

## **1. Суть методологии математического моделирования. Триада. Основные этапы моделирования.**

### **Исторические периоды развития методов математического моделирования**

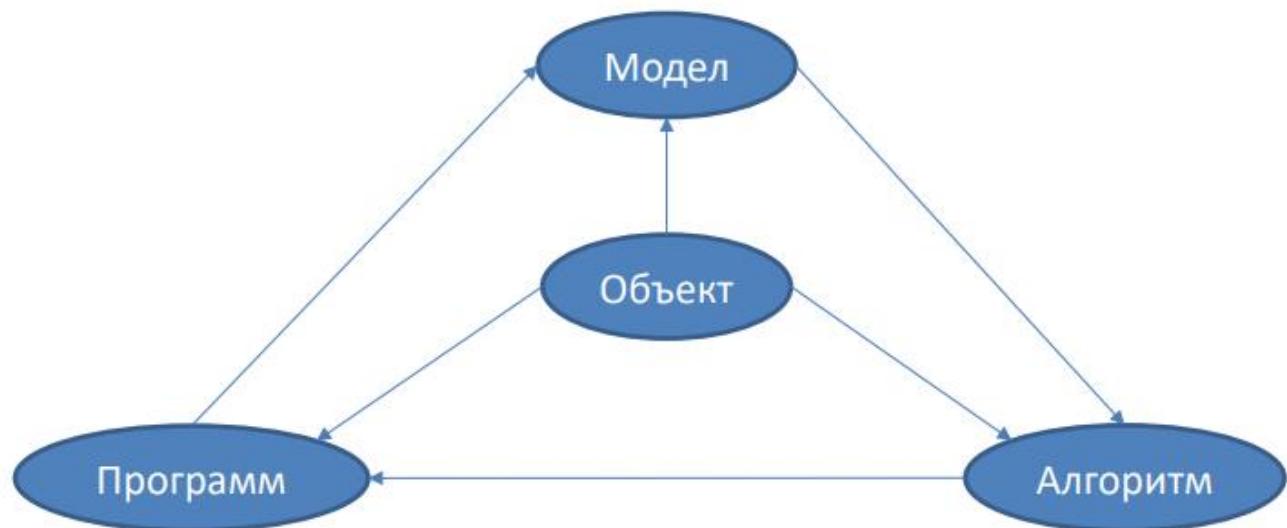
Современную науку невозможно представить без математического моделирования.

Сущность методологии математического моделирования состоит в замене исходного объекта его образом – математической моделью, и дальнейшем изучении модели. Этот метод познания сочетает в себе достоинства теории и эксперимента. Работа с моделью дает возможность быстро и без затрат исследовать характерные свойства объекта, опираясь на мощь аналитических и численных методов, компьютерных технологий.

Основы матмоделирования как инструмента познания мира заложены корифеями науки

– Ньютоном, Эйлером, Пуанкаре, Максвеллом, Энштейном. Мощное развитие методов матмоделирования приходится на двадцатый век, когда выполнялись национальные программы в СССР и США по ядерному вооружению и космосу.

В настоящее время матмоделирование вступает в третий этап развития, «встраиваясь» в структуру информационного общества, основанного на переработке, передачи и хранения информации. Математическое моделирование – ядро современных информационных технологий. Его можно представить в виде следующей схемы:



Первый этап – построение математической модели, второй этап – приближенно-аналитическое исследование модели, разработка алгоритма численного анализа для реализации его на компьютере. Очень важная часть исследований – проверка триада «модель-алгоритм-программа» на адекватность.

Моделирование как метод исследования используется во всех видах творческой деятельности людей – ученых, бизнесменов, политиков, военачальников. Моделирование плодотворно при следующих условиях: при четкой формулировке основных понятий, высокой точности вычислений и приближенно-аналитических методов исследований, при адекватности модели в пределах принятых ограничений.

### **Основные этапы моделирования**

1. Создание мат. модели. Для этого надо выяснить характер законов и связей между отдельными составляющими исследуемого объекта. Заметим, что в каждой предметной области имеем свои законы: есть законы химии, физики, биологии, экономики. Далее, фиксируем внимание на основных (главных) чертах процесса. При описании главных характеристик объекта действует принцип удержания факторов одного порядка значимости, когда второстепенные факторы

отбрасываются. Далее записываем уравнения модели, которые во многих случаях имеют вид дифференциальных уравнений. Если уравнения описывают детерминированный процесс, то такую модель называют детерминированной. Если модель содержит вероятностные законы, то она называется вероятностной, стохастической.

2. Далее модель исследуют:

приближенно-аналитически и качественно, исследуют в предельных ситуациях, что характерно для асимптотических методов исследования

3. Создают и реализуют программы, численно описывающие поведение объекта на основе модели

4. Анализируют результаты расчетов, дают им интерпретацию

5. Проверяют модель на адекватность

### **Прямые и обратные задачи моделирования**

1. Прямая задача.

Все параметры системы известны, следует изучить поведение системы

2. Обратные задачи:

а) Задача распознавания параметров модели путем сопоставления данных и результатов моделирования: задачи электроразведки, задачи магнитной дефектоскопии Модел Объект Программ Алгоритм

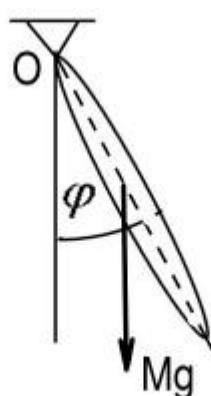
б) Задача синтеза: построение мат. модели технических устройств, обладающих заданными характеристиками. Отсутствие единственности решения ведет к постановке нахождения оптимальных решений

в) Задача проектирования управляющих систем.

Особая область исследования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления

## **2. Принципы построения моделей на примере колебаний физического маятника**

### **Модель колебаний отдельных элементов конструкций**



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

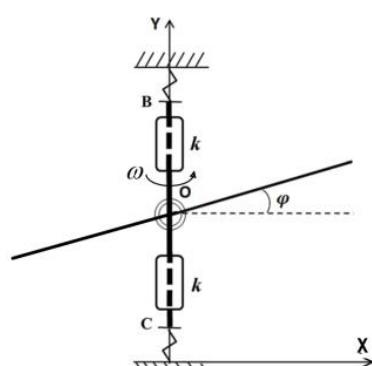
## Характер идеализации

Характер идеализации зависит не только от свойств рассматриваемой системы, но и от того, на какие вопросы вы хотите получить ответы. Так, если вас интересует вопрос о движении маятника на небольшом промежутке времени, вы вправе не учитывать трение. Однако, большие времена движений, или описание колебаний вблизи резонанса требует рассмотрения трения, так как при резонансе амплитуда зависит от времени.

1. При моделировании движений маятника пренебрегают случайными воздействиями на маятник, пренебрегают флуктуациями в параметрах, пренебрегают возмущениями в начальных условиях. Чтобы физический процесс, описываемый моделью длился достаточно долго, необходимо потребовать устойчивости движений модели по Ляпунову.
2. Необходимо учитывать малые изменения вида дифференциальных уравнений с сохранением порядка этих уравнений, так как мы не можем с абсолютной точностью описать реальную систему. С другой стороны, ни одна реальная система не остается абсолютно неизменной. Поэтому модель должна быть грубой (по Андронову). Если влияние паразитных параметров приводит к увеличению порядка дифференциальных уравнений (увеличение числа степеней свободы) с малыми параметрами при старшей производной, то проверка устойчивости движений модели проводится опытным путем.
3. Учет случайных возмущений означает, что модель будет стохастической.
4. Важным понятием идеализации является понятие числа степеней свободы. Следуя молекулярным представлениям о строении тела, имеем огромное число степеней свободы –  $3N$ . Во многих случаях, когда вас не интересуют вопросы относительного движения частиц друг относительно друга, вы можно рассматривать тело как сплошную среду и пользоваться классическими понятиями непрерывности. Тогда само тело есть целое и, в случае плоского его движения, имеет одну степень свободы. Обобщенная координата есть  $\varphi$ . В наносистемах понятие непрерывности не работает, приходится использовать иные методы моделирования.
5. При моделировании плоских движений тела мы пренебрегаем движениями в пространстве. Более реальная модель имеет две степени свободы и две обобщенные координаты --  $\varphi, \psi$ .

Модель движения лопасти вертолета на упругой втулке несущего (рулевого) винта вертолета

Дискретная модель несущего винта:



Рассмотрим дискретную модель вращения винта самолета на упругой втулке. Обобщенные координаты --  $y, \varphi, \psi$ . Здесь  $y$  задает перемещение втулки вдоль вертикальной оси, угол  $\varphi$  задает угол изгиба винта вертолета,  $\psi$  -- угол поворота винта вертолета относительно вертикальной оси. Лопасть вертолета моделируется стержнем длины  $2l$ , втулка – стержень длины  $l$ . Изгибная жесткость лопасти моделируется неидеальной спиральной пружиной жесткости  $c_2$ , учитывается момент сил трения  $b_2\dot{\varphi}$ , где  $b_2$  – коэффициент трения. Упругость стержня моделируем линейной пружиной жесткости  $c_1$ , учитываем линейные силы трения  $b_1\dot{y}$ ,  $\omega = \text{const}$  – угловая скорость вращения лопасти вертолета. Уравнения движения:

$$(m_1 + m)\ddot{y} + \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -2c_1y - 2b_1\dot{y}$$

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ml\ddot{y}\cos\varphi - \frac{ml^2}{6}\omega^2\sin 2\varphi = -c_2\varphi - b_2\dot{\varphi}$$

С помощью этой модели можно исследовать такое явление как флаттер несущего винта вертолета.

Флаттер (дрожание, вибрация) – незатухающие изгибные и крутящие автоколебания элементов конструкций летательного аппарата (крыла самолета или винта вертолета). Как правило, флаттер проявляется при достижении некоторой критической скорости, зависящей от характеристик конструкции летательного аппарата.

Исследования флаттера в СССР начались в середине 1930-х годов. Советская авиация столкнулась с тем, что при увеличении скорости, при некотором критическом её значении, самолёты начинало сильно трясти и они разрушались в воздухе. Вибрация нарастала настолько быстро, что у лётчика не оставалось времени на снижение скорости. От начала вибраций до разрушения самолёта проходили считанные секунды. Явление флаттера крыла самолета исследовал М.В. Келдыш: он создал модель явления, исследовал ее, описал методы подавления флаттера.

Причина флаттера – возникновение быстрорастущих колебаний конструкции как следствие потери устойчивости стационарных режимов движения.

Поэтому необходимо исследовать устойчивость стационарного движения

$$y = 0, \varphi = 0, \frac{d\psi}{dt} = \omega = \text{const}$$

Неустойчивость этого режима ведет к быстрому росту колебаний по  $y$  и по  $\varphi$ , что ведет к разрушению конструкции.

Линеаризованные уравнения движений в окрестности стационарного движения:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2y + \beta_1\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{3}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma\varphi + \beta_2\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

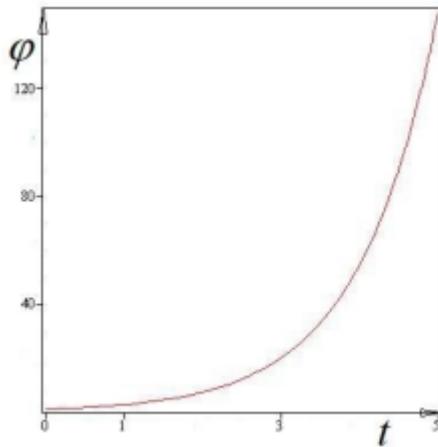
Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + \frac{\beta_1 + 6\beta_2}{2}\lambda^3 + \frac{3\beta_1\beta_3 + 6\sigma + 2}{2}\lambda^2 + \frac{3\beta_1\sigma + 6\beta_2}{2}\lambda + 3\sigma = 0$$

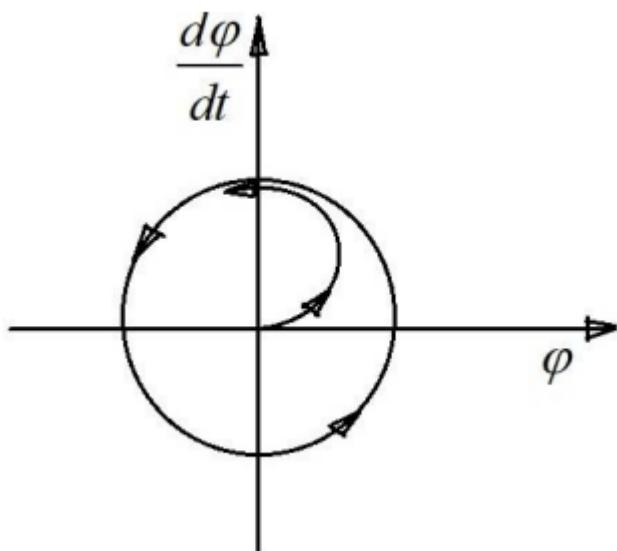
Условия устойчивости стационарного движения (условие отсутствия положительных действительных частей корней характеристического уравнения) при отсутствии трения (

$$\omega^2 \leq \frac{1}{m} \left( \frac{3c_2}{l^2} + c_1 \right) = \omega_{kp}.$$

При  $\omega > \omega_{kp}$ , возникает флатер:



Учет нелинейных отброшенных членов, учет аэродинамических сил меняет картину колебаний:



Здесь замкнутая траектория есть предельный цикл системы уравнений, а именно, – изолированная периодическая траектория, притягивающая остальные траектории системы (предельный аттрактор). Колебания по  $\varphi$  происходят с большой амплитудой, конструкция разрушается.

### 3. Метод фазовой плоскости исследования нелинейного дифференциального уравнения 2-го порядка: интеграл энергии, фазовые кривые, фазовый портрет, основные элементы фазового портрета, вычисление периода колебаний

Познакомимся с одним из методов качественного исследования поведения фазовых кривых дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (1.5)$$

Отметим, что данное уравнение при помощи замены  $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$  сводится к системе дифференциальных уравнений вида (1.1)

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -f(y_1),\end{aligned}$$

и поэтому под решением уравнения (1.5) понимается пара  $(x(t), \dot{x}(t))$ .

Понизим порядок уравнения (1.5), интегрируя его левую часть по  $x$ , преобразовав предварительно вторую производную  $\ddot{x}$  к виду  $\dot{x} \cdot d\dot{x}/dx$  результат получим

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = C, \quad \Pi(x) = \int_0^x f(x) dx. \quad (1.6)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования. Отсюда следует, что любое решение  $x(t)$  уравнения (1.5) удовлетворяет равенству (1.6) тождественно по  $t$ :

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + \Pi(x(t)) \equiv C. \quad (1.7)$$

Справедливо также обратное утверждение: любая функция  $x(t)$ , удовлетворяющая тождеству (1.7), есть решение уравнения (1.5). Таким образом, соотношение (1.6) является своеобразным фильтром, выделяющим решения уравнения (1.5) из всего множества функций  $x = x(t)$ . Соотношение (1.6) называют первым интегралом уравнения (1.5). Используя аналогию с механикой, функцию  $\Pi(x)$  будем называть потенциальной энергией, а сам интеграл (1.6) — интегралом энергии. Хорошо известен критерий принадлежности произвольной функции  $F(x, \dot{x})$  множеству первых интегралов уравнения (1.5): производная по времени от  $F(x, \dot{x})$ , вычисленная в силу уравнения (1.5), тождественно равна нулю по  $x, \dot{x}$  во всей области существования решений  $x(t)$  и  $\dot{x}(t)$ :

$$\frac{dF(x, \dot{x})}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} f(x) \equiv 0.$$

Таким образом, (1.7) — всего лишь один из первых интегралов уравнения (1.5). Константа интегрирования определяется из начальных условий:

$$\frac{\dot{x}^2(0)}{2} + \Pi(x(0)) = C.$$

Для качественного исследования решений уравнения (1.5) будем рассматривать  $\dot{x}, x$  как координаты точки на плоскости. Эта плоскость, как известно, называется фазовой плоскостью, а точка  $(\dot{x}, x)$  — фазовой или изображающей точкой. Движение фазовой точки происходит вдоль некоторой линии, называемой фазовой кривой. Параметрическое уравнение этой линии имеет вид  $x = x(t), \dot{x} = \dot{x}(t)$ , где  $x(t), \dot{x}(t)$  — частное решение уравнения (1.5). Построение фазовой траектории для данного уравнения означает построение кривой, выражающей зависимость скорости  $\dot{x}$  от координаты  $x$  для заданного движения  $x(t), \dot{x}(t)$ . Фазовая плоскость с имеющимися на ней фазовыми траекториями дает возможность сразу увидеть всю совокупность движений, могущих возникнуть в рассматриваемой физической системе. Так, например, если траектория изображающей точки, вырождается в точку на фазовой плоскости, то это соответствует положению равновесия исходной физической системы. Другой возможный тип движения изображающей точки по траектории — это движение по замкнутой кривой, данный тип движения соответствует периодическому характеру движения исходной системы. Для построения фазовых

кривых воспользуемся интегралом (1.6). Разрешая его относительно  $\dot{x}$ , получим

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2C - 2\Pi(x)}.$$

Это равенство описывает семейство фазовых кривых в плоскости  $x, \dot{x}$ , параметризованное константой  $C$ . Меняя значение константы, переходим от одной кривой семейства к другой. Поскольку эта константа зависит от начальных условий, мы имеем полную картину возможных движений исследуемой системы в зависимости от начальных данных. Правило выбора знака правой части таково. В верхней полуплоскости ( $\dot{x} > 0$ ) берем знак плюс, в нижней ( $\dot{x} < 0$ ) — минус. Это значит, что в верхней полуплоскости фазовая точка движется в сторону возрастания координаты  $x$ , а в нижней полуплоскости — в сторону убывания  $x$ . Область действительных движений задается неравенством  $\Pi(x) < C$  во все время движения изображающей точки. Множество точек фазовой плоскости, удовлетворяющих этому неравенству, будем называть областью возможного движения при заданном значении  $C$ . Рассмотрим уравнение линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Здесь

$$\Pi(x) = \int_0^x \omega^2 x dx = \frac{1}{2} \omega^2 x^2,$$

интеграл энергии имеет вид

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2C - \omega^2 x^2}, \quad C > 0. \quad (1.8)$$

В плоскости  $(\Pi, x)$  строим график функции  $\Pi = \Pi(x)$ , рассекаемый прямыми  $\Pi = C$ . Из рис. 1.3 видно, что действительное движение с заданной постоянной энергией  $C$  заключено в интервале  $-a \leq x \leq a$ , где  $a^2 = 2C/\omega^2$ . На концах этого интервала скорость  $\dot{x}$  обращается в ноль. Следовательно, если положить  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $x(0) = -a$ , то фазовая точка придет в движение в сторону возрастающих значений  $x$  и через некоторый промежуток времени  $t^*$  достигнет положения  $(a, 0)$ :  $x(t^*) = a$ ,  $\dot{x}(t^*) = 0$ . Действительно, в силу монотонного характера движения фазовой точки вдоль оси  $x$  она обязательно (в некоторый момент  $t^*$ ) пересечет либо прямую  $x = a$ , либо прямую  $\dot{x} = 0$ . Из формулы (1.8) следует, что пересечение прямых  $x = a$  и  $\dot{x} = 0$  происходит одновременно, поэтому  $x(t^*) = a$ ,  $\dot{x}(t^*) = 0$ . Дальнейшее движение происходит в нижней полуплоскости, и фазовая точка возвращается в исходное состояние  $\dot{x} = 0$ ,  $x = -a$ . Итак, фазовые траектории — замкнутые кривые, окружающие положение равновесия  $x = \dot{x} = 0$ . Из интеграла энергии следует, что эти кривые имеют форму эллипса с полуосами  $\sqrt{2C}$ ,  $\sqrt{2C/\omega}$  соответственно.

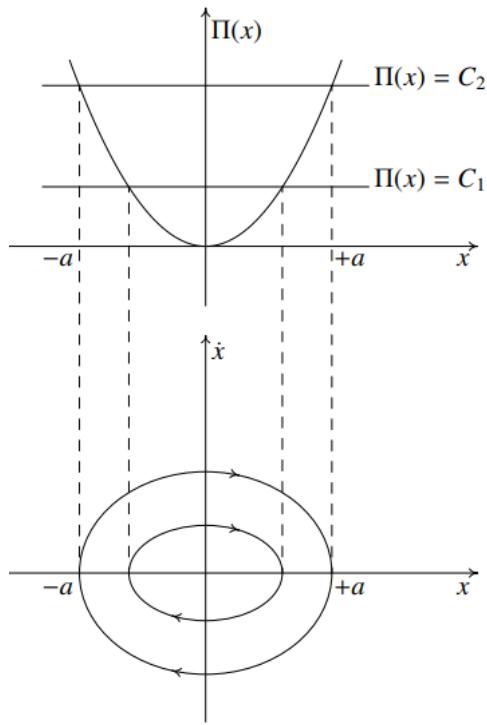


Рис. 1.3. Потенциальная энергия и фазовый портрет для гармонического осциллятора

Так как все фазовые траектории являются замкнутыми кривыми (за исключением траектории, выродившейся в точку  $x = 0, \dot{x} = 0$ ), то соответствующие движения  $x = x(t), \dot{x} = \dot{x}(t)$  будут периодическими. Подсчитаем период  $T$  этих колебаний в зависимости от параметра  $C$ . Из формулы (1.8) следует, что

$$T = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2}} = \frac{2}{\omega} \arcsin \left. \frac{x}{\sqrt{2C/\omega^2}} \right|_{-a}^{+a} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.9)$$

Колебания изохронны, так как их период  $T$  не зависит от  $C$  (от начальных условий). Исследуем нелинейное уравнение Дюффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \mu x^3 = 0, \quad \mu > 0. \quad (1.10)$$

Очевидно, что

$$\Pi(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2} - \mu \frac{x^4}{4}, \quad \dot{x} = \pm \sqrt{2C - \omega^2 x^2 + \mu x^4/2}. \quad (1.11)$$

Картина колебаний, представленная на рис. 1.4, меняется качественно.

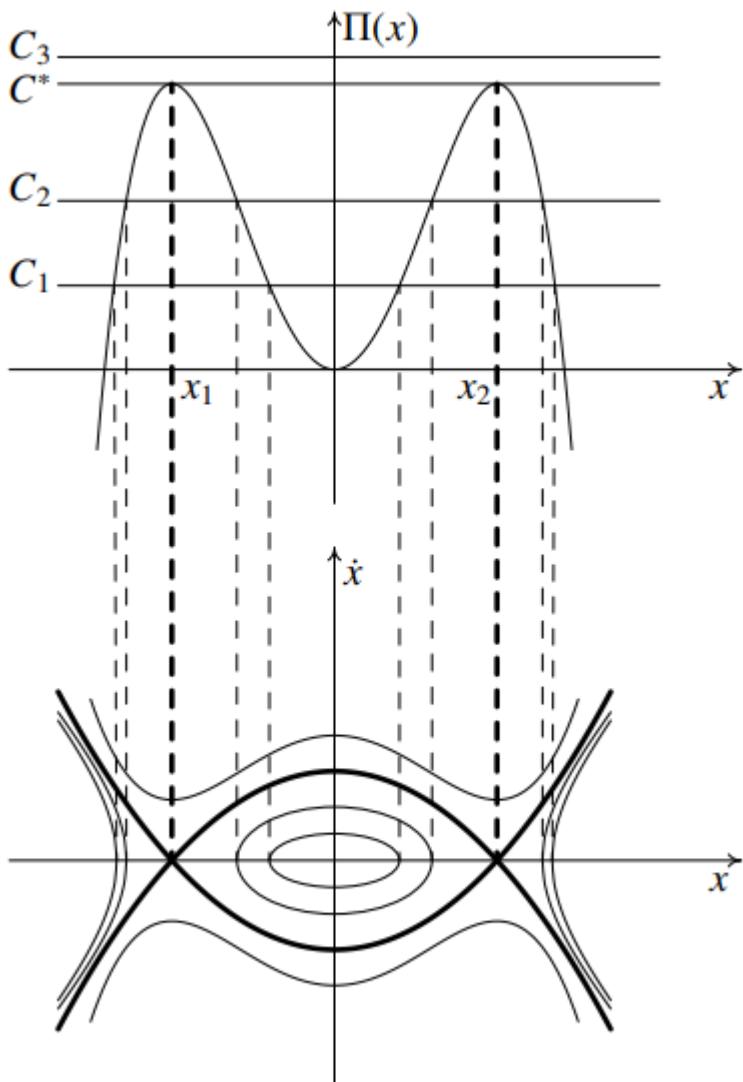


Рис. 1.4. Фазовый портрет для уравнения (1.10)

Уравнение (1.10) имеет три положения равновесия: одно устойчивое  $x = 0, \dot{x} = 0$  (отвечающее константе  $C = 0$ ) и два неустойчивых —  $x = x_{1,2}, \dot{x} = 0$  ( $C = C^*$ ), называемых седловыми точками. Область колебаний в окрестности устойчивого равновесия отделена от областей апериодического движения особой кривой, проходящей через седловые точки и называемой сепаратрисой (от фр. s'eparer — разделять). Движение вдоль этой кривой имеет асимптотический характер, когда изображающая точка стремится к одному из неустойчивых равновесий при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Постоянная  $C$ , отвечающая движению по сепаратрисе, равна критическому значению  $C^*$  потенциальной функции  $\Pi(x)$ . Подсчитаем координату  $x$  в положении равновесия:

$$\frac{d\Pi}{dx} \equiv \omega^2 x - \mu x^3 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x_0 = 0, \quad x_1 = -\omega / \sqrt{\mu}, \quad x_2 = \omega / \sqrt{\mu}.$$

Тогда критическое значение С, отвечающее равновесиям  $x = x_1, 2$ ,  $\dot{x} = 0$ , вычисляется по формуле

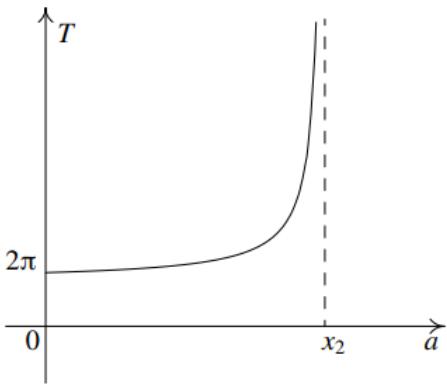
$$C^* = \Pi(\pm\omega/\sqrt{\mu}) = \frac{\omega^4}{4\mu}.$$

При  $0 < C < C^*$  фазовые кривые замкнуты и окружают положение равновесия  $x = 0, \dot{x} = 0$ , подобно фазовым кривым линейного осциллятора. Однако в отличие от линейного осциллятора при увеличении С замкнутые кривые все больше отличаются от эллипса. При  $C = C^*$  эти кривые бесконечно близко примыкают к положениям равновесия  $x = x_1, 2$ ,  $\dot{x} = 0$ , не включая их в себя, поскольку фазовые кривые автономного уравнения (1.10) не могут пересекаться. Это ведет к предельному поведению изображающей точки: она бесконечно долго приближается к  $x = x_1, 2, \dot{x} = 0$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , (случай бесконечно долгого ухода), так и при  $t \rightarrow +\infty$  (бесконечное сближение). Сепаратриса, отвечающая значению  $C = C^*$  и отделяющая область колебаний от области неограниченных движений, состоит из шести ветвей (на рис. 1.4 она выделена черным цветом): четыре ветви отвечают неограниченным движениям в областях  $\dot{x} > 0$  и  $\dot{x} < 0$  соответственно, две ветви образуют замкнутую кривую, окружающую начало координат. Неограниченность движений означает, что  $|x| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . Подсчитаем период колебаний в области  $0 < C < C^*$ . Из рис. 1.4 видно, что амплитуда колебаний а меняется по оси  $x$  в пределах от 0 до  $x_2$ . Из формулы скорости (1.11) следует выражение для периода колебаний:

$$T = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{2C - \omega^2 x^2 + \mu x^4/2}}.$$

Значение постоянной С находится из интеграла энергии:  $2C = \omega^2 a^2 - (\mu a^4)/2$ . Период колебаний зависит от константы С, следовательно, он зависит от амплитуды колебаний, т. е.  $T = T(a)$ . Для того чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить зависимость  $T(a)$  при следующих значениях параметров:  $\omega = 1$ ,  $\mu = 2$ . Тогда  $x_2 = 0.707107$ . Результаты расчетов периода  $T(a)$  приведены на рис. 1.5. Стремление периода к бесконечности, когда амплитуда  $a$  приближается к значению  $x_2$ , имеет простое объяснение: чем ближе примыкает к сепаратрисе замкнутая фазовая кривая, тем медленнее движется изображающая точка вдоль этой кривой в силу асимптотичности движения вдоль самой сепаратрисы. Таким образом, нелинейные колебания в окрестности устойчивой особой точки  $x = 0, \dot{x} = 0$  являются неизохронными. Из рис. 1.5 следует, что по мере приближения амплитуды  $a$  к  $x_2$  частота колебаний  $\omega = 2\pi/T(a)$  вдоль замкнутых кривых, окружающих начало координат, уменьшается, принимая нулевое значение при  $a = x_2$ .

Именно поэтому сепаратрису, проходящую через неустойчивые положения равновесия  $(x_1, 0), (x_2, 0)$ , называют часто фазовой кривой нулевой частоты.



#### 4. Уравнения возмущенного движения. Уравнения в вариациях Пуанкаре.

Рассмотрим произвольную физическую систему, уравнения движений которой могут быть приведены к нормальному виду

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{y}$  — вектор-столбец. Рассмотрим какое-нибудь частное движение динамической системы, которому соответствует частное решение  $\mathbf{y}^* = \phi(t)$  уравнений (2.9). Мы будем это решение называть невозмущенным в отличие от других решений уравнения (2.9), которые мы будем называть возмущенными.

