha > 1$ инт. сход. $\quad \alpha < 1$ инт. расх. $\quad (\alpha = 1 - \ln)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ – сх., если $\alpha > 1$

расх., если $\alpha \leq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

5. Признак Даламбера.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Признак Даламбера

1.) Е. $\exists q \le 1 \quad \forall n \in N \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, то ряд сход.

2.) Е. $\exists q > 1 \quad \forall n \in N \quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q$, то ряд расх.

Док-во:

1.) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q \qquad a_{n+1} \le q a_n \le q^2 a_{n-1} \le \ldots \le q^n a_1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \le a_1 \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$\underset{q<1}{\downarrow}\ \text{сх.} \leftarrow \text{сх.} \leftarrow \frac{a_1}{1-q} \quad (n \to \infty)$$

2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q > 1 \qquad a_{n+1} \ge q a_n \ge q^2 a_{n-1} \ge \ldots$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \ge a_1 \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$\text{расх.} \leftarrow \text{расх.} \leftarrow \infty \quad (n \to \infty)$$

След.

Е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то, т.е. $a < 1$, ряд сх. Е. $a > 1$, то расх.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

6. Признак Коши.

Признак Коши

1.) Если $\exists q<1$, $\forall n\in N$ $\sqrt[n]{a_n}\le q$, то ряд сход.

2.) Если $\exists q>1$, $\forall n\in N$
$\sqrt[n]{a_n}\ge q$, то ряд сход.

Док-во:

1.) $\sqrt[n]{a_n}\le q<1$ $\quad a_n\le q^n$ $\quad S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q(1-q^n)}{1-q}$

$n\to\infty$: $\frac{q(1-q^n)}{1-q} \to \frac{q}{1-q}$ $\to$ сх. $\to$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ – сх.

2.) $\sqrt[n]{a_n}\ge q>1$ $\quad a_n\ge q^n>1$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} q^i \longrightarrow$ расх.

$\to$ расх

След.

Е. $\exists \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}=a$

Е. $a<1$, ряд сход. Е. $a>1$, ряд расх.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

7. Условная сходимость числового ряда. Признак Лейбница.

Опр.

Ряд наз. условно сход-ся, если он сход., но ряд из модулей расходится.

Полож. ряд - ряд с полож-ми слаг-ми

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Признак сходимости Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad a_n > 0$$

Е. 1.) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\qquad$ 1) 2) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ – сх.

2.) $\{a_n\}\downarrow$

Док-во

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} a_i \qquad a_i \downarrow$$

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant S_{2n}$$

$$\{S_{2n}\}\uparrow \qquad S_{2n} < a_1 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S < \infty$$

$$S_{2n-1} = S_{2n-3} - a_{2n-2} + a_{2n-1} < S_{2n-3}$$

$$\{S_{2n-1}\}\downarrow, \quad S_{2n-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \hat{S} < \infty$$

$$\begin{array}{ccccc} S_{2n} & - & S_{2n-1} & = & -a_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \; {\scriptstyle n\to\infty} \\ S & - & \hat{S} & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad S = \hat{S}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

8. Признак Абеля для числового ряда.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Преобразование Абеля

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad b_1 = B_1, \qquad b_2 = B_2 - B_1 \ \ldots \qquad b_m = B_m - B_{m-1}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \left\{ \sum_{i=2}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i B_i - a_i B_{i-1}) \right\}$$

$$S_n = \sum_{i=2}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) + a_1 B_1 = a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \ldots + a_n B_n - a_n B_{n-1} =$$

$$= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + (a_3 - a_4) B_3 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$$

Лемма

Е. $|B_i| < L$, $i \in N$, $\{a_i\}$ - монотонная послед., то $|S_n| \le L(|a_1| + 2|a_n|)$

Док-во:

$$|S_n| \le \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n \le L\left(\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n|\right) \le L(\underbrace{|a_1 - a_n|}_{\le |a_1| + |a_n|} + |a_n|)$$

Признак Абеля

1.) П. $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ - сход.

2.) $\{a_i\}$ образ. монотонн. огр. послед.

1.) 2.) $\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ - сход.

Док-во:

$\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i b_i$, $\quad \forall \varepsilon \ \ \exists N, \ n > N : \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} b_i \right| < \varepsilon$

$|a_i| < A \qquad \left| \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i b_i \right| \le \varepsilon (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \le 3A\varepsilon \ \Rightarrow$ Крит. Коши справедлив для ряда $\sum a_i b_i$

$$\int_{-\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

9. Признак Дирихле для числового ряда.

<u>Признак Дирихле</u>

1.) $\exists D,\ \forall i\ |B_i| \le D$

2.) $\{a_i\}$ монотонн. стрем. к 0 послед.

1.) 2.) $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ – сход.

<u>Док-во:</u>

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N\ |a_n| < \varepsilon$

$\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} a_i b_i\right| \le D(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \le 3D\varepsilon$ => Выполн. Крит. Коши

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

10. Теорема Римана.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Теор. Римана:

Слагаемые условно сход-ся ряда всегда можно переставить так, чтобы ряд сходился к $\forall$ наперёд заданному числу или чтобы ряд расходился.

Док-во:

$\sum a_n$ - усл. сход. ($\sum |a_n|$ - расх.)

$\sum b_i$ - полож. слаг., $\sum c_i$ - отриц. слаг. Оба расх.

A - число. Построим ряд $\sum \tilde{a}_i$ с помощью след. процедуры:

1.) Берём столько слаг. из ~~полож.~~ $\sum b_i$, чтобы их сумма стала больше A.

2.) Этой сумме добавляем столько отриц. слаг. из $\sum c_i$, ~~что~~ чтобы общая сумма стала меньше чем A.

3.) Повторим со оставшимися слаг. бесконечное число раз

Т.к. исх. ряд сходится, то $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ $\Rightarrow$ Послед-ти част. сумм меньших чем A и больших чем A ~~ф~~ стремятся к одному пределу, очевидно равному A.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

11. Действия над абсолютно сходящимися рядами.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Абсолютная сходимость

Опр.

Ряд $a_1+a_2+\ldots$ наз. абс-но сход-ся, если ряд $|a_1|+|a_2|+\ldots$ — сходится.

Утв.

Е. ряд сход-ся абс-но, то он сходится.

Док-во:

Рассм. $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ - сход. абс-но

По кр. Коши $\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon),\ \forall m,n>N\ (m>n)$

$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_m|<\varepsilon$

A- сумма всех + слаг-ых

B - сумма всех - слаг-ых

$|A-B|<\varepsilon \Rightarrow \overset{\text{пр. треуг.}}{||A|-|B||\le|A-B|}$

$|a_{n+1}+\ldots+a_{n+2}|\le|A-B|<\varepsilon$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

12. Сходимость и равномерная сходимость семейства функций, зависящих от параметра.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Функциональные ряды

Опр.

П. $f_n(x): E \to R$, $n \in N$, тогда рядом этих ф-ций наз. $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$

Пр.

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ $f_n(x) = x^{n-1}$, $E = R$

Опр.

Областью сход. ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ наз. мн-во таких x_0, что числовые ряды $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0)$ - сход.

Пример

$E_0 = (-1; 1)$

обл. сход.

$\sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{i}$ $E_0 = [-1, 1)$

Опр. $f_n(x)$, $n \in N$ сход. равномерно на мн-ве E_0 к $f(x)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ \forall n > N \ \forall x \in E_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Опр.

$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$, $S_n = \sum_{m=1}^{n} f_m(x)$. $\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x)$ - сход. равномерно к $S(x)$ на мн-ве E, если $\{S_n\}$ сход. равномерно к $S(x)$ на мн-ве E

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \underset{\text{сход. равн.}}{\overset{E}{\rightrightarrows}} S(x)$$

13. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Необходимый признак равномерной сходимости ряда.

Критерий Коши равномерной сходимости ряда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)\right) \iff \Big(\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n,m \in N\ \ n>N,\ m>N,\ m \geq n\ \forall x \in E:$$
$$\Big|\underbrace{\sum_{i=n}^{m} f_i(x)}_{(S_m - S_{n-1})}\Big| < \varepsilon\Big)$$

Необходимый признак: последовательность fn(x) стремится к 0

Необходимый признак сходимости ряда: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

14. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости

П. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ $x \in E$. Пт

1.) $\forall x \in E \quad |f_n(x)| \leq b_n(x)$

2.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} B(x)$

1.), 2.) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сход. равномерно и абсолютно на мн-ве E.

Док-во:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} B(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \ \forall \underset{(m \geq n)}{n, m} > N \ \ \forall x \in E: |b_n(x) + b_{n+1}(x) + \ldots +$
$+ b_m(x)| < \varepsilon$

$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leq \underbrace{|b_n(x) + b_{n+1}(x) + \ldots + b_m(x)|}_{\varepsilon}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} \underset{?}{\underline{S(x)}}$ Абсолютность следует из модулей.

След. (Мажора~~в~~нтной признак Вейерштрасса)

$E. \ \forall x \in E \ |f_n(x)| \leq \underset{(a_n \in R)}{\cancel{A} a_n}$, то е. $\sum\limits_{n=1} a_n \to$ сх., то $\cancel{\Sigma}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{E}{\rightrightarrows} S(x)$ (сх. равномерно и абсолютно)

Числовой ряд можно всегда рассм. как функц., где все слаг. - const.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

15. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.

Теорема (признак Абеля-Дирихле): Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на множестве E, если выполняется любая пара условий:
1а) Частичные суммы ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n(x)$ равномерно ограничены на E.
1б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна и равномерно сходится к 0 на E.
или
2а) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n(x)$ равномерно сходится на E.
2б) Последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна и равномерно ограничена на E.
Доказательство: аналогичное доказательству для числовых рядов.

16. Условия коммутативности двух предельных переходов для семейства функций, зависящих от параметра. Коммутативная диаграмма.

Теорема: Пусть $\{F_t;\ t \in T\}$ - семейство функций F_t: X → C, зависящих от параметра t; B_x - база в X, B_T - база в T. Если при базе B_T семейство сходится равномерно на X к функции F: X → C, а при каждом t ∈ T существует предел $\lim\limits_{B_X \to} f_t(x) = A_t$, то существует оба повторных предела и имеет место равенство

$$\lim_{\beta_X}(\lim_{\beta_T} F_t(x)) = \lim_{\beta_T}(\lim_{\beta_X} F_t(x))$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Запись теоремы в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
F_t(x) \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}_T"'] \arrow[d, "\mathcal{B}_X"'] & F(x) \arrow[d, "\exists"', "\mathcal{B}_T"] \\
A_t \arrow[ur, dash, dashed] \arrow[r, "\exists", "\mathcal{B}_T"'] & A\,,
\end{tikzcd}$$

Над диагональю условия, а под - следствия. Равенство в теореме означает, что эта диаграмма коммутативна.