$x$  — разность между значениями величины  $y$  на возмущенном и невозмущенном решениях, то есть

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \phi(t), \quad (2.10)$$

будем называть возмущениями, или вариациями функции  $\phi(t)$ .

Рассмотрим равенство (2.10) как преобразование переменных  $y \rightarrow x$ .

Уравнения (2.9), записанные в новых переменных, имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x} + \phi, t) - \mathbf{f}(\phi, t) \quad (2.11)$$

и называются дифференциальными уравнениями возмущенного движения. Каждому решению  $y(t)$  уравнений (2.9) соответствует частное решение  $x(t)$  уравнений (2.11), и наоборот. В частности, в силу равенства  $X(0, t) \equiv 0$  невозмущенному движению  $\phi(t)$  отвечает тривиальное решение  $x = 0$  уравнений (2.11). Эти уравнения, как правило, не автономны. Однако в том случае, когда исходные уравнения (2.9) автономны, а невозмущенное решение стационарно ( $\phi(t) = \text{const}$ ), уравнения (2.11) будут автономны. В качестве примера рассмотрим колебания математического маятника длиной  $l$ :

$$\ddot{y} = -\frac{g}{l} \sin y,$$

где  $y$  — угол отклонения от вертикали. Рассмотрим какое-нибудь частное решение этого уравнения:  $y^* = \phi(t)$ . Полагая  $x = y - \phi$ , получим уравнения возмущенного движения в виде

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \sin(x + \phi(t)) + \frac{g}{l} \sin \phi(t).$$

Разлагая в ряд по степеням  $x$ , будем иметь

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l} \cos \phi(t)x + \frac{g}{2l} \sin \phi(t)x^2 + \dots$$

Теперь разложим в ряд по степеням  $x$  уравнения возмущенного движения (2.11):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(0, t) + \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=0} \mathbf{x} + \dots$$

Здесь  $(\partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x})_{\mathbf{x}=0} = ||\partial X_i / \partial x_j||_{x=0}$  есть  $n \times n$  матрица Якоби векторной функции  $\mathbf{X}(x, t)$  при  $x = 0$ . Очевидно, что

$$\left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\|_{x=0} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right\|_{y=\Phi(t)}.$$

Теперь отбросим в полученном уравнении члены выше первого порядка относительно  $x$ , получим, учитывая  $X(0, t) \equiv 0$ , систему линейных уравнений, которую мы запишем в координатах  $\xi$ :

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\xi, \quad \mathbf{A} = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right\|_{y=\Phi(t)}. \quad (2.12)$$

**Линейные однородные уравнения (написаны выше) называют уравнениями в вариациях Пуанкаре** относительно решения  $\phi(t)$  уравнений (2.9). Формальная замена  $x$  на  $\xi$  позволит избежать путаницы в обозначениях решений двух разных систем уравнений: уравнений возмущенного движения (2.11) (решения которых мы обозначили через  $x(t)$ ) и уравнений в вариациях Пуанкаре, имеющих решение  $\xi(t)$ . Изучим свойства этих уравнений. Пусть невозмущенное решение  $y^* = \phi(t)$  заключено в однопараметрическое семейство решений  $\tilde{y} = \tilde{\phi}(t, h)$  уравнений (2.9) так, что при  $h = 0$  имеем  $\phi(t) = \tilde{\phi}(t, 0)$ . Чтобы получить решение  $y = \phi + \xi$  бесконечно близкое к  $\phi$ , необходим малый сдвиг по параметру  $h$ . С точностью до членов порядка  $h^2$  семейство  $\tilde{\phi}(t, 0)$  можно представить в виде

$$\tilde{\phi}(t, h) = \phi(t) + h \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial h} \right)_0.$$

Напомним, что оборот «с точностью до членов порядка  $h^k$ » означает только то, что члены порядка  $h^k$  и выше отбрасываются. Если не учитывать несущественный постоянный сомножитель  $h$ , можем считать, что бесконечно малое возмущение  $\xi(t)$ , описываемое уравнениями (2.12), имеет вид

$$\xi = (\partial \tilde{\phi} / \partial h)_0. \quad (2.13)$$

Действительно, дифференцируя по  $h$  тождество  $\tilde{\phi}(t, h) \equiv f(\tilde{\phi}(t, h), t)$  и подставляя  $h = 0$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial h} \right)_0 \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=\tilde{\phi}(t,0)} \cdot \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial h} \right)_0.$$

Следовательно, (2.13) — частное решение уравнений в вариациях Пуанкаре. Не составляет труда обобщить этот результат на случай многопараметрического семейства решений  $\tilde{\phi}(t, h_1, \dots, h_p)$  уравнений (2.9), частным случаем которого является невозмущенное решение  $\phi(t)$ :  $\tilde{\phi}(t) = \phi(t, 0, \dots, 0)$ . А именно, выражение  $(\partial \tilde{\phi} / \partial h_i)_0$  есть частное решение уравнений (2.12) в силу сказанного выше (семейство  $\phi(t)$ :  $\tilde{\phi}(t) = \phi(t, 0, \dots, 0)$ ) допускает сдвиг по параметру  $h_i$  при фиксированных нулевых значениях остальных параметров). Итак, справедлива следующая теорема.

### Теорема 2.1.

Пусть невозмущенное решение  $y^* = \phi(t)$  заключено в многопараметрическое решение  $\tilde{\phi}(t, h_1, \dots, h_p)$  уравнений (2.9):  $\tilde{\phi}(t) = \phi(t, 0, \dots, 0)$ . Тогда уравнения в вариациях Пуанкаре (2.12)

имеют р частных решений вида

$$\xi^{(1)} = \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial h_1} \right)_0, \dots, \xi^{(p)} = \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial h_p} \right)_0.$$

### Теорема Пуанкаре

Если векторная функция  $f(y, t, \varepsilon)$  аналитична по  $y, t, \varepsilon$  когда  $(y, \varepsilon)$  принадлежит области  $D$ , содержащей нулевые значения величин  $y$  и  $\varepsilon$ , то для любого конечного интервала времени  $[0, T]$  существует значение  $\varepsilon_* (T) > 0$  такое, что решение задачи Коши

$$\dot{y} = f(y, t, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = 0$$

представимо рядом по  $\varepsilon$

$$y(t, \varepsilon) = \Phi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}(t) \varepsilon^k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

обращающимся в порождающее решение  $\Phi(t)$  при  $\varepsilon=0$  и равномерно сходящимся на отрезке  $[0, T]$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ . Доказательство опускаем.

**5. Понятие О-большого и о-малого функции одной переменной. Лемма, устанавливающая границы области изменения функции  $x(\varepsilon)$ , имеющей порядок малости  $O(\varepsilon^k)$ .**

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее малый параметр  $\varepsilon$  (считаем всюду ниже, без ограничения общности, что  $\varepsilon \geq 0$ ):

$$\frac{dy}{dt} = X(y, t, \varepsilon). \quad (2.1)$$

Считаем для простоты рассуждений, что  $y$  есть скалярная переменная, правая часть  $X(y, t, \varepsilon)$  — скалярная функция. Зададим начальное условие:  $y(0) = y_0$ . Предположим, что  $y = y(t, \varepsilon)$  — частное решение, удовлетворяющее этому условию;  $z = z(t, \varepsilon)$  — решение той же самой задачи Коши, но полученное приближенными методами интегрирования уравнения (2.1). Необходимо оценить ошибку точности приближения, т.е. порядок малости скалярной величины  $x(t, \varepsilon)$ , где

$$x(t, \varepsilon) = \|y(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\|.$$

Функцию  $x(t, \varepsilon)$  будем сравнивать с бесконечно малыми величинами  $\varepsilon^k$ , где  $k$  — целое положительное число, включая ноль. Прежде всего определим, опираясь на традиции теории колебаний, понятие О-большого для функции  $x(\varepsilon)$ , не зависящей от  $t$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.** Будем говорить, что  $x(\varepsilon)$  имеет один порядок малости с  $\varepsilon^k$ , если существует число  $A$  такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} = A, \quad 0 < |A| < \infty. \quad (2.2)$$

В этом случае будем писать  $x(\varepsilon) = O(\varepsilon^k)$ . Так например, это справедливо для  $x(\varepsilon) = \varepsilon^k \cdot A$  ( $A \neq 0$ ). Из равенства (2.2) следует, что функция  $x(\varepsilon)$  стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  с той же скоростью, что и  $\varepsilon^k$ . Будем также пользоваться символом порядка  $O(1)$ , когда  $k = 0$ . В этом случае функция  $x(\varepsilon)$  имеет конечный предел  $A$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т. е.  $x(\varepsilon) = O(1)$ , если  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(\varepsilon) = A$ .

Отметим, что равенство (2.2) содержит параметр  $\varepsilon$  как вещественную величину. В прикладных задачах  $\varepsilon$  является малым числом, отличным от нуля. Поэтому с точки зрения прикладного анализа это предельное равенство следует рассматривать условно, как определение величины  $O(\varepsilon^k)$  (приближенное равенство).

Символ  $O(\varepsilon^k)$  удобен для записи приближенных равенств. Так, используя представление тригонометрической функции  $\cos(\varepsilon)$  в виде ряда Маклорена

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots,$$

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + O(\varepsilon^4),$$

поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(\varepsilon) - 1 + \varepsilon^2/2}{\varepsilon^4} = \frac{1}{24}.$$

Эта запись означает, что при достаточно малом  $\varepsilon$  замена  $\cos(\varepsilon)$  на  $(1 - \varepsilon^2/2)$  приводит к ошибке порядка  $\varepsilon^4$ . В этом случае говорят, что выражение  $\cos(\varepsilon)$  подсчитано с точностью порядка  $\varepsilon^4$ . В более общем случае будем говорить, что вычисления произведены с точностью до членов порядка  $\varepsilon^n$ , если первый отброшенный член имеет порядок  $\varepsilon^n$ . Для примера рассмотрим также разложения

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 + \dots, \quad \operatorname{tg}(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{2}{15}\varepsilon^5 + \dots$$

Отсюда видно, что число  $(1 + \varepsilon/2)$  приближает выражение  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  с точностью порядка  $\varepsilon^2$ , в то время как  $(\varepsilon + \varepsilon^3/3)$  задает  $\operatorname{tg}(\varepsilon)$  с точностью порядка  $\varepsilon^5$ . В определенных случаях параметр  $A$ , входящий в правую часть равенства (2.2), равен нулю:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(\varepsilon)}{\varepsilon^k} = 0.$$

Это значит, что скорость стремления функции  $x(\varepsilon)$  к нулю больше, чем у  $\varepsilon^k$ . В этом случае говорят, что функция  $x(\varepsilon)$  есть о-малое от  $\varepsilon^k$ , т. е.  $x(\varepsilon) = o(\varepsilon^k)$ . Примеры таких функций:

$$\sin(\varepsilon^2) = o(\varepsilon), \quad (1 + \varepsilon)^n - 1 - n\varepsilon = o(\varepsilon), \quad \ln(1 + \varepsilon^2) = o(\varepsilon).$$

Докажем лемму, устанавливающую границы области изменения функции  $x(\varepsilon)$  порядка  $\varepsilon^k$

**Лемма 2.1.** Предположим, что функция  $x(\varepsilon)$  имеет один порядок малости с  $\varepsilon^k$ . Тогда для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  существуют постоянные  $A_1(\delta) > 0, A_2(\delta) > 0$  такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \delta$

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(\varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k.$$

**Доказательство.** Действительно, в силу условия теоремы выполняется предельное равенство (2.2). Его можно записать в виде

$$\frac{|x(\varepsilon)|}{\varepsilon^k} = |A| + \gamma(\varepsilon),$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(\varepsilon) = 0.$$

Фиксируем  $\delta$ -окрестность точки  $\varepsilon = 0$ . Пусть  $\gamma_1(\delta)$  и  $\gamma_2(\delta)$  — точные нижние и верхние значения функции  $\gamma(\varepsilon)$  в области  $0 < \varepsilon \leq \delta$ . Тогда будем иметь

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(\varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k. \quad (2.6)$$

Отсюда следует неравенство (2.6) при том условии, что  $A_1(\delta) = A + \gamma_1(\delta), A_2(\delta) = A + \gamma_2(\delta)$ .  
Лемма доказана.

## 6. Понятие О-большого функции малого параметра и времени – $x(t, \varepsilon)$ . Геометрическая интерпретация понятия О-большого. Вычисление О-большого для функции $\varepsilon^2 t \cos(t)$ на промежутке времени $t = L / \varepsilon$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.** Функцию  $x(t, \varepsilon)$  будем называть функцией, сравнимой по порядку малости с  $\varepsilon^k$  на интервале времени  $[0, T^*]$ , если для любого  $\delta > 0$  существуют константы  $A_1(\delta) \geq 0, A_2(\delta) > 0$  такие, что при любом  $t \in [0, T^*]$  и всяком  $\varepsilon \in [0, \delta]$  выполняется условие полосы

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(t, \varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k. \quad (2.7)$$

Если функция  $x(t, \varepsilon)$  удовлетворяет определению 2.2, то будем говорить, что она есть О-большое от  $\varepsilon^k$  на интервале времени  $[0, T^*]$ . Другими словами,  $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^k)$  при  $t \in [0, T^*]$ .

Очевидно, что это определение свободно от операции предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поэтому его удобно использовать прежде всего для оценки порядка малости функции на асимптотически большом интервале времени  $[0, L/\varepsilon]$ .

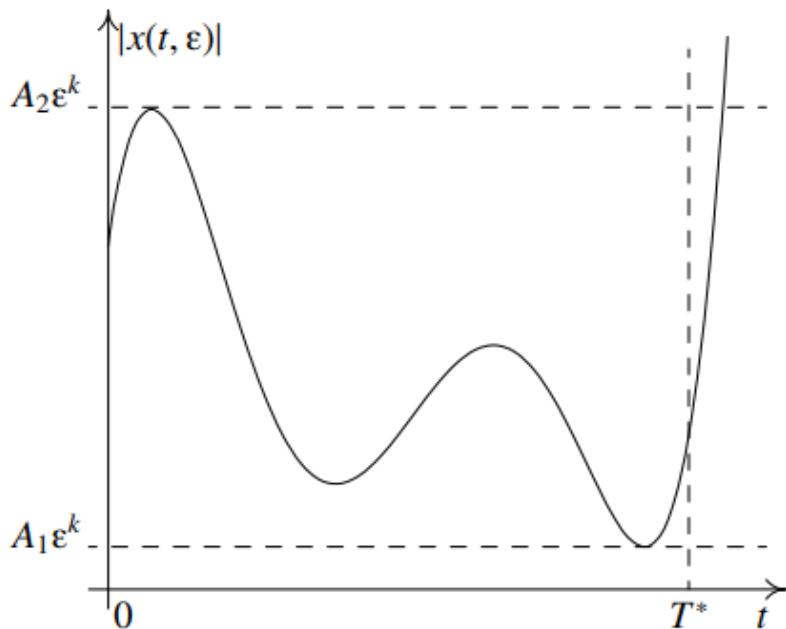


Рис. 2.1. Функция  $x(t, \varepsilon)$  порядка  $\varepsilon^k$

На рис. 2.1 изображено типичное поведение такой функции. Для него характерно существование конечной зоны (2.7) изменения модуля функции  $x(t, \varepsilon)$  на интервале времени  $[0, T^*]$ . За пределами этого интервала функция  $x(t, \varepsilon)$  может покидать полосу (2.7). Исключение составляет случай  $T^* = \infty$  (бесконечный интервал), когда неравенство (2.7) должно выполняться при всех  $t \geq 0$ . Получим достаточные условия того, что искомая функция  $x(t, \varepsilon)$  имеет величину порядка  $\varepsilon^k$  при  $t \in [0, T]$  либо  $t \in [0, \infty)$ . Итак, пусть  $T^* = T$  либо  $T^* = \infty$ ,  $M$  — положительная константа. Тогда справедливо следующее утверждение.

**II. Рассмотрим выражение  $x(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 t \cos(t)$ .**

Здесь  $A(t) = t \cos(t)$  есть неограниченная функция, когда  $T^* = \infty$ , поэтому

лемма 2.2 неприменима. Однако мы можем оценить порядок малости  $x(t, \varepsilon)$  через неравенства (2.7), вычисляя коэффициенты  $A_1(\delta)$ ,  $A_2(\delta)$  в виде точной нижней и верхней границ модуля функции  $x(t, \varepsilon)/\varepsilon^2$  в области  $(0, \delta] \times [0, T^*]$  соответственно. Положим  $t \in [0, T]$ , тогда имеем

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq T\varepsilon^2.$$

Следовательно, функция  $x(t, \varepsilon)$  имеет порядок  $\varepsilon^2$  на интервале  $[0, T]$ . Рассмотрим интервал  $[0, L/\varepsilon]$ . Очевидно, что

$$0 \leq |x(t, \varepsilon)| \leq L\varepsilon,$$

поэтому в соответствии с определением (2.2)  $x(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$  на интервале  $[0, L/\varepsilon]$ . На бесконечно большом интервале времени  $[0, \infty]$  функция  $x(t, \varepsilon)$  может принимать значения сколь угодно большие, поэтому функция  $x(t, \varepsilon)$  не сравнима по величине ни с одним из выражений  $\varepsilon^k$ .

Итак, неограниченная по времени функция  $x(t, \varepsilon)$  может иметь разные порядки малости на разных интервалах времени.

## 7. Лемма о порядке малости функции $x(t, \varepsilon)$ при условии существования предела функции $x(t, \varepsilon) / \varepsilon^k$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Пусть  $T^* = T$  либо  $T^* = \infty$ ,  $M$  – положительная константа. Тогда справедливо следующее утверждение.

### Лемма (2.2)

Предположим, что функция  $x(t, \varepsilon)$  такова, что существует отличный от нуля, ограниченный, равномерный по времени предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t, \varepsilon)}{\varepsilon^k} = A(t), \quad |A(t)| \leq M, \quad t \in [0, T^*]. \quad (2.13)$$

Тогда  $x(t, \varepsilon)$  имеет порядок  $\varepsilon^k$  на промежутке времени  $[0, T^*]$ .

### Доказательство:

Из предельного равенства (2.13) видно, что

$$\frac{|x(t, \varepsilon)|}{\varepsilon^k} = |A(t)| + \gamma(t, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma(t, \varepsilon) = 0.$$

Но это означает, что справедливы следующие неравенства

$$N + \inf_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon) \leq \frac{|x(t, \varepsilon)|}{\varepsilon^k} \leq M + \sup_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon),$$

$$N = \inf_{[0, T^*]} |A(t)|, \quad M = \sup_{[0, T^*]} |A(t)|.$$

В силу равномерной по  $t$  сходимости имеем

$$\sup_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \inf_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Положим

$$\gamma_1(\delta) = \inf_{0 \leq \varepsilon \leq \delta} \inf_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon), \quad \gamma_2(\delta) = \sup_{0 \leq \varepsilon \leq \delta} \sup_{[0, T^*]} \gamma(t, \varepsilon).$$

Тогда получим

$$A_1(\delta) \leq \frac{|x(t, \varepsilon)|}{\varepsilon^k} \leq A_2(\delta),$$

где  $A_1(\delta) = N + \gamma_1(\delta)$ ,  $A_2(\delta) = M + \gamma_2(\delta)$ , при этом  $A_1(0) = N$ ,  $A_2(0) = M$ . В силу определения о порядке функции (В лекции 2.2, приложу ниже), функция  $x(t, \varepsilon)$  имеет  $k$ -й порядок малости на промежутке времени  $[0, T^*]$ . **Лемма доказана**

**Определение 2.2.** Функцию  $x(t, \varepsilon)$  будем называть функцией порядка  $\varepsilon^k$  на интервале времени  $[0, T^*]$ , если для любого  $\delta > 0$  существуют константы  $A_1(\delta) \geq 0$ ,  $A_2(\delta) > 0$  такие, что при любом  $t \in [0, T^*]$  и всяком  $\varepsilon \in [0, \delta]$  выполняется условие полосы

$$A_1(\delta)\varepsilon^k \leq |x(t, \varepsilon)| \leq A_2(\delta)\varepsilon^k. \quad (2.10)$$

## 8. Метод малого параметра Пуанкаре: постановка задачи, теорема Пуанкаре о представлении решений системы дифференциальных уравнений в виде ряда по малому параметру $\varepsilon$ (без доказательства). (+ДОП кратко)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y, t, \varepsilon), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

$f(y, t, \varepsilon)$  — векторная функция,  $\varepsilon$  — малый параметр. Считаем, что правая часть аналитична по  $y, \varepsilon$  и  $t$ .

Ставим задачу Коши: найти решение  $y(t, \varepsilon)$  уравнений (4.1), удовлетворяющее начальным условиям  $y(t_0, \varepsilon) = y_0$ . Без ограничения общности будем считать, что начальные условия имеют вид  $y(0, \varepsilon) = 0$ , так как можно ввести замену переменных  $t' = t - t_0$ ,  $y' = y - y_0$ , приводящие начальные условия  $t = t_0$ ,  $y(0) = y_0$  к нулевым значениям.

Наряду с уравнениями (4.1) рассмотрим их частный случай, когда  $\varepsilon = 0$ :

$$\dot{y} = f(y, t, 0) \quad (2)$$

Уравнение (2) будем называть невозмущенными или порождающими.

Считаем, что решение уравнений (2) известно:

$$y = \varphi(t), \quad \varphi(0) = 0.$$

Функцию  $y^* = \varphi(t)$  будем называть порождающим (опорным) решением.

Необходимо выяснить, при каких условиях решения уравнения (4.1) представимы сходящимся рядом по  $\varepsilon$ , обращающимся в порождающее решение  $y^* = \varphi(t)$  при  $\varepsilon = 0$ , и указать способы вычисления членов ряда.

**Теорема Пуанкаре**

**Теорема Пуанкаре** Если векторная функция  $f(y, t, \varepsilon)$  аналитична по  $y, \varepsilon, t$ , когда  $(y, \varepsilon)$  принадлежит области  $D$ , содержащей нулевые значения величин  $y$  и  $\varepsilon$ , то для любого конечного интервала времени  $[0, T]$  существует значение  $\varepsilon_*(T) > 0$  такое, что решение задачи Коши

$$\dot{y} = f(y, t, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = 0$$

представимо рядом по  $\varepsilon$

$$y(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(t) \varepsilon^k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

обращающимся в порождающее решение  $\varphi(t)$  при  $\varepsilon = 0$  и равномерно сходящимся на отрезке  $[0, T]$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ .

Для упрощения дальнейших вычислений, преобразуем уравнения (4.1) - (2) и ряд (3), используя замену переменных вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \varphi.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — возмущение (вариация) частного решения  $y^* = \varphi(t)$ .

Вектор  $\mathbf{x}$  удовлетворяет уравнениям возмущенного движения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x} + \Phi, t, \varepsilon) - \mathbf{f}(\Phi, t, 0), \quad (4)$$

допускающим частное решение  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  при  $\varepsilon = 0$ . В новых переменных  $\mathbf{x}$  начальные условия примут вид  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{0}$ , а ряд (3) запишется в виде

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(t) \varepsilon^k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbf{x}^{(k)}(0) = \mathbf{0},$$

представляющим собой решение уравнений (4), и удовлетворяющее начальным условиям  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{0}$ .

**ДОП.** Все, что до и после теоремы очень кратко

Методом малого параметра, например, можно построить орбиту движения планеты с учётом движения других небесных тел.

## 9. Вычисление коэффициентов $\mathbf{x}^{(k)*}(t)$ , входящих в ряды решений метода малого параметра Пуанкаре ДОП д-во теоремы 1

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x} + \Phi, t, \varepsilon) - \mathbf{f}(\Phi, t, 0), \quad (4)$$

Разложим правую часть возмущенных уравнений (4) в ряд по  $\mathbf{x}$  и  $\varepsilon$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} \right)_* + \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad (5)$$

где

$$A(t) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}} \right)_*, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \varepsilon}, \dots, \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \varepsilon} \right)^\tau, \quad \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)^\tau.$$

Компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{X}}$  содержат члены второго и более высокого порядка малости по  $\mathbf{x}, \varepsilon$ . Нижний знак "\*" означает, что выражение вычисляется при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \varepsilon = 0$ . Здесь элементы матрицы  $A$ , вектора  $(\partial f / \partial \varepsilon)_*$  зависят от времени явно.

Будем искать решение уравнений (5) в виде сходящегося ряда по  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \mathbf{x}^{(2)}(t) + \dots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

**Теорема 1.** Если общее решение  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(t, h_1, \dots, h_n), \tilde{\varphi}(t, 0, \dots, 0) \equiv \varphi(t)$

$$\frac{\partial(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)}{\partial(h_1, \dots, h_n)} \neq 0, \quad (h_i = \text{const})$$

порождающей системы (2) (см. предыдущий вопрос) известно, то функции  $x^k(t)$  могут быть получены при помощи операции дифференцирования и вычисления квадратур.

Теорема Пуанкаре (в собственном смысле) (приложу ниже) и теорема 1 представляют собой основу метода малого параметра Пуанкаре интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теорема Пуанкаре** *Если векторная функция  $\mathbf{f}(y, t, \varepsilon)$  аналитична по  $y, \varepsilon, t$ , когда  $(y, \varepsilon)$  принадлежит области  $D$ , содержащей нулевые значения величин  $y$  и  $\varepsilon$ , то для любого конечного интервала времени  $[0, T]$  существует значение  $\varepsilon_*(T) > 0$  такое, что решение задачи Коши*

$$\dot{y} = \mathbf{f}(y, t, \varepsilon), \quad y(0, \varepsilon) = 0$$

*представимо рядом по  $\varepsilon$*

$$y(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(t) \varepsilon^k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

*обращающимся в порождающее решение  $\varphi(t)$  при  $\varepsilon = 0$  и равномерно сходящимся на отрезке  $[0, T]$  при  $|\varepsilon| < \varepsilon_*$ .*

### ДОП Д-во Теоремы 1

*Доказательство.* Подставим ряд для  $x(t)$  в уравнения (4.12):

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{x}^{(2)} + \dots &= A \cdot \left( \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_* + \\ &+ \tilde{X}(\varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots, t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях степенях  $\varepsilon$ , получим следующую совокупность уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \quad \dot{x}^{(1)} &= Ax^{(1)} + D^{(1)}(t), \\ \varepsilon^2: \quad \dot{x}^{(2)} &= Ax^{(2)} + D^{(2)}(t), \\ &\dots \\ \varepsilon^k: \quad \dot{x}^{(k)} &= Ax^{(k)} + D^{(k)}(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь  $D^{(1)} = (\partial f / \partial \varepsilon)_*$  — известная функция времени;  $D^{(2)}$  содержит квадратичные, линейные члены и члены нулевого порядка по  $x_i^{(1)}(t)$  и не содержит членов третьего и более высоких порядков, поскольку результат подстановки  $x \rightarrow \varepsilon x^{(1)}$  в  $\tilde{X}$  должен иметь порядок  $\varepsilon^2$ . Итак,  $k$ -ая компонента вектора  $D^{(2)}$  такова:

$$D_k^{(2)}(t) = \sum_{i,j} b_{ij}^{(k)}(t) x_i^{(1)}(t) x_j^{(1)}(t) + \sum_i b_i^{(k)}(t) x_i^{(1)}(t) + b^{(k)}(t).$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что функция  $D^{(k)}(t)$  зависит от времени  $t$  через вектора  $x^{(i)}(t)$ ,  $i < k$ , то есть

$$D^{(k)}(t) = F^{(k)}(x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t), t).$$

Здесь  $F^{(k)}(x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}, t)$  — многочлен степени  $k$  переменных  $x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ .

Таким образом, систему уравнений (4.13) надо решать последовательно, вычисляя сначала решение задачи Коши  $\{x^{(1)} = x^{(1)}(t), x^{(1)}(0) = 0\}$  для первого уравнения системы (4.13), потом  $\{x^{(2)} = x^{(2)}(t), x^{(2)}(0) = 0\}$  для второго уравнения и так далее. Тогда функции  $D^{(k)}$  будут известными выражениями  $t$  на каждом этапе исследований.

Осталось описать алгоритм явного построения решений неоднородных линейных уравнений системы (4.13). Для начала отметим, что система однородных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.14)$$

представляет собой уравнения в вариациях Пуанкаре, соответствующих решению  $\varphi(t)$  порождающих уравнений (4.2),  $x = (y - \varphi)$  — вариация решения  $\varphi(t)$ . На основании теоремы 3.4 уравнения (4.14) имеют  $n$  решений

$$\left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial h_1} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial h_n} \right)_0.$$

Здесь нижний индекс «0» означает, что производные вычисляются при  $h = 0$ . Эти решения линейно независимы как векторы, так как определитель, составленный из этих векторов, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial h_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_n}{\partial h_1} & \dots & \frac{\partial \tilde{\varphi}_n}{\partial h_n} \end{vmatrix}_0 = \frac{\partial(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)}{\partial(h_1, \dots, h_n)} \Big|_0 \neq 0.$$

Отсюда яствует, что

$$x(t, C_1, \dots, C_n) = C_1 \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial h_1} \right)_0 + \dots + C_n \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial h_n} \right)_0$$

есть общее решение уравнений (4.14).

Несложно видеть, что

$$x(t, C_1, \dots, C_n) = B(t)C, \quad B(t) = \left\| \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}_i}{\partial h_j} \right)_0 \right\|_{i,j=1}^n, \quad C = (C_1, \dots, C_n)^\tau, \quad (4.15)$$

при этом

$$\dot{B}C = A(BC).$$

Решение неоднородной системы линейных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + D(t), \quad x(0) = 0 \quad (4.16)$$

ищем в виде (4.15), рассматривая, в силу метода вариации постоянных, величины  $C_j$  как функции времени:  $C_j = C_j(t)$ . Тогда уравнение (4.16) преобразуется к виду

$$B(t)\dot{C} = D(t). \quad (4.17)$$

Решая уравнение (4.17) относительно  $\dot{C}$ , получим

$$\dot{C} = B^{-1}(t)D(t).$$

Интегрирование этого матричного уравнения дает явное представление вектора  $C$  в виде функции времени:

$$C(t) = \int_0^t B^{-1}(\tau)D(\tau) d\tau + \text{const.}$$

Тогда решение уравнений (4.16), удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = 0$ , есть

$$x = B(t) \int_0^t B^{-1}(\tau)D(\tau) d\tau.$$

Активация  
Чтобы активи

Такое представление решения линейной системы дифференциальных уравнений называется *квадратурой*. Теорема доказана. □

## 10. Понятие секулярных членов, их влияние на точность приближения в методе малого параметра. Понятие неравномерного разложения функции в сходящийся ряд с секулярными членами на примере функции $\sin(\varepsilon t)$ , $\varepsilon \ll 1$

Применим алгоритм Пуанкаре к построению решения линейного уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Это уравнение описывает, как известно, малые колебания произвольной механической системы с одной степенью свободы в окрестности устойчивого положения равновесия.

Исследуем влияние малого разброса параметров механической системы, меняющего квадрат частоты колебаний на  $\varepsilon$ . Уравнения движений запишем в нормальном виде:

$$\frac{dv}{dt} = -(\omega^2 + \varepsilon)x, \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad (8)$$

Для простоты изложения положим  $x(0) = 1$ ,  $v(0) = 0$ . Решение задачи Коши имеет вид

$$x = \cos \sqrt{\omega^2 + \varepsilon} t.$$

Представим теперь решение этой системы в виде ряда по  $\varepsilon$ :

$$x = x^{(0)}(t) + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots, \quad v = v^{(0)}(t) + \varepsilon v^{(1)}(t) + \varepsilon^2 v^{(2)}(t) + \dots$$

Подставим эти ряды в уравнения движений:

$$\dot{v}^{(0)} + \varepsilon \dot{v}^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{v}^{(2)} + \dots = -(\omega^2 + \varepsilon)(x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \varepsilon^2 x^{(2)} + \dots),$$

$$\dot{x}^{(0)} + \varepsilon \dot{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{x}^{(2)} + \dots = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \varepsilon^2 v^{(2)} + \dots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \dot{v}^{(0)} = -\omega^2 x^{(0)} \\ \dot{x}^{(0)} = v^{(0)} \end{cases} \quad \varepsilon^1 : \begin{cases} \dot{v}^{(1)} = -\omega^2 x^{(1)} - x^{(0)} \\ \dot{x}^{(1)} = v^{(1)} \end{cases} \quad \varepsilon^2 : \begin{cases} \dot{v}^{(2)} = -\omega^2 x^{(2)} - x^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} = v^{(2)} \end{cases} \dots \quad (9)$$

Поставим задачу Коши для уравнений (9): найти их частные решения, удовлетворяющие начальным условиям  $x^{(0)}(0) = 1$ ,  $v^{(0)}(0) = 0$ ; ...,  $x^{(k)}(0) = 0$ ,  $v^{(k)}(0) = 0$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Тогда решение первой системы уравнений описывается гармоническими функциями времени:

$$x^{(0)} = \cos \omega t, \quad v^{(0)} = -\omega \sin \omega t.$$

Если теперь подставим  $x^{(0)} = \cos \omega t$  в первое уравнение второй системы уравнений, получим линейное неоднородное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega^2 x^{(1)} = -\cos \omega t,$$

содержащее возмущение  $\cos \omega t$  с резонансной частотой  $\omega$ . Частное решение этого уравнения имеет вид

$$x^{(1)} = -\frac{t}{2\omega} \sin \omega t.$$

при этом

$$v^{(1)} = \dot{x}^{(1)} = -\frac{1}{2\omega} \sin \omega t - \frac{t}{2} \cos \omega t.$$

Очевидно,  $x^{(1)}(0) = 0$ ,  $v^{(1)}(0) = 0$ . Строим ряды решений:

$$\begin{aligned} x &= \cos \omega t - \varepsilon \frac{t}{2\omega} \sin \omega t + \dots \\ v &= -\omega \sin \omega t - \varepsilon \left( \frac{1}{2\omega} \sin \omega t + \frac{t}{2} \cos \omega t \right) + \dots \end{aligned}$$

Растущие со временем слагаемые вида  $t^k \sin^m \omega t$ ,  $t^k \cos^m \omega t$  называются **вековыми или секулярными членами**.

Строгие решения исходного уравнения (9) имеют колебательный характер, следовательно они ограничены по времени, в то время как ряды решений, построенные методом малого параметра, содержат члены, постоянно растущие со временем по абсолютной величине. Очевидно, секулярные члены препятствуют точности вычислений, так как удержание любого конечного

числа членов ряда ведет к быстрому росту переменных  $x$  и  $v$ , поэтому ошибка приближения также растет со временем.

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \dot{v}^{(0)} = -\omega^2 x^{(0)} \\ \dot{x}^{(0)} = v^{(0)} \end{cases} \quad \varepsilon^1 : \begin{cases} \dot{v}^{(1)} = -\omega^2 x^{(1)} - x^{(0)} \\ \dot{x}^{(1)} = v^{(1)} \end{cases} \quad \varepsilon^2 : \begin{cases} \dot{v}^{(2)} = -\omega^2 x^{(2)} - x^{(1)} \\ \dot{x}^{(2)} = v^{(2)} \end{cases} \dots \quad (9)$$

Формальная причина появления секулярных членов -- зависимость частоты колебаний от малого параметра, который обычно совпадает с начальной амплитудой исследуемых периодических колебаний. Это хорошо видно из разложения функции  $\sin(\varepsilon t)$  в ряд по  $\varepsilon$ :

$$\sin(\varepsilon t) = \varepsilon t - \frac{t^3}{3!} \varepsilon^3 + \frac{t^5}{5!} \varepsilon^5 - \dots$$

Этот ряд содержит бесконечное число секулярных членов. Тем не менее, он сходится абсолютно для всякого значения  $|t|$  и его сумма никогда не превосходит единицы по абсолютной величине

Здесь мы имеем дело с особым типом разложения функции в сходящийся ряд, известным как **неравномерное разложение на асимптотически большом (бесконечно большом) промежутке времени**. Дело в следующем. Остаточный член ряда Тейлора для функции  $\sin(\varepsilon t)$ , если взять его в форме Лагранжа, имеет вид:

$$r_N(\varepsilon t) = \frac{\sin^{(N+1)}(\theta \varepsilon t)}{(N+1)!} (\varepsilon t)^{N+1} = (-1)^{k+1} \varepsilon^{N+1} \frac{\sin(\theta \varepsilon t)}{(N+1)!} t^{N+1}$$

Здесь  $N = 2k+1$  -- нечетное число членов ряда, входящих в частичную сумму  $x_N(t, \varepsilon)$ , приближающую функцию  $\sin(\varepsilon t)$ , символ  $\sin^{(N+1)}(\theta \varepsilon t)$  означает  $(N+1)$ -ю производную от  $\sin(x)$  по  $x$ , вычисленную при  $x = \theta \varepsilon t$ ,  $\theta$  -- некоторый параметр, принимающий значения из промежутка  $[0, 1]$ . Очевидно, что остаточный член ряда задает

величину ошибки приближения. Его максимальное по модулю значение равно  $\varepsilon^{N+1} t^{N+1} / (N+1)!$  Это выражение меньше наперед заданного числа  $\bar{\varepsilon}$  только в том случае, если

$$\varepsilon < \sqrt[N+1]{\frac{\bar{\varepsilon}(N+1)!}{t^{N+1}}}$$

Отсюда следует, что величина  $\varepsilon$ , обеспечивающая  $\bar{\varepsilon}$  - близость ошибки приближения к нулю, существенно зависит от  $t$ , другими словами разложение  $\sin(\varepsilon t)$  в ряд *неравномерно по  $t$* .

Однако неравномерность разложения не проявляет себя на конечном интервале времени  $[0, T]$ , так как в силу последней формулы мы всегда можем удовлетворить заданной точности вычисления для любого  $t \in (0, T]$ , если  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < \frac{\sqrt[N+1]{\bar{\varepsilon}(N+1)!}}{T}$$

Ряды содержат расщущие со временем  
изменяющиеся - беловолье, скользящие

скользящие числовые представления  
точности вычислений, т. к.  
удерж. в их ведом к росту и чи

формализованная природа плавающих  
скользящих чисел - зав.ть частоты  
подаваний от малого параметра с

$$\delta x, \sin(kt) = et - \frac{t^3}{3!} c^3 + \frac{t^5}{5!} b^5$$

согласно. число скольз. чисел  
 $\sum_{ik} \Sigma < 1$

Ряды на асимптотических  
больших промежутках времени  
сходятся очень медленно

Выкладки с выводом уравнения (9) (но если что решение линейного уравнения гармонических колебаний очевидно и без метода Пуанкаре - это сумма гармоник, общее решение -  $C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ )

## 11. Оценка точности приближения в методе Пуанкаре.

Получим формулу погрешности для N-го приближения в методе Пуанкаре. Для этого рассмотрим частичную сумму

$$y_N(t, \varepsilon) = \phi(t) + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots + \varepsilon^N x^{(N)}(t)$$

ряда по малому параметру, представляющего решение  $y(t, \varepsilon)$ , и оценим величину нормы  $\|y(t, \varepsilon) - y_N(t, \varepsilon)\| = \|r_N(t, \varepsilon)\|$ , где

$$r_N(t, \varepsilon) = \varepsilon^{N+1} (x^{(N+1)}(t) + \varepsilon x^{(N+2)}(t) + \dots)$$

Из аналитичности функционального ряда  $y(t, \varepsilon)$  по  $t, \varepsilon$  следует аналитичность функции  $\tilde{r}_N(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-N-1} r_N(t, \varepsilon)$  и, как следствие, ее ограниченность на компакте  $M = [0, T] \times [0, \delta]$ . Положим

$$A_1(\delta) = \min_{(t, \varepsilon) \in M} \|x^{(N+1)}(t) + \varepsilon x^{(N+2)}(t) + \dots\|,$$

$$A_2(\delta) = \max_{(t, \varepsilon) \in M} \|x^{(N+1)}(t) + \varepsilon x^{(N+2)}(t) + \dots\|$$

Отсюда явствует, что

$$A_1(\delta) \varepsilon^{N+1} \leq \|r_N(t, \varepsilon)\| \leq A_2(\delta) \varepsilon^{N+1} \quad (9)$$

при любом сколь угодно малом  $\delta$ , когда  $t \in [0, T]$ ,  $\varepsilon \in [0, \delta]$ .

Итак, выполняется условие полосы (9), поэтому при  $\varepsilon \leq \varepsilon_*$  имеем

$$\|y(t, \varepsilon) - y_N(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{N+1})$$

Здесь  $\varepsilon_*$  - верхнее значение малого параметра из области сходимости ряда.

## 12. Основные понятия теории размерностей: единицы измерения, единицы размерности, характерные значения. Понятие размерных величин, физических равенств.

Пусть  $L$  – длина какого-либо объекта,  $\underline{L}$  – единица измерения. Тогда отношение  $L/\underline{L} = l$ , указывающее сколько раз целиком и сколько долей единицы измерения  $\underline{L}$  укладывается в физической величине  $L$ , есть числовая мера длины объекта. Аналогично вводятся числовые меры площади  $S$ , скорости  $V$ , ускорения  $W$ , силы  $F$  и т.д.:

$$S = \bar{S} \cdot s, V = \bar{V} \cdot v, W = \bar{W} \cdot w, F = \bar{F} \cdot f,$$

Здесь  $\bar{S}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$ ,  $\bar{F}$  --- единицы измерения;  $s, v, w, f$  --- их числовые меры.

Теория размерностей имеет дело с двумя типами единиц измерения: единицами размерностей ( $[L]$ ,  $[S]$ ,  $[F]$ , ...) и характерными значениями ( $L_*$ ,  $S_*$ ,  $F_*$ , ). Это соответствие изображено на следующей диаграмме:



Отличие их состоит в следующем. Единицы размерности жестко фиксируются. Так, в системе SI имеем  $[L] = 1 \text{ м}$ ,  $[M] = 1 \text{ кг}$ ,  $[T] = 1 \text{ сек}$ ,  $[F] = 1 \text{ Н}$ . Единицы размерностей в CGS есть  $[L] = 1 \text{ см}$ ,  $[M] = 1 \text{ г}$ ,  $[T] = 1 \text{ сек}$ ,  $[F] = 1 \text{ дина}$ . Характерные значения жестко не фиксируются, они выбираются в зависимости от характера изучаемого явления. Например, для описания движения спутника вокруг Земли можно положить  $L^* = 1 \text{ км}$ . Однако в задаче о движении планет Солнечной системы характерным значением длины является расстояние от любой планеты до Солнца. Обычно полагают  $L^* = 1 \text{ а.е.}$ , что соответствует расстояние от Земли до Солнца.

Привязка к фиксированным единицам измерения часто имеет искусственный характер, не учитывающий специфику изучаемого класса движений, и, как следствие, затрудняет исследование решений дифференциальных уравнений. В то же время переход к характерным значениям может упростить анализ за счет появления малых параметров в системе.

## 13. Основные понятия теории размерностей: физические законы как соотношения между размерными величинами, числовыми мерами.

Величины, числовая мера которых зависит от выбора системы единиц измерения, будем называть *размерными*.

Все размерные величины удовлетворяют базовым определениям, либо физическим законам, например,

$$S = L^2, V = dL/dT, W = dV/dT, F = MW, \quad (1)$$

Эти величины, а также сами равенства (1) удовлетворяют следующим постулатам:

1. Размерные величины  $S, L, V, W$ , не зависят от выбора единиц измерения.
2. Выражения, стоящие в левой и правой частях равенств (1), имеют одинаковые размерности

**Определение 1.** Всякое равенство между функциями размерных переменных, удовлетворяющее второму постулату, будем называть физическим соотношением.

Примеры физических соотношений:

$$MW = F, \ddot{\varphi} = -(g/l) \sin \varphi.$$

Если в последнее равенство, описывающее колебания математического маятника, подставить вместо безразмерного угла  $\varphi$  размерную величину  $X$ , то полученное соотношение не будет физическим, так как размерность  $\sin X$  не определена. Отсюда следует, что не всякое дифференциальное уравнение является физическим соотношением. Например, соотношение

$$\frac{dX}{dT} = X + X^2$$

не является физическим ни при каком выборе единиц измерения для  $X$ . Однако, если записать

$$\frac{dX}{dT} = aX + bX^2,$$

где  $a$  и  $b$  --- постоянные величины, удовлетворяющие требованиям  $[a] = [T]^{-1}$ ,  $[b] = [T]^{-1} \cdot [X]^{-1}$ , то полученное соотношение будет физическим.

Физические равенства (1) играют центральную роль в теории размерностей. *Они устанавливают взаимосвязь между размерными величинами, числовыми мерами и единицами измерения.*

Действительно, запишем равенства (1) в безразмерном виде:

$$\bar{S}s = \bar{L}l^2, \bar{V}v = \frac{\bar{L}}{\bar{T}} \frac{dl}{dt}, \bar{W}w = \frac{\bar{V}}{\bar{T}} \frac{dv}{dt}, \bar{F}f = \bar{M}m \bar{W}w,$$

или

$$s = \Delta_1 l^2, v = \Delta_2 \frac{dl}{dt}, w = \Delta_3 \frac{dv}{dt}, f = \Delta_4 mw, \quad (2)$$

где

$$\Delta_1 = \bar{L} \bar{S}^{-1}, \Delta_2 = \bar{L} \bar{T}^{-1} \bar{V}^{-1}, \Delta_3 = \bar{V} \bar{T}^{-1} \bar{W}^{-1}, \Delta_4 = \bar{M} \bar{W} \bar{F}^{-1}, \quad (3)$$

Поскольку  $s, v, w, f$  являются безразмерными величинами, то и  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  также безразмерны.

Если в качестве единиц измерения выбрать единицы размерности, то в силу выбора этих единиц будем иметь

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 1, \Delta_4 = 1, \quad (4)$$

Однако безразмерные комплексы  $\Delta_j$  отличаются от единицы, когда за единицы измерения принимают характерные значения. Действительно, положим  $S_* = m^2, L_* = 1 \text{ км}$ . Тогда

$$\Delta_1 = (1 \text{ км})^2 / m^2 = 10^6$$

Вообще говоря,  $\Delta_j$  могут иметь произвольные значения, если соответствующие значения принимают единицы измерения. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в дальнейшем, добиваясь появления малого параметра в дифференциальных уравнениях движения.

Итак, физические равенства (1) определяют соотношения (2), (3) между числовыми мерами физических величин. Например, равенства (2) устанавливают связь между  $s$  и  $t$ , между  $v$  с одной стороны и  $ds/dt$  – с другой и т.д.

#### **14. Зависимые, независимые единицы измерения. Понятие формулы размерности. Лемма о формуле размерности (без доказательства).**

Пусть при описании задачи нами были введены  $n$  единиц измерения. Они должны удовлетворять  $k$  соотношениям (4), либо подобным им, когда  $\Delta_j \neq 1$ . Тогда  $(n-k)$  единиц могут быть приняты за независимые (так называемые первичные единицы измерения), остальные  $k$  единиц (называемые производными или вторичными единицами) будут выражаться через независимые.

В классической механике в качестве независимых единиц измерения можно взять тройки единиц, как например,  $(\bar{L}, \bar{T}, \bar{M})$ ,  $(\bar{L}, \bar{F}, \bar{W})$  и другие. В системе SI выбирают  $(\bar{L}, \bar{T}, \bar{M})$  (метр, секунда, килограмм -- масса), в системе CGS -  $(\bar{L}, \bar{T}, \bar{M})$  (сантиметр, секунда, грамм), в системе MKS -  $(\bar{L}, \bar{F}, \bar{W})$  (метр, килограмм -- сила, секунда).

Выражения для производных единиц в виде функций первичных единиц называются формулами размерности. Формулу размерности можно рассматривать как сжатое определение и характеристику физической природы производной величины. Поскольку в разных системах единиц измерения формула размерности содержит различные аргументы, то о размерности можно говорить применительно к определенной системе единиц измерения.

Для определенности будем работать с системой SI, поэтому тройку  $(\bar{L}, \bar{T}, \bar{M})$  независимой системой единиц измерения.

Из (3) несложно вывести некоторые формулы размерности:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bar{L}^2 \cdot \Delta_1^{-1}, \bar{V} = \bar{L} \bar{T}^{-1} \Delta_2^{-1}, \bar{W} = \bar{L} \bar{T}^{-2} \cdot (\Delta_2 \Delta_3)^{-1}, \\ \bar{F} &= \bar{M} \bar{L} \bar{T}^{-2} \cdot (\Delta_2 \Delta_3 \Delta_4)^{-1}\end{aligned}\tag{5}$$

Отсюда следует, что вторичные единицы измерения, входящие в список  $\bar{S}, \bar{V}, \bar{W}, \dots$ , зависят от первичных единиц  $(\bar{L}, \bar{T}, \bar{M})$  по степенному закону, поэтому мы можем предположить, что в системе SI формула размерности любой механической величины  $Z$  имеет вид степенного одночлена:

$$\bar{Z} = \Delta \bar{L}^\alpha \bar{M}^\mu \bar{T}^\tau$$

Заметим, что в формулах (5) все показатели степени при единицах размерности -- целые числа (положительные или отрицательные). Однако, так бывает далеко не всегда. Рассмотрим тройку первичных единиц измерения в виде  $(\bar{L}, \bar{W}, \bar{M})$ . Тогда вторичные единицы измерения будут также зависеть от них по степенному закону, но с дробными показателями:

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \bar{L}^2 \cdot \delta_1, \bar{V} = \bar{L}^{1/2} \bar{W}^{1/2} \delta_2, \bar{T} = \bar{L}^{1/2} \bar{W}^{-1/2} \delta_3, \\ \bar{F} &= \bar{M} \bar{W},\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь  $\delta_j$  безразмерные комплексы.

Пусть  $Z$  есть произвольная размерная величина. Тогда, в силу сказанного выше, она зависит от размерных величин  $L, T, M$ :

$$Z = \Phi(L, T, M). \quad (7)$$

Следующая лемма устанавливает общий вид формулы размерности в классической механике для систем SI, CGS.

**Лемма 2** Зависимая по размерности единица измерения  $Z$  является степенным одночленом от независимых величин  $L, T, M$ , то есть

$$\bar{Z} = \Delta \cdot \bar{L}^\alpha \bar{T}^\tau \bar{M}^\mu, \quad (8)$$

где  $\Delta$  --- безразмерная величина,  $\alpha, \tau, \mu$  -- некоторые вещественные показатели.

Заметим, что значения степенных показателей  $\alpha, \tau, \mu$  не определены в ходе доказательства леммы. В прикладных задачах они принимают рациональные значения (т.е. целые, либо дробные), что является следствием определенной структуры физических законов и определений, задающих формулу размерности.

## 15. Понятие нормализованного обезразмеривания дифференциальных уравнений. Этапы обезразмеривания: выбор характерных размеров по времени и координатам

Ранее мы установили, что единицы измерения физических величин могут выбираться произвольно с учетом формул размерностей. Изменение единиц измерения будем называть *масштабированием* физических величин. Поскольку физические законы не зависят от выбора единиц измерения, масштабирование величин может служить источником ценных выводов.

Рассмотрим произвольную физическую систему. Ее уравнение движения запишем в форме Коши:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dT} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, T, \mathbf{A}). \quad (9)$$

Здесь  $X \in R^n$  -- фазовые переменные задачи,  $T$  -- время,  $A \in R^r$  - вектор параметров системы и физических постоянных. Среди параметров могут встречаться постоянные интегрирования, если система (9) получена в результате преобразований некоторых уравнений движения с помощью первых интегралов.

Известно, что уравнения (9) могут иметь разные классы решений, сильно отличающиеся по своим свойствам. Разбиение семейства решений на классы обусловлено многообразием форм движений физической системы. Каждый такой класс имеет свои характерные размеры фазовых переменных и временного интервала. *Процедуру обезразмеривания уравнений (9) с учетом характерных единиц измерения исследуемого класса решений назовем нормализованным обезразмериванием.*

Нормализованное обезразмеривание уравнений (9) проводится в несколько этапов.

1. Фиксируем исследуемый класс решений уравнений (9). Пусть  $T_*, X_{j*}, A_{i*}$  — характерные значения этого класса. Обычно  $T_*$  выбирают как интервал времени, на котором переменные задачи достигают своих предельных значений, либо как временной интервал, на котором исследуется поведение системы. В обоих случаях выполняется условие

$$T \leq T_* \quad (10)$$

Здесь  $T_*$  может быть как конечной величиной, так и бесконечной большой, если мы исследуем поведение решений уравнений (9) на бесконечности. Характерное время периодического движения -- его период.

Характерные значения фазовых переменных  $X_{j*}$  определяют, в основном, исходя из следующих условий. Предположим, что движения системы имеют ограниченный характер. Тогда максимальные значения фазовых переменных принимают за характерные единицы измерения. Так, характерным расстоянием между планетой и Солнцем является большая полуось ее орбиты, характерный угол отклонения физического маятника от положения равновесия -- начальный угол отклонения в случае вибрационных движений маятника. Таким образом,

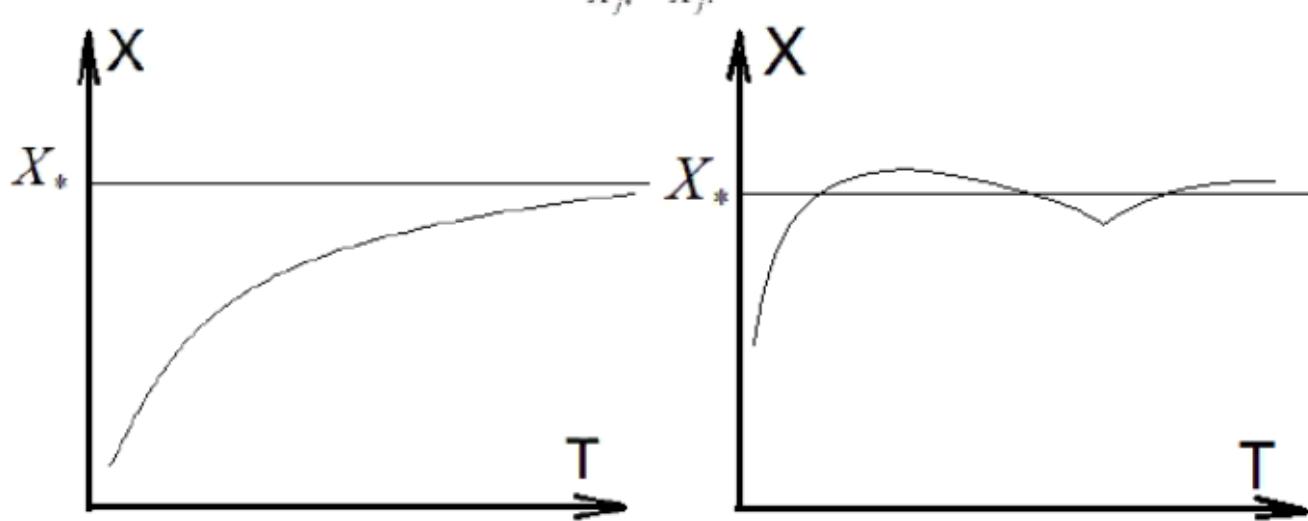
$$X_{j*} = \max_{t \in [0, T_*]} |X_j(t)|, \quad j = 1, \dots, n$$

Аналогично выбирают характерные значения параметров  $A_{i*}$ :

$$A_{i*} = \max_{A_i \in \Lambda} |A_i|, \quad i = 1, \dots, r,$$

где  $\Lambda$  -- область возможных значений  $A_{i*}$ .

Если фазовые переменные стремятся к некоторым предельным значениям  $X_{j*} = \tilde{X}_{j*}$ , то полагают



Примером может служить задача о движении тела в однородном поле силы тяжести, когда начальная скорость тела велика. Сила сопротивления, пропорциональная скорости, за короткий промежуток времени уменьшит ее величину до постоянного значения  $\tilde{V}$ ; последующее движение происходит со скоростью, близкой к  $\tilde{V}$ , поэтому  $V_* = \tilde{V}$ .

Возможны также движения, когда система проводит большую часть времени в окрестности некоторых значений  $X_{j*} = \tilde{X}_{j*}$ , не являющихся предельными по времени. В этом случае мы также полагаем

## 16. Понятие нормализованного обезразмеривания дифференциальных уравнений. Этапы обезразмеривания: переход к числовым мерам, переход к обезразмеренным уравнениям.

*Процедуру обезразмеривания уравнений (9) с учетом характерных единиц измерения исследуемого класса решений назовем нормализованным обезразмериванием.*

После фиксирования исследуемого класса решений уравнений переходим ко второму этапу

2. Единицы измерения полагаем равными характерным значениям. Физические величины представим в числовых мерах следующим образом:

$$T = T_* t, X_j = X_{j*} \bar{x}_j, A_i = \bar{A}_{i*} a_i \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, r) \quad (11)$$

3. Обезразмериваем уравнения (9). Для этого подставляем в (9) формулы (11):

$$\frac{X_{i*}}{T_*} \frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{X}, \mathbf{x}, T_* t, \mathbf{A}, \mathbf{a}), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (12)$$

Здесь  $X_*$ ,  $A_*$  --- вектора характерных размеров для  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{A}$  соответственно.

Можем теперь утверждать, что размерность правой части уравнений (12) совпадает, при фиксированном  $i$ , с размерностью некоторого степенного одночлена  $\mathbf{X}_*^\alpha T_*^\gamma \mathbf{A}_*^\beta$ , где  $\mathbf{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ ,  $\mathbf{A}^\beta = A_1^{\beta_1} \dots A_r^{\beta_r}$ . Так как каждая функция  $F_i$  имеет свои значения степеней  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  размерность этой скалярной функции представим в виде

$$[F_i] = (\mathbf{X}_*^\alpha T_*^\gamma \mathbf{A}_*^\beta)_i$$

Поделим левые и правые части уравнений (12) на размерные величины  $[F_i]$  соответственно, получим безразмерные уравнения:

$$\frac{T_i}{T_*} \frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}, t, \Delta), \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Здесь  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_p)$  --- вектор безразмерных постоянных комплексов, каждый из которых зависит от характерных значений  $X_*$ ,  $T_*$ ,  $A_*$  и безразмерных числовых мер  $a$ .

Параметры  $T_i$  вычисляются по формуле

$$T_i = X_{i*} (\mathbf{X}_*^\alpha T_*^{-\gamma} \mathbf{A}_*^\beta)_i. \quad (14)$$

Поскольку дробь  $T_i / T_*$  безразмерна, то  $T_i$  имеет размерность времени. Этот параметр часто называют постоянным временем по координате  $x_i$ .

На этом процедура нормализованного обезразмеривания заканчивается. Безразмерные комплексы  $T_i / T_*$ ,  $\Delta_i$  соответствуют выбранному классу движений, некоторые из них могут принимать малые значения и играть роль малых параметров.