<u>*Доказательство:*</u> *Так как F_t равномерно стремится к F на X при базе B_T, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент базы B_T, что при любых t_1 t_2, принадлежащих этому элементу и любому $x \in X$ будет выполнено неравенство $|F_{t1}(x) - F_{t2}(x)| < \varepsilon$ (1). Переходя в этом неравенстве к пределу по базе B_X, получим соотношение $|A_{t1} - A_{t2}| \le \varepsilon$ (2). По критерию Коши существования предела функции отсюда следует, что функция A_t имеет некоторый предел A по базе B_T. Проверим теперь, что $\lim\limits_{B_X \to} F(x) = A$. Фиксировав t_2, найдем такой элемент базы B_X, что при любом x из этого элемента имеет место равенство $|F_{t2}(x) - A_{t2}| < \varepsilon$ (3). Не меняя t_2, совершим предельный переход в (1) и (2) по базе B_T относительно параметра t_1. Тогда получим, что $|F(x) - F_{t2}(x)| \le \varepsilon$ (4), $|A - A_{t2}| \le \varepsilon$ (5). Сопоставляя (3)-(5) и используя неравенство треугольника, получаем $|F(x) - A| < 3\varepsilon$. Тем самым проверен предел.*

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

17. Непрерывность и предельный переход.

<u>Теорема</u>: Пусть $\{f_t;\ t \in T\}$ - семейство функций f_t: X → C, зависящих от параметра t; B - база в T. Если f_t равномерно стремится к f на X при базе B и функции f_t непрерывны в точке x_0, то функция f: X → C тоже непрерывна в этой точке.

Доказательство: Диаграмма примет следующий вид:

$$\begin{tikzcd} f_t(x) \arrow[r, rightrightarrows, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "x\to x_0"'] & f(x) \arrow[d, "x\to x_0"] \arrow[dl, dash, dashed] \\ f_t(x_0) \arrow[r, "\mathcal{B}"'] & f(x_0) \end{tikzcd},$$

Здесь все предельные переходы, кроме правого, заданы условиями теоремы.

<u>Следствие</u>: Если последовательность функций, непрерывных на множестве, сходится на нем равномерно, то предельная функция тоже непрерывна на этом множестве.

<u>Следствие</u>: Если ряд из функций, непрерывных на некотором множестве, сходится на нем равномерно, то сумма ряда тоже непрерывна на этом множестве.

<u>Следствие</u>: Степенной ряд сходится к непрерывной функции.

<u>Следствие</u>: Функция, аналитическая в точке, непрерывна в окрестности этой точки.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

18. Теорема Дини.

<u>Утверждение</u> (теорема Дини): Если последовательность непрерывных на компакте функций сходится на нем монотонно и к непрерывной же функции, то эта сходимость равномерная.

<u>Доказательство:</u> Пусть $f_n \to f$ не убывая. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и для любой точки x компакта K найдем такой номер n_x, что $0 \le f(x) - f_{nx}(x) < \varepsilon$. Поскольку f и f_{nx} непрерывны на K, неравенства $0 \le f(\xi) - f_{nx}(\xi) < \varepsilon$ останутся в силе в некоторой окрестности U(x) точки x из K. Их покрытия компакта такими окрестностями можно извлечь конечное подпокрытие $U(x_1)$, ..., $U(x_k)$ и затем фиксировав номер $n(\xi) = max\{n_{x1}, \dots, n_{xk}\}$. Тогда при любом $n > n(\xi)$ в силу неубывания последовательность $\{f_n\}$ будет иметь $0 \le f(\xi) - f_{nx}(\xi) < \varepsilon$ в любой точке ξ из K.

<u>Следствие</u>: Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ неотрицательные и непрерывные на компакте K функции a_n:K → R и ряд сходится на K к непрерывной функции, то он сходится на K равномерно.

19. Интегрирование и предельный переход (Можно выучить)

<u>Теорема</u>: Пусть $\{f_t;\ t \in T\}$ - семейство функций f_t: [a, b] → C, определенных на отрезке [a, b] и зависящих от параметра t; B - база в T. Если функции семейства интегрируемы на [a, b] и f_t равномерно стремится к f на [a, b] при базе B, то предельная функция тоже интегрируема на [a, b] и
$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\boldsymbol{B}\to} \int_a^b f_t(x)dx.$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Доказательство: *Пусть p - разбиение отрезка [a, b] с отмеченными точками $\xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$. Рассмотрим интегральные суммы $F_t(p) = \sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i$ и $F(p) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Оценим разность $F(p) - F_t(p)$.*

◀ Пусть $p = (P, \xi)$ — разбиение P отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Рассмотрим интегральные суммы $F_t(p) = \sum_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\,\Delta x_i$, $t \in T$ и $F(p) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Оценим разность $F(p) - F_t(p)$. Поскольку $f_t \rightrightarrows f$ на $[a, b]$ при базе $\mathcal{B}$, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что при любом $t \in B$ в любой точке $x \in [a, b]$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f_t(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, при $t \in B$

$$|F(p) - F_t(p)| = \left|\sum_{i=1}^{n}\big(f(\xi_i) - f_t(\xi_i)\big)\,\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i) - f_t(\xi_i)|\,\Delta x_i < \varepsilon,$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

и эта оценка справедлива не только при любом значении $t \in B$, но и при любом разбиении p из множества $\mathcal{P} = \{(P, \xi)\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками. Таким образом, $F_t \rightrightarrows F$ на $\mathcal{P}$ при базе $\mathcal{B}$. Теперь, взяв в $\mathcal{P}$ традиционную базу $\lambda(P) \to 0$, по теореме 1 находим, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_t(\xi_i)\Delta x_i =: F_t(p) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"'] & F(p) := \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \arrow[d, "\exists\ \lambda(P)\to 0"] \\
\int\limits_a^b f_t(x)\,dx =: A_t \arrow[r] \arrow[ur, dash, dashed] & A := \int\limits_a^b f(x)\,dx,
\end{tikzcd}$$

что и доказывает сформулированную теорему 3. ►

20. Дифференцирование и предельный переход.

<u>Теорема</u>: Пусть $\{f_t;\ t \in T\}$ − семейство функций f_t: $[a, b] \to C$, определенных на выпуклом ограниченном множестве X и зависящих от параметра t; B - база в T. Если функции семейства дифференцируемы на X, семейство $\{f_t';\ t \in T\}$ производных сходится равномерно на X к некоторой функции φ: X → C, а исходное семейство $\{f_t;\ t \in T\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0, то оно

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

сходится равномерно на всем множестве к дифференцируемой функции f, причем f' = φ.

Доказательство:

◀ Покажем сначала, что семейство $\{f_t;\ t \in T\}$ равномерно сходится на множестве X при базе $\mathcal{B}$. Воспользуемся теоремой о конечном приращении в следующих оценках:

$$\begin{aligned}|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| &\leqslant \\ &\leqslant |(f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)) - (f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0))| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\xi \in [x_0, x]} \left|f'_{t_1}(\xi) - f'_{t_2}(\xi)\right| |x - x_0| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)| = \Delta(x, t_1, t_2).\end{aligned}$$

По условию семейство $\{f'_t;\ t \in T\}$ сходится равномерно на X при

базе $\mathcal{B}$, величина $f_t(x_0)$ как функция t при той же базе $\mathcal{B}$ имеет предел, а $|x - x_0|$ — ограниченная величина при $x \in X$. Ввиду необходимости

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

условий критерия Коши для равномерной сходимости семейства функций f_t' и существования предела функции $f_t(x_0)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что для любых $t_1, t_2 \in B$ и любого $x \in X$ будет $\Delta(x, t_1, t_2) < \varepsilon$. А это в силу написанных оценок означает, что семейство функций $\{f_t;\ t \in T\}$ тоже удовлетворяет условиям критерия Коши и, следовательно, равномерно сходится на X при базе $\mathcal{B}$ к некоторой функции $f\colon X \to \mathbb{C}$.

Вновь используя теорему о конечном приращении, получим теперь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&\left|(f_{t_1}(x+h) - f_{t_1}(x) - f_{t_1}'(x)h) - (f_{t_2}(x+h) - f_{t_2}(x) - f_{t_2}'(x)h)\right| = \\
&\qquad = \left|(f_{t_1} - f_{t_2})(x+h) - (f_{t_1} - f_{t_2})(x) - (f_{t_1} - f_{t_2})'(x)h\right| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sup_{0<\theta<1} \left|(f_{t_1} - f_{t_2})'(x+\theta h)\right| |h| + \left|(f_{t_1} - f_{t_2})'(x)\right| |h| = \\
&\qquad\quad = \left(\sup_{0<\theta<1} \left|f_{t_1}'(x+\theta h) - f_{t_2}'(x+\theta h)\right| + \left|f_{t_1}'(x) - f_{t_2}'(x)\right|\right) |h|.
\end{aligned}$$

Эти оценки, справедливые при $x, x+h \in X$, ввиду равномерной сходимости семейства $\{f_t';\ t \in T\}$ на X, показывают, что семейство $\{F_t;\ t \in T\}$ функций

$$F_t(h) = \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - f_t'(x)h}{|h|},$$

которые мы будем рассматривать при фиксированном значении $x \in X$, сходится при базе $\mathcal{B}$ равномерно относительно всех значений $h \neq 0$ таких, что $x + h \in X$.

Заметим, что $F_t(h) \to 0$ при $h \to 0$ ввиду дифференцируемости функции f_t в точке $x \in X$, а ввиду того, что $f_t \to f$ и $f_t' \to \varphi$ при базе $\mathcal{B}$, имеем $F_t(h) \to F(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|}$ при базе $\mathcal{B}$.

Применяя теорему 1, можно теперь записать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\frac{f_t(x+h) - f_t(x) - f_t'(x)h}{|h|} =: F_t(p) \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "h\to 0"'] & F(h) := \frac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|} \arrow[d, "h\to 0"] \\
0 \arrow[r, "\mathcal{B}"'] \arrow[ur, dashed, no head] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Правый предельный переход при $h \to 0$ показывает, что функция f дифференцируема в точке $x \in X$ и $f'(x) = \varphi(x)$. ►

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Следствие: Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ из функций f_n: X → C, дифференцируемых на ограниченном выпуклом множестве X, сходится хотя бы в одной точке x, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на X, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ тоже сходится равномерно на X и $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.

21. Область сходимости степенного ряда.

Определение: Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где a - действительное число называется степенным рядом.

Определение: Радиусом сходимости R степенного ряда называется точная верхняя грань множества, на котором сходится степенной ряд.

Утверждение: Степенной ряд сходится абсолютно $\forall x \in (-R;R)$ и расходится при $|x| > R$.

Теорема: Если $\exists \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = b$, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ определяется равенством $R = \frac{1}{b}$, то есть справедлива формула Коши: $R = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

22. Формула Коши для радиуса сходимости степенного ряда. Теорема Коши-Адамара.

Теорема (формула Коши): Если $\exists \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = b$, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a_n(x-x_0)^n$ определяется равенством $R = \frac{1}{b}$, то есть справедлива формула Коши: $R = \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Доказательство: Применим к положительному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a_n x^n$ признак сходимости Коши, то есть вычислим предел $\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, тогда при x ≠ 0 ряд будет сходиться, если $|x| < \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$, и расходиться если $|x| > \frac{1}{\underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Сопоставляя эти неравенства, радиус сходимости равен правой части этих неравенств.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

23. Формула Даламбера для радиуса сходимости степенного ряда, включая предельные случаи.

Теорема (формула Даламбера): Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = b$, где 0 < b < ∞, то радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a_n x^n$ определяется равенством $R = \frac{1}{b}$, то есть справедлива Даламбера: $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Доказательство: Применим к положительному ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a_n x^n$ признак сходимости Коши, то есть вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда при x ≠ 0 ряд будет сходиться, если $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$, и расходится, если. Сопоставляя эти неравенства, радиусу сходимости равен правой части каждого из неравенств.