Процедура обезразмеривания --- наименее формализованный этап решения задачи. Дело в том, что выбор характерных значений  $X_*$ ,  $T_*$ ,  $A_*$  требует большого опыта и искусства исследователя, умение ставить и обрабатывать эксперимент, по результатам которого делается вывод о характерных значениях, умение действовать по аналогии, проводить грубые оценки решений исходных уравнений и т.д. Характерные значения можно рассматривать как нулевые

приближения к решениям исходного класса, удачный их выбор сравним с удачным выбором начального приближения в методе итераций.

## 17. Два способа задания малых параметров в дифференциальных уравнениях: малость параметров правой части уравнений, малость временных отношений.

### Малость безразмерных комплексов $\Delta_i$

Это наиболее простой способ введения малых параметров. Он характеризуется малостью постоянных комплексов  $\Delta_i(X_*, T_*, A_*)$ , полученных в результате обезразмеривания уравнений движения. В простейшем случае  $\Delta_i$  малы, когда малы некоторые из размерных величин  $A_i$ : если  $A_i = \varepsilon A_{i*} a_i$ , тогда соответствующие безразмерные комплексы имеют значения порядка  $\varepsilon$ .

### Малость временных отношений

$$\frac{X_{i*}}{T_*} \frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{X}, \mathbf{x}, T_* t, \mathbf{A}_* \mathbf{a}), \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

Рассмотрим для примера случай  $n=2$ . Тогда уравнения (12) примут вид

$$\begin{cases} \frac{T_1}{T_*} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \Delta_1, \dots, \Delta_p), \\ \frac{T_2}{T_*} \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \Delta_1, \dots, \Delta_p). \end{cases} \quad (15)$$

Считаем, что эти уравнения автономны, получены путем нормализации по всем фазовым переменным и параметрам, характерные значения задачи известны, исключая время  $T$  ( $T_*$  не задано), при этом  $T_1 \ll T_2$ . В силу автономности уравнений (15), правая часть формулы (14) не зависит от  $T_*$  (случай  $\gamma=0$ ). За счет выбора  $T_*$  можно получить разные варианты зависимости системы уравнений от малого параметра.

Положим  $T_* = T_1$ . Уравнения (15) примут вид

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = \varepsilon f_2, \quad \varepsilon = \frac{T_1}{T_2} \ll 1.$$

Особенность этих уравнений --- существенная разница в скорости изменения переменных  $x_1$  и  $x_2$ . Так  $\dot{x}_1 \sim 1$ , (примерно 1) в то же время  $\dot{x}_2 \sim \varepsilon$ . Это значит, что переменная  $x_1$  изменяется со временем гораздо быстрее, чем  $x_2$ . Поэтому  $x_1$  принято называть быстрой переменной,  $x_2$  --- медленной.

Рассматривая процессы, протекающие на временах порядка  $T_2$ , полагаем  $T_* = T_2$ . Тогда из (15) будем иметь

$$\varepsilon \frac{dx_1}{dt} = f_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2, \quad \varepsilon = \frac{T_1}{T_2} \ll 1. \quad (\ll - \text{много меньше})$$

Здесь  $\dot{x}_1 \sim \varepsilon^{-1} \gg 1$ ,  $\dot{x}_2 \sim 1$ , поэтому, как и ранее,  $x_1$  --- быстрая переменная,  $x_2$  --- медленная. Но в отличие от предыдущего случая, малый параметр  $\varepsilon$  стоит при производной от  $x_1$ . Это является

причиной особого поведения исследуемой системы уравнений, получившие название *жесткости*. Дело в том, что дифференциальные свойства решений таких уравнений резко ухудшаются при уменьшении  $\varepsilon$ , поэтому при численном решении уравнений необходимо уменьшать шаг интегрирования. Любая попытка уменьшения времени счета за счет увеличения шага интегрирования ведет к резкому возрастанию ошибки интегрирования.

## 18. Третий способ задание малого параметров в дифференциальных уравнениях: случай малости координат

$$\frac{X_i}{T_*} \frac{dx_i}{dt} = F_i(\mathbf{X}, \mathbf{x}, T_* t, \mathbf{A}, \mathbf{a}), \quad (i=1, \dots, n). \quad (12)$$

Предположим, что правые части уравнений (12) автономны и удовлетворяют дополнительному условию  $F(0) = 0$  (в записи функции  $F(\mathbf{X})$  опускаем, для простоты изложения, обозначения параметров  $\mathbf{A}$ , подразумевая их по умолчанию). Разложим правую часть уравнений (12) в ряд Тейлора в окрестности точки  $X=0$  представим в виде системы скалярных уравнений:

$$\dot{X}_i = B_{i1} X_1 + \dots + B_{in} X_n + F_i^{(2)}(\mathbf{X}) + F_i^{(3)}(\mathbf{X}) + \dots \quad (i=1, \dots, n) \quad (16)$$

Здесь  $B_{ij}$  --- постоянные величины,  $F_i^{(s)}$  --- однородные полиномы порядка  $s$ ,  $s \geq 2$

Традиционный подход в исследовании системы уравнений (12) состоит в том, что мы отбрасываем нелинейные члены порядка  $s \geq k$ , оставляя линейные и нелинейные члены до порядка  $k-1$  включительно. В случае  $k=2$  упрощенные уравнения являются линейными:

$$\dot{X}_i = B_{i1} X_1 + \dots + B_{in} X_n \quad (i=1, \dots, n) \quad (17)$$

Замена уравнений (16) линейными уравнениями (17) основана на предположении малости фазовых переменных  $X_i$  на заданном интервале времени. Переменные  $X_1, \dots, X_n$  --- размерные величины, имеющие, вообще говоря, разную размерность. Поэтому рассуждения о "малости" обоснованы лишь в том случае, когда указано, в сравнении с чем малы фазовые координаты.

Рассмотрим класс движений, когда размерные величины  $X_i$ , а следовательно, и их характерные значения  $X_{*i}$  малы по сравнению с выбранными единицами измерения:

$$T_* = [T], X_{1*} = \varepsilon[X_1], \dots, X_{n*} = \varepsilon[X_n], \varepsilon \ll 1. \quad (18)$$

Вводим соответствующие числовые меры:

$$x_1 = \frac{X_1}{X_{1*}}, \dots, x_n = \frac{X_n}{X_{n*}}, t = \frac{T}{T_*}. \quad (19)$$

Теперь подставим (18), (19) в (16):

$$\frac{\varepsilon[X_i]}{T_*} \frac{dx_i}{dt} = \varepsilon(B_{i1}[X_1]x_1 + \dots + B_{in}[X_n]x_n) + \varepsilon^2 F_i^{(2)}([X_1]x_1, \dots, [X_n]x_n) + \dots$$

Сократим каждое из уравнений этой системы на  $\varepsilon$  и на размерный множитель  $[X_i]T_*^{-1}$ , получим

$$\frac{dx_i}{dt} = b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n + \varepsilon \tilde{F}_i(\mathbf{x}),$$

где  $b_{ij}$ --- безразмерные параметры , безразмерная функция  $\tilde{F}_i(x)$  содержит члены второго и более высокого порядка малости. В этом уравнении нелинейные члены имеют порядок  $\varepsilon$  , т.е. малы.

## 19. Нормализованное обезразмеривание задачи Стокса

Рассмотрим задачу Стокса о вертикальном падении шара в вязкой среде. Уравнения движения хорошо известны:

$$M \frac{dV}{dT} = MG - KV, \quad \frac{dX}{dT} = V. \quad (1)$$

Здесь  $M, V, X, T, G, K$  --- размерные величины, соответствующие массе шара, его скорости, текущей координате, времени, ускорению силы тяжести, коэффициенту вязкого трения. Ставим задачу Коши: построить решение уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$X(0) = X_0, V(0) = V_0.$$

Задачу Коши решать не будем. Обезразмерим уравнения (1), используя процедуру нормализованного обезразмеривания. Характер движения шара известен: на первом этапе скорость шара меняется со временем, стремясь к предельному значению. На втором этапе скорость достигает предельного значения  $\tilde{V}$  и практически не меняется со временем.

Легко вычислить значение этой скорости, исходя из условия равенства силы тяжести силе трения:

$$MG - KV = 0$$

Отсюда следует, что  $\tilde{V} = MG / K$ . Среди переменных  $T, V, X$  выберем, в качестве независимых по размерности, величины  $T$  и  $V$ .

На первом этапе движения скорость точки быстро меняется со временем. Предположим, что начальная скорость  $V_0$  мала, первое уравнение системы (1) заменим оценочным равенством

$$M \frac{dV}{dT} = MG$$

$$V = G \cdot T + V_0$$

Отсюда находим

Промежуток времени, в течении которого текущая скорость  $V$  достигнет предельного значения  $\tilde{V}$  равен  $\tilde{T} = (\tilde{V} - V_0) / G \approx \tilde{V} / G = M / K$ . Для больших начальных скоростей оценочное равенство имеет вид

$$M \frac{dV}{dT} = -KV$$

$V = V_0 \exp(-KT/M)$ . Следовательно . Здесь постоянная времени  $\tilde{T} = M / K$  соответствует промежутку времени, в течении которого скорость шара уменьшается в  $e$  раз.

На втором этапе скорость движения  $V$  приблизительно постоянна и близка к предельной скорости  $\tilde{V}$ .

Нормализуем переменные величины  $T$ ,  $V$ ,  $X$ :

$$t = \frac{T}{T_*}, v = \frac{V}{V_*}, x = \frac{X}{X_*}. \quad (2)$$

Нормировка параметров  $M$ ,  $G$ ,  $K$  не потребуется. Подставим эти формулы в уравнение (1), потом поделим первое уравнение на  $MG$ , второе -- на  $V_*$ , получим:

$$\Delta_1 \frac{dv}{dt} = 1 - \Delta_2 \cdot v, \Delta_3 \frac{dx}{dt} = v, x(0) = \frac{X_0}{X_*}, v(0) = \frac{V_0}{V_*}. \quad (3)$$

Эти уравнения содержат три безразмерных комплекса

$$\Delta_1 = \frac{V_*}{GT_*}, \Delta_2 = \frac{KV_*}{MG}, \Delta_3 = \frac{X_*}{T_*V_*},$$

принимающих разные значения для разных классов движения.

a) Рассмотрим класс решений с малым временем  $T \ll \tilde{T}$  и с произвольной начальной скоростью  $V_0$ . В этом случае,

$$T_* = \varepsilon \tilde{T}, V_* = V_0, X_* = V_* T_*,$$

где  $\varepsilon$  --- малый параметр.

Положим начальную скорость малой, тогда

$$V_0 = \varepsilon \tilde{V}, \Delta_1 = 1, \Delta_2 = \varepsilon, \Delta_3 = 1$$

Уравнения движения и начальные условия примут вид

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon(1-v), \frac{dx}{dt} = v, x(0) = \frac{X_0}{\varepsilon \tilde{T} \tilde{V}}, v(0) = 1. \quad (5)$$

Предположим, что начальная скорость имеет порядок постоянной скорости  $\tilde{V}$ , тогда

$$V_0 = \frac{\tilde{V}}{\varepsilon}, \Delta_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}, \Delta_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \Delta_3 = 1$$

Уравнения движения и начальные условия изменятся:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon^2 - \varepsilon v, \frac{dx}{dt} = v, x(0) = \frac{X_0}{\tilde{T} \tilde{V}}, v(0) = 1. \quad (6)$$

Рассмотрим также случай больших значений начальной скорости:

$$V_0 = \frac{\tilde{V}}{\varepsilon}, \Delta_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}, \Delta_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \Delta_3 = 1$$

Имеем:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon^2 - \varepsilon v, \frac{dx}{dt} = v, \quad x(0) = \frac{X_0}{\tilde{T}\tilde{V}}, \quad v(0) = 1. \quad (6)$$

б) Рассмотрим класс решений с большими промежутками времени  $(T \gg \tilde{T})$  и произвольной начальной скоростью. Положим  $T_* = \tilde{T}/\varepsilon$ ,  $V_* = \tilde{V}$ ,  $X_* = V_* T_*$ , тогда

$$\Delta_1 = \varepsilon, \Delta_2 = 1, \Delta_3 = 1.$$

Уравнение движения имеет сингулярно возмущенный вид

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = 1 - v, \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad x(0) = \frac{X_0}{X_*}, \quad v(0) = \frac{V_0}{V}, \quad (7)$$

так как при делении на  $\varepsilon$  появляется особенность в правой части. Выше мы отмечали, что уравнение (4) является *жестким*.

Этот простейший пример демонстрирует богатство возможностей по составлению уравнений с разной структурой входящих в них параметров для описания разных классов движений.

**20. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами: понятия линейной зависимости и независимости решений, фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений, определитель Вронского, критерий фундаментальности матрицы решений (через определитель Вронского, с доказательством), нормальная фундаментальная матрица.**

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \quad (6.1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  —  $n$ -мерный столбец,  $\mathbf{P}(t) = (p_{sk})_{s,k=1}^n$  — матрица размерности  $n \times n$ . Будем считать, что все коэффициенты  $p_{sk}(t)$ , а следовательно, и сама матрица  $P(t)$ , периодичны по  $t$ :

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.

Совокупность

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{x}^{(r)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1r}(t) \\ \vdots \\ x_{nr}(t) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

решений векторного уравнения (6.1) называется **линейно зависимой**, если существуют такие константы  $C_1, \dots, C_r$  не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$C_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + C_r \mathbf{x}^{(r)}(t) \equiv 0$$

в области существования решений.

В противном случае совокупность решений называется  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(r)}(t)$  линейно независимой.

Первый вывод: несложно видеть, что если хотя бы для одного значения  $t = t_0$  векторы  $x^i(t_0)$ , где  $i = 1, \dots, r$  линейно зависимы, то решения (6.2) линейно зависимы.

Действительно, для некоторых отличных от нуля констант  $C_j$  имеем

$$C_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + C_r \mathbf{x}^{(r)}(t_0) = 0.$$

Поэтому решение

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + C_r \mathbf{x}^{(r)}(t)$$

удовлетворяет начальным условиям  $x(t_0) = 0$ , следовательно, в силу единственности решения задачи Коши  $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ .

Отсюда следует, что линейная независимость решений  $x^i(t)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) означает их независимость в любой момент времени  $t$  из области существования решений.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2.** Совокупность  $n$  линейно независимых решений  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$  ( $t$ ) называется фундаментальной системой решений, а матрица

$$\mathbf{X}(t) = (x_{sk})_{s,k=1}^n = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

называется фундаментальной матрицей.

В записи  $x_{sk}$  первый индекс  $s$  означает номер координаты, а второй индекс  $k$  — номер решения, так что в фундаментальной матрице  $\mathbf{X}(t)$  решения располагаются по столбцам.

Рассмотрим  $\det \mathbf{X}(t)$  — определитель Вронского.

**Теорема 6.1.** Определитель Вронского  $\det \mathbf{X}(t)$  отличен от нуля в каждой точке области определения решений  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица.

**Доказательство.** Докажем достаточность. Пусть  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  в каждой точке области определения. Тогда  $x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)$  линейно независимы (как столбцы фундаментальной матрицы) в каждой точке области определения. Поэтому  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица.

Докажем необходимость. Пусть  $\mathbf{X}(t)$  — фундаментальная матрица. Тогда  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$  — линейно независимые решения. Они линейно независимы в каждый момент времени, поэтому  $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$  в каждой точке области определения решений. Теорема доказана.

Итак, определитель Вронского либо нигде не обращается в нуль в области существования решений (случай независимых решений  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ ), либо он тождественно равен нулю (случай

зависимых решений  $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ ). Такое поведение определителя изображено на рис. 6.1.

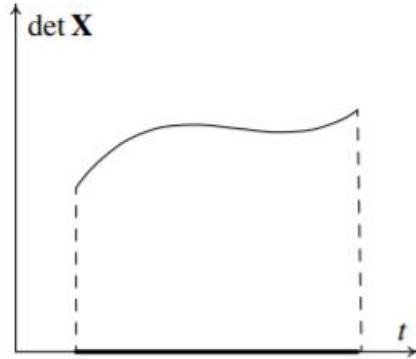


Рис. 6.1. Типичное поведение определителя Вронского

**Следствие 6.1.** Решения  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$  задачи Коши с независимыми начальными условиями

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{x}_0^{(n)}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Любое частное решение  $x(t)$  определяется по формуле

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n \mathbf{x}^{(n)}(t),$$

или

$$x_s = C_1 x_{s1}(t) + \dots + C_n x_{sn}(t), \quad s = 1, \dots, n.$$

Здесь приняты обозначения  $x_{sk} = x_s^{(k)}$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^\tau. \quad (6.3)$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что, во-первых,  $t = 0$  является начальным моментом времени (этого можно добиться с помощью линейной замены времени), во-вторых, фундаментальная матрица удовлетворяет начальным условиям  $X(0) = \mathbf{E}$ , т. е.

$$x_{sk}(0) = \begin{cases} 1, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

В этом случае  $\mathbf{x}(0)=\mathbf{C}$ , т. е.  $\mathbf{C}$  — вектор начальных значений. Такую фундаментальную матрицу будем называть нормальной, а совокупность

соответствующих решений  $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$  назовем нормальной фундаментальной системой решений.

## 21. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами: матрица монодромии, характеристическое уравнение, мультипликаторы, понятие нормального решения, теорема о нормальном решении.

Уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \quad (6.1)$$

инвариантны относительно преобразований  $t \rightarrow t+T$ , где  $T$  — период матрицы  $\mathbf{P}(t)$ . Поэтому любому решению  $\mathbf{x}(t)$  отвечает решение  $\mathbf{x}(t+T)$ . Рассмотрим произвольное решение  $x^{(k)}(t)$ , принадлежащее фундаментальной системе. В общем случае решение  $x^{(k)}(t+T)$  не совпадает с решением  $x^{(k)}(t)$ .

Скрин

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \mathbf{P}(t+T) = \mathbf{P}(t)$   
 $\mathbf{x}(t)$  — частное решение  
 $\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)$   
 $\dot{\mathbf{x}}(t+T) \equiv \mathbf{P}(t+T)\mathbf{x}(t+T)$   
 $\dot{\mathbf{x}}(t+T) \equiv \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t+T)$   
 $\mathbf{x}(t+T)$  — другое частное решение

/не писать, это как доп (или писать ток это)

Следовательно, в силу формулы

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = (C_1, \dots, C_n)^T. \quad (6.3)$$

справедливо равенство

$$\mathbf{x}^{(k)}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{A}^{(k)}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = (a_{1k}, \dots, a_{nk})^* \quad (k=1, \dots, n)$$

Если  $\mathbf{X}(t)$  — нормальная фундаментальная матрица, то  $\mathbf{x}^{(k)}(T) = \mathbf{A}^{(k)}$ , поэтому  $\mathbf{A}^{(k)}$  — вектор начальных значений для  $x^{(k)}(t+T)$ . Объединяя столбцы  $x^{(k)}(t+T)$  в одну матрицу  $\mathbf{X}(t+T)$

+ T), а  $\mathbf{A}^{(k)}$  — в одну матрицу  $\mathbf{A}$ , получим

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = (a_{sk})_{s,k=1}^n. \quad (6.4)$$

Поскольку  $\mathbf{X}(t)$  — нормальная фундаментальная матрица, то

$$\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}(0) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Итак, если известна нормальная фундаментальная матрица  $\mathbf{X}(t)$ , то матрица  $\mathbf{A}$  определяется из равенства

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}(T).$$

Матрицу  $\mathbf{X}(T)$  называют матрицей монодромии.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.** Собственное значение  $\rho$  матрицы монодромии  $\mathbf{X}(T)$ , т. е. корень характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{X}(T) - \rho\mathbf{E}) = 0,$$

называется мультипликатором системы.

Очевидно  $\rho \neq 0$ , так как  $\det \mathbf{X}(T) \neq 0$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4.** Решение  $\mathbf{x}(t)$  называют **нормальным**, если оно удовлетворяет условию  $\mathbf{x}(t+T) = \lambda \mathbf{x}(t)$ ,  $\lambda = \text{const}$ .

**Теорема 6.2.** Решение  $\mathbf{x}(t)$  является нормальным тогда и только тогда, когда вектор начальных условий  $\mathbf{x}(0)$  является собственным вектором матрицы монодромии, а  $\lambda$  — соответствующий мультипликатор системы.

Другими словами, решение  $\mathbf{x}(t)$  является нормальным лишь в том случае, когда параметры  $\lambda, \mathbf{x}(0)$  удовлетворяют уравнению

$$(\mathbf{X}(T) - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x}(0) = 0.$$

**Доказательство. I. Докажем достаточность** условий теоремы. Пусть вектор начальных условий  $\mathbf{x}(0)$  есть собственный вектор матрицы монодромии, а  $\lambda$  — мультипликатор системы. Это значит, что

$$\mathbf{X}(T)\mathbf{x}(0) = \lambda\mathbf{x}(0). \quad (6.6)$$

Решение  $\mathbf{x}(t)$  можно вычислить по формуле

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{x}(0), \quad (6.7)$$

поскольку  $\mathbf{X}(t)$  — нормальная фундаментальная матрица. На основании формул (6.4)–(6.7) имеем

$$\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{X}(t+T)\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(T)\mathbf{x}(0) = \mathbf{X}(t)\lambda\mathbf{x}(0) = \lambda\mathbf{x}(t).$$

Это значит, что  $\mathbf{x}(t)$  — нормальное решение.

**II. Докажем необходимость.** Пусть  $\mathbf{x}(t)$  — нормальное решение, т. е.  $\mathbf{x}(t+T) = \lambda\mathbf{x}(t)$ . Тогда, положив  $t = 0$ , получим  $\mathbf{x}(T) = \lambda\mathbf{x}(0)$ . Из равенства (6.7) следует, что  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{X}(T)\mathbf{x}(0)$ . Таким образом  $\mathbf{X}(T)\mathbf{x}(0) = \lambda\mathbf{x}(0)$ . Это значит, что  $\mathbf{x}(0)$  — собственный вектор матрицы монодромии  $\mathbf{X}(T)$ , а  $\lambda$  — собственное значение этой матрицы, т. е. мультипликатор. **Теорема доказана.**

**22. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами: характеристические показатели, представление нормального решения с помощью характеристических показателей, аналитический вид решения в случае простых характеристических показателей.**

Покажем теперь, что нормальное

решение можно представить в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t} \cdot \boldsymbol{\varphi}(t),$$

надо

писать большой логарифм

$$\text{где } \alpha = T^{-1} \ln \rho, \boldsymbol{\varphi}(t+T) = \boldsymbol{\varphi}(t).$$

Величину  $\alpha$  называют характеристическим показателем. Если уравнения (6.1) представляют собой уравнения в вариациях Пуанкаре для порождающего решения  $\psi(t)$ , то  $\alpha$  называют также характеристическим показателем решения  $\psi(t)$ .

В самом деле, положим  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{x}(t)e^{-\alpha t}$ . Тогда  $\boldsymbol{\varphi}(t+T) = \mathbf{x}(t+T)e^{-\alpha(t+T)} = \rho \mathbf{x}(t) \cdot e^{-\alpha T} \cdot e^{-\alpha t} = \mathbf{x}(t)e^{-\alpha t} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ . Это значит, что нормальное решение  $\mathbf{x}(t)$  есть произведение экспоненты  $e^{\alpha t}$  на периодическую функцию  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Приведем выражение для характеристического показателя в случае комплексных значений  $\rho$ :

$$\alpha = \frac{1}{T} [\ln |\rho| + i(\arg \rho + 2\pi k)], \quad -\pi < \arg \rho \leq \pi.$$

\*большой Ln

Отсюда следует, что характеристический показатель определяется с точностью до мнимых слагаемых  $i2\pi k/T$ .

Система (6.1) не интегрируется в замкнутой форме. Можно, однако, указать общий аналитический вид ее решений, весьма сходный с аналитическим видом решений линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть  $\{p_k\}$  ( $k=1, \dots, n$ ) — простые (не кратные) корни характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{X}(T) - \rho E) = 0$$

где  $\mathbf{X}(T)$  — матрица монодромии.

Тогда соответствующие им нормальные решения

$\mathbf{x}^{(k)} = e^{\alpha_k t} \boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) линейно независимы. Докажем. В самом деле, начальные условия  $\mathbf{x}^{(k)}(0)$  являются собственными векторами матрицы монодромии. Но, как следует из курса линейной алгебры, собственные векторы, отвечающие простым корням характеристического уравнения, линейно независимы. Поэтому на основании следствия 6.1 нормальные решения  $\mathbf{x}^{(k)}(t)$  линейно независимы в области определения.

Любое частное решение уравнений (6.1) является линейной комбинацией нормальных решений, т. е.

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} \boldsymbol{\varphi}^{(1)}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(t). \quad (6.8)$$

Здесь  $\boldsymbol{\varphi}^{(j)}(t)$  — периодические вектор-функции периода  $T$ . Итак, в случае простых

мультиликаторов решение уравнений (6.1) представимо в виде (6.8).

**23. Метод Линдстедта построения периодических решений квазилинейного уравнения: постановка задачи, замена по времени, представления искомого решения и его неизвестной частоты  $\omega$  в виде ряда по малому параметру, подавление секулярных членов с помощью подбора членов ряда для  $\omega$ .**

Рассмотрим метод исследования неизолированных периодических режимов, принадлежащий Линдстедту (Lindstedt). Как указывалось выше, прямое разложение искомого периодического решения в ряд по малому параметру (считаем функцию  $x(t)$  скалярной величиной)

$$x(t) = x_0^*(t) + \varepsilon x_1^*(t) + \varepsilon^2 x_2^*(t) + \dots, \quad (8)$$

содержит секулярные члены вида  $\varepsilon t \sin(k\omega_0 t + \beta), \varepsilon t \cos(k\omega_0 t + \beta)$  (в более общем случае секулярные члены имеют вид  $\varepsilon^s t^m \sin(k\omega_0 t + \beta), \varepsilon^s t^m \cos(k\omega_0 t + \beta)$ ). Такой член будет мал только тогда, когда произведение  $\varepsilon t$  мало по сравнению с единицей. Если  $\varepsilon t$  имеет порядок  $O(1)$ , то секулярный член будет иметь тот же порядок малости, что и главный член разложения. В случае  $\varepsilon t > O(1)$  секулярный член будет больше главного члена ряда. Таким образом, практическое вычисление  $x(t)$  с помощью ряда (8), когда удерживаются несколько первых его членов, возможно только лишь на конечном интервале времени  $[0, T]$ , удовлетворяющим условию  $T \ll L/\varepsilon$  (этот эффект был уже ранее описан).

Причина появления секулярных членов --- зависимость частоты нелинейных колебаний от малого параметра. Поэтому любое разложение, не учитывающее эту зависимость, несостоит. Будем искать частоту колебаний в виде ряда по малому параметру

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots, \quad (9)$$

Здесь  $\omega_0$  - частота порождающего движения.

Идею метода Линдстедта поясним на примере квазилинейного уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \quad (10)$$

Уравнение (10) называют квазилинейным (или почти линейным) потому, что нелинейные члены имеют величину порядка  $\varepsilon$ . В пределе, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнение (10) становится линейным. Введем новое время  $\tau$  по формуле  $\tau = \omega t$ . Это значит, что решения уравнения (10) можно описать в различных масштабах времени. Величина  $\tau$  представляет собой "растянутое", или "сжатое" время, в зависимости от величины частоты  $\omega$ . Это время часто называют собственным временем системы.

Используя известные правила дифференцирования, получим

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(\tau/\omega)} = \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \omega \frac{d}{d\tau} \right) = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}.$$

В результате этих преобразований уравнение (7) перепишется в виде

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \omega x'), \quad (11)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\tau$ . Далее, подставляем ряд (8) в это уравнение (с условием замены  $t$  на  $\tau/\omega$ ) и приравниваем нулю члены одинакового порядка малости по  $\varepsilon$ . В результате имеем рекуррентную последовательность линейных неавтономных дифференциальных

уравнений относительно  $x_j(\tau) = x_j^*(\tau/\omega)$ . Рекуррентность состоит в том, что решение  $x_j(\tau)$  каждого последующего уравнения зависит от решений предыдущих, так как решения  $x_k(\tau)$  входят в правую часть уравнения непосредственно или в виде производных по времени.

Решаем эти уравнения, подбирая параметры  $\omega_j$  так, чтобы коэффициенты при секулярных членах, входящих в функцию  $x_j(\tau)$ , были равны нулю. Для этого достаточно потребовать, чтобы соответствующие коэффициенты при резонансных членах правой части уравнений равнялись нулю, поскольку именно резонансные члены вызывают появление секулярных слагаемых.