24. Первая теорема Абеля о степенных рядах.

Теорема (1-я теорема Абеля о степенных рядах): Если R –радиус сходимости ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n x^n$ и числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n R^n$ сходится, то $\lim\limits_{x\to R-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n R^n$.

Доказательство: Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что R = 1 и $\sum_{n=0}^{\infty} \quad a_n = 0$. Пусть $S_m = \sum_{n=0}^{m} \quad a_n$ и $S_{-1} = 0$,

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

тогда $S_m = 0$, откуда следует, что $\exists M : \forall m : |S_m| \leq M$. Далее

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получаем

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \forall n > N_0 : |S_n| < \varepsilon$$

Тогда для $0 < x < 1$

$$|f(x)| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{N_0} |S_n| x^n + (1 - x)\, \varepsilon \sum_{n=N_0+1}^{\infty} x^n$$
$$\leq M(1 - x^{N_0+1}) + \varepsilon x^{N_0+1}$$

Очевидно, что правая часть этой цепочки неравенств при $x \to 1 - 0$ может быть сделана меньше 2ε, что и доказывает теорему.

25. Вторая теорема Абеля о степенных рядах.

Теорема (2-я теорема Абеля): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ ($x_1 > 0$) сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на отрезке [0; x1].

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Доказательство: Пусть x = tx1. Если x ∈ [0, x1], то 0 ≤ t ≤ 1. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно переписать в виде $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n t^n$. Но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится по условию, а последовательность {tn} ограничена сверху единицей и является невозрастающей. Таким образом, выполняется вторая пара условий из признака Абеля-Дирихле, то есть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n t^n$ сходится равномерно на [0, 1], что равносильно равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на [0, x1].

Таким образом, вопрос, на каком множестве степенной ряд может сходиться равномерно, решается так: на любом замкнутом подмножестве области сходимости.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

26. Характер сходимости степенного ряда. Абсолютная, условная, равномерная сходимость. Примеры.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \sqrt{\pi}}$$

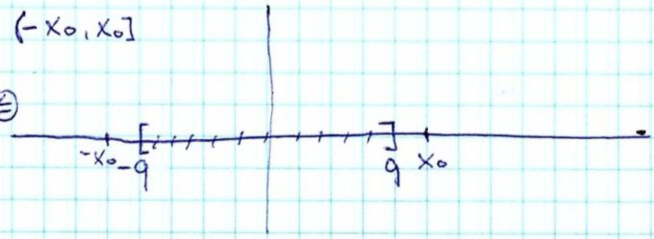
Утв.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Если сход.$^{\text{абс.}}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$, где $x_0 \in R$, $x_0 \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сход. равномерно и абсолютно на промежутке $[-q, q]$, где $q < |x_0|$

Док-во:

$(-x_0, x_0]$



$|x| \leq q$

$|a_n x^n| = |a_n||x|^n = |a_n||x_0|^n \frac{|x|^n}{|x_0|^n} \leq$

$\leq |a_n||x_0|^n \underbrace{\frac{q^n}{|x_0|^n}}_{<1} \leq |a_n x_0^n|$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ - сход. по усл. $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ - сход. равн. и абс. на $[-q, q]$ (по призн. В.)

Степ. ряд сходится хотя бы в одной точке $(x=0)$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$ — сход. только при $x=0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ - сход. при $x \in R$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Из дистанционной лекции Родникова:

Теорема (часто называют теоремой Абеля) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно при $x = x_1$, где $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-q, q]$, где $0 < q < |x_1|$.¶

Доказательство Очевидна следующая цепочка равенств¶

$$|a_n x^n| = |a_n| \cdot |x|^n = |a_n| \cdot \frac{|x|^n}{q^n} \cdot \frac{q^n}{|x_1|^n} \cdot |x_1|^n = |a_n x_1^n| \cdot \frac{|x|^n}{q^n} \cdot \frac{q^n}{|x_1|^n}$$¶

По условию, $\frac{q^n}{|x_1|^n} < 1$. Если $x \in [-q, q]$, то $\frac{|x|^n}{q^n} \leq 1$. Тогда¶

$$\forall x \in [-q, q]: |a_n x^n| < |a_n x_1^n|.$$¶

Тогда, так как $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ сходится, то, по мажорантному признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно и абсолютно на $[-q, q]$.¶

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Следствие 1 Если выполнены условия доказанной теоремы, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно на интервале $(-|x_1|, |x_1|)$.

Доказательство. Если $x_2 \in (-|x_1|, |x_1|)$, то всегда найдется q, такое, что $0 \le |x_2| < q < |x_1|$, то есть $x_2 \in$ Замечание. Все рассмотренные формулы объединяет теорема Коши – Адамара, где q удовлетворяет условиям доказанной теоремы.

Следствие 2 Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = x_3$, то он расходится при $x \in (-\infty, -|x_3|) \cup (|x_3|, +\infty)$.

Доказательство Предположим обратное. Пусть существует x_4, такое, что $|x_4| > |x_3|$, но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_4^n$ сходится. Пусть p таково, что $|x_4| > p > |x_3|$. Тогда

$$|a_n p^n| = |a_n| \cdot |x_4^n| \cdot \frac{p^n}{|x_4^n|} = |a_n x_4^n| \cdot \left|\frac{p}{x_4}\right|^n$$

Так как $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_4^n$ сходится, то по необходимому признаку сходимости, $\lim_{n\to\infty} a_n x_4^n = 0$. Тогда последовательность $\{|a_n x_4^n|\}$ ограничена, то есть $\exists M: \forall n \in \boldsymbol{N}: |a_n x_4^n| \le M$. Тогда

$$|a_n p^n| \le M \left|\frac{p}{x_4}\right|^n$$

Но ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{p}{x_4}\right|^n$ сходится, как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, но тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ сходится абсолютно. Тогда, по доказанной теореме, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ должен сходиться, reduction ad absurdum!

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

27. Ряд Тейлора.

Пусть $f(x)$– некоторая функция, бесконечно дифференцируема в некоторой внутренней точке своей области определения. Обозначим эту точку x_0. Тогда функции можно поставить в соответствие степенной ряд вида

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Для того, чтобы при некотором значении x действительно имело место это разложение, необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $r_n(x)$ формулы Тейлора - при этом значении x стремился к 0 с возрастанием n.

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

Дополнительный член применительно к частному предположению $x_0 = 0$

в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} (1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Можно убедиться, что $\forall n \in N$: $f^{(n)}(0) = 0$ (*проверьте!*) и ряд Тейлора состоит только из нулевых слагаемых, то есть сходится на всей действительной оси, но к f(x)

Тем не менее, вспомним, что для функции, для которой существуют производные достаточно высокого порядка в окрестности точки x_0 справедлива формула Тейлора с остаточным членом, например, в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1},$$

где ξ лежит между x и x_0.

Пример ln(x+1)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

256. Логарифмический ряд. Если в качестве функции $f(x)$ взять $\ln(1+x)$ $(x>-1)$, то соответствующий ряд Тейлора будет таков [n° **108**, 5)]:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Он сходится лишь для значений x в промежутке $(-1, 1]$ *); значит, только для этих значений и имеет смысл исследовать поведение дополнительного члена $r_n(x)$.

Возьмем его сначала в форме Лагранжа (8). Так как

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

[n° **96**, 2)], то

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1).$$

*) И здесь абсолютная сходимость при $|x|<1$ и расходимость при $|x|>1$ устанавливается с помощью признака Даламбера. При $x=1$ налицо (неабсолютная) сходимость по теореме Лейбница, а при $x=-1$ получается расходящийся гармонический ряд с измененными знаками.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

[n° **96**, 2)], то

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то последний множитель не превосходит единицы и отсюда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}, \text{ так что } r_n(x) \to 0 \text{ (при } n \to \infty).$$

Но при $x < 0$ поведение этого множителя становится неясным, и приходится прибегнуть к форме Коши дополнительного члена [см. (9)].

Имеем

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

так что

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Так как при $x > -1$ будет $1 + \theta x > 1 - \theta$, то последний множитель меньше единицы; следовательно, лишь только $|x| < 1$, заведомо $r_n(x) \to 0$.

Любопытно, что, хотя форма Коши вполне исчерпывает вопрос для всех значений x между -1 и 1, она ничего не дает при $x = 1$; в этом случае мы получаем

$$|r_n(1)| < (1 - \theta)^n,$$

но ввиду возможности для θ меняться вместе с n нельзя заключить о том, что $(1 - \theta)^n \to 0$.

Итак, по совокупности, для всех значений x в промежутке $(-1, 1]$, действительно будет

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (21)$$

В частности, при $x = 1$ получаем уже знакомый нам ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots \qquad (22)$$

28. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

275. Почленное интегрирование степенного ряда. По отношению к интегрированию и дифференцированию степенные ряды — в пределах их промежутка сходимости — ведут себя, как обыкновенные целые многочлены.

5°. *Степенной ряд* (1) *в промежутке* $[0, x]$, *где* $|x| < R$, *всегда можно интегрировать почленно,* так что — обозначая через $f(x)$ сумму ряда:

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots \qquad (7)$$

Для доказательства возьмем r между $|x|$ и R. В силу 1° ряд (1) сходится равномерно в промежутке $[-r, r]$, а тогда по теореме 4 n° **269** в промежутке $[0, x]$ ряд можно почленно интегрировать.

Проиллюстрируем многообразные приложения этой теоремы на примерах.

1) Почленным интегрированием прогрессий

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + \ldots$$

в промежутке $[0, x]$, где $|x| < 1$, сразу получаются разложения

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

276. Почленное дифференцирование степенного ряда. 6°. *Степенной ряд* (1) *внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно,* так что для суммы $f(x)$ ряда существует производная и выражается так:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots \tag{8}$$

Какое бы значение $x = x_0$, $-R < x_0 < R$, ни взять, можно выбрать два числа r_0 и r так, чтобы было $|x_0| < r_0 < r < R$.

30. Аналитическая функция в действительной области.

Определение. Функция $f(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки к ней сходится ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

c_n- действительные числа. В будущем мы докажем, что ряд, представляющий аналитическую функцию, совпадает с ее рядом Тейлора.

Пример. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Заметим, что эта функция бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, но ее ряд Тейлора для $x_0 = 0$имеет вид $1-x^2 + x^4 - x^6+\ldots$ сходится только при $x \in (-1; 1)$В чем же причина такой дискриминации? Рассмотрим эту же функцию, как функцию комплексного переменного, тогда эта функция окажется неопределенной при $x = \pm i$. Заметим, что расстояние от начала координат до этих точек как раз и равно 1. Таким образом, радиус сходимости ряда Тейлора, как, впрочем, и любого степенного ряда, определяется особенностями функции, которую он представляет, как функции комплексного переменного.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

31. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность. Интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра

Определение: Интегралом, зависящим от параметра, называется функция $\int_{E_t} f(x,t)dx$, где f(x, t) - функция двух переменных такая, что при каждом фиксированном t функция $\varphi_t(x)$ = f(x, t) интегрируема на множестве E_t.

Утверждение: Пусть функция f(x, t) непрерывна на некотором прямоугольнике P = {(x, t), x ∈ [a, b], t ∈ [c, d]}, тогда функция $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ - непрерывна на [c, d].

Утверждение (правило Лейбница): Пусть функция f(x, t) непрерывна и имеет непрерывную частную производную по t на некотором прямоугольнике P = {(x, t), x ∈ [a, b], t ∈ [c, d]}, тогда функция $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ - непрерывна на [c, d], причем $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$.

Доказательство. Рассмотрим абсолютную величину разности $\left|\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}dx\right| = \left|\int_a^b \left(\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h} - \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}\right)dx\right| \le \int_a^b \left|\frac{f(x,t_0+h)-f(x,t_0)}{h} - \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}\right|dx \le$

$$\le \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,t_0+\theta h)}{\partial t} - \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}\right| dx$$

(в последнем переходе используется теорема Лагранжа). Учитывая, что по условию $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ *непрерывна в своей области определения,*

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

можно сделать вывод, что $\frac{\partial f(x,t_0+\theta h)}{\partial t}$ *сходится равномерно к* $\frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}$ *при* $\theta \to 0$*. Но тогда* $\int_a^b \left|\frac{\partial f(x,t_0+\theta h)}{\partial t} - \frac{\partial f(x,t_0)}{\partial t}\right| dx \to 0$ *при* $h \to 0$*, из чего и следует доказываемое утверждение.*

32. Дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

<u>Утверждение</u>: Пусть функция f(x, t) непрерывна и имеет непрерывную частную производную по t на некотором прямоугольнике P = {(x, t), x ∈ [a, b], t ∈ [c, d]}, тогда при любых допустимых t справедливы неравенства $a \leq \alpha(t) \leq \beta(t) \leq b$ и функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ дифференцируемы, то если $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$, то функция F(t) дифференцируема на [c, d], причем $F(x) = \beta'(t)f(\beta(t),t) - \alpha'(t)f(\alpha(t),t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx$.

Доказательство Рассмотрим функцию трех переменных

$$\Phi(t,\gamma,\delta) = \int_{\gamma}^{\delta} f(x,t)dx$$

Подставляя в эту функцию $\gamma = \alpha(t)$ *и* $\delta = \beta(t)$ *и дифференцируя* $\Phi(t,\alpha(t),\beta(t))$ *по* t *по правилам нахождения производной сложной функции, а также используя правило взятия производной по верхнему и по нижнему пределам, получим доказываемую формулу.*

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

33. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Критерий Коши равномерной сходимости.

Определение: Будем говорить, что интеграл $F(t) = \int_a^{\omega} \quad f(x,t)dx$ сходится равномерно на множестве E, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки ω на промежутке $[a, \omega)$, что для любой точки b из этой окрестности и любого $t \in E$ справедливо неравенство $\left|\int_b^{\omega} \quad f(x,t)dx\right| < \varepsilon$.

Критерий Коши: Для того, чтобы несобственный интеграл $F(t) = \int_a^{\omega} \quad f(x,t)dx$ равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовала такая окрестность точки ω на промежутке $[a, \omega)$, что $\forall b_1, b_2$ из этой окрестности и $\forall t \in E$ выполнялось неравенство $\left|\int_{b_1}^{b_2} \quad f(x,t)dx\right| < \varepsilon$.

Доказательство: сводится к переписыванию последнего неравенства в виде $\left|F_{b_1}(t) - F_{b_2}(t)\right| < \varepsilon$ и ссылке на аналогичный критерий равномерной сходимости системы функций.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

34. Признак Вейерштрасса равномерной сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Утверждение (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла) Пусть $\forall t \in T$ функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$ интегрируемы на каждом отрезке $[a,b] \subset [a,\omega)$. Тогда если $\forall t \in T$ и $\forall x \in [a,\omega)$ выполняется неравенство

$$|f(x,t)| \leq g(x,t),$$

И интеграл

$$\int_a^\omega g(x,t)dx \qquad (**)$$

сходится равномерно на T, то и интеграл

$$\int_a^\omega f(x,t)dx \qquad (***)$$

сходится равномерно на T и абсолютно при каждом $t \in T$.

Доказательство Так как интеграл (**) сходится, то по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки ω на промежутке $[a,\omega)$, что $\forall b_1, b_2$ из этой окрестности и $\forall t \in T$ выполняются неравенства

$$\int_{b_1}^{b_2} |f(x,t)|dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x,t)dx < \varepsilon$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

(Модуль у функции $g(x,t)$ можно не ставить, так как $g(x,t)$ заведомо неотрицательна). Но тогда условия критерия Коши выполнены и для интеграла (***), причем сходимость оказывается не только равномерной, но и абсолютной.

Замечание. Если функция g зависит только от x то интеграл (**) сходится равномерно автоматически (*обоснуйте строго по определению!*). В этом случае доказанный признак превращается в аналог мажорантного признака Вейерштрасса для функциональных рядов

Пример Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)\,dx}{x^2+t^2}$$

Сходится равномерно на множестве действительных чисел, так как для любого действительного t справедливо неравенство

$$\left|\frac{\sin(tx)}{x^2+t^2}\right| \le \frac{1}{x^2},$$

А интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

35. Признак Абеля-Дирихле равномерной сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра

Утверждение (признак Абеля–Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла) Пусть $\forall t \in T$ функции f(x,t) и g(x,t) интегрируемы на каждом отрезке $[a,b] \subset [a,\omega)$. Тогда для равномерной сходимости интеграла на T

$$\int_a^\omega f(x,t) \cdot g(x,t) dx$$

]]

достаточно, чтобы выполнялась любая из двух следующих пар условий ({A1,A2} или {B1,B2}):

A1 : $\exists M \in R$: $\forall b \in [a,\omega)$ $\forall t \in T$ выполнено неравенство

$$\left| \int_a^b f(x,t) dx \right| < M$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

A2: ∀t∈T функция g(x,t) монотонна по x на [a,ω) и g(x,t) равномерно сходится к 0 на T при x→ω,x∈[a,ω)

B1: Интеграл

$$\int_a^\omega f(x,t)dx$$

сходится равномерно на T

B2: ∀t∈T функция g(x,t) монотонна по x на [a,ω) и существует такая действительная константа M, что ∀x∈[a,ω) ∀t∈T выполняется неравенство |g(x,t)|<M.

Доказательство основано на так называемой второй теореме о среднем для интеграла и чем-то сходно с доказательством соответствующего признака для функциональных рядов.

Подробности посмотрите у Зорича (там везде y вместо t). Советую также разобрать сопровождающие этот признак два примера.

Равномерно сходящиеся несобственные интегралы обладают рядом свойств, аналогичных свойствам функциональных рядов и связанных с доказанной выше коммутативной диаграммой. Следующие несколько утверждений

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

связывают равномерную сходимость ряда с возможностью дифференцировать и интегрировать подынтегральную функцию.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

36. Предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

2. Предельный переход под знаком несобственного интеграла и непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 4. *Пусть $f(x,y)$ — семейство зависящих от параметра $y \in Y$ функций, интегрируемых хотя бы в несобственном смысле на промежутке $a \leqslant x < \omega$, и пусть $\mathcal{B}_Y$ — база в Y.*

Если

a) *для любого $b \in [a,\omega[$*

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ на } [a,b] \text{ при базе } \mathcal{B}_Y$$

и

b) *интеграл $\int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y,*

то предельная функция φ несобственно интегрируема на $[a,\omega[$ и справедливо равенство

$$\lim_{\mathcal{B}_y} \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega \varphi(x)\,dx. \qquad (8)$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

◀ Доказательство сводится к проверке следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
F_b(y) := \int\limits_a^b f(x,y)\,dx \arrow[r, Rightarrow, "\substack{b\to\omega \\ b\in[a,\omega[}"'] \arrow[d, "\mathcal{B}_Y"'] & \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx =: F(y) \arrow[d, "\mathcal{B}_Y"] \\
\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \arrow[r, "\substack{b\to\omega \\ b\in[a,\omega[}"'] \arrow[ur, dash, dashed] & \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx\ .
\end{tikzcd}$$

Левый вертикальный предельный переход следует из условия a) и теоремы о предельном переходе под знаком собственного интеграла (см. теорему 3 из § 3 гл. XVI).

Верхний горизонтальный переход есть запись условия b).

По теореме о коммутировании двух предельных переходов отсюда следует существование и совпадение стоящих под диагональю пределов.

Правый вертикальный предельный переход есть то, что стоит в левой части доказываемого равенства (8), а нижний горизонтальный предельный переход дает по определению несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (8). ▶

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x\,, \cos x\,, \sin 2x\,, \cos 2x, \dots, \sin nx\,, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Следующий пример показывает, что в рассматриваемом случае несобственного интеграла одного условия а) для обеспечения равенства (8), вообще говоря, недостаточно.

Пример 9. Пусть $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, а

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/y, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant y, \\ 0, & \text{если} \quad y < x. \end{cases}$$

Очевидно, $f(x,y) \rightrightarrows 0$ на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ при $y \to +\infty$. Вместе с тем, при любом $y \in Y$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^{y} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^{y} \frac{1}{y}\,dx = 1,$$

поэтому равенство (8) в данном случае не имеет места.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

37. Непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 5. *Если*

a) *функция* $f(x,y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$,

b) *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c,d]$, *то функция* $F(y)$ *непрерывна на* $[c,d]$.

◀ Из условия a) следует, что при любом $b \in [a,\omega[$ собственный интеграл

$$F_b(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

является функцией, непрерывной на $[c,d]$ (см. утверждение 1 § 1).

По условию b) $F_b(y) \rightrightarrows F(y)$ на $[c,d]$ при $b \to \omega$, $b \in [a,\omega[$, откуда теперь и следует непрерывность на $[c,d]$ функции $F(y)$. ▶

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

38. Дифференцирование несобственного интеграла, зависящего от параметра

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Утверждение 6. *Если*

a) *функции* $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ *непрерывны на множестве* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$,

b) *интеграл* $\Phi(y) = \int\limits_a^\omega f'_y(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $Y = [c,d]$, *а*

c) *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x,y)\,dx$ *сходится хотя бы при одном значении* $y_0 \in Y$,

то он сходится, и даже равномерно, на всем множестве Y; *при этом функция* $F(y)$ *оказывается дифференцируемой и справедливо равенство*

$$F'(y) = \int\limits_a^\omega f'_y(x,y)\,dx.$$

◀ В силу условия a) при любом $b \in [a, \omega[$ функция

$$F_b(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

определена и дифференцируема на промежутке $c \leqslant y \leqslant d$, и по правилу Лейбница

$$(F_b)'_y(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

В силу условия b) семейство зависящих от параметра $b \in [a, \omega[$ функций $(F_b)'_y(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$ к функции $\Phi(y)$ при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$.

$$\int\limits_{-\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int\limits_{-\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

39. Интеграл Дирихле.

Пример 11. В примере 8 было показано, что интеграл

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx \tag{9}$$

сходится равномерно на промежутке $0 \leqslant y < +\infty$. Значит, на основании утверждения 5 можно заключить, что функция $F(y)$ непрерывна на каждом отрезке $[0, d] \subset [0, +\infty[$, т. е. непрерывна и на всем промежутке $0 \leqslant y < +\infty$. В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{y \to +0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{10}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример Вычислим *интеграл Дирихле*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Для этого вернемся к интегралу (9) и заметим, что при $y > 0$

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy}\, dx, \tag{11}$$

поскольку интеграл (11) сходится равномерно на любом множестве вида $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_0 > 0\}$.