## 24. Метод Линдстедта на примере уравнения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \gamma_3 \varphi \dot{\varphi}^2 + \gamma_4 \varphi^3 = 0 \quad (\omega_0, \gamma_3, \gamma_4 = \text{const})$$

Рассмотрим уравнение  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi + \gamma_3 \varphi \dot{\varphi}^2 + \gamma_4 \varphi^3 = 0$ , (12)

где  $\omega_0, \gamma_3, \gamma_4$  - постоянные параметры. Это уравнение описывает колебание балки в окрестности ее горизонтального положения равновесия, когда балка опирается в одной своей точке (центре масс) на цилиндр. Для того, чтобы можно было явно ввести малый параметр  $\varepsilon$  в уравнение (12), воспользуемся процедурой нормализованного обезразмеривания. С этой целью зададим характерные размеры по времени и углу колебаний, учитывая достаточную малость обобщенной координаты  $\varphi$  во все время движения:

$$T_* = \frac{1}{\omega_0}, \quad \varphi_* = \varepsilon [\varphi]$$

Числовые меры  $\bar{t}$ ,  $x$ ,  $\dot{x} = dx/d\bar{t}$  переменных величин  $t, \varphi, \dot{\varphi} = d\varphi/dt$  введем по формулам

$$t = \bar{t} T_*, \quad \varphi = x \varphi_*, \quad \dot{\varphi} = \dot{x} \frac{\varphi_*}{T_*}, \quad \ddot{\varphi} = \ddot{x} \frac{\varphi_*}{T_*^2}$$

Уравнения (9) примут следующий вид (для удобства записи числовую меру  $\bar{t}$  обозначим  $t$ ):

$$\frac{\varepsilon[\varphi]}{T_*^2} \ddot{x} + \omega_0^2 \varepsilon[\varphi] x + \gamma_3 \frac{\varepsilon^3 [\varphi]^3}{T_*^2} x \dot{x}^2 + \gamma_4 \varepsilon^3 [\varphi]^3 x^3 = 0$$

Сокращаем на общий множитель, и учитывая, что  $\omega_0 T_* = 1$ ,  $[\varphi] = 1$  рад, получим

$$\ddot{x} + x + \gamma_3 \varepsilon^2 x \dot{x}^2 + \gamma_4 \varepsilon^2 T_*^2 x^3 = 0 \quad (13)$$

Введем новое время  $\tau = \omega t$ , где  $\omega$  есть искомая частота нелинейных колебаний.

Уравнение (13) запишется в виде

$$\omega^2 x'' + x + \varepsilon^2 \left( \gamma_3 \omega^2 x x'^2 + \gamma_4 T_*^2 x^3 \right) = 0$$

Будем искать частоту колебаний и решение задачи Коши в виде ряда по малому параметру:

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots,$$

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \dots$$

Первый член в разложении для  $\omega$  представляет собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. Последующие поправки  $\omega_j$  описывают эффект неизохронности.

Подставляем эти ряды в уравнение колебаний:

$$(1 + 2\epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_1^2 + 2\epsilon^2\omega_2 + \dots)(x_0'' + \epsilon x_1'' + \epsilon^2 x_2'' + \dots) + (x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) + \epsilon^2 \gamma_3 (1 + 2\epsilon\omega_1 + \dots)(x_0 + \epsilon x_1 + \dots)(x_0'^2 + 2\epsilon x_0' x_1' + \dots) + \epsilon^2 \gamma_4 T_*^2 (x_0^3 + \dots) = 0$$

Приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях  $\epsilon$ , получим уравнения для определения функций  $x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau)$ :

$$\begin{aligned} x_0'' + x_0 &= 0 \\ x_1'' + 2\omega_1 x_0'' + x_1 &= 0 \\ x_2'' + 2\omega_1 x_1'' + (\omega_1^2 + 2\omega_2)x_0'' + x_2 + \gamma_3 x_0 x_0'^2 + \gamma_4 T_*^2 x_0^3 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Начальные условия задачи представим в виде  $x(0) = a, x'(0) = 0$ , где  $a$  - произвольная малая величина. Используя разложения в ряды, будем иметь

$$x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon x_2(0) + \dots = a, x_0'(0) + \epsilon x_1'(0) + \epsilon x_2'(0) + \dots = 0$$

Отсюда следует, что начальные значения для искомых функций  $x_0(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau)$  определяются следующими равенствами:

$$x_0(0) = a, x_0'(0) = 0, x_k(0) = 0, x_k'(0) = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{15}$$

Найдем решения системы (14) с начальными данными (15). Очевидно, что функция  $x_0$  имеет вид

$$x_0(\tau) = a \cos \tau$$

Тогда второе уравнение совокупности (14) запишется в форме

$$x_1'' + x_1 = 2\omega_1 a \cos \tau$$

Частота "вынуждающей силы", входящей в правую часть этого уравнения, равна собственной частоте колебаний, то есть единице, поэтому решение этого уравнения будет резонансным и, следовательно, содержащим вековой член  $t \sin t$ . Для того, чтобы избежать резонансного эффекта, положим  $\omega_1 = 0$ , тогда  $x_1(\tau) \equiv 0$ .

Подставим решения  $x_0(\tau), x_1(\tau)$  в третье уравнение системы (14), получим уравнение относительно  $x_2(\tau)$ :

$$x_2'' + x_2 = 2\omega_2 a \cos \tau - a^3 \cos \tau [\gamma_3 \sin^2 \tau + \gamma_4 T_*^2 \cos^2 \tau]$$

Преобразуем это уравнение, используя известные формулы тригонометрии:

$$\sin^2 \tau = \frac{1 - \cos 2\tau}{2}, \quad \cos^2 \tau = \frac{1 + \cos 2\tau}{2}, \quad \cos \tau \cos 2\tau = \frac{\cos \tau + \cos 3\tau}{2}$$

Имеем

$$x_2'' + x_2 = \left[ 2a\omega_2 - \frac{a^3}{4} (\gamma_3 + 3\gamma_4 T_*^2) \right] \cos \tau + \frac{a^3}{4} (\gamma_3 - \gamma_4 T_*^2) \cos 3\tau \quad (16)$$

Чтобы подавить секулярные члены в рядах решений, необходимо потребовать равенство нулю коэффициента при "резонансном" члене  $\cos \tau$  правой части. В результате получим, учитывая, что  $T_* = \omega_0^{-1}$ ,

$$\omega_2 = \frac{a^2}{8} (\gamma_3 + 3\gamma_4 \omega_0^{-2})$$

Тогда решение уравнения (12), удовлетворяющее нулевым начальным данным, таково:

$$x_2(\tau) = -\frac{a^3 (\gamma_3 - \gamma_4 \omega_0^{-2})}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau)$$

Итак, результатом вычислений является второе приближение по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$x(\tau) = a \cos \tau + \varepsilon^2 \frac{a^3 (\gamma_4 \omega_0^{-2} - \gamma_3)}{32} (\cos 3\tau - \cos \tau)$$

Вернемся теперь к решению  $\varphi(t)$  уравнения (12). Для этого необходимо перейти к старому времени  $t$  по формуле  $t = \tau / (\omega \omega_0)$  и учесть, что  $\varphi = \varepsilon x$ . Будем иметь:

$$\varphi(t) = \varepsilon a \cos \Omega t + \varepsilon^3 \frac{a^3 (\gamma_4 \omega_0^{-2} - \gamma_3)}{32} (\cos 3\Omega t - \cos \Omega t)$$

Здесь  $\Omega = \omega \omega_0$ . С точностью до членов третьего порядка малости, она имеет следующее представление:

$$\Omega(a) = \omega_0 + \varepsilon^2 \frac{a^2}{8} (\gamma_3 \omega_0 + 3\gamma_4 \omega_0^{-1}),$$

**25. Метод Ван-дер-Поля исследования квазилинейного уравнения  $a\ddot{q} + cq = \varepsilon F(q, \dot{q})$ : переход к новым переменным на основе метода вариации произвольных постоянных, запись квазилинейного уравнения в новых переменных, переход к усредненным уравнениям**

Предположим, что колебания в некоторой физической системе можно описать автономным

уравнением второго порядка:

$$a\ddot{q} + cq = \varepsilon F(q, \dot{q}), \quad (9.1)$$

где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Считаем, без ограничения общности, что уравнение (9.1) имеет безразмерный вид. Введем безразмерное время  $\tau = t \sqrt{c/a}$ , тогда

$$\dot{q} = \frac{dq}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{d\tau^2} \frac{c}{a}.$$

Уравнение (9.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2q}{d\tau^2} + q &= \varepsilon f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right), \\ f\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) &= \frac{1}{c} F\left(q, \frac{dq}{d\tau} \sqrt{\frac{c}{a}}\right). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Для удобства записи и с целью сокращения обозначений, переменную  $\tau$  обозначим буквой  $t$ . Если теперь ввести новую переменную  $q_1 = dq/dt$ , то уравнение (9.2) можно представить в виде двух уравнений первого порядка:

$$\dot{q} = q_1, \quad \dot{q}_1 = -q + \varepsilon f(q, q_1). \quad (9.3)$$

При  $\varepsilon = 0$  рассматриваемая система уравнений описывает гармонические колебания

$$q = a \cos t + b \sin t, \quad q_1 = -a \sin t + b \cos t, \quad (9.4)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные интегрирования. Фазовые кривые этой вырожденной системы представляют собой вложенные друг в друга концентрические окружности с центром в начале координатной плоскости  $q$ ,  $q_1$ .

Рассмотрим случай  $\varepsilon \neq 0$ , когда  $\varepsilon$  мало. Будем искать решения уравнений (9.3) методом Лагранжа вариации произвольных постоянных. С этой целью искомое решение  $q = q(t)$ ,  $q_1 = q_1(t)$  представим в виде (9.4), считая  $a$  и  $b$  неизвестными функциями времени. Необходимо получить дифференциальные уравнения относительно  $a$  и  $b$ . Это значит с формальной точки зрения, что систему уравнений (9.3) следует преобразовать с помощью замены переменных  $q$ ,  $q_1 \rightarrow a$ ,  $b$ , описываемой формулами (9.4).

Дифференцируем (9.4) по времени:

$$\begin{cases} \dot{q} = -a \sin t + b \cos t + \dot{a} \cos t + \dot{b} \sin t = q_1 + \dot{a} \cos t + \dot{b} \sin t, \\ \dot{q}_1 = -a \cos t - b \sin t - \dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t = -q - \dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t. \end{cases} \quad (9.5)$$

Отсюда следует, если сравнить между собой уравнения (9.4), (9.5), что  $q(t)$ ,  $q_1(t)$  есть решение уравнений (9.3) тогда и только тогда, когда функции  $a=a(t)$ ,  $b=b(t)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \dot{a} \cos t + \dot{b} \sin t = 0, \\ -\dot{a} \sin t + \dot{b} \cos t = \varepsilon f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t). \end{cases} \quad (9.6)$$

Система (9.6) представляет собой совокупность уравнений относительно  $\dot{a}$  и  $\dot{b}$ . Решая эту систему, будем иметь

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t, \\ \dot{b} = \varepsilon f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t. \end{cases} \quad (9.7)$$

Неавтономная система уравнений (9.7) имеет более громоздкий и сложный вид, чем автономные уравнения (9.3). Однако система (9.7) в большей степени приспособлена к применению метода усреднения. Дело в том, что правые части уравнений (9.7) периодически зависят от явно входящего времени  $t$ , поэтому, рассматривая их как функции постоянных величин  $a$ ,  $b$  и времени  $t$ , мы можем развернуть их в ряд Фурье по явно входящему времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon \left\{ P(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n1}(a, b) \cos nt + P_{n2}(a, b) \sin nt] \right\}, \\ \dot{b} &= \varepsilon \left\{ Q(a, b) + \sum_{n=1}^{\infty} [Q_{n1}(a, b) \cos nt + Q_{n2}(a, b) \sin nt] \right\}, \end{aligned}$$

где  $P$ ,  $Q$ ,  $P_{nj}$ ,  $Q_{nj}$  — постоянные коэффициенты ряда Фурье. В частности

$$\begin{aligned} P(a, b) &= -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \sin t dt, \\ Q(a, b) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(a \cos t + b \sin t, -a \sin t + b \cos t) \cos t dt. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Здесь важно отметить для дальнейшего, что при вычислении интегралов (9.8) мы полагаем  $a$  и  $b$  параметрами, поскольку процедура представления подынтегральных функций в виде ряда Фурье никак не связана с дифференциальными уравнениями, описывающими изменение  $a$  и  $b$  во времени.

От системы уравнений (9.7) перейдем к приближенным или укороченным уравнениям

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon P(a, b), \\ \dot{b} = \varepsilon Q(a, b), \end{cases} \quad (9.9)$$

отбрасывая в правых частях все «осциллирующие» члены. Такую процедуру будем называть усреднением уравнений (9.7) по явно входящему времени, поскольку интегралы (9.8) являются средними от правых частей за период колебаний, равный  $2\pi$ .

### Заметка (дополнительное к последнему абзацу):

Отброшенные осциллирующие члены имеют порядок малости  $\varepsilon$ , поэтому процедура усреднения не является корректной с точки зрения классической теории метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова. Мы можем дать приближенное обоснование методу усреднения, учитывая специфику

системы (9.7): малый параметр  $\varepsilon$  входит сомножителем в правые части этих уравнений.

Следовательно, величины  $a$  и  $b$  являются медленно меняющимися функциями времени.

Предположим, что функции  $a(t)$ ,  $b(t)$  меняются столь медленно, что их изменением за период  $2\pi$  можно пренебречь, т.е.  $a, b \approx \text{const}$ . Если эти константы подставить в правые части уравнений (9.7) и пренебречь влиянием явно входящего времени  $t$ , то имеем постоянство производных  $\dot{a}$  и  $\dot{b}$ .

Умножим теперь обе части уравнений (9.7) на  $dt$  и проинтегрируем их в пределе от 0 до  $2\pi$ : получим в точности систему уравнений (9.9).

Конечно, эти рассуждения не являются строгими. Заметим, что состояниям равновесия  $a = a^*$ ,  $b = b^*$  уравнений (9.9) отвечают периодические режимы (9.4) исходных уравнений, при этом изолированность равновесия  $a = a^*$ ,  $b = b^*$  влечет за собой изолированность периодического решения.

## 26. Метод Ван-дер-Поля исследования квазилинейного уравнения $a\ddot{q} + cq = \varepsilon F(q, \dot{q})$ : представление усредненных уравнений в полярных координатах, исследование положений равновесий этих уравнений, их связь с предельными циклами в исходных координатах

Конечно, эти рассуждения (см. прошлый вопрос) не являются строгими. Строгое обоснование метода усреднения будет дано позже. А сейчас заметим, что состояниям равновесия  $a = a^*$ ,  $b = b^*$  уравнений (9.9) отвечают периодические режимы (9.4) исходных уравнений, при этом изолированность равновесия  $a = a^*$ ,  $b = b^*$  влечет за собой изолированность периодического решения.

Исследуем решения уравнений (9.9). Для этого введем полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$  по формуле

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Тогда

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{db}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

при этом

$$a \cos t + b \sin t = \rho \cos(\varphi - t), \quad -a \sin t + b \cos t = \rho \sin(\varphi - t). \quad (9.10)$$

После подстановки этих выражений в уравнение (9.9) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi), \\ \frac{d\rho}{dt} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon Q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $\cos \varphi$ , второе уравнение на  $\sin \varphi$  и сложим. Получим уравнение относительно  $d\rho/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \varepsilon P \cos \varphi + \varepsilon Q \sin \varphi = \frac{-\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \sin t \cos \varphi - f \cos t \sin \varphi) dt = \\ &= -\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \sin(t - \varphi) dt. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на  $\cos \varphi$  и вычтем из него первое уравнение, предварительно помноженное на  $\sin \varphi$ . Имеем

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\varphi}{dt} &= -\varepsilon P \sin \varphi + \varepsilon Q \cos \varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \sin t \sin \varphi + f \cos t \cos \varphi) dt = \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \cos(t - \varphi) dt.\end{aligned}$$

Теперь положим  $\xi = t - \varphi$  и воспользуемся равенствами (9.4), (9.10). Получим представление уравнений (9.9) в полярных координатах:

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon R(\rho) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \Phi(\rho), \quad (9.11)$$

где

$$R(\rho) = -(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \sin \xi d\xi, \quad (9.12)$$

$$\Phi(\rho) = (2\pi\rho)^{-1} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \xi, -\rho \sin \xi) \cos \xi d\xi.$$

При выводе этих формул мы воспользовались правилом вычисления интегралов (9.8): величины  $a$  и  $b$ , следовательно,  $\rho$  и  $\varphi$  рассматриваются как параметры, поэтому  $dt = d(t - \varphi) = d\xi$ . Пределы интегрирования по  $\xi$  здесь совпадают с пределами интегрирования по  $t$  в силу периодичности подынтегральных функций по  $\xi$ .

Правые части уравнений (9.11) не зависят от  $\varphi$ , что означает разделение переменных в этой системе: первое уравнение интегрируется независимо от второго, интегрирование второго уравнения сводится к простой квадратуре, если известно решение  $\rho(t)$  первого уравнения.

Очевидно, что координаты положений равновесия уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon R(\rho) \quad (9.13)$$

удовлетворяют равенству

$$R(\rho) = 0.$$

Рассмотрим поведение изображающей точки в окрестности какого-либо состояния равновесия  $\rho = \rho_0$  уравнения (9.13). Введем возмущение  $u$  по формуле  $\rho = \rho_0 + u$ . Подставим это выражение в уравнение (9.13), разложим правую часть в ряд по  $u$ , получим уравнение возмущенного движения:

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon R'(\rho_0) u + \dots \quad (9.14)$$

При достаточно малом  $u$ , когда членами высших порядков в разложении функции  $R'(\rho_0 + u)$  можно пренебречь, знак производной  $R'(\rho_0)$  определяет характер состояния равновесия  $\rho = \rho_0$ . Так, если  $R'(\rho_0) < 0$ , то положение равновесия асимптотически устойчиво, если же  $R'(\rho_0) > 0$ , то неустойчиво.

Действительно, скорость движущейся точки в силу уравнения (9.14) меняет свое направление при переходе через начало координат. При этом при  $R'(\rho_0) > 0$  и точка всегда удаляется от начала координат, а при  $R'(\rho_0) < 0$  она, напротив, к нему приближается при  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, в первом случае невозмущенное положение равновесия  $\rho = \rho_0$  неустойчиво, а во втором случае оно устойчиво, причем асимптотически.

Строгое доказательство этого утверждения, учитывающее влияние отброшенных нелинейных членов в уравнении (9.14), можно провести прямым методом Ляпунова, используя функцию

$$v = 0.5 R'(\rho_0) u^2.$$

Это доказательство мы опускаем.

Интегрируя уравнение (9.13), получим закон изменения полярного радиуса  $\rho$  со временем:

$$\varepsilon(t - t_0) = \int_{\rho^*}^{\rho} \frac{d\rho}{R(\rho)},$$

где  $\rho^*$  – начальное значение величины  $\rho$ . Теперь, для нахождения явной зависимости  $\rho = \rho(t)$  необходимо обратить этот интеграл. Эта процедура весьма нетривиальна и требует, как правило, применение специальных функций.

Перейдем к рассмотрению уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \Phi(\rho). \quad (9.15)$$

Для начала исследуем тривиальный случай  $\Phi(\rho) \equiv 0$ . Из этого уравнения следует, что  $\varphi = \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  константа интегрирования. Это значит, что на плоскости  $a, b$  фазовые кривые представляют собой прямые

$$a = \rho(t) \cos \varphi_0, \quad b = \rho(t) \sin \varphi_0,$$

проходящие через начало координат и составляющие угол  $\varphi_0$  с осью абсцисс  $a$ . Движение изображающей точки вдоль всех этих прямых происходит одинаково, т.к. уравнение (9.13) не зависит от величины угла  $\varphi_0$ . Корни уравнения  $R(\rho) = 0$  задают радиусы окружностей, каждая точка которых является равновесием укороченной системы (9.11). Фазовая картина траекторий на плоскости переменных  $a$  и  $b$  в частном случае трех состояний равновесия  $\rho = 0, \rho = \rho_1, \rho = \rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ), когда , представлена на рис. 9.1.

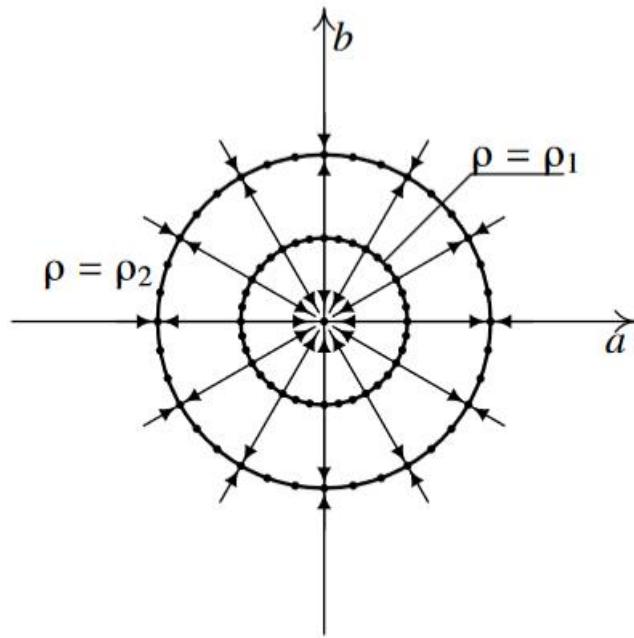


Рис. 9.1. Фазовый портрет усредненной системы в переменных  $a$  и  $b$

На этом рисунке внешняя окружность состоит из асимптотически устойчивых положений равновесия, внутренняя – из неустойчивых положений равновесия, начало координат устойчиво.

Если мы перейдем теперь к координатам  $q, q_1$  по формулам (9.4), то, как легко видеть, окружностям  $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$  будет отвечать на плоскости  $q, q_1$  круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы  $p_j$  (см. рис. 9.1).

Движение изображающей точки по какому-нибудь циклу, имеющему радиус  $\rho_j$ , следует закону

$$\begin{aligned} q &= \rho_j \cos \varphi_0 \cos t + \rho_j \sin \varphi_0 \sin t = \rho_j \cos(t - \varphi_0), \\ q_1 &= -\rho_j \cos \varphi_0 \sin t + \rho_j \sin \varphi_0 \cos t = -\rho_j \sin(t - \varphi_0), \end{aligned} \quad (9.16)$$

где  $\varphi_0$  произвольно.

Остальные траектории, представляющие собой отрезки прямых на плоскости  $a, b$ , трансформируются в спирали, накручивающиеся на предельные циклы либо при  $t \rightarrow +\infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ .

Этот вывод следует из формул (9.16), в которых следует заменить  $\rho_j$  на текущее значение  $\rho(t)$  и после этого представить эти равенства в виде уравнения фазовой кривой:

$$q^2 + q_1^2 = \rho^2(t). \quad (9.17)$$

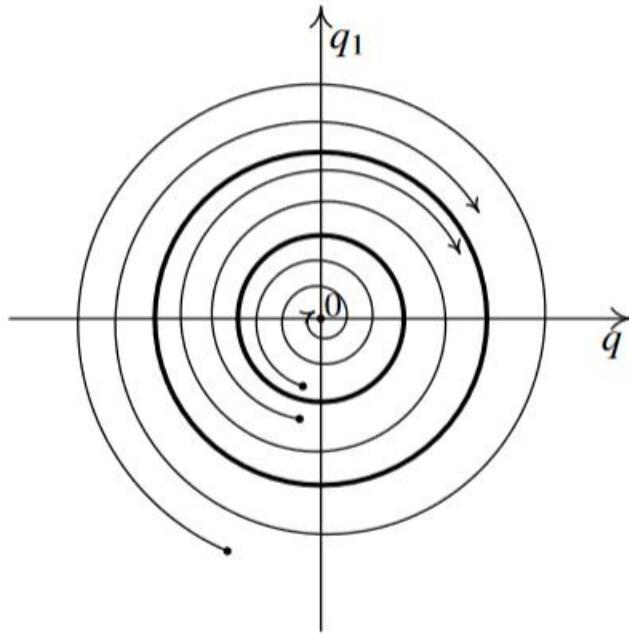


Рис. 9.2. Предельные циклы усредненной системы

Монотонное изменение  $\rho$  со временем как раз и означает движение изображающей точки по спирали (см. рис. 9.2).

Рассмотрим второй случай, когда  $\Phi(\rho) \neq 0$ . Предположим, что  $\rho = \rho_j$  является корнем уравнения  $R(\rho) = 0$ . Будем также считать, что величины  $\rho_j$  не являются корнями уравнения  $\Phi(\rho) = 0$ . Тогда согласно второму уравнению системы (9.11) изменение угла  $\varphi$  со временем описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \Phi(\rho_j),$$

если  $\rho = \rho_j$ . Отсюда следует, что  $\varphi = \varepsilon \Phi(\rho_j)t + \varphi_0$ , поэтому состоянию равновесия  $\rho = \rho_j$  уравнений (9.11) отвечает круговой предельный цикл на плоскости  $a, b$ :

$$a = \rho_j \cos(\varepsilon \Phi(\rho_j)t + \varphi_0), \quad b = \rho_j \sin(\varepsilon \Phi(\rho_j)t + \varphi_0). \quad (9.18)$$

Характер предельного цикла (устойчивость или неустойчивость) определяется характером равновесия  $\rho = \rho_j$ . Направление движения изображающей точки определяется знаком  $\Phi(\rho_j)$ .

Предельному циклу (9.18) соответствует предельный цикл

$$\begin{aligned} q &= \rho_j \cos \{(1 - \varepsilon \Phi(\rho_j))t - \varphi_0\}, \\ q_1 &= -\rho_j \sin \{(1 - \varepsilon \Phi(\rho_j))t - \varphi_0\} \end{aligned}$$

на плоскости  $q, q_1$ . Остальные кривые на этой плоскости спирали, накручивающиеся на предельные циклы как и в предыдущем случае, когда мы считали  $\Phi(\rho) \equiv 0$ , поскольку равенство (9.17) сохраняет свою силу.

Таким образом, картина на фазовой плоскости для рассмотренных случаев остается прежней.

## 27. Понятие стандартной по Боголюбову системы. Приведение дифференциальных уравнений к стандартной форме. Понятие медленных переменных.

Предположим, что поведение физической системы описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}^{(0)}(\mathbf{y}, t) + \varepsilon \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{y}, t) \quad (1)$$

Здесь, как и ранее,  $\mathbf{y} \in R^n$ ,  $\mathbf{Y}^{(0)}, \mathbf{Y}^{(1)}$  –  $n$ -мерные вектор-функции,  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр.

Функцию  $\varepsilon \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{y}, t)$  будем называть *возмущающей*.

Предположим, что невозмущенная система уравнений

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}^{(0)}(\mathbf{y}, t) \quad (2)$$

интегрируется: известно ее общее решение  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{c})$ , где  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^\tau$  – вектор произвольных постоянных. Это значит, что векторная функция  $\mathbf{g}(t, \mathbf{c})$  удовлетворяет уравнению (2) тождественно по  $t$ , с:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{g}(t, \mathbf{c}) \equiv \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{c})}{\partial t} \equiv \mathbf{Y}^{(0)}(\mathbf{g}(t, \mathbf{c}), t)$$

В частности, тождество сохранится вдоль произвольной кривой  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\alpha), \alpha \in R^1$  в пространстве произвольных постоянных  $c_i$ :

$$\frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{c}(\alpha))}{\partial t} \equiv \mathbf{Y}^{(0)}(\mathbf{g}(t, \mathbf{c}(\alpha)), t) \quad (3)$$

Рассмотрим задачу о приведении системы уравнений (1) к *стандартному (по Боголюбову) виду*

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

Специфика этих уравнений – наличие малого параметра в правой части в виде сомножителя. При  $\varepsilon = 0$  имеем  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , поэтому  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{c} = \mathbf{x}(0)$ . Если  $\varepsilon \neq 0$ , то решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  уже будет отличаться от константы, однако малость производной  $\dot{\mathbf{x}}$  гарантирует медленное изменение  $\mathbf{x}$  со временем. Поэтому величину  $\mathbf{x}$  будем называть *медленной* переменной.

Для того, чтобы найти замену переменных  $y \rightarrow x$ , приводящую систему уравнений (1) к виду (4), воспользуемся методом вариации произвольных постоянных,

Подставим общее решение  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{c})$  уравнений (2) в уравнение (1). Очевидно, эти уравнения не будут удовлетворяться ни при каких значениях произвольных постоянных  $c_j$ . Однако малость "возмущений"  $\varepsilon \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{y}, t)$  наводит на мысль, что вектор-функция  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{c})$  почти удовлетворяет уравнениям (1) и, следовательно, малое и непрерывное по времени изменение произвольных постоянных может обратить уравнения (1) в тождество по  $t$ .

Итак, решение уравнений (1) ищем в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{g}$  описывает общее решение невозмущенного уравнения,  $\mathbf{x}$  – неизвестная функция времени. С формальной точки зрения формулу (5) можно рассматривать как формулу перехода от переменных  $y$  к новым переменным  $x$ .

Дифференцируем (5) по времени:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$$

Выражая отсюда  $\dot{\mathbf{x}}$ , считая матрицу  $\partial g / \partial x$  обратимой (так существует обратная матрица, тк как она невырожденная матрица Якоби), и учитывая, что производная  $\dot{\mathbf{y}}$  имеет вид (1), получим:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \left( \dot{\mathbf{y}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \varepsilon \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{g}(t, \mathbf{x}), t)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались равенством (3) при условии замены  $\mathbf{c}(\alpha)$  вектором  $\mathbf{x}(t)$ . Итак, полагаем

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \mathbf{Y}^{(1)}(\mathbf{g}(t, \mathbf{x}), t),$$

тогда уравнение относительно  $\mathbf{x}$  будет иметь стандартный по Боголюбову вид (4).

**28.(ЛК 9 41:20) Идеи метода усреднения для периодических по времени дифференциальных уравнений в стандартной форме: представление правых частей уравнений в виде ряда Фурье, формула для первого члена ряда Фурье, понятие временного среднего, усредненные (уокороченные) уравнения, ошибка приближения в методе усреднения.**

Заменим систему уравнений стандартного вида (4) приближенной системой, полученной в результате усреднения правых частей уравнений (4) по времени  $t$ . Очевидно, что такое приближение должно гарантировать близость решений исходных и усредненных уравнений, иначе усреднение не имеет смысла. Оно должно также иметь вид, удобный для применения аналитических и численных методов.

Будем считать, что уравнения модели периодически зависят от времени  $t$ , т.е.