Интеграл (11) легко вычисляется через первообразную подынтегральной функции и получается, что

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{при} \quad y > 0,$$

откуда следует, что

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + c \quad \text{при} \quad y > 0. \tag{12}$$

При $y \to +\infty$, как видно из соотношения (9), $F(y) \to 0$, поэтому из (12) следует, что $c = \pi/2$. Теперь из (10) и (12) получается, что $F(0) = \pi/2$. Итак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

40. Интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра. Достаточное условие перестановочности несобственных интегралов

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Интегрирование несобственного интеграла по параметру.

Утверждение *Если*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < < \omega \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$ *и*

b) *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на промежутке* $[c, d]$,

то функция F *интегрируема на* $[c, d]$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (14)$$

◀ При $b \in [a, \omega[$ на основе условия a) и утверждения 3 из §1 для собственных интегралов можно записать, что

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (15)$$

Используя условие b) и теорему 3 §3 гл. XVI о предельном переходе под знаком интеграла, в левой части равенства (15) делаем предельный переход при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ и получаем левую часть равенства (14). Правая часть равенства (14) по самому определению несобственного интеграла является пределом при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ правой части равенства (15). Таким образом, благодаря условию b) из (15) при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$, получаем равенство (14). ▶

ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Утверждение *Если*

a) *функция* $f(x,y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < < \omega \wedge c \leqslant y < \widetilde{\omega}\}$,

b) *оба интеграла*

$$F(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)\,dx, \quad \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,dy$$

сходятся равномерно, первый — относительно y, *на любом отрезке* $[c,d] \subset [c,\widetilde{\omega}[$, *а второй — относительно* x *на любом отрезке* $[a,b] \subset \subset [a,\omega[$,

c) *существует хотя бы один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} |f|(x,y)\,dx, \quad \int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x,y)\,dy,$$

то имеет место равенство

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^{\omega} f(x,y)\,dx = \int_a^{\omega} dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x,y)\,dy. \tag{16}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

◀ Пусть для определенности существует второй из двух указанных в с) повторных интегралов.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Ввиду условия a) и первого из условий b) на основании утверждения 7 можно сказать, что при любом $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ для функции f справедливо равенство (14).

Если мы покажем, что при $d \to \widetilde{\omega}$, $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ правая часть равенства (14) стремится к правой части соотношения (16), то равенство (16) будет доказано, поскольку тогда его левая часть тоже будет существовать и являться пределом левой части равенства (14) по самому определению несобственного интеграла.

Положим

$$\Phi_d(x) := \int\limits_c^d f(x, y)\, dy.$$

При любом фиксированном $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ функция Φ_d определена и, ввиду непрерывности f, непрерывна на промежутке $a \leqslant x < \omega$.

В силу второго из условий b) на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$ $\Phi_d(x) \rightrightarrows \rightrightarrows \Phi(x)$ при $d \to \widetilde{\omega}$, $d \in [c, \widetilde{\omega}[$.

Поскольку $|\Phi_d(x)| \leqslant \int\limits_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x, y)\, dy =: G(x)$, а интеграл $\int\limits_a^{\omega} G(x)\, dx$, совпадающий со вторым из интегралов условия c), по предположению сходится, на основе мажорантного признака равномерной сходимости заключаем, что интеграл $\int\limits_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx$ относительно параметра d сходится равномерно.

Таким образом, выполнены условия утверждения 4 и можно заключить, что

$$\lim_{\substack{d \to \widetilde{\omega} \\ d \in [c, \widetilde{\omega}[}} \int\limits_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx = \int\limits_a^{\omega} \Phi(x)\, dx;$$

а именно это нам и оставалось проверить. ►

$-\pi$ $-\pi$ $-\pi$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

41. Интеграл Эйлера-Пуассона.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример 17. Используя изменения порядка двух несобственных интегрирований, покажем, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Это известный *интеграл Эйлера – Пуассона.*

◀ Заметим сначала, что при $y > 0$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{J} := \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = y\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx$$

и что значение интеграла в равенстве (17) не изменится от того, понимать ли интеграл взятым по полуинтервалу $[0,+\infty[$ или по интервалу $]0,+\infty[$.

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \mathcal{J}^2,$$

при этом считаем, что интегрирование по y ведется в пределах интервала $]0,+\infty[$.

Как мы проверим, в указанном повторном интеграле допустимо изменение порядка интегрирований по переменным x и y, поэтому

$$\mathcal{J}^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда и следует равенство (17).

42. Эйлеровы интегралы. Бета-функция, связь с гамма-функцией.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Свойство 3 Если $n \in \boldsymbol{N}$, то

$$\mathrm{B}(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1} \cdot \frac{n-2}{\alpha+n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)} \mathrm{B}(\alpha, 1) = \\ = \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1)}$$

Если же $n, m \in \boldsymbol{N}$, то

$$\mathrm{B}(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Доказательство. Достаточно несколько раз применить формулу понижения степени.

Свойство 4. (альтернативное представление бета-функции)

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\, dy$$

Доказательство Сделаем замену $x = \frac{y}{1+y}$

Свойство 5 (связь между гамма- и бета- функциями)

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

43. Эйлеровы интегралы. Основные свойства гамма-функции.

Гамма-функция

Определение Функция переменной α, определяемая интегралом

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} d\,x$$

Называется **гамма-функцией Эйлера.**

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Свойство 1 (Дифференцируемость) Гамма функция бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Доказательство

◀ Проверим сначала, что при любом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ интеграл (8) сходится равномерно относительно параметра α на каждом отрезке $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Если $0 < a \leqslant \alpha$, то (поскольку $x^{\alpha/2} \ln^n x \to 0$ при $x \to +0$) найдется число $c_n > 0$ такое, что

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}| < x^{\frac{a}{2}-1}$$

при $0 < x \leqslant c_n$. Значит, на основании мажорантного признака равномерной сходимости можно заключить, что интеграл

$$\int\limits_0^{c_n} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $[a, +\infty[$.

Если же $\alpha \leqslant b < +\infty$, то при $x \geqslant 1$

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}| \leqslant x^{b-1} |\ln^n x| e^{-x},$$

и аналогично заключаем, что интеграл

$$\int\limits_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $]0, b]$.

Совмещая эти выводы, получаем, что интеграл (8) сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Но при этих условиях дифференцирование под знаком интеграла (1) законно. Значит, на любом таком отрезке $[a, b]$, а следовательно и на всем промежутке $0 < \alpha$, функция Γ бесконечно дифференцируема и справедлива формула (8). ▶

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Свойство 2 (формула понижения)

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

Доказывается интегрированием по частям.

Следствие Если $n \in N$, то $\Gamma(n+1)=n!$

Свойство 3 (формула Эйлера-Гаусса)

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}$$

Свойство 4 (формула дополнения)

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\quad(0<\alpha<1)$$

Следствие $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Свойство 5 (связь между гамма- и бета- функциями)

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

45. Формула Стирлинга.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Взяли ряд Тейлора: $$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{5}x^4+\ldots+\frac{1}{2m+1}x^{2m}+\ldots\right).$$

Пусть: $x=\dfrac{1}{2n+1}$, где n – произвольное натуральное число.

После преобразований, в том числе и потенцирования, получим:

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Введем теперь варианту $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

Тогда при любом n выполняются неравенста:

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

то найдется такое число θ, заключенное между нулем и единицей, что

$$a=a_n\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}}\quad\text{или}\quad a_n=a\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(Заметим, что число θ, вообще говоря, зависит от n). Вспоминая определение переменной a_n, находим:

$$\boxed{n!=a\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\quad(0<\theta<1).\quad(21)}$$

Из формулы Валлиса: $$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Получим значения: $a^2=2\pi$ и $\boxed{a=\sqrt{2\pi}.}$

Подставляя это значение a в формулу (21), мы и придем к *формуле Стирлинга*

$$\boxed{n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1),}$$

которая позволяет легко оценивать величину факториала $n!$ при больших значениях n.

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

46. Понятия нормированного, метрического и предгильбертова пространств.

1. Линейное пространство¶

Определение. Линейное пространство (ЛП) $V(K)$ над числовым полем K — это множество V, в котором введены две операции: ¶
(A) сложение векторов $+ : V \times V \to V$, $(x, y) \to x + y$, ¶
(B) умножение вектора на число $\bullet : K \times V \to V$, $(\alpha, x) \to \alpha x$, причем выполнены следующие аксиомы:¶
(1) $\forall x, y \in V : x + y = y + x$ (коммутативность сложения); ¶
(2) $\forall x, y, z \in V : x + (y + z) = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения); ¶
(3) $\exists 0 \in V \ \forall x \in V : x + 0 = x$ (существование нулевого вектора); ¶
(4) $\forall x \in V \ \exists (-x) \in V : x + (-x) = 0$ (существование противоположного вектора); ¶
(5) $\forall x \in V : 1 \cdot x = x$; ¶
(6) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : (\alpha \cdot \beta) x = \alpha \cdot (\beta x)$; ¶
(7) $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in V : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность-1) ¶
(8) $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V : (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность-2). ¶

Определение. Линейное пространство со скалярным произведением называется предгильбертовым пространством.¶

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Скалярное произведение.

Определение. Скалярным произведением элементов x и y векторного пространства V называется функция (x, y), определенная на V^2, имеющая действительные значения и обладающая следующими свойствами

1. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$, где $\alpha \in K$
2. $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$;
3. $(x, y) = (y, x)$;
4. $(x, x) > 0$ при $x \neq 0$; $(x, x) = 0$ при $x = 0$

Отметим одно весьма важное общее свойство скалярного произведения.

Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Нормированное пространство

Определение. Нормой линейного пространства называется функция $p\colon V \to \boldsymbol{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $p(x) \geq 0$, причём $p(x) = 0$ только при $x = 0$;
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in V$ (неравенство треугольника);
3. $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}\colon p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для каждого α.

Обычно, норму обозначают так: $p(x) = \|x\|$

Определение Линейное пространство с нормой называют линейным нормированным пространством.

Замечание. Предгильбертово пространство можно нормировать, положив

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

То есть предгильбертово пространство является нормированным пространством.

Проверьте, действительно ли это норма, то есть выполняются ли все три свойства. Намек:свести второе свойство к неравенству Коши-Буняковского.

Замечание В $\boldsymbol{R}^n$ длина вектора является нормой.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Метрическое пространство

Определение. Линейное пространство V называется метрическим пространством, если на нём задана <u>неотрицательная</u> вещественная функция $\rho : V \times V \to \boldsymbol{R}_0^+$ такая, что выполнены следующие свойства:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in V$;
3. $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для всех $x, y, z \in V$.

Замечание. В R^3 метрикой является обычное расстояние между точками.

Замечание. Предгильбертово пространство становится метрическим, если положить

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

47. Фундаментальная последовательность в метрическом пространстве. Полнота пространства. Гильбертово пространство. Банахово пространство.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Фундаментальная последовательность

Определение Последовательность $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ элементов метрического пространства называется фундаментальной, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n, m > N;\ n, m \in \boldsymbol{N}: \rho(f_n, f_m) < \varepsilon$

Замечание. Это определение обобщает понятие фундаментальной числовой последовательности.