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}, t + T) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

Здесь  $T$  – период (правой части),  $\omega = 2\pi/T$  – частота изменения этой функции по явно входящему параметру  $t$ . Представим  $X(x, t)$  в виде ряда Фурье:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{x}) e^{ik\omega t}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Выражение  $\underline{X}(x)$  вычисляется по формуле (при  $k=0$ )

$$\mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x}) \equiv \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (9)$$

это выражение дает первый член ряда Фурье, который не зависит от явно входящего времени, который называют секулярным членом. ( $T$ -период правой части) представляющей собой *среднее по времени*  $t$  от периодической векторной функции  $X(x, t)$ . Формулу (9) называют также *вековой компонентой ряда Фурье*. Заметим, что интегралы (8), (9) вычисляются при *фиксированном значении вектора  $x$* .

Заметим, что комплексная форма (7) ряда Фурье весьма удобна для расчетов и в теоретических исследованиях, так она компактна и вещественно – значна.

Система уравнений (6) примет следующий вид:

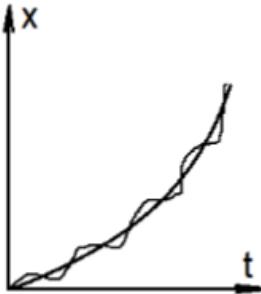
$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{k \neq 0} \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{x}) e^{ik\omega t} \quad (10)$$

Упростим уравнения (10), отбрасывая гармоники в правой части:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) \quad (11)$$

Уравнения (11) называют *усредненными уравнениями*. Усредненные уравнения являются укороченными, упрощенными по отношению к точным уравнениям (10)

Решение  $\mathbf{u}(t)$  усредненной системы уравнений (11) будем называть *эволюционной (вековой) составляющей* решения  $\mathbf{x}(t)$ . Это определение оправдано тем, что функция  $\mathbf{u}(t)$  медленно и, обычно, плавно меняется со временем. Она является главной составляющей решения. На эволюционную составляющую накладывается осцилляция, вызванная отброшенными осциллирующими членами  $\varepsilon \sum_{k \neq 0} X^{(k)}(x) e^{ik\omega t}$  правой части уравнений (10). Они не меняют характера эволюции. Осцилляция лишь уточняет приближенное решение  $\mathbf{u}(t)$ , при этом ее вклад тем меньше, чем меньше  $\varepsilon$ , а в пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  искомое решение  $\mathbf{x}(t)$  системы уравнений (10) стремится к  $\mathbf{u}(t)$ .



Покажем это на примере. Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = \varepsilon(ax + b \cos(\omega t + \alpha)),$$

где  $a$  и  $b$  – параметры. Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$x(t) = ce^{\varepsilon at} - \frac{\varepsilon b}{(\varepsilon a)^2 + \omega^2} [\varepsilon a \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)]$$

Здесь эволюционной составляющей  $u(t)$  строгого решения является первый член этого выражения:

$$u(t) = ce^{\varepsilon at}$$

Из вида общего решения следует, что на вековую составляющую ( $x(t)$ ) т накладываются осцилляции. Разность  $(x(t) - u(t))$  есть величина порядка в силу ограниченности гармоник  $\cos(\omega t + \alpha), \sin(\omega t + \alpha)$ ; она стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . С увеличением частоты колебаний  $\omega$  амплитуда осцилляций уменьшается, поэтому высокочастотные колебания не оказывают практического влияния на решение  $x(t)$ .

Итак, основной прием усреднения – переход от точных уравнений к уравнениям, правая часть которых есть среднее по времени от векторной функции  $X(x, t)$ .

**Принцип усреднения.** Для приближенного описания изменения медленной переменной  $x$  точные уравнения заменяются усредненными уравнениями.

Будем считать, что начальные значения искомого решения  $x(t)$  и решения  $u(t)$  совпадают, т.е.  $x(0) = u(0) = x_0$ . Тогда точность приближения метода усреднения уравнений (10) такова:

$$\|x(t) - u(t)\| \sim \varepsilon, \quad t \sim \frac{1}{\varepsilon} \quad (11 \text{ bis})$$

## 29. Усреднение как метод выделения главных членов в рядах решений

Получим формулу (11 bis) пока приближенно.

Заметим, что при выводе уравнений (11) мы отбросили гармоники, входящие в правую часть уравнений (10), имеющие порядок малости, равный  $\varepsilon$ . Однако члены, которые мы сохранили в усредненных уравнениях, имеют порядок  $\varepsilon$ ! С точки зрения метода малого параметра, когда степень влияния членов оценивается величиной этого параметра, процедура вывода уравнений (11) незаконна. Поэтому, для обоснования идей усреднения необходим подход, по иному учитывающий влияние членов правой части  $\varepsilon X(x, t)$  на решение  $x(t)$ .

Идея подхода состоит в следующем. Рассмотрим решение задачи Коши, представленное в виде ряда по малому параметру:

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots, \quad x(0, \varepsilon) = x_0 \quad (12)$$

Здесь, для простоты изложения, считаем решение  $x(t)$  скалярной функцией времени.

Выделим главные члены этого ряда на асимптотически большом промежутке времени  $[0, L/\varepsilon]$ , где  $L$  – произвольное число. Считаем, для простоты изложения, что переменная  $x$  является скалярной величиной. В соответствии с определением порядка малости функции  $x(t, \varepsilon)$  (см. Лекцию 2), главными членами ряда (12) будем называть слагаемые  $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$ , имеющие максимальную полосу изменения на интервале времени  $[0, L/\varepsilon]$ . Если полоса задается неравенством  $A_1(\delta) \varepsilon^s \leq |\varepsilon^k u^{(k)}(t)| \leq A_2(\delta) \varepsilon^s$ , то  $\varepsilon^k u^{(k)}(t) = O(\varepsilon^s)$ . Далее покажем, что для всех главных членов  $s=0$ .

Для примера, выделим главные члены среди выражений

$$\varepsilon At, \quad \varepsilon^2 At^2, \quad \varepsilon B \sin t, \quad \varepsilon^2 B t, \quad \varepsilon^2 B \cos \omega t$$

Очевидно, на асимптотически большем промежутке времени  $[0, L/\varepsilon]$

$$0 \leq \varepsilon At \leq AL, \quad 0 \leq \varepsilon^2 At^2 \leq AL^2,$$

поэтому  $\varepsilon At = O(1)$ ,  $\varepsilon^2 At^2 = O(1)$ . Остальные члены имеют более высокий порядок малости:  $\varepsilon B \sin(t) = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon^2 B t = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon^2 B \cos(k\omega t) = O(\varepsilon^2)$ . Это значит, что  $\varepsilon At$ ,  $\varepsilon^2 A^2$  – главные члены.

Итак, при вычислении  $(k+1)$ -го члена  $\varepsilon^k x^{(k)}(t)$ , представляющего собой сумму некоторых выражений, выделим *главное слагаемое*. Обозначим это слагаемое через  $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$ . Группируем все эти слагаемые в виде ряда по  $\varepsilon$

$$u(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \dots \quad (13)$$

Основная идея подхода -- показать, что этот ряд описывает решение усредненных уравнений и приближает строгое решение  $x(t, \varepsilon)$  с точностью порядка  $\varepsilon$  на промежутке времени порядка  $1/\varepsilon$ .

С этой целью представим скалярное решение  $x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{X}(x) + \varepsilon \sum_{k=0} X^{(k)}(x) e^{ik\omega t} \quad (14)$$

в виде ряда (12), где  $x_0$  – начальное значение переменной  $x$ . Отсюда следует, что  $x^{(k)}(0) = 0$  когда  $k = 1, 2, \dots$ . Подставим этот ряд в уравнение (14), получим

$$\varepsilon \dot{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \dot{x}^{(2)} + \dots = \varepsilon \bar{X}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots) + \varepsilon \sum_{k=0} X^{(k)}(x_0 + \varepsilon x^{(1)} + \dots) e^{ik\omega t}$$

Приравнивая коэффициенты при в левой и правой частях, получим

$$\varepsilon \dot{x}^{(1)} = \varepsilon \bar{X}(x_0) + \varepsilon \sum_{k=0} X^{(k)}(x_0) e^{ik\omega t}$$

Интегрируем это равенство по времени:

$$\varepsilon x^{(1)}(t) = \varepsilon \bar{X}(x_0)t + \varepsilon \sum_{k=0} \frac{X^{(k)}(x_0)}{ik\omega} e^{ik\omega t} + \varepsilon C_1, \quad (15)$$

где

$$C_1 = - \sum_{k=0} \frac{X^{(k)}(x_0)}{ik\omega}$$

Изменения  $\varepsilon x^{(1)}$  со временем обусловлены вековой составляющей  $\varepsilon \bar{X}(x_0)t$  (дополненной членом  $\varepsilon C_1$ ), на которую накладываются гармонические колебания, описываемые вторым слагаемым формулы (15).

Первый член правой части равенства (15) удовлетворяет условию полосы

$$0 \leq \varepsilon \bar{X}(x_0)t \leq \bar{X}(x_0)L, \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

поэтому он является величиной порядка единицы. Остальные члены, имеющие периодический по времени характер, являются величинами порядка  $\varepsilon$  в силу их ограниченности. Итак,  $\varepsilon u^{(1)} = \varepsilon \bar{X}(x_0)t$ .

Точность аппроксимации  $x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t)$  функцией  $x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t)$  имеет порядок  $\varepsilon$  на асимптотически большем промежутке времени:

$$x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

где  $u^{(1)} = \bar{X}(x_0)t$

Вычисления показывают, что аналогичный вывод имеет место и во втором приближении по параметру :

$$x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + O(\varepsilon), \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

Здесь  $\varepsilon^2 u^{(2)}(t) = \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 \bar{X}(x_0) t^2$  является главным членом функции  $\varepsilon^2 x^{(2)}(t)$ .

Таким образом, можно предположить, что в каждом приближении по  $\varepsilon$   $k$ -ая частичная сумма ряда (13), т.е.

$$U_k = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \dots + \varepsilon^k u^{(k)}(t),$$

аппроксирует  $k$ -ую частичную сумму

$$S_k = x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \dots + \varepsilon^k x^{(k)}(t)$$

ряда (12) с точностью порядка на промежутке времени порядка  $1/\varepsilon$ :

$$S_k = U_k + O(\varepsilon), \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

Устремляя  $k$  к бесконечности и предполагая сходимость рядов  $\{U_k\}, \{S_k\}$  и  $u(t, \varepsilon)$  на промежутке времени  $t \sim 1/\varepsilon$  соответственно, т.е

$$x(t, \varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t, \varepsilon), \quad u(t, \varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, \varepsilon), \quad t \sim 1/\varepsilon,$$

можем сделать следующий вывод: ошибка приближения искомого решения  $x(t, \varepsilon)$  решением  $u(t, \varepsilon)$  усредненной системы (11) достигает величины порядка  $\varepsilon$  на интервале времени  $[0, L/\varepsilon]$ :

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

Итак, на основе приближенного анализа мы показали, что ряд

$$u(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \dots, \quad u_0 = x_0,$$

входящий в структуру ряда

$$x(t, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon x^{(1)}(t) + \varepsilon^2 x^{(2)}(t) + \dots, \quad x(0, \varepsilon) = x_0,$$

вносит основной вклад в решение  $x(t)$  строгих уравнений модели, так как члены  $\varepsilon^k u^{(k)}(t)$  являются главными членами ряда для  $x(t)$ , имеющими порядок малости  $O(1)$  на интервале времени порядка  $1/\varepsilon$ . Ряд для  $u(t)$  является рядом Тейлора по  $t$  для решения задачи Коши усредненных уравнений (11) и он приближает искомое решение  $x(t, \varepsilon), x(0, \varepsilon)$  с точностью порядка  $\varepsilon$ :

$$|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)| \sim \varepsilon, \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

### 30. Понятие временного среднего векторной функции $X(x, t)$ в случае произвольной зависимости функции от времени $t$ .

#### Основные свойства временных средних

Рассмотрим случай, когда правая часть уравнений в стандартной форме

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t), \quad x \in R^n \quad (1)$$

т.е.  $X(x, t)$ , зависит от явно входящего времени  $t$  произвольным образом. Хорошо, что представление  $X(x, t)$  рядом Фурье законно и в этом случае, но при условии, что  $t$  меняется в пределах от  $t_0$  до  $(t_0 + T)$ , где  $T$  - произвольное, сколь угодно большое, но конечное число (в отличие от предыдущих исследований,  $T$  не является периодом векторной функции  $X(x, t)$ ). Действительно, достаточно рассмотреть дополнительную периодическую функцию  $\chi(x, t + T) = \chi(x, t)$ , такую, что  $\chi(x, t)$  совпадает с  $X(x, t)$  на промежутке времени  $[t_0, t_0 + T]$ . Раскладывая её в ряд Фурье по  $t$  на бесконечном промежутке времени, получим также представление функции  $X(x, t)$  в виде ряда Фурье на конечном промежутке  $[t_0, t_0 + T]$ .

Итак, полагая  $\omega = 2\pi/T$ , имеем

$$X(x, t) = \bar{X}_*(x) + \sum_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq 0}}^{+\infty} X_*^{(k)}(x) e^{ik\omega t}, \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad (2)$$

где

$$\bar{X}_*(x) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, t) dt, \quad X_*^{(k)}(x) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in Z.$$

Здесь  $\bar{X}_*(x)$  есть среднее по времени от  $X(x, t)$  на интервале  $(t_0, t_0 + T)$ .

Для того, чтобы получить разложение векторной функции  $X(x, t)$  в ряд Фурье на бесконечном промежутке времени, необходимо устремить  $T$  к бесконечности. Тогда ряд (2) представляется в виде суммы двух выражений интеграла

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, t) dt, \quad (3)$$

который мы будем называть средним по времени от  $X(x, t)$ , и интеграла Фурье, представляющего собой предельное значение бесконечной суммы, входящей в правую часть равенства (2).

Усредненная система уравнений примет вид где  $\underline{X}(x)$  следует вычислять по формуле (3).

Не останавливаясь на вопросе существования среднего по времени, отметим только, что при выполнении некоторых условий эта величина существует.

### 31. Два свойства временного среднего векторной функции $X(x,t)$ , зависящей от времени $t$ произвольно.

**1. Независимость временного среднего от  $t_0$ .** Если среднее по времени  $\underline{X}(x)$  существует, то оно принимает одно и то же значение

$$\overline{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt, \quad (4)$$

независимо от параметра  $t_0$ .

Действительно, преобразуем интеграл, входящий в правую часть формулы (3):

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^0 X(x, t) dt + \left( \frac{t_0 + T}{T} \right) \frac{1}{t_0 + T} \int_0^{t_0+T} X(x, t) dt.$$

Устремляем  $T$  к бесконечности. Первый член правой части стремится к нулю, второй – к величине (4). Таким образом выражение (3) совпадает с (4) при любых значениях  $t_0$ .

**2. Временное среднее от периодических функций.** Если векторная функция  $X(x,t)$  является  $T$ -периодической по явно входящему времени  $t$ , то среднее по времени, определенное на основании формулы (4) (здесь следует заменить  $T$  на  $T_*$ , чтобы не было совпадения с обозначением периода), существует при этом

$$\lim_{T_* \rightarrow \infty} \frac{1}{T_*} \int_0^{T_*} X(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt. \quad (5)$$

Действительно, интеграл, входящий в правую часть равенства (5), удовлетворяет выражению

$$\int_0^T X(x, t) dt = \int_{kT}^{(k+1)T} X(x, t) dt, \quad (6)$$

поскольку линейная подстановка  $t' = t + kT$  сохраняет значение дифференциала  $dt$  и подынтегральной векторной функции в силу её  $T$ -периодичности. Теперь представим промежуток времени  $T_*$  в виде

$$T_* = kT + \Delta,$$

где  $k$  – целое положительное число, указывающее сколько раз период  $T$  укладывается в отрезке  $[0, T_*]$ ,  $\Delta$  – остаток разбиения, удовлетворяющий неравенству  $\Delta < T$ . Тогда, учитывая формулу

$$\int_0^{kT} X(x, t) dt = k \int_0^T X(x, t) dt,$$

являющуюся следствием формулы (6), имеем:

$$\frac{1}{T_*} \int_0^{T_*} X(x, t) dt = \frac{k}{kT + \Delta} \int_0^T X(x, t) dt + \frac{1}{kT + \Delta} \int_{kT}^{T_*} X(x, t) dt. \quad (7)$$

устремим параметр  $k$  в бесконечность, что соответствует стремлению  $T_*$  к бесконечности. Тогда это равенство примет вид формулы (5), поскольку совпадут, очевидно, их левые части так же, как

и правые (первый член правой части равенства (7) стремится к среднему, представленному правым интегралом (5), второй член – к нулю, поскольку промежуток интегрирования есть конечная величина  $\Delta$ ).

Итак, понятие среднего для непериодической функции  $X(x,t)$  позволяет упростить исходные уравнения (1), усредняя их по времени. В соответствии с принципом усреднения, мы должны заменить уравнения (1) системой уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{X}(x)$$

где  $\bar{X}(x)$  вычисляется по формуле (4).

Здесь возникает важный вопрос – какова точность приближения? Напомню, что в случае периодической зависимости  $X$  от времени, точность приближений...

Из записи лекции:

“С этими уравнениями впервые столкнулись в небесной механике.”

“Потрясающая точность приближений.”

Оценки точности приближения имеют асимптотический характер, т.е. они получены для случая  $\varepsilon \rightarrow 0$

Короче, там уходит всё в теорему Боголюбова, так что, думаю, что упомянуть поверхностно можно, но расписывать уже лишнее.

## 32. Понятие быстрого временного среднего, понятие медленного временного среднего

**Что такое D и откуда интеграл есть в следующем вопросе (см. 33).**

**Определение.** Следуя, В.М. Волосову, будем, говорить, что стремление интеграла

$$F(x, T) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau \quad (12)$$

при  $T \rightarrow \infty$  к предельному значению  $\underline{X}(x)$  является быстрым по времени и равномерным по  $x$ , если существуют константы  $T^*$  и  $\Lambda$ , не зависящие от  $x$ , такие, что при  $T \geq T^*$  и любом  $x \in D$  выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau - \bar{X}(x) \right\| \leq \frac{\Lambda}{T}. \quad (13)$$

Соотношение (13) означает, что при больших  $T$  имеет место равномерная по  $x$  оценка

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau + O\left(\frac{1}{T}\right). \quad (14)$$

**Определение.** Будем говорить, что временное среднее является медленным по времени и равномерным по  $x$ , если стремление среднего к своему предельному значению определяется равным по  $x$  равенством

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau + O\left(\frac{g(T)}{T}\right), \quad (15)$$

где  $g(T)$  – положительная скалярная функция, такая, что  $g(T) \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ , при этом

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{g(T)}{T} = 0.$$

Такое возможно, если  $g(T)$  имеет, к примеру, одно из следующих представлений:

$$g(T) = T^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1; \quad g(T) = \ln^k T; \quad g(T) = \frac{T}{\ln^k T}$$

(считаем  $T > 1$  для логарифмической функции).

Можно строго показать, что временное среднее бывает только двух типов: *быстрое среднее* либо *медленное среднее*. (см. Гипотеза Волосова)

### 33. Теорема Боголюбова: четыре условия теоремы, накладывающие ограничения на правые части дифференциальных уравнений в стандартной форме

Теорема Н.Н. Боголюбова устанавливает строгие граничицы применимости метода усреднения, позволяющая избежать неточностей приближенного анализа. Оценки точности приближения имеют асимптотический характер, т.е. они получены для случая  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Будем сравнивать между собой решения двух задач Коши с одинаковыми начальными данными. В первой задаче мы ищем решение исходных уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t), \quad (8)$$

удовлетворяющее условию  $x(0) = x_0$ . Во второй задаче - решение усредненных уравнений

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u), \quad (9)$$

удовлетворяющее тем же самым начальным условиям  $u(0) = x_0$ . Считаем, без ограничения общности, что начальный момент  $t_0$  равен нулю.

Пусть  $X(x, t)$  определена в некоторой открытой, связной области  $D'$  переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , когда  $t \in [0, +\infty)$ . Будем считать, что  $X(x, t)$  удовлетворяет в некоторой подобласти  $D \times [0, +\infty), D \subset D'$ , следующим условиям:

1. условию непрерывности по  $t$  при любых фиксированных  $x \in D$ ;
2. условию Липшица по  $x$  с независимой от  $x$  и  $t$  константой  $\lambda$ :

$$\|X(x^{(1)}, t) - X(x^{(2)}, t)\| \leq \lambda \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (10)$$

где  $\|x\| = \sqrt{\sum_k x_k^2}$ ;

3. условию равномерного ограничения в области  $D \times [0, +\infty)$ , т.е.

$$\|X(x, t)\| < M, \quad M = \text{const},$$

сразу для всех  $x \in D$  и  $t \geq 0$ ;

4. условию существования равномерного по  $u \in D$  предела

$$\bar{X}(u) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(u, t) dt.$$

Последнее соотношение называют условием существования равномерного среднего.

$$F(u, T) = \frac{1}{T} \int_0^T X(u, t) dt$$

Оно означает, что векторная функция

имеет в  $D$  предельную функцию  $\underline{X}(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(u, T)$ . Более того, для каждого  $\delta > 0$  существует такое, не зависящее от  $u$ , число  $N(\delta)$ , что при  $T > N(\delta)$  неравенство  $\|F(u, T) - \underline{X}(u)\| < \delta$  выполняется сразу для всех  $u$  из  $D$ .

Прежде чем формулировать теорему Боголюбова, остановимся на ограничениях 1-4, которые мы накладываем на правые части уравнений (8). Как легко видеть, мы предъявляем минимальные требования к аналитическим свойствам функции  $X(x, t)$ : не требуем ее аналитичности, т.е. представления этой векторной функции в виде сходящегося степенного ряда, не требуем даже существования и непрерывности ее частных производных. Достаточно одной лишь непрерывности по  $t$  и выполнения условия Липшица по  $x$  (гарантирующего, кстати, непрерывности  $X(x, t)$  по  $x$ ). Более того, эта векторная функция может быть кусочно-непрерывной, только необходимо потребовать выполнения некоторых дополнительных условий, не обременительных по сути (описание этих условий опускаем).

Если решение  $u(t)$  не является ограниченным в  $\mathbb{R}^n$ , когда  $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon})$ , то область  $D$  будет также неограниченной, поэтому непрерывность по  $x$  и  $t$  не гарантирует выполнения условия 3, и, как следствие, возможно неприемлемое расхождение в решениях  $u(t)$  и  $x(t)$  на асимптотически

больших интервалах времени.

Наиболее ограничительным условием является условие существования равномерного среднего. Можно показать, что оно заведомо выполняется, когда функция  $X(x, t)$  зависит от явно входящего времени периодически.

### 34. Теорема Боголюбова: формулировка теоремы, асимптотические оценки точности приближения метода усреднения

**Теорема Боголюбова.** Если для системы уравнений (8) выполнены условия 1-4, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, тогда для любых наперед заданных  $L > 0$  и  $\rho > 0$  таких, что если  $u = u(t)$  есть решение задачи Коши для усредненных уравнений

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u), \quad u(0) = x_0,$$

определенное в интервале  $0 \leq t < \infty$  и принадлежащее области  $D$  вместе с  $\rho$ -окрестностью, то при  $0 \leq t < \frac{L}{\varepsilon}$  ошибка приближения метода устремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\|x(t) - u(t)\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (11)$$

Здесь  $x(t)$  - решение уравнений (8),  $x(t) = x_0$

Таким образом, теорема Боголюбова гарантирует асимптотическую ошибку приближения и тем самым дает строгое обоснование метода усреднения.

Заметим, что в прикладных задачах правомерность асимптотических оценок сомнительна, так как параметр  $\varepsilon$  фиксирован и не может принимать сколь угодно малые значения. Поэтому требуется построение явных оценок метода усреднения. Построение явных оценок основано на новых свойствах временного среднего.

### 35. Явные оценки точности приближения в методе усреднения в случае быстрой сходимости временного среднего (первая часть гипотезы Волосова).

**Гипотеза Волосова.** Если для системы уравнений (8) выполнены условия 1-4 теоремы Боголюбова, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, при этом временное среднее сходится быстро, то точность приближения метода усреднения будет величиной порядка  $\varepsilon$  на промежутке  $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$ .

Если временное среднее сходится медленно, то оценка точности приближения на асимптотически большом промежутке времени задается формулой

$$\|x(t) - u(t)\| \sim \delta(\varepsilon) = O(\varepsilon g(1/\varepsilon)), \quad t \sim 1/\varepsilon,$$

$$g(1/\varepsilon) = \sup_{x \in D} \left\| \int_0^{1/\varepsilon} (X(x, \tau) - \bar{X}(x)) d\tau \right\|.$$

Гипотеза Волосова доказана при некоторых дополнительных ограничениях на правые части уравнений (8). Содержание гипотезы Волосова наглядно представлено в следующей таблице.

Быстрая сходимость среднего ( $\Lambda^* < \infty$ ): $\bar{X}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau + O\left(\frac{1}{T}\right)$	Медленная сходимость среднего ( $\Lambda^* = \infty$ ): $\bar{X}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \tau) d\tau + O\left(\frac{g(T)}{T}\right)$
Точность приближения $\Delta$ : $\Delta = O\left(\frac{1}{T}\right) \Big _{T=1/\varepsilon} = O(\varepsilon)$	Точность приближения $\Delta$ : $\Delta = O\left(\frac{g(T)}{T}\right) \Big _{T=1/\varepsilon} = O(\varepsilon g(1/\varepsilon))$

На скриншоте ниже показан этот метод в другом виде, как у него в книге, но в лекциях

**выглядит по другому (как в следующем вопросе)**

1. Предположим, что  $\Lambda^* < \infty$ . Упростим первые два члена функции  $G(u, t)$ :

$$\varepsilon X(z, t) - \varepsilon X(u, t) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_0 S(u, t) + O(\varepsilon^3). \quad (15.25)$$

Здесь при оценке остаточной суммы ряда была использована формула конечных приращений Лагранжа для каждой  $i$ -ой компоненты вектора  $X(x, t)$  в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon X_i(z, t) - \varepsilon X_i(u, t) - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial X_i}{\partial z} \right)_0 S(u, t) = \\ = \frac{\varepsilon}{2!} d^2 X_i(u + \varepsilon \theta S(u, t), t) \quad (dz_i = \varepsilon S_i, 0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

где  $d^2 X_i$  — квадратичная, биномиальная форма переменных  $dz_i$ ; использованы также условия равномерной ограниченности  $S(u, t)$  (как следствие неравенства  $\Lambda^* < \infty$ ) и вторых производных по  $z$  от функции  $X(z, t)$ . Тогда имеем

$$G(u, t) = \varepsilon^2 G^*(u, t) + O(\varepsilon^3),$$

где

$$G^*(u, t) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 S(u, t) - \frac{\partial S}{\partial u}(u, t) \bar{X}(u).$$

В силу условий теоремы функция  $G^*(u, t)$  равномерно ограничена сверху константой  $C = |c_1 \Lambda^* - c_2 c_1|$ , поэтому, отбрасывая члены третьего порядка малости, имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq L/\varepsilon} \left\| \int_0^t G(u(\tau), \tau) d\tau \right\| \leq \varepsilon C L.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \|x(t) - u(t)\| - \|\varepsilon S(u(t), t)\| \right| \leq \|x(t) - u(t) - \varepsilon S(u(t), t)\| \leq \varepsilon C L e^{\lambda L},$$

т. е.

$$\|x(t) - u(t)\| \leq \varepsilon (C L e^{\lambda L} + \Lambda^*).$$

### 36. Явные оценки точности приближения в методе усреднения в случае медленной сходимости временного среднего (вторая часть гипотезы Волосова).

(Гипотезу Волоса см. предыдущий вопрос)

Возможные оценки точности приближения в случае медленной сходимости временного среднего могут иметь следующий вид:

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \sim \varepsilon^{(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1; \quad \|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \sim \varepsilon \ln^k(1/\varepsilon);$$

$$\|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \sim \frac{1}{|\ln^k \varepsilon|}; \quad \|x(t, \varepsilon) - u(t, \varepsilon)\| \sim \varepsilon \int_2^{\varepsilon^{-1}} \frac{1}{\ln^k \tau} d\tau, \quad k > 0$$

**37. Второе приближение в методе усреднения: описание замены переменных, вид усредненных уравнений второго приближения, точность приближения метода усреднения во втором приближении**

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u) \quad (12.1)$$

Опишем процедуру построения такого ряда для уравнений в стандартной форме Боголюбова

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t), \quad (12.2)$$

при условии Т-периодичности правой части по  $t$  и, как следствие, представимости ее рядом Фурье на бесконечном отрезке времени:

$$X(x, t) = \bar{X}(x) + \tilde{X}(x, t).$$

Здесь  $\bar{X}(x)$  — среднее по времени от векторной функции  $X(x, t)$ ,  $\tilde{X}(x, t)$  — бесконечная сумма гармоник:

$$\tilde{X}(x, t) = \sum_{k \neq 0} X^{(k)}(x) e^{ik\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T. \quad (12.3)$$

Переход к усредненной системе (12.1) соответствует отбрасыванию члена  $\varepsilon \tilde{X}$ , что и приводит, как было показано выше, к ошибке приближения  $\sim \varepsilon$ . Для того, чтобы повысить точность аппроксимации  $x(t)$  решением  $u(t)$  усредненной системы уравнений достаточно, используя замену переменных  $x \rightarrow y$ , привести уравнения (12.2) к виду

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{X}(y) + \varepsilon^2 \tilde{Y}(y, t), \quad (12.4)$$

где  $\tilde{Y}(y, t)$  — периодическая функция с нулевым средним. Отбрасывая величину  $\varepsilon^2 \tilde{Y}$  и переходя к усредненным уравнениям (12.1), получим ошибку приближения порядка  $\varepsilon^2$ .

К сожалению, невозможно привести уравнения (12.2) к виду (12.4), так как такое приведение означало бы, что решение усредненных уравнений (12.1) может приблизить решение  $x(t)$  исходных уравнений с точностью порядка  $\varepsilon^2$ , используя повторную замену переменных — приблизить с точностью порядка  $\varepsilon^3$  и так далее. Следовательно, мы будем иметь аппроксимацию любой степени точности, что невозможно.

Рассмотрим замену переменных, близкую к тождественной:

$$x = y + \varepsilon S^{(1)}(y, t), \quad (12.5)$$

где  $S^{(1)}(y, t)$  — неизвестная векторная функция, подлежащая определению. Потребуем, чтобы искомая функция  $S^{(1)}(y, t)$  удовлетворяла условию Т-периодичности по явно входящему времени  $t$ . Дифференцируем равенство (12.5) по времени, учитывая, что  $x'$  вычисляется по формуле (12.2):

$$\dot{x} = \varepsilon \bar{X}(y + \varepsilon S^{(1)}) + \varepsilon \tilde{X}(y + \varepsilon S^{(1)}, t) = \dot{y} + \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \dot{y}.$$

Это уравнение имеет векторно-матричный вид. Из него следует, что

$$\begin{aligned} \left( E + \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \right) \dot{y} = & -\varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \bar{X}(y) + \varepsilon \tilde{X}(y, t) + \\ & + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (12.6)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Умножим уравнение (12.6) слева на матрицу

$$\left( E + \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \right)^{-1} = E - \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} + \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \left[ E - \varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} + \dots \right] \cdot \\ & \cdot \left[ -\varepsilon \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \bar{X}(y) + \varepsilon \tilde{X}(y, t) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial (\bar{X} + \tilde{X})}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Индекс 0 означает, что производная вычисляется при  $\varepsilon = 0$ , т.е. с условием подстановки  $y$  вместо  $x$ . Представим правую часть этого равенства в виде ряда по  $\varepsilon$ :

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{X}(y) + \varepsilon \left( \tilde{X} - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 Q(y, t) + \dots,$$

где

$$Q = \left( \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \left( \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} - \tilde{X} \right) - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \bar{X}(y).$$

Для того, чтобы это уравнение приняло вид, подобный (12.4), необходимо потребовать выполнения условия

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} - \tilde{X} = 0.$$

Интегрируем это равенство по явно входящему  $t$ , получим следующее выражение для функции  $S^{(1)}$ :

$$S^{(1)}(y, t) = \int_0^t \tilde{X}(y, t) dt + \Lambda(y), \quad (12.7)$$

где  $\Lambda(y)$  — произвольная функция  $y$ , называемая начальной функцией. В теоретическом отношении выбор функции  $\Lambda(y)$  не существует, однако на практике эту функцию стараются выбирать однозначно, исходя из соображений удобства. Чтобы определиться с выбором  $\Lambda(y)$ , получим выражение для  $S^{(1)}(y, t)$ , вычисляя интеграл правой части равенства (12.7):

$$S^{(1)}(y, t) = \sum_{k \neq 0} \frac{(e^{ik\omega t} - 1)}{ik\omega} X^{(k)}(y) + \Lambda(y).$$

Отсюда сразу следует, что если положить

$$\Lambda(y) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik\omega} X^{(k)}(y),$$

то векторная функция  $S^{(1)}(y, t)$  будет иметь нулевое среднее, поскольку она будет состоять только из осцилляционных членов:

$$S^{(1)}(y, t) = \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ik\omega t}}{ik\omega} X^{(k)}(y). \quad (12.8)$$

Итак, если  $S^{(1)}(y, t)$  вычисляется по формуле (12.8), то уравнение относительно  $y$  имеет следующий вид:

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{X}(y) + \varepsilon^2 Q(y, t) + \dots, \quad (12.9)$$

где

$$Q(y, t) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \bar{X}(y).$$

Раскладывая  $Q$  в ряд Фурье, получим

$$Q(y, t) = \bar{Q}(y) + \tilde{Q}(y, t).$$

Здесь  $\underline{Q}$  есть среднее по времени от  $Q$ , а  $\tilde{Q}(y, t)$  — периодическая функция времени с нулевым средним. Учитывая, что среднее по времени от  $\frac{\partial S^{(1)}}{\partial y}$  совпадает со средним по времени от  $S^{(1)}$  и, следовательно, равно нулю, получим

$$\bar{Q} = \overline{\left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 S^{(1)} - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} \bar{X}(y)} = \overline{\left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 S^{(1)}}.$$

Применяя к (12.9) процедуру усреднения, удерживающую первые два члена правой части, получим **усредненные уравнения второго приближения**:

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u) + \varepsilon^2 \bar{Q}(u). \quad (12.10)$$

Пусть  $u(t)$  — решение уравнений (12.10), удовлетворяющее начальному условию  $u(0) = x_0$ . Подставляя  $u(t)$  в формулу (12.5), получим приближенное решение

$$v(t) = u(t) + \varepsilon S^{(1)}(u(t), t) \quad (12.11)$$

исходных уравнений с оценкой вида

$$\|x(t) - v(t)\| \leq D\varepsilon^2, \quad x(0) = v(0), \quad t \in [0, L/\varepsilon].$$

Функцию времени, вычисляемую по формуле (12.11), называют **решением второго приближения метода усреднения**.

## 38. Ряды Крылова –Боголюбова

На  $m$ -ом шаге замены переменных получим

$$x = y + \varepsilon S^{(1)}(y, t) + \varepsilon^2 S^{(2)}(y, t) + \cdots + \varepsilon^m S^{(m)}(y, t), \quad (12.12)$$

$$\dot{y} = \varepsilon Y^{(1)}(y) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(y) + \cdots + \varepsilon^m Y^{(m)}(y) + \varepsilon^{m+1} a^{(m)}(y, t, \varepsilon). \quad (12.13)$$

Характерная особенность уравнений (12.13): время  $t$  исключено из первых  $m$  членов.

Уравнения (12.13), в которых отброшены члены порядка  $\varepsilon^{m+1}$ , называют *усредненными уравнениями  $m$ -го приближения*. Они имеют вид

$$\dot{u} = \varepsilon Y^{(1)}(u) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(u) + \cdots + \varepsilon^m Y^{(m)}(u). \quad (12.14)$$

Решение  $u(t)$  уравнений (12.14) после подстановки его в (12.12) определяет решение

$$v(t) = u(t) + \varepsilon S^{(1)}(u(t), t) + \cdots + \varepsilon^m S^{(m)}(u(t), t)$$

исходных уравнений (12.2) с оценкой вида

$$\|x(t) - v(t)\| \leq D\varepsilon^m, \quad t \in [0, L/\varepsilon], \quad (12.15)$$

при этом  $v(t)$  удовлетворяет исходным уравнениям с точностью порядка  $\varepsilon^{m+1}$ .

В приложениях используют главным образом первое, иногда второе приближение. Высшие приближения применяются крайне редко ввиду сложности их вычисления. Дело в том, что ряд (12.12) расходится, когда  $m$  стремится к бесконечности. Поэтому, как только  $m$  достигает некоторой величины  $m_0$ , добавление новых членов ряда увеличивает ошибку приближения. Уменьшение  $\varepsilon$  ведет к увеличению  $m_0$ , поэтому для каждого  $\varepsilon$  существует оптимальное значение  $m_0$ , при котором ошибка приближения будет наименьшей, равной  $D\varepsilon^{m_0}$ .

Рассмотрим предельную ситуацию, когда  $m \rightarrow \infty$ . Замена переменных  $x \rightarrow y$  будет представлена рядом

$$x = y + \varepsilon S^{(1)}(y, t) + \varepsilon^2 S^{(2)}(y, t) + \dots, \quad (12.16)$$

приводящим уравнения (12.2) к автономному виду

$$\dot{y} = \varepsilon Y^{(1)}(y) + \varepsilon^2 Y^{(2)}(y) + \dots \quad (12.17)$$

Ряды (12.16), (12.17) называют рядами Крылова–Боголюбова. Считаем  $t$  быстрой переменной задачи. Тогда мы утверждаем, что исключение быстрой переменной  $t$  из уравнений (12.17) для медленных переменных  $y$  является формальной целью метода усреднения, представляющим решение  $x(t)$  в виде эволюционной составляющей, на которую накладываются быстрые осцилляции.

Действительно, характерная особенность уравнений (12.16), (12.17) состоит в том, что решение  $y(t)$  автономных уравнений (12.17) представляет собой вековую (эволюционную) составляющую решения  $x(t)$ . Из формулы (12.16) следует, что на эту составляющую, задающую медленный дрейф, накладываются малые быстрые осцилляции, определяемые ограниченными векторными функциями  $\varepsilon^k S^{(k)}(y(t), t)$  (ограниченность по явно входящему  $t$  обусловлена периодичностью  $S^{(k)}$  по  $t$ , ограниченность по  $y(t)$  есть следствие непрерывности  $S^{(k)}(y, t)$  по  $y$  и ограниченности решения  $y(t)$  на асимптотически большом промежутке времени).

Очевидно, что приведение неавтономных уравнений к автономному случаю может быть получено и без использования идей усреднения. Однако лишь благодаря усреднению коэффициенты  $S^{(k)}$  ряда (12.16) оказываются ограниченными функциями.

## 39. Комплексная форма записи кратных рядов Фурье

Прежде чем переходить к определению некоторых важных понятий, приведем краткие сведения из теории кратных рядов Фурье.

Пусть  $f(x)$  – периодическая функция периода  $T$ . Известно, что при определенных условиях она может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x), \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\xi) \cos k\omega \xi d\xi, b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(\xi) \sin k\omega \xi d\xi$$

Во многих случаях удобнее пользоваться рядом Фурье в комплексной форме:=

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x}, \quad (10)$$

где  $k$  --- целые числа,

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) e^{-ik\omega \xi} d\xi.$$

Постоянные коэффициенты  $k$  являются комплексными величинами, так как на основе формулы Эйлера  $\exp(-ik\omega \xi) = \cos k\omega \xi - i \sin k\omega \xi$  имеем

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) \cos k\omega \xi d\xi - i \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) \sin k\omega \xi d\xi = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

при этом

$$\gamma_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) \cos(-k\omega \xi) d\xi - i \frac{1}{T} \int_0^T f(\xi) \sin(-k\omega \xi) d\xi = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Отсюда следует, что сумма ряда (10) вещественна и, более того, она равна  $f(x)$ .

Действительно, как показывают вычисления,  $= \cos \sin , ik x ik x$

$$\gamma_k e^{ik\omega x} + \gamma_{-k} e^{-ik\omega x} = a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x,$$

поэтому ряд (10) представим в виде 0

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x} = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k e^{ik\omega x} + \gamma_{-k} e^{-ik\omega x}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

Но это значит, что

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\omega x}.$$

Для многих прикладных задач функция  $f(x)$  обладает частными производными сколь угодно высокого порядка. В этом случае, как известно, ряд (10) сходится абсолютно и равномерно по  $x$ . Более того, ряд, получающийся из (10) путем почлененного дифференцирования или интегрирования, также сходится абсолютно и равномерно.

Получим комплексное представление ряда Фурье для функции  $f(x,y)$ , периодической по  $x$  и  $y$  с периодом  $T$ . Рассматривая ее как функцию переменной  $y$ , имеем

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) e^{in\omega y}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (11)$$

где

$$c_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x,y) e^{-in\omega y} dy.$$

Очевидно, что периодическая функция  $c_n(x)$  также может быть разложена в ряд Фурье

$$c_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{nm} e^{im\omega x},$$

где

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{T} \int_0^T c_n(x) e^{-im\omega x} dx = \frac{1}{T^2} \iint_0^T f(x,y) e^{-i(m\omega x + n\omega y)} dx dy.$$

Подставив выражение для  $c_n(x)$  в формулу (11), имеем кратный ряд Фурье:

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{nm} e^{i(ny+mx)\omega}.$$

В более общем случае функции многих переменных  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , зависящей периодически относительно каждого из аргументов  $x_i$  с периодом  $T$ , получим

$$f(\mathbf{x}) = \gamma_0 + \sum_{\|\mathbf{k}\|=1}^{\infty} \gamma_k e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\omega},$$

где  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  --- вектор целочисленных индексов суммирования,  $\|\mathbf{k}\| = |k_1| + \dots + |k_n|$  --- норма вектора  $\mathbf{k}$ ,  $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$  --- скалярное произведение векторов. Коэффициенты этого ряда представляют собой кратные интегралы вида

$$\gamma_k = \frac{1}{T^n} \int_0^T \dots \int_0^T f(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\omega} dx_1 \dots dx_n.$$

Приведенная комплексная форма кратного ряда Фурье эквивалентна вещественному разложению функции  $f(\mathbf{x})$  в ряд Фурье по синусам и косинусам, но, в отличие от него, имеет компактный вид и поэтому весьма удобна для расчетов и теоретических построений.

Для векторной функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  имеем аналогичное представление ряда Фурье, подразумевая под  $\gamma_k$  векторные константы.

#### 40. Многочастотные системы: представление квазилинейного уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

#### в переменных Ван-дер-Поля, общий вид записи уравнений многочастотных систем, быстрые и медленные переменные.

Здесь  $x$  - скалярная величина. Полагая  $\varepsilon = 0$ , получим уравнение гармонических колебаний, описывающее невозмущенное движение тела:

$$x = \alpha \cos \beta, \quad \dot{x} = -\alpha \omega \sin \beta, \quad \beta = \omega(t + t_0) \quad (1)$$

$\alpha$  - амплитуда колебаний,  $\beta$  - фаза колебаний.

В возмущенном движении, когда  $\varepsilon$  (точность приближения, очень малая величина)  $\neq 0$ , исследуемый процесс отличен от гармонических колебаний, тогда  $\alpha, \beta$  мы рассматриваем как функции времени.

Рассмотрим замену переменных  $(x, \dot{x}) \mapsto (\alpha, \beta)$ . Новые координаты  $\alpha, \beta$  называют переменным Ван-дер-Поля.

Составим дифференциальные уравнения, которые удовлетворяют функциям  $\alpha(t), \beta(t)$  (дифференцируем по времени (1)):

$$\dot{\alpha} \cos \beta - \alpha \dot{\beta} \sin \beta + \alpha \omega \sin \beta = 0. \quad (2)$$

$$-\dot{\alpha} \omega \sin \beta - \omega \alpha \dot{\beta} \cos \beta + \omega^2 \alpha \cos \beta = \varepsilon f(\alpha \cos \beta, -\alpha \omega \sin \beta). \quad (3)$$

Разрешая (2),(3) относительно  $\dot{\alpha}$  и  $\dot{\beta}$ , получим представление квазилинейного уравнения в переменных Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\alpha \cos \beta, -\alpha \omega \sin \beta) \sin \beta, \\ \dot{\beta} = \omega - \frac{\varepsilon}{\alpha \omega} f(\alpha \cos \beta, -\alpha \omega \sin \beta) \cos \beta \end{cases} \quad (4)$$

$\alpha$  - величина порядка  $\varepsilon \Rightarrow$  скорость изменения  $\alpha$  мала  $\Rightarrow$  медленная переменная.

$\beta$  - быстрая переменная, так как её скорость - величина порядка  $\omega$ ,  $\omega \sim 1$

Величина  $\omega$  - частота невозмущенного движения.

Систему (4) принято называть одночастотной.

Стандартную по Боголюбову систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (5)$$

можно также рассматривать как одночастотную. Действительно, будем считать время  $t$  новой переменной  $y$ , т.е.  $y = t$ . Тогда уравнения (5) примут следующий вид, при условии, что  $\omega=1$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, y), \\ \dot{y} = \omega, \end{cases} \quad (6)$$

*Многочастотная система общего вида* (обобщение (4) и (6)):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$\mathbf{x}$  - медленная переменная,  $n$ -мерный вектор,  $\mathbf{y}$  - быстрая переменная,  $m$ -мерный вектор.

$\boldsymbol{\Omega}$  - вектор частот невозмущенного движения, зависящий от фазовых координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , а также от времени  $t$ .  $\boldsymbol{\Omega}$  имеет размерность  $m$ :

$$\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \dots, \Omega_m)^\top$$

#### 41. Многочастотные системы: принцип усреднения для многочастотной системы, оценка точности приближения по быстрым и медленным переменным.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + 2\pi) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + 2\pi) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{cases}$$

Из уравнений по  $\mathbf{x}$  следует, что величина  $\mathbf{x}$  меняется медленно, так как ее производная имеет порядок  $\varepsilon$ , в то время как векторная фаза  $\mathbf{y}$  изменяется сравнительно быстро, поскольку  $\dot{\mathbf{y}} \sim 1$ . Следовательно, за  $n$  колебаний, когда  $\mathbf{y}$  увеличивается на  $2\pi n$  единиц, величина  $\mathbf{x}$  изменяется мало, векторные функции  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  получат незначительные приращения, обусловленные изменением одной лишь переменной  $x$ . Это значит, что раскладывая эти функции в ряд Фурье по  $y$ , учитывая, что  $\omega = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{X}^*(\mathbf{x}) + \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{+\infty} \mathbf{X}^{(k)}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} \\ \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{Y}^*(\mathbf{x}) + \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{+\infty} \mathbf{Y}^{(k)}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})} \end{aligned}$$

Удерживаем первые члены разложения, которые зависят только от  $x$ , и находим их по формулам по формулам

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{X}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_m, \\ \mathbf{Y}^*(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_m. \end{aligned}}$$

Функции  $\mathbf{X}^*(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{Y}^*(\mathbf{x})$  называют *пространственным средним*.

## 42. Многочастотные системы: уравнения многочастотных систем, пространственное и временное средние.

Принцип усреднения в многочастотной системе:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + 2\pi) = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + 2\pi) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x} \in R^n$  -- n - мерный вектор,  $\mathbf{y} \in R^m$  -- m - мерный вектор,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = (\omega_1, \dots, \omega_m)^T$  -- вектор частот,  $\varepsilon \ll 1$  -- малый параметр, модуль  $|\boldsymbol{\omega}| \sim 1$ . Поэтому  $\mathbf{x}$  называют вектором медленных переменных,  $\mathbf{y}$  -- вектором быстрых переменных.

Существует два принципа усреднения.

*Принцип усреднения 1:* Для приближенного описания медленных переменных  $x$  на временах порядка  $1/\varepsilon$  система (1) заменяется усредненными уравнениями

$$\dot{\mathbf{u}} = \varepsilon \mathbf{X}^*(\mathbf{u}),$$

где

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{X}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_m$$

есть пространственное среднее.

*Принцип усреднения 2:* Для приближенного описания медленных переменных  $x$  на временах порядка  $1/\varepsilon$  система (1) заменяется усредненными уравнениями

$$\dot{\mathbf{u}} = \varepsilon \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}),$$

где

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}(t)) dt$$

есть временное среднее.

Здесь  $\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0)t$  -- быстрая переменная  $\mathbf{y}$  в невозмущенном движении ( $\varepsilon = 0$ ), описываемая уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = 0, \quad \dot{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$$

## 43. Теорема о среднем.

**Определение 1 Соизмеримость**

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_m \omega_m = 0, \quad k_1^2 + \dots + k_m^2 \neq 0,$$

между частотами  $\omega_1, \dots, \omega_m$  при условии, что  $k_j$  --- целые числа, называют резонансом.

**Теорема о среднем.** Временное среднее  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  всюду существует и совпадает с пространственным средним  $\mathbf{X}^*(\mathbf{x})$ , если  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  дифференцируема по  $\mathbf{y}$ ,  $2\pi$ -периодична по каждой компоненте  $y_j$ , а частоты  $\omega_j$  независимы, т.е.  $k_1 \omega_1 + \dots + k_m \omega_m \neq 0$  при любых  $k_j \in \mathbb{Z}$ ,  $k_1^2 + \dots + k_m^2 \neq 0$ .

Доказательство:

По условию теоремы векторная функция  $X(x,y)$  раскладывается в сходящийся ряд Фурье:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{\|\mathbf{k}\|=1}^{\infty} \mathbf{X}^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y})}$$

Здесь  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$  есть  $m$ -мерный индекс,  $(\mathbf{k}, \mathbf{y}) = k_1 y_1 + \dots + k_m y_m$  --- скалярное произведение векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{y}$ , норму вектора  $k$  определим как  $\|\mathbf{k}\| = |k_1| + \dots + |k_m|$ .

Покажем, что как пространственное, так и временное усреднение подавляет гармоники этого ряда, сохраняя лишь первый его член, т.е.

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Действительно, в силу определения пространственного среднего, имеем  $\mathbf{X}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x})$ . Вычислим временное среднее:

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{\|\mathbf{k}\|=1}^{\infty} \mathbf{X}^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}) \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y}_0 + \omega t)} dt \right].$$

Легко видеть, что

$$\int_0^T e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y}_0 + \omega t)} dt = e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y}_0)} \frac{e^{i(\mathbf{k}, \omega)T} - 1}{i(\mathbf{k}, \omega)},$$

когда  $(\mathbf{k}, \omega) \neq 0$ . При этом

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{y}_0)} \frac{e^{i(\mathbf{k}, \omega)T} - 1}{i(\mathbf{k}, \omega)} = 0,$$

поэтому

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^{(0)}(\mathbf{x}),$$

что и требовалось доказать.

Следствие: В нерезонансном случае, когда

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_m \omega_m \neq 0$$

при любых целых  $k_j$ , отличных от нуля, временное среднее  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  не зависит от начальных данных  $y_0$ , поэтому временное среднее определено корректно.

#### 44. Базовые модели пульсовой активности в биосистеме: описание предельного цикла колебаний в стенках артериального сосуда с помощью нелинейных уравнений Ван-дер-Поля, Релея.

Исследуем динамику сердечно-сосудистой системы с помощью базовых моделей, поведение которых будем описывать на основе метода усреднения.

Известно, что организм человека имеет очень много степеней свободы. В процессе естественной эволюции выделяются несколько главных степеней свободы. Остальные степени свободы имеют подчиненный характер и мало влияют на динамику системы. *Возможность использования моделей Ван-дер-Поля и Релея обусловлена спецификой биосистемы: она функционирует в режиме устойчивых автоколебаний*, т.е. изолированных устойчивых периодических колебаний в

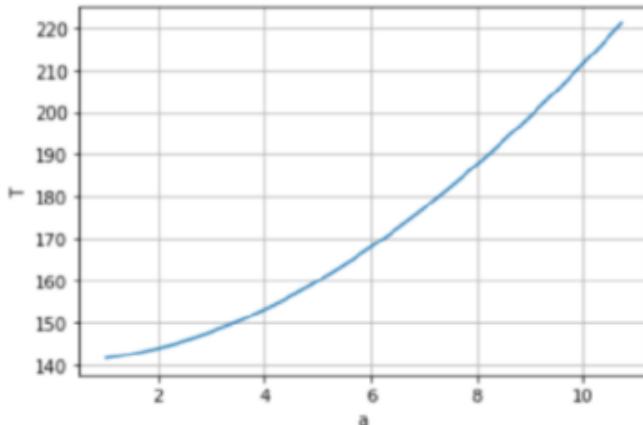
фазовой плоскости переменных  $x, \dot{x}$ , где  $x$  - перемещение стенок артерии,  $\dot{x}$  - скорость перемещения.

Для моделирования этих процессов, выберем, в качестве модельного уравнения, дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка, решения которого содержат предельные циклы:

$$\ddot{x} + F(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где  $\ddot{x}$  -- ускорение стенки артерии,  $\dot{x}$  -- скорость стенки артерии,  $x$  -- перемещение стенки артерии,  $\omega$  -- частота основного гармонического колебания (собственная частота системы),  $F(x)$  -- коэффициент затухания колебаний осциллятора.

Можно использовать уравнения Ван-дер-Поля. Однако в этом случае будем иметь автоколебания, период которых не зависит от начальной амплитуды а ( $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ ) колебаний. В большинстве нелинейных физических систем такая зависимость существует, при этом период колебаний падает с уменьшением начальной амплитуды а:



Чтобы учесть зависимость  $T=T(a)$ , следует уравнение Ван-дер-Поля дополнить членами из уравнения Релея:

$$\ddot{x} + [\varepsilon_1(x^2 - r^2) + \varepsilon_2(\dot{x}^2 - \omega_0^2 r^2)]\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Полученное уравнение не учитывает явно влияние сердца. Однако сердце оказывает воздействие на стенки сосуда давлением тока крови. Поэтому будем моделировать воздействие сердца на сосуды давлением токи крови, которое в первом приближении имеет вид  $P\cos(2\Omega t)$ . Окончательно, модель уравнения примет вид:

$$\ddot{x} + [\varepsilon_1(x^2 - r^2) + \varepsilon_2(\dot{x}^2 - \omega_0^2 r^2)]\dot{x} + \omega^2 x = P\cos(2\Omega t)$$

#### Примечание:

Уравнение Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(r^2 - x^2)\dot{x}, \varepsilon \ll 1, r = \text{const}$$

Уравнение Релея:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\omega_0^2 r^2 - \dot{x}^2)\dot{x}, \varepsilon \ll 1, r, \omega_0 = \text{const}$$

С их помощью описывают установившиеся автоколебания в нелинейных системах.

## 45. Понятие резонанса в многочастотных системах, резонанс на постоянных и переменных частотах.

В этой лекции мы познакомимся с явлением резонанса в многочастотных системах вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y), & X(x, y + 2\pi) = X(x, y), \\ \dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y), & Y(x, y + 2\pi) = Y(x, y). \end{cases} \quad (15.1)$$

Здесь  $x$  n-мерный вектор медленных переменных,  $y$  m-мерный вектор быстрых переменных задачи.

Ранее мы показали, что если в системе отсутствует резонанс между частотами  $\omega_j$ , то исследование многочастотных систем можно свести к изучению усредненных уравнений первого

приближения, если ограничиться точностью приближения порядка  $\varepsilon$  на асимптотически большом промежутке времени  $[0, L/\varepsilon]$ . Было также показано, что усреднение правых частей исследуемых уравнений можно проводить по времени:

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, \varphi(t)) dt, \quad (15.2)$$

считая медленные переменные  $x$  параметрами, а быстрые линейными функциями времени  $\varphi(t) = \omega t + y_0$  в силу невозмущенных уравнений; и по быстрым переменным  $y_j$ , вычисляя кратные интегралы от правых частей на периоде изменения переменных  $y_j$ :

$$X^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} X(x, y) dy_1 \dots dy_m.$$

Эти две процедуры усреднения дают один и тот же результат, если частоты  $\omega_j$  линейно независимы над полем рациональных чисел.

Рассмотрим резонансный случай, когда частоты  $\omega_j$  вступают в резонансные отношения вида

$$\lambda_1 \omega_1(x) + \dots + \lambda_m \omega_m(x) = 0, \quad (15.3)$$

где  $m$  размерность вектора  $y$  (другими словами,  $m$  – число частот),  $\lambda_j$  – целые числа.

Если частоты  $\omega_j$  являются постоянными величинами, следовательно, не зависят от вектора  $x$ , то наличие или отсутствие резонанса никак не связано с решениями исследуемой системы дифференциальных уравнений (15.1). Резонанс либо есть, и он проявляет себя во все время движения, либо его нет, и поведение системы является нерезонансным для любого момента времени.

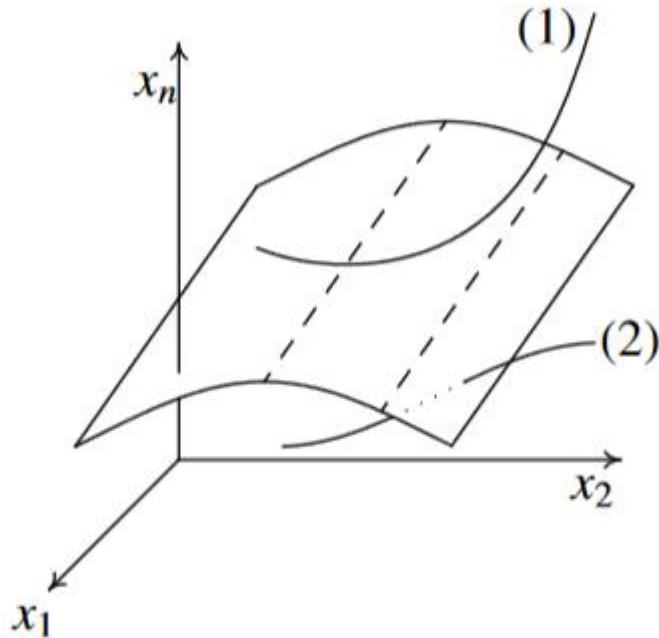


Рис. 15.1. Резонансная поверхность

Если частоты зависят от вектора  $x$ , ситуация качественно меняется: резонанс (15.1) проявляется лишь в те моменты времени, когда переменные  $x_j$  находятся вблизи резонансной поверхности (15.1), представляющей собой гиперповерхность размерности ( $n - 1$ ) в  $n$ -мерном пространстве медленных переменных  $x_j$ . На рис. 15.1 изображена резонансная поверхность (15.1) и две траектории системы. Одна из них, обозначенная (1), подходит близко к поверхности, и в течение некоторого конечного промежутка времени находится в окрестности резонанса. Такое поведение системы называют *захватом* в

*резонанс.* Вторая траектория, обозначенная (2), пронизывает эту поверхность в текущий момент времени, удаляясь от нее в последующие моменты. Очевидно, что в этом случае резонанс проявляет себя кратковременно, в виде некоторого “импульсного воздействия”.