Предел последовательности в метрическом пространстве

Определение. Пусть $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ последовательность элементов некоторого метрического пространства, а f - элемент этого пространства. Говорят, что $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N;\ n \in \boldsymbol{N}: \rho(f_n, f) < \varepsilon$.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Мы помним, что в $\boldsymbol{R}$, да и в $\boldsymbol{R}^n$, понятия фундаментальной и сходящихся последовательностей совпадают (справедлив критерий Cauchy). Но всегда ли будет так?

Пример. Рассмотрим пространство $C[-1,1]$ функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$, определив метрику функцией

$$\rho(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx$$

(проверьте, что это действительно метрика)

Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, -1/n] \\ nx & x \in [-1/n, 1/n] \\ 1 & x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Эта последовательность сходится к разрывной функции $f(x) = \mathrm{signum}(x)$

Докажите, что эта последовательность фундаментальная, оценив расстояние между двумя элементами последовательности!

Полное пространство

Определение. Метрическое пространство называется полным, если в его метрике любая фундаментальная последовательность сходится

Банахово пространство

Определение Полное нормированное пространство называется Банаховым пространством

Гильбертово пространство

Определение Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым.

Пример *Классифицируйте пространство функций, непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *с метрикой (а метрика ли это?)*

$$\rho(f,g) = \sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

48. Ортогональные и ортонормированные системы в предгильбертовом пространстве. Замкнутая система. Тригонометрическая система в L2[$-\pi$;π].

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Ортогональные и ортонормированные системы

Определение. Множество ненулевых элементов предгильбертова пространства (конечное или счетное) называется ортогональной системой, если скалярное произведение любых двух элементов этой системы равно нулю.

H – предгильбертово пространство, $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots \in H$, если $\forall n, m, n \neq m$: $(e_n, e_m) = 0$, то $e_1, e_1, \dots, e_n, \dots$ - ортогональная система.

Определение. Ортогональная система называется ортонормированной, если норма любого ее элемента равна 1.

Замечание Любую ортогональную систему можно нормировать, поделив каждый ее элемент на его норму**.**

Утверждение. Элементы ортонормированной (ортогональной системы) линейно независимы.

Доказательство Линейная независимость конечного числа элементов ортонормированной системы доказывается так:

Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов, равную нулю:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

Умножим обе части этого равенства на e_1. Получим $\lambda_1 = 0$ (*Почему?*). Аналогично, умножив обе части на e_2, получим $\lambda_2 = 0$, и так далее, то есть линейная комбинация оказывается тривиальной.

Если же рассмотреть бесконечную линейную комбинацию, то по существу получится ряд,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n + \cdots$$

сходящийся к нулевому элементу пространства. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N: \|S_n\| < \varepsilon$, где $S_n = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$. Заметим, что $(S_n, e_k) = \lambda_k, k = 1,2, \dots, n$. Но, $|(S_n, e_k)| \leq \|S_n\| \cdot \|e_k\| < \varepsilon$ (см. неравенство Коши-Буняковского). Таким образом, абсолютная величина λ_k оказывается меньше любого наперед заданного положительного числа, то есть $\forall k \in \boldsymbol{N}: \lambda_k = 0$

Пример Рассмотрим счетное подмножество элементов пространства сходящихся числовых последовательностей

$$e_1 = (1,0,0, \dots, 0, \dots)$$
$$e_2 = (0,1,0, \dots, 0, \dots)$$
$$\dots.$$
$$e_n = (0,0,0, \dots, 1, \dots)$$
$$\dots.$$

Эта система является ортонормированной, более того, любая сходящаяся последовательность представляется линейной комбинацией элементов этой системы:

$$\{a_n\} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + \cdots$$

(правую часть следует понимать, как сходящийся ряд)

Определение. Если любой элемент пространства можно представить как линейную комбинацию элементов ортогональной системы, то такая система называется замкнутой.

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

49. Коэффициенты Фурье. Неравенство Бесселя

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Неравенство Бесселя.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ некоторая ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, а f - некоторый элемент этого пространства.

Определение Коэффициентами Фурье элемента f по ортонормированной системе $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ называются числа

$$c_n = (f, e_n), \quad n \in \boldsymbol{N},$$

Определение Формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ называется рядом Фурье элемента f по ортонормированной системе $e_1, e_1, \dots, e_n, \dots$

Утверждение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \le \|f\|^2 \qquad (*)$$

(Последнее неравенство называется неравенством Бесселя)

Доказательство. Пусть

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} c_n^2$$

Покажем, что возрастающая последовательность $\{S_K\}$ ограничена сверху. Справедлива следующая цепочка неравенств и равенств

$$0 \le \left(f - \sum_{n=1}^{K} c_n e_n,\ f - \sum_{n=1}^{K} c_n e_n\right) = (f, f) - 2\left(f, \sum_{n=1}^{K} c_n e_n,\right) + \left(\sum_{n=1}^{K} c_n e_n, \sum_{n=1}^{K} c_n e_n\right)$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{K} c_n (f, e_n) + \sum_{n=1}^{K} c_n^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{K} c_n^2 = \|f\|^2 - S_K$$

Таким образом, каждая частичная сумма S_K ограничена сверху квадратом нормы элемента f. Но тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится, причем его сумма не превосходит $\|f\|^2$.

В случае, когда в неравенстве Бесселя (*) достигается равенство, говорят, что справедливо равенство Парсеваля.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \ne m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

50. Равенство Парсеваля. Полнота ортонормированной системы. Идентичность понятий полноты и замкнутости.

Утверждение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \le \|f\|^2 \qquad (*)$$

(Последнее неравенство называется неравенством Бесселя)

В случае, когда в неравенстве Бесселя (*) достигается равенство, говорят, что справедливо равенство Парсеваля.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Определение Если ортонормированная система такова, что для любого элемента рассматриваемого пространства справедливо равенство Парсеваля, то эта система называется полной.

Утверждение В гильбертовом пространстве понятия замкнутой и полной ортонормированных систем совпадают.

Доказательство Если ортонормированная система является полной, то

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2,$$

то есть разность $\|f\|^2 - S_K$ может быть сделана (выбором достаточно большого K) как угодно малой. Но тогда $\|f - \sum_{n=1}^{K} c_n e_n\|$ также может быть сделана как угодно малой, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ сходится к f в смысле метрики рассматриваемого пространства и ряд Фурье являются оказывается линейной комбинацией, равной f.

С другой стороны, если ортонормированная система является замкнутой, то для всякого f из рассматриваемого пространства

$$f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n + \cdots$$

где правую часть следует понимать как ряд, сходящийся в смысле метрики рассматриваемого пространства. Тогда $\|f - \sum_{n=1}^{K} \lambda_n e_n\|$ может быть сделана, выбором достаточно большого K, как угодно малой. Тогда

$$\left|\left(f - \sum_{n=1}^{K} \lambda_n e_n , e_m\right)\right| = |(f, e_m) - \lambda_m| = |c_n - \lambda_m| \leq \left\|f - \sum_{n=1}^{K} \lambda_n e_n\right\| \cdot 1,$$

То есть $|c_n - \lambda_m|$ оказывается меньшей любого положительного числа, то есть $c_n = \lambda_m$. Таким образом, линейная комбинация элементов замкнутой ортогональной системы, представляющая элемент f, определяется однозначно и является рядом Фурье этого элемента. Далее, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K$:

$$\varepsilon > \left\|f - \sum_{n=1}^{K} \lambda_n e_n\right\|^2 = \left(f - \sum_{n=1}^{K} c_n e_n, f - \sum_{n=1}^{K} \lambda_n e_n\right) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{K} c_n^2,$$

Что и доказывает, что если ортонормированная система замкнута, то для соответствующих коэффициентов Фурье справедливо равенство Парсеваля.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

51. Полнота тригонометрической системы.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Утверждение Функции (тригонометрическая система)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

образуют полную ортонормированную систему в $L^2[-\pi, \pi]$.

Доказательство основано на аппроксимационной теореме Вейерштрасса, которая в нашем случае утверждает возможность как угодно точного представления непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами.

Теорема (Вейерштрасс) Какова бы ни была 2π-периодическая непрерывная на $\boldsymbol{R}$ функция $f(x)$, $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \boldsymbol{R}$ справедливо неравенство

$$\left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) \right| < \varepsilon, \qquad (**)$$

где N определяется величиной ε, а a_0, a_n, b_n некоторые действительные числа.

Доказательство этой теоремы достаточно объемно. Его можно найти в классических учебниках по математическому анализу (Фихтенгольц) или у самого Вейерштрасса (1895). По-существу, оно сходно с возможностью аппроксимировать непрерывную функцию полиномом (см. интерполяционный полином Лагранжа в численных методах), если, конечно, принять во внимание известную формулу Эйлера о выражении мнимой степени экспоненты через тригонометрические функции и связанные с ней тригонометрические формулы кратных углов.

Заметим, что если ввести обозначения

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \ g_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,, g_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,, g_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,, g_5 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots\,,$$

$$g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,, \qquad g_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x\,, \cos x\,, \sin 2x\,, \cos 2x, \dots, \sin nx\,, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,,\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

то неравенство (**) можно записать как $|f(x) - S_n| < \varepsilon$, где

$$S_n = \frac{a_0\sqrt{2\pi}}{2} g_1 + \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{N} a_n g_{2n+1} + b_n g_{2n} = \sum_{n=1}^{2N+1} \tilde{a}_n g_n$$

Замечание. Отметим одну особенность метрики пространства $L_2[a,b]$. Эта метрика “не чувствует” разницы между двумя функциями этого пространства, если их значения отличаются лишь на множестве меры ноль. Поэтому, элементами этого пространства следует считать не сами функции, а классы эквивалентности функций, совпадающих “почти всюду”. Поэтому под непрерывной функцией будем понимать класс эквивалентности, содержащий такую функцию.

Утверждение. Пространство $L_2[a,b]$ полно. (Фундаментальный факт, который, как я надеюсь, будет доказан в курсе функционального анализа).

Докажем теперь (наконец-то!) полноту тригонометрической системы, но сначала в классе непрерывных на $[-\pi,\pi]$ функций, имеющих одинаковые значения на концах этого отрезка. Множество таких функций, очевидно, является подпространством пространства $L_2[-\pi,\pi]$. Предположим обратное, то есть то, что существует непрерывная (в обычном смысле) функция $f(x)$, такая, что $f(-\pi) = f(\pi)$, для которой не выполняется равенство Парсеваля. Однако, в силу сформулированной выше теоремы Вейерштрасса, $\forall \varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен $S_K = \sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n g_n$, что

$$\|f(x) - S_K\| < \varepsilon$$

(*как в данном случае связаны “поточечная“ оценка и оценка “по норме”?*).

Справедлива следующая цепочка равенств

$$\|f(x) - S_K\|^2 = (f(x) - S_K, f(x) - S_K) = \|f(x)\|^2 - 2(f(x), S_K) + (S_K, S_K)$$

$$= \|f(x)\|^2 - 2\left(f(x), \sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n g_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n g_n, \sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n g_n\right)$$

$$= \|f(x)\|^2 - 2\sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n d_n + \sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n^2,$$

где $d_n = (f(x), g_n)$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе. Пусть $\tilde{a}_n = d_n + \alpha_n$. Тогда

$$\|f(x)\|^2 - 2\sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n d_n + \sum_{n=1}^{K} \tilde{a}_n^2 =$$

$$= \|f(x)\|^2 - 2\sum_{n=1}^{K} (d_n + \alpha_n) d_n + \sum_{n=1}^{K} (d_n + \alpha_n)^2 =$$

$$= \|f(x)\|^2 - 2\sum_{n=1}^{K} d_n \alpha_n - 2\sum_{n=1}^{K} d_n^2 + \sum_{n=1}^{K} d_n^2 + 2\sum_{n=1}^{K} d_n \alpha_n + \sum_{n=1}^{K} \alpha_n^2 =$$

$$= \|f(x)\|^2 - \sum_{n=1}^{K} d_n^2 + \sum_{n=1}^{K} \alpha_n^2 \geq \|f(x)\|^2 - \sum_{n=1}^{K} d_n^2$$

Сравнивая начало и конец, получаем, что

$$\|f(x)\|^2 - \sum_{n=1}^{K} d_n^2 < \varepsilon^2$$

Но тогда, в силу произвольности выбора ε, справедливо равенство

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{K} d_n^2,$$

противоречащее исходному предположению. (Reductio ad absurdum!)

52. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье.

Экстремальное свойство коэффициентов Фурье: Наилучшее приближение к непрерывной функции обеспечивает тот тригонометрический полином S_K, в качестве коэффициентов которого выбраны коэффициенты Фурье этой функции.

Доказательство. В конце длинной цепочки равенств в качестве добавка получилась $\sum_{n=1}^{K} \alpha_n^2$, которой не было бы, если бы $\tilde{a}_n = d_n$.

А как же быть с функциями из $L_2[-\pi, \pi]$, которые не являются непрерывными, или даже непрерывными, но имеющими разные значения в $-\pi$ и π? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо вспомнить несколько фактов из более ранних разделов математического анализа. Например, критерий интегрируемости Лебега, определение несобственного интеграла от неограниченной функции и т.п. Тогда станет ясно, для любой функции из $L_2[-\pi, \pi]$ можно найти такую непрерывную функцию с одинаковыми значениями в $-\pi$ и π, что расстояние (в смысле метрики $L_2[-\pi, \pi]$) между исходной функцией и подобранной непрерывной будет меньше любого наперед заданного положительного числа, а следовательно, все предыдущие рассуждения могут быть перенесены на любую функцию из $L_2[-\pi, \pi]$.

Таким образом, мы доказали полноту (а, следовательно, и замкнутость) тригонометрической системы.

finis

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

53. Полнота систем из косинусов и из синусов. Ряды Фурье четных и нечетных функций.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

733. Полнота тригонометрической системы. *Если непрерывная в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$ *имеет коэффициенты Фурье, все равные нулю, то и сама функция сводится тождественно к нулю.* Действительно, в этом случае, как ясно из равенства (6), при всех x будет

$$\int_0^x f(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

откуда, дифференцируя по x, именно ввиду непрерывности подинтегральной функции [305, 12°] и получим тождественно

$$f(x) = 0.$$

Иными словами, *кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая в промежутке* $[-\pi, \pi]$* *была бы ортогональна* [679] *ко всем функциям тригонометрической системы*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{9}$$

Этот именно факт и выражают, говоря, что *тригонометрическая система полна — в классе непрерывных функций.*

Если две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они необходимо тождественны, ибо их разность $f_1(x) - f_2(x)$ будет иметь коэффициенты Фурье, сплошь равные нулю. Таким образом, *непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.* Это лишь другая формулировка свойства полноты тригонометрической системы.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

ИЛИ

Теорема 6 (о полноте тригонометрической системы). *Любая функция $f \in \mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ может быть сколь угодно точно приближена в среднем*

a) *финитными на* $]-\pi,\pi[$ *интегрируемыми по Риману на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

b) *финитными кусочно постоянными на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

c) *финитными непрерывными кусочно линейными на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

d) *тригонометрическими полиномами.*

Приведем несколько очевидных свойств четных и нечетных функций.

I. *Произведение четной функции на четную или нечетной на нечетную есть функция четная.*

Пусть, например, $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ — четные функции. Докажем, что функция $\omega(x)=f(x)\cdot\varphi(x)$ также четная.

Так как $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции четные, то

$$f(-x)=f(x) \text{ и } \varphi(-x)=\varphi(x),$$

отсюда

$$\omega(-x)=f(-x)\cdot\varphi(-x)=f(x)\cdot\varphi(x)=\omega(x),$$

т. е. $\omega(x)$ — функция четная. Аналогично доказывается и вторая часть утверждения I.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

II. *Произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.*

Это свойство доказывается так же, как и свойство I.

III. *Если* $y = f(x)$ — *четная функция, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad (128)$$

IV. *Если* $y = f(x)$ — *нечетная функция, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (129)$$

Соответственно этому ряд Фурье для четной функции будет иметь вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \qquad (131)$$

Ряд Фурье для нечетной функции будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \qquad (133)$$

Таким образом, *четная функция* разлагается в ряд только по *косинусам*, а *нечетная функция* — только по *синусам* кратных дуг.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

-54. Классические формулы для коэффициентов ряда Фурье по тригонометрической системе. Поточечная сходимость ряда Фурье непрерывной периодической функции.

Классические формулы: Пусть f(x) - 2π-периодическая непрерывная на R функция. Тогда на всей действительной оси

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

<u>Теорема</u>: Ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции сходится к этой функции поточечно и равномерно на всей действительной оси.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

55. Теорема Карлесона. Теорема Дирихле (формулировки).

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Теорема (Карлесон, 1966?) Ряд Фурье функции $f(x) \in L_2[-\pi, \pi]$ сходится к ней почти всюду.
Однако, эта теорема не гарантирует сходимость ряда Фурье в какой-нибудь конкретной точке. Тем не менее, справедливы следующие утверждения
Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то если ее ряд Фурье сходится в этой точке, то он сходится именно к $f(x_0)$.
Утверждение. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то если ее ряд Фурье сходится в этой точке к $f(x_0)$.
Укажем еще один важный для практики факт о сходимости рядов Фурье.

Определение. Будем называть функцию, определенную на отрезке, кусочно-непрерывной, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа, то есть если функция имеет конечное число точек разрыва.

Определение. Будем называть кусочно-монотонной функцию, чью область определения можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция монотонна.
Справедлива
Теорема (Дирихле). Если функция $f(x)$,определенная на отрезке $[-\pi, \pi]$, является ограниченной, кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 отрезка $[-\pi, \pi]$, причем если функция непрерывна в этой точке, то к $f(x_0)$, если x_0 – точка разрыва, то к значению

$$\frac{f(x_0 -) + f(x_0 +)}{2},$$

где

$$f(x_0 -) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \qquad f(x_0 -) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

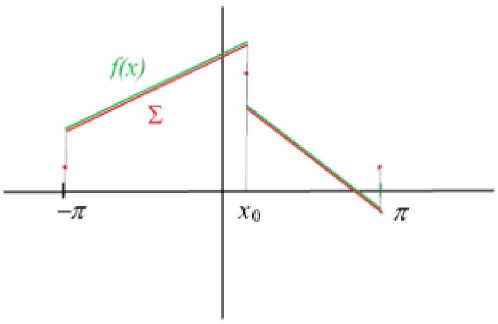
если $x_0 = \pm\pi$ то к

$$\frac{f(-\pi +) + f(\pi -)}{2},$$

где

$$f(-\pi +) = \lim_{x \to -\pi + 0} f(x), \qquad f(\pi -) = \lim_{x \to \pi - 0} f(x),$$

Иными словами, ряд Фурье сходится к функции в точках ее непрерывности, и к среднему арифметическому “значений” функции слева и справа от точки разрыва.
Иллюстрацией к теореме Дирихле служит рисунок, где зеленым обозначен график функции, красным – сумма ряда Фурье. Обратите внимание на красные точки, соответствующие сумме ряда Фурье в точке разрыва и на концах отрезка.



(в последних двух интегралах $n \neq m$).
Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

56. Дифференцирование и интегрирование ряда Фурье.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx} = \sqrt{\pi}$$

Лемма 3 (о дифференцировании ряда Фурье). *Если непрерывная функция $f \in C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, принимающая на концах отрезка $[-\pi,\pi]$ равные значения $(f(-\pi)=f(\pi))$, кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье ее производной*

$$f' \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f')e^{ikx}$$

может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

самой функции, т. е.

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

◀ Исходя из определения коэффициентов Фурье (13), интегрированием по частям находим

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = ikc_k(f),$$

поскольку $f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0$. ▶

$$\int_{-\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\,,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Утверждение 2. *Если функция $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ кусочно непрерывна, то соответствие $f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$ после интегрирования превращается в равенство*

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = c_0(f)x + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx} - 1),$$

где штрих свидетельствует об отсутствии в сумме члена с индексом $k = 0$; суммирование происходит по симметричным частичным суммам $\sum\limits_{-n}^{n}$, и при этом ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.

◀ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt - c_0(f)x$$

на промежутке $[-\pi,\pi]$. Очевидно, $F \in C[-\pi,\pi]$. Далее, $F(-\pi) = F(\pi)$, поскольку

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0(f) = 0,$$

что следует из определения $c_0(f)$. Поскольку производная $F'(x) = f(x) - c_0(f)$ функции F кусочно непрерывна, ряд Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ функции F по теореме 5 сходится к F равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. По лемме 4 $c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik}$ при $k \neq 0$. Но $c_k(F') = c_k(f)$, если $k \neq 0$. Записывая теперь равенство $F(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ в терминах функции f и учитывая, что $F(0) = 0$, получаем то, что и утверждалось. ▶

$$\int\limits_{-\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

*57. Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке. Разложение “по косинусам” и “по синусам”.

Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке

Тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0; l]$

$$f(x) \to S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{2\pi n x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2\pi n x}{l}\,dx \qquad n = 0, 1, 2\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi n x}{l}\,dx$$

Разложение “по косинусам” на отрезке $[0, l]$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

„по косинусам"

$$f(x) \to S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

Разложение “по синусам” на отрезке $[\mathbf{0}, \boldsymbol{l}]$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

„по синусам"

$$f(x) \to S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пример.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

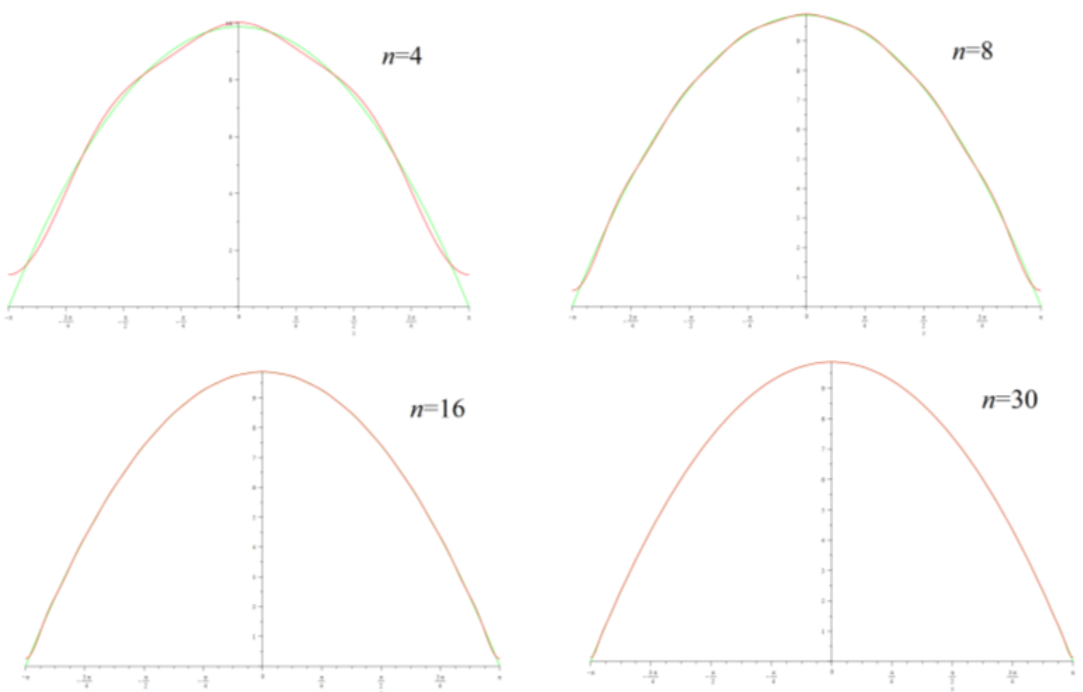
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Разложение непрерывной функции $f(x)=\pi^2-x^2$ на $[-\pi,\pi]$.

$$S(x)=\frac{2\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)=\frac{2\pi^2}{3}+4\cos x-\cos 2x+\frac{4}{9}\cos 3x-\dots$$



Разложение сигнума на $[-1,1]$

$$f(x)=\operatorname{signum}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-(-1)^n\right)\sin(\pi n x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi(2k-1)x)}{2k-1}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi(2k-1)x)}{2k-1}=\frac{4}{\pi}\left(\sin(\pi x)+\frac{\sin(3\pi x)}{3}+\frac{\sin(5\pi x)}{5}+\dots\right)$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

58. Комплексная форма ряда Фурье.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Комплексная форма ряда Фурье.

Рассмотрим частичную сумму классического ряда Фурье функции $f(x)$

$$S_n(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx$$

Используя формулу Эйлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ и выводимые из нее соотношения $\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ и $\sin x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$, эту частичную сумму можно переписать как

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}$$

где

$$c_k=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_k-ib_k), & \text{если} \quad k>0,\\ \frac{1}{2}a_0, & \text{если} \quad k=0,\\ \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & \text{если} \quad k<0,\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$c_k=c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx,\quad k\in\mathbb{Z}$$

то есть c_k - коэффициент Фурье функции $f(x)$ по системе $\{e^{ikx},k\in\mathbf{Z}\}$. Таким образом, функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ряд Фурье вида

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikx}$$

сходимость которого следует понимать как существование предела последовательности $\{S_n(x)\}$.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots,\sin nx,\cos nx,\ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,dx=0,\quad\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,dx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\cos nx\,dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx\,dx=0,\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\,dx=0$$

(в последних двух интегралах $n\neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ldots,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx}=\sqrt{\pi}$$

59. Ядро Дирихле.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot \sin nx\,dx = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Ядро Дирихле

Используя определение коэффициентов Фурье, частичные суммы $S_n(x)$ можно записать как

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) dt$$

Заметим, что

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}}{e^{i\frac{1}{2}u} - e^{-i\frac{1}{2}u}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}$$

Определение. Ядром Дирихле называется функция

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}$$

Чему равно $D_n(0)$?

Таким образом, частичную сумму комплексного ряда Фурье функции $f(x)$ можно представить как свертку этой функции с ядром Дирихле

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt$$

Ядро Дирихле обладает следующим свойством

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(u)\, du = 1$$

Кроме того, в силу четности ядра Дирихле

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\, dt$$

$$\int_{-\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

60. Преобразование Фурье и интеграл Фурье. Элементарные свойства. Нормированное преобразование Фурье.

Определение 1. Функция

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \qquad (9)$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx := \lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}\,dx,$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

Определение 2. Если $c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$f(x) \sim \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{10}$$

понимаемый в смысле главного значения, называется *интегралом Фурье функции f*.

Определение 3. Понимаемые в смысле главного значения интегралы

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \xi x\, dx, \tag{11}$$

$$\mathcal{F}_s[f](\xi) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \xi x\, dx \tag{12}$$

называются соответственно *косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции f*.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Пусть

$$c(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi),\ a(\xi) = \mathcal{F}_c[f])(\xi),\ b(\xi) = \mathcal{F}_s[f](\xi)$$

Тогда

$$c(\xi) = \frac{1}{2}(a(\xi) - ib(\xi))$$

$$a(-\xi) = a(\xi), \quad b(-\xi) = -b(\xi)$$

$$c(-\xi) = \overline{c(\xi)}$$

Очевидно также, что

$$\mathcal{F}[\bar{f}](-\xi) = \overline{\mathcal{F}[f](\xi)}$$

Из этого легко выводится несколько свойств преобразований Фурье четных и нечетных функций, аналогичных соответствующим свойствам коэффициентов Фурье по тригонометрической системе.

Для вещественной четной функции

$$\overline{\mathcal{F}_c[f](\xi)} = \mathcal{F}_c[f](\xi), \quad \mathcal{F}_s[f](\xi) \equiv 0,$$
$$\overline{\mathcal{F}[f](\xi)} = \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi);$$

Для вещественной нечетной функции

$$\mathcal{F}_c[f](\xi) \equiv 0, \quad \overline{\mathcal{F}_s[f](\xi)} = \mathcal{F}[f](\xi),$$
$$\overline{\mathcal{F}[f](\xi)} = -\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[f](-\xi);$$

Заметим, что если f — вещественнозначная функция, то ее интеграл Фурье можно записать также в виде

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi) + b^2(\xi)} \cos(x\xi + \varphi(\xi))\, d\xi = 2\int_0^\infty |c(\xi)| \cos(x\xi + \varphi(\xi))\, d\xi,$$

где $\varphi(\xi) = -\operatorname{arctg} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} = \arg c(\xi)$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

c. Нормировка преобразования Фурье. Преобразование Фурье (3) и интеграл Фурье (5) мы получили как естественные конти-

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt, \qquad (3)$$

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha t}\, d\alpha. \qquad (5)$$

нуальные аналоги коэффициентов Фурье $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ и ряда Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ периодической функции f в тригонометрической системе $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$. Эта система не является ортонормированной, и лишь простота записи в ней тригонометрического ряда Фурье заставляет по традиции рассматривать ее вместо значительно более естественной ортонормированной системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. В этой нормированной системе ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, а коэффициенты Фурье определяются формулами $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$.

Аналогом таких естественных коэффициентов Фурье и такого ряда Фурье в континуальном случае были бы преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \qquad (21)$$

и интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \qquad (22)$$

отличающиеся от рассмотренных выше лишь нормировочным множителем.

В симметричных формулах (21), (22) практически сливаются «коэффициент» Фурье и «ряд» Фурье, поэтому в дальнейшем мы будем, по существу, интересоваться только свойствами интегрального преобразования (21), называя его *нормированным преобразованием Фурье* или, если не возникает недоразумений, просто *преобразованием Фурье функции* f.

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

61. Свойства преобразования Фурье: дифференцирование, свертка, сдвиг, растяжение.

b. Линейность. Линейность преобразования Фурье очевидна: она следует из линейности интеграла.

c. Взаимоотношения оператора дифференцирования и преобразования Фурье. Имеют место формулы

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{28}$$

$$(\widehat{x^\alpha f(x)})(\xi) = (i)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{f}(\xi). \tag{29}$$

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

f. Преобразование Фурье и свертка. Имеют место следующие важные соотношения:

$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}, \tag{37}$$

$$\widehat{(f \cdot g)} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g} \tag{38}$$

(называемые иногда *формулами Бореля*), которые связывают операции свертки и умножения функций посредством преобразования Фурье.

Докажем эти формулы:

$$\blacktriangleleft\ \widehat{(f * g)}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i(\xi, x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy \right) e^{-i(\xi,x)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(\xi, x-y)}\, dx \right) dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(\xi, u)}\, du \right) dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \hat{f}(\xi)\, dy = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Законность проведенного изменения порядка интегрирования не вызывает сомнений, если $f, g \in S$.

Определение 6. Обозначим символом $S(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ или, если не возникает недоразумений, символом S, совокупность всех функций $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty,$$

каковы бы ни были неотрицательные мультииндексы α и β. Такие функции называют *быстро убывающими* (при $x \to \infty$).

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Сдвиг

$$\widehat{f(x-x_0)} = e^{-i\omega x_0}\hat{f}(\omega)$$

Растяжение

$$\widehat{f(ax)} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$$

62. Пространство Шварца, его инвариантность по отношению к преобразованию Фурье.

Равенство Парсеваля (сохранение нормы $L_2(R)$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Определение (пространство гладких быстро убывающих функций) (пространство Шварца)

Пространством гладких быстро убывающих функций называется пространство

$$S(R) = \left\{f, f \in C^{\infty}(R): \forall n, m \in N: \exists \lim_{x\to\infty} x^n f^{(m)}(x) = 0\right\}$$

Замечание $S(R)$ является подпространством в $L_2(R)$

Пример $f(x) = e^{-x^2} \in S(R)$

Утверждение Если $f(x) \in S(R)$ то и $\hat{f}(\omega) \in S(R)$.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \dots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \sqrt{\pi}$$

63. Существование преобразования Фурье. Теорема Планшереля.

2.5. Условия существования преобразования Фурье

Известно, что для существования преобразования Фурье функции $f(t)$ достаточно выполнение следующих трех условий:
1) $f(t)$ — ограничена при $t \in (-\infty, +\infty)$;
2) $f(t)$ — абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$;
3) число точек разрыва, максимума и минимума функции $f(t)$ конечно.

Выполнение этих трех условий не является необходимым для существования прямого и обратного преобразования Фурье.

Можно доказать, что если $f(t)$ квадратично суммируема $(f(t) \in L_2(-\infty, \infty))$, то для $f(t)$ существуют прямое и обратное преобразования Фурье. Квадратичная суммируемость функции $f(t)$ означает, что $f(t)$ и $F(\nu)$ соответствуют сигналу с ограниченной энергией. Поскольку любой физический процесс регистрируется на конечном промежутке времени, последнее условие всегда выполнено.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi, \pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$

Теорема (Планшерель)

Для всякой функции действительного переменного $f(x) \in L_2(R)$ существует такая функция действительного переменного $g(x) \in L_2(R)$, что

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| g(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\omega x} dx \right|^2 d\omega = 0$$

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \right|^2 dx = 0$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx$$

Вспоминая, что элементами $L_2(R)$ являются не функции, а классы эквивалентности функций, приходится говорить, что функция $g(\omega)$, являющаяся преобразованием Фурье функции $f(x)$, определена почти всюду, то есть на всей действительной оси, за исключением, может быть множества точек меры ноль.

Пример. В пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим систему функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ Заметим, что эта система является ортогональной, взяв интегралы вида

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = 0$$

(в последних двух интегралах $n \neq m$).

Эту систему можно нормировать, записав ее как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots$$

Для этого достаточно заметить, что, например

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx} = \sqrt{\pi}$$