#### 46. Поведение временного среднего при резонансе: разрыв первого рода, зависимость временного среднего от начальных условий

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y), \\ \dot{y} = \omega(x) + \varepsilon Y(x, y), \end{cases} \quad \begin{aligned} X(x, y + 2\pi) &= X(x, y), \\ Y(x, y + 2\pi) &= Y(x, y). \end{aligned} \quad (15.1)$$

Здесь  $x$  —  $n$ -мерный вектор медленных переменных,  $y$  —  $m$ -мерный вектор быстрых переменных задачи.

При резонансе поведение решений системы (15.1) сильно осложняется, что отражается на свойствах временного среднего  $\underline{X}(x)$ :

- (i) временное среднее отлично от пространственного среднего;
- (ii) временное среднее терпит разрыв, и, как следствие, сходимость среднего к предельному значению  $\underline{X}(x)$  неравномерна по  $x$ ;
- (iii) временное среднее зависит от начальных данных

Действительно, рассмотрим, для примера, следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, y_1 y_2), \quad \dot{y}_1 = \omega_1, \quad \dot{y}_2 = \omega_2,$$

где

$$X(x, y_1, y_2) = A(x) e^{i(y_1 + 3y_2)}, \quad \omega_j = \text{const}$$

Будем считать, что имеет место резонанс  $\omega_1 + 3\omega_2 = 0$ . Тогда пространственное среднее равно нулю:

$$X^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A(x) e^{i(y_1 + 3y_2)} dy_1 dy_2 = 0.$$

Однако временное среднее отлично от нуля, так как экспонента  $\exp(i(y_1 + 3y_2))$  принимает постоянное значение  $\exp(i(y_{10} + 3y_{20}))$  вдоль быстрых движений  $y_1 = y_{10} + \omega_1 t, y_2 = y_{20} + \omega_2 t$  невозмущенной задачи. Поэтому

$$\bar{X}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, y_{10} + \omega_1 t, y_{20} + \omega_2 t) dt = A(x) e^{i(y_{10} + 3y_{20})} \neq 0$$

Из этого примера следует также, что среднее по времени зависит от вектора начальных данных  $y_0 = (y_{10}, y_{20})$ . В то же время в отсутствие резонанса  $\underline{X}(x) = 0$ .

Покажем, что резонанс (15.3) (см. прошлый вопрос) ведет к разрыву временного среднего. Для этого разложим векторную функцию  $X(x, \varphi(t))$ ,  $\varphi = \omega t + y_0$ , представляющую собой подынтегральное выражение при вычислении временного среднего, в виде ряда Фурье

$$X(x, \varphi(t)) = X^{(0)}(x) + \sum_{\|k\|=1}^{\infty} X^{(k)}(x) e^{i(k, y_0)} e^{i(k, \omega(x))t}.$$

Здесь

$$X^{(k)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(x, y) e^{-(k, y)} dy_1 \dots dy_m.$$

Проводя почлененное интегрирование этого ряда, получим

$$\bar{X}(x, y_0) = X^{(0)}(x) + \sum_{\|k\|=1}^{\infty} X^{(k)}(x) e^{i(k, y_0)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k, \omega(x))t} dt.$$

Несложно видеть, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k, \omega)x} dt = \frac{e^{i(k, \omega)T} - 1}{iT(k, \omega(x))}, \quad (15.4)$$

поэтому предел этого выражения равен нулю при  $T \rightarrow \infty$ , если в системе отсутствует резонанс. Однако в том случае, когда частоты  $\omega_j$  удовлетворяют соотношению (15.3), равенство (15.4) теряет смысл при  $k = \lambda$  и  $k = -\lambda$ , так как числитель и знаменатель правой части одновременно обращаются в ноль. Мы можем устранить неопределенность, если воспользуемся правилом Лопиталля:

$$\frac{1}{T} \lim_{(k, \omega(x)) \rightarrow 0} \frac{e^{i(k, \omega)T} - 1}{i(k, \omega(x))} = \frac{1}{T} \lim_{(k, \omega(x)) \rightarrow 0} \frac{iTe^{i(k, \omega)T} - 1}{i} = 1.$$

Отсюда следует, что временное среднее меняется скачкообразно и принимает вид

$$\bar{X}(x, y_0) = X^{(0)}(x) + X^{(\lambda)}(x) e^{i(\lambda, y_0)} + X^{(-\lambda)}(x) e^{-i(\lambda, y_0)}$$

Причина разрыва среднего состоит в том, что резонансные гармоники

$$X^{(\lambda)}(x) e^{i(\lambda, \varphi)}, \quad X^{(-\lambda)}(x) e^{-i(\lambda, \varphi)}$$

не зависят от времени, так как  $(\lambda, \varphi) = (\lambda, y_0)$ , поэтому усреднение сохраняет их в неизменном виде.

Итак, среднее значение от векторной функции  $X(x, \varphi)$  имеет вид

$$\bar{X}(x, y_0) = \begin{cases} X^{(0)}(x) + 2 \operatorname{Re} [X^{(\lambda)}(x) e^{i(\lambda, y_0)}], & (\lambda, \omega) = 0, \\ X^{(0)}(x), & (\lambda, \omega) \neq 0. \end{cases} \quad (15.5)$$

Здесь сумма комплексно сопряженных гармоник заменена удвоенной действительной частью одной из них.

Из вида формулы (15.5) следует, что среднее при резонансе зависит от вектора начальных данных  $y_0$  и, следовательно, ведет к зависимости результатов усреднения от траекторий невозмущенных движений  $y = \omega(x)t + y_0$ . Таким образом, стандартная процедура усреднения

некорректна при резонансе.

Ниже мы опишем корректное усреднение при резонансе, а пока остановимся на вопросе нахождения резонансов. Дело в том, что не любое равенство вида (15.3) ведет к разрыву среднего. Так, если окажется, что коэффициенты  $X^{(\lambda)}(x), X^{(-\lambda)}(x)$ , входящие в формулу (15.5), равны нулю, то резонанс  $(\lambda(x), \omega) = 0$  не проявляет себя. Поэтому следует уточнить понятие резонанса в методе усреднения.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1.** Вектор частот  $\omega(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_m(x))$  будем называть резонансным в первом приближении метода усреднения, если выполняются два условия:

- a) равенство (15.3) справедливо для некоторых целочисленных значений  $\lambda_j$ ;
- (ii) временное среднее (15.2) терпит разрыв при  $(\lambda, \omega(x)) = 0$ .

Подчеркнем, что здесь речь идет о резонансах в первом приближении метода усреднения, так как в рядах Крылова-Боголюбова (14.2), (14.3) мы удерживаем члены порядка  $\varepsilon$ , отбрасывая выражения более высокого порядка малости. Во втором приближении метода усреднения, когда удерживаются члены второго порядка малости по  $\varepsilon$  и временное среднее принимает более сложный вид, возможны дополнительные резонансные соотношения, ведущие к разрыву среднего.

#### 47. Описание процедуры усреднения при резонансе в случае постоянных частот: понятие резонансной расстройки, линейная замена переменных, редукция резонансной задачи к нерезонансной.

Опишем процедуру усреднения при резонансе (15.3) (см. вопрос 45), когда частоты  $\omega_j$  постоянны. Как уже отмечалось выше, обычная схема усреднения, устраниющая все гармоники вида  $X^{(k)}(x) \exp i(k, y)$ , некорректна по причине медленного изменения “резонансной” гармоники  $X^{(\lambda)}(x) \exp i(\lambda, y)$ . Для устранения этих недостатков поступим следующим образом.

При исследовании резонанса (15.3) ограничимся рассмотрением резонансной окрестности, которую мы определим с помощью *резонансной расстройки*

$$\Delta = \lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_m \omega_m,$$

полагая ее малой величиной, порядка  $\varepsilon$ .

При строгом резонансе  $\Delta = 0$ , однако резонансная расстройка охватывает этот случай.

Итак, считаем  $\Delta \sim \varepsilon$ . В частности, этой области принадлежит нулевое значение  $\Delta$ , что отвечает случаю строгого выполнения равенства (15.3). Существенной особенностью поведения системы в окрестности резонанса является медленное изменение со временем величины

$$\theta = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m. \quad (15.8)$$

Действительно, вычисляя производную по времени от  $\theta$  в силу уравнений (15.1), имеем

$$\dot{\theta} = \lambda_1 \dot{y}_1 + \dots + \lambda_m \dot{y}_m = \Delta + \varepsilon (\lambda_1 Y_1 + \dots + \lambda_m Y_m) \sim \varepsilon.$$

Поэтому  $\theta$  будем рассматривать как новую независимую переменную, аналогичную медленным аргументам  $x_j$ . Выполним преобразование

$$x \mapsto x, \quad y \mapsto (\theta, y_2, \dots, y_m),$$

тождественное по всем переменным задачи, за исключением  $y_1$ , которое заменяется на  $\theta$ . Из формулы (15.8) следует, что

$$y_1 = \frac{\theta - \lambda_2 y_2 - \dots - \lambda_m y_m}{\lambda_1}.$$

Теперь запишем исходные уравнения (15.1) (см. прошлый вопрос) в новых переменных:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X\left(x, \lambda_1^{-1}\left(\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})\right), \bar{y}\right), \\ \dot{\theta} = \Delta + \varepsilon \sum_{k=1}^m \lambda_k Y_k\left(x, \lambda_1^{-1}\left(\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})\right), \bar{y}\right), \\ \dot{\bar{y}} = \bar{\omega} + \varepsilon \bar{Y}\left(x, \lambda_1^{-1}\left(\theta - (\bar{\lambda}, \bar{y})\right), \bar{y}\right). \end{cases} \quad (15.9)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\bar{y} = (y_2, \dots, y_m), \quad \bar{Y} = (Y_2, \dots, Y_m), \quad \bar{\omega} = (\omega_2, \dots, \omega_m), \quad \bar{\lambda} = (\lambda_2, \dots, \lambda_m),$$

$(\underline{\lambda}, \underline{y})$  – скалярное произведение векторов.

Система уравнений (15.9) замкнута относительно переменных  $(x, \theta, \underline{y})$  и не имеет резонансов, поскольку вектор частот  $\underline{\omega}$  не является резонансным. Она содержит медленные переменные в количестве  $(n + 1)$  и  $(m - 1)$  быструю переменную. Это значит, что мы можем усреднить ее как в нерезонансном случае с обычной гарантией точности приближения.

В соответствии с принципом усреднения, систему уравнений (15.9) следует заменить усредненной системой

$$\begin{cases} \dot{u} = \varepsilon \bar{X}(u, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} = \varepsilon \left( \delta + \sum_{k=1}^m \lambda_k \bar{Y}_k(u, \vartheta) \right), \end{cases}$$

где  $\varepsilon \delta = \Delta, \bar{X}, \bar{Y}_k$  временные средние, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \bar{X}(u, \vartheta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X\left(u, \lambda_1^{-1}\left(\vartheta - (\bar{\lambda}, \bar{\varphi})\right), \bar{\varphi}\right) dt, \\ \bar{Y}_k(u, \vartheta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y_k\left(u, \lambda_1^{-1}\left(\vartheta - (\bar{\lambda}, \bar{\varphi})\right), \bar{\varphi}\right) dt \end{aligned}$$

при условии, что  $\varphi(t) = \omega t + \beta$

Средние по времени можно заменить пространственными средними, имеющими вид

$$\begin{aligned} X^*(u, \vartheta) &= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} X\left(u, \lambda_1^{-1}\left(\vartheta - (\bar{\lambda}, \bar{y})\right), \bar{y}\right) dy_2 \cdots dy_m, \\ Y_k^*(u, \vartheta) &= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} Y_k\left(u, \lambda_1^{-1}\left(\vartheta - (\bar{\lambda}, \bar{y})\right), \bar{y}\right) dy_2 \cdots dy_m. \end{aligned}$$

#### 48. Вид усредненных уравнений при резонансе в случае постоянных частот

В душе не ебу, чем он отличается от предыдущего, кроме краткости. У прошлого года 47 вопрос это то же, что и в 48, но от руки.

Возможно, это оно (из книжки, стр. 283):

Если резонансное равенство выполняется строго, расстройка  $\Delta$  равна нулю, усредненные уравнения примут наиболее простой вид:

$$\dot{u} = \varepsilon \bar{\mathcal{X}}(u, 0).$$

Они часто допускают интегрирование в квадратурах, поэтому удается подробно исследовать поведение усредненной системы при строгом резонансе.

Однако в случае приближенного выполнения резонансного равенства величина  $\Delta$  отлична от нуля, поэтому исследование уравнений (20.15) становится более сложным. Очевидно, что решения уравнений с переменным параметром  $\theta$  будут отличаться от решений с фиксированным значением  $\theta$ . Это отличие можно исследовать с помощью *адиабатического инварианта* системы, построение которого не всегда простая задача.

Легче воспользоваться методом усреднения. Положим  $\tau = \sqrt{\varepsilon} \delta t$ . Тогда уравнения (20.15) примут вид

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \bar{\mathcal{X}}(u, \sqrt{\varepsilon}\tau).$$

Усредним их по  $\tau$ , получим, используя свойство (d) временного среднего (глава 14, § 4), упрощенную систему уравнений:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\delta} \bar{\mathcal{X}}(v), \quad \bar{\mathcal{X}}(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\mathcal{X}}(v, \tau) d\tau. \quad (20.16)$$

Она совпадает, с точностью до замены  $\varepsilon$  на  $\sqrt{\varepsilon}/\delta$ , с усредненной системой нерезонансного случая. Действительно, усреднение системы (20.13),  $\Delta \sim 1$ ,  $\mathcal{Y}_k = 0$ , по времени, т. е. вдоль быстрых движений  $\theta = \Delta t$ ,  $y_j = \omega_j t$ ,  $j = 2, \dots, m$ , невозмущенной задачи приводит нас к системе уравнений (20.16) с учетом сделанной оговорки.

Таким образом, в  $\varepsilon$ -окрестности резонанса движения системы имеют еще нерезонансный характер, хотя амплитуда колебаний возрастает в  $\varepsilon^{-1/2}$  раз, а точность приближения уменьшается в  $\sqrt{\varepsilon}$  раз. Дальнейшее уменьшение окрестности резонанса, сопровождающееся уменьшением  $\delta$ , делает усреднение по  $\tau$  незаконным по причине быстрого изменения  $v$  как функции  $\tau$  ( $\delta$  стоит в знаменателе правой части). Существенно резонансные колебания в таких системах наблюдаются в  $\varepsilon^2$ -окрестности резонанса.

Заметим, что этот эффект пропадает, как только функции  $\mathcal{Y}_k(x, \theta, \bar{y})$  становятся отличными от нуля.

#### 49. Уравнение Матье.

Движение многих систем описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{z} + p(t)z = 0, \quad (16.1)$$

где  $p(t)$  периодическая функция времени периода  $T$ .

Это уравнение названо по имени Дж. Хилла (G. Hill), который, исследуя движение Луны, получил уравнение

$$\ddot{z} + \left( a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2kt \right) z = 0$$

и описал метод его решения с использованием определителей бесконечного порядка.

Уравнение (16.1) описывает также поперечные колебания стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил, малые колебания математического маятника, когда длина маятника меняется со временем периодически, колебания в спарнике электровоза, колебания струны с переменным натяжением, и колебания многих других систем.

Мы рассмотрим частный случай этого уравнения, когда  $p(t)$  меняется со временем по гармоническому закону

$$\ddot{z} + \omega^2 (1 - \varepsilon \cos vt) z = 0. \quad (16.2)$$

Здесь  $\omega$  частота собственных колебаний,  $v$  частота изменения параметра  $p$ ,  $\varepsilon$  постоянная произвольная величина. В дальнейшем мы будем считать  $\varepsilon$  малым параметром.

Это уравнение называется уравнением Маттье. Оно подробно исследовано, построены решения этого уравнения с использованием специальных функций Маттье, которым посвящена обширная литература.

Отметим прежде всего, что любые колебательные процессы, описываемые уравнением Маттье, являются колебаниями параметрического типа в том смысле, что они обусловлены периодическим изменением во времени параметра задачи  $p(t)$ . Такие колебания существенно отличаются по своим свойствам от собственных колебаний при постоянных значениях этого параметра.

Действительно, если  $p$  есть постоянная величина (для этого в уравнении (16.2) достаточно положить  $\varepsilon$  равным нулю), то комплексное общее решение уравнения Маттье описывается гармоническими функциями времени:

$$z = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad \dot{z} = i\omega (C_1 e^{i\omega t} - C_2 e^{-i\omega t}). \quad (16.3)$$

В случае  $\varepsilon \neq 0$  вид решения меняется. В соответствии с теорией Флоке общее решение (в отсутствие кратных корней) имеет вид

$$\begin{aligned} z &= C_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_2(t), \\ \dot{z} &= C_1 e^{\alpha_1 t} (\alpha_1 \varphi_1(t) + \varphi'_1(t)) + C_2 e^{\alpha_2 t} (\alpha_2 \varphi_2(t) + \varphi'_2(t)). \end{aligned}$$

Здесь  $C_1, C_2$  произвольные постоянные интегрирования,  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  - неизвестные периодические функции времени, период которых равен периоду  $T = \frac{2\pi}{v}$  возбуждающей функции  $-\varepsilon \omega^2 \cos(vt)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$  - характеристические показатели, определяемые равенствами

$$\alpha_1 = \frac{1}{T} \ln \rho_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{T} \ln \rho_2$$

при том условии, что  $\rho_1, \rho_2$  корни соответствующего характеристического уравнения (мультиплликаторы).

## 50. Исследование колебаний в уравнении Маттье при резонансе 1:2 ЛК15 45+-

Ранее было показано, что уравнение Маттье допускает резонанс  $2\omega = v = 0$  в первом приближении метода усреднения. Это значит, что временное среднее терпит разрыв при точном выполнении этого равенства.

Введем замену переменных вида

$$z = x \cos y_1, \quad \dot{z} = -x\omega \sin y_1, \quad y_2 = vt.$$

Тогда уравнение (16.2) запишется в виде многочастотной системы (15.6)

с постоянным вектором частот  $(\omega, v)$ .

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(\alpha \cos \beta, -\alpha \omega \sin \beta) \sin \beta, \\ \dot{\beta} = \omega - \frac{\varepsilon}{\alpha \omega} f(\alpha \cos \beta, -\alpha \omega \sin \beta) \cos \beta \end{cases}$$

Будем исследовать решения системы (15.6) в окрестности резонанса, включая случай его строгого выполнения. Как было показано выше, особенность исследования резонанса состоит в том, что разность фазы

$$2\theta = 2y_1 - y_2 \quad (16.4)$$

является медленной переменной, когда частоты системы удовлетворяют равенству  $2\omega - v = 0$  с точностью порядка  $\varepsilon$ .

Вводим новую медленную переменную  $\theta$  по формуле (16.4), тогда  $y_1 = \theta + vt/2$ . Система уравнений (15.6) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2}\varepsilon\omega x \cos vt \sin(2\theta + vt), \\ \dot{\theta} &= \left(\omega - \frac{1}{2}v\right) - \varepsilon\omega \cos vt \cos^2\left(\theta + \frac{1}{2}vt\right), \\ \dot{y}_2 &= v. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Уравнения (16.5) имеют стандартную по Боголюбову форму, поскольку правые части содержат сомножителем малый параметр  $\varepsilon$  в силу малости резонансной расстройки  $\Delta = \omega - v/2 \sim \varepsilon$ .

Усредняя их по явно входящему времени, получим следующие выражения для средних значений правых частей:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon\omega x}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos vt \sin(2\theta + vt) d(vt) &= -\frac{\varepsilon\omega x}{4} \sin 2\theta, \\ -\frac{\varepsilon\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos vt \cos^2\left(\theta + \frac{1}{2}vt\right) d(vt) &= \\ = -\frac{\varepsilon\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos vt \frac{1 + \cos(2\theta + vt)}{2} d(vt) &= -\frac{\varepsilon\omega}{4} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

После отбрасывания уравнения для быстрой переменной  $y_2$  усредненная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\varepsilon\omega x \frac{1}{4} \sin 2\theta, \\ \dot{\theta} &= \left(\omega - \frac{1}{2}v\right) - \frac{\varepsilon\omega}{4} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (16.6)$$

Очевидно, что эта система нелинейна, однако с помощью простой замены переменных ее можно привести к линейному виду. Для этого введем новые координаты по формулам

$$u = x \cos \theta, v = x \sin \theta.$$

Рассмотрим случай строгого резонанса. В этом случае равенство  $\omega = \frac{v}{2}$  выполняется строго. Тогда первый член в уравнении по  $\theta$  пропадает. В этом случае уравнения (16.6) можно поделить одно на

другое и получить дифференциальное уравнение, описывающее поведение фазовых кривых уравнений (16.6):

$$\frac{dx}{d\theta} = x \operatorname{tg} 2\theta$$

Интегрируем его методом разделения переменных:

$$\frac{dx}{x} = \operatorname{tg} 2\theta d\theta \Rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|\cos 2\theta| + C', \Rightarrow \ln(|x| \cdot |\cos 2\theta|^{1/2}) = C'$$

Положим  $x > 0$  ( $x$  --амплитуда колебаний). Тогда

$$x \cdot |\cos 2\theta|^{1/2} = e^{C'} = C,$$

поэтому фазовые кривые описываются формулой

$$x = \frac{C}{|\cos 2\theta|} \quad (16.7)$$

На рис. (1) представлен фазовый портрет резонансных колебаний:

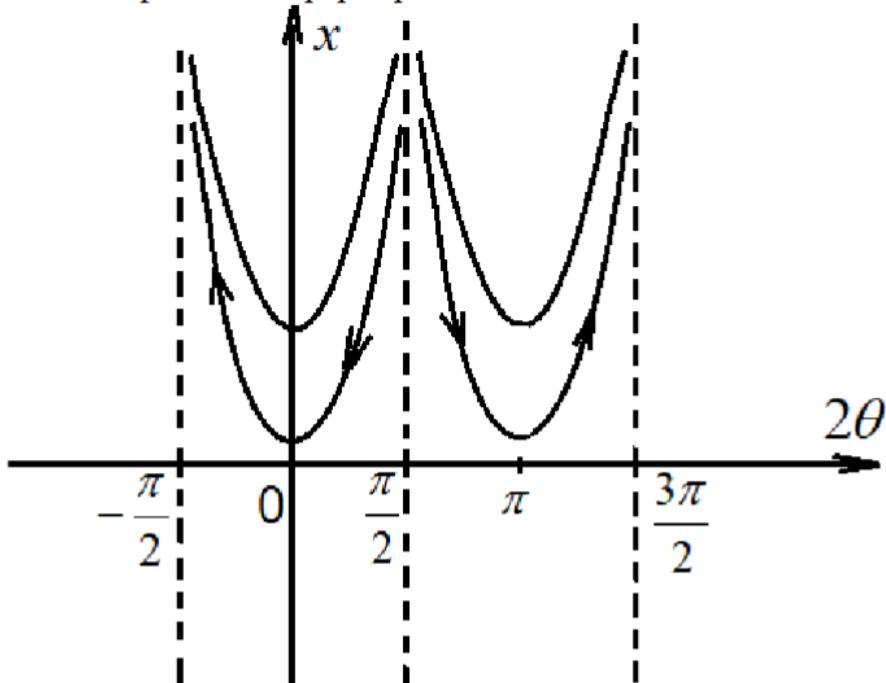


Рис. 1

Здесь  $2\theta = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$  -- вертикальные асимптоты для фазовых кривых ( $\cos 2\theta = 0$ ).

Отсюда следует, что любое малое начальное возмущение в амплитуде  $x$ , отличное от нуля ( $x=0$  есть тривиальное положение равновесия уравнения (16.2)), приводит к резкому нарастанию амплитуды колебаний так, что амплитуда колебаний стремится к бесконечности. Такое явление получило название *параметрического резонанса*.

## 51. Модель зарплаты и занятости

Рассмотрим модель зарплаты и занятости. Одна из важных проблем, которую решает руководитель предприятия – установление зарплаты работникам, которая зависит от числа работников. Поэтому описание динамики отношения «зарплата – занятость» – важная задача любого предприятия.

Пусть  $p(t)$  – зарплата работника,  $N(t)$  – число занятых сотрудников предприятия. Будем считать, что существует стабильное равновесие рынка, при котором  $p = p_0$  – фиксированная зарплата,  $N = N_0$  – фиксированное число работников. Стабильность (устойчивость) равновесия означает, что небольшие флуктуации в зарплате и числе занятых сотрудников не влияют кардинально на величину зарплаты и на число сотрудников.

Как описать взаимосвязь зарплаты и числа сотрудников? Введем предположения.

- А) Работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности работников от равновесного состояния  $N = N_0$ , при этом, если  $N$  растет, то зарплата  $p$  падает, и наоборот, уменьшение числа работников ведет к увеличению зарплаты  
 Б) Численность работников пропорциональна изменению зарплаты относительно  $p = p_0$  так, что увеличение  $p$  ведет к увеличению числа работников  $N$ , а уменьшение  $p$  ведет к уменьшению числа работников  $N$

Составим дифференциальные уравнения, описывающие колебаний величин  $p(t)$ ,  $N(t)$ :

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0), \quad \alpha_1 > 0$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), \quad \alpha_2 > 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1 \frac{dN}{dt} = -\alpha_1 \alpha_2 (p - p_0)$$

Вводим новую переменную  $\Delta = p - p_0$ , описывающую отклонение числа работников от равновесного режима. Уравнение относительно  $\Delta$  имеет вид уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \alpha_1 \alpha_2 \cdot \Delta = 0$$

Итак,  $\Delta$  меняется со временем по гармоническому закону

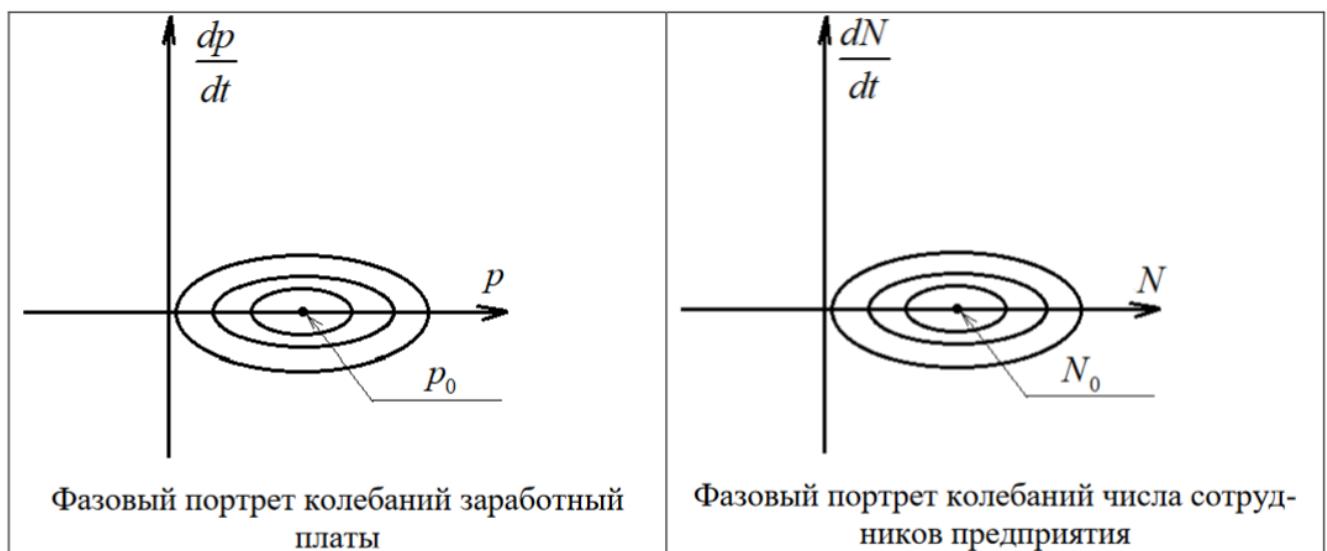
$$\Delta = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad \frac{d\Delta}{dt} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$$

Отсюда следует, что

$$p(t) = p_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

Легко видеть, что

$$N = N_0 + \int_0^t \alpha_2(p - p_0) dt = N_0 + \frac{\alpha_2}{\omega} (C_1 \sin \omega t - C_2 \cos \omega t), \quad \frac{dN}{dt} = \alpha_2 (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$



## 52. Моделирование поверхности грибов на основе предположения, что при росте грибы стремятся минимизировать трату влаги.

Какой вид имеет поверхность грибов? Естественно предположить, что при росте грибы стремятся минимизировать трату влаги. Следовательно, они растут так, что площадь их поверхности минимальна, чтобы уменьшить испарение.

Исходя из этого предположения, найдем оптимальную форму поверхности грибов. Затем сравним полученные результаты с реальными грибами.

Рассмотрим кривую  $y = y(x)$  на плоскости  $(x, y)$ , соединяющую две фиксированные точки  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ . Вращая кривую вокруг оси  $y$ , получим поверхность вращения.

Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, которая при вращении вокруг оси  $y$  образует поверхность минимальной площади. Исследуем эту задачу. Для этого рассмотрим тонкую полоску поверхности, которая соответствует области изменения переменной  $x$  от текущего ее значения  $x$  до  $(x+dx)$ . Площадь  $dS$  этой полоски равна

$$dS = 2\pi x ds$$

где  $ds$  – кусок кривой, соединяющий две ее точки:  $y(x)$  и  $y(x+dx)$ .

Тогда

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2, dy = y'(x)dx$$

Поэтому площадь элементарной полоски примет вид

$$dS = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1+y'^2(x)} dx$$

Площадь  $S$  поверхности вращения представит в виде определенного интеграла

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1+y'^2(x)} dx$$

Итак, мы пришли задаче вариационного исчисления: найти кривую  $y(x)$ , для которой интеграл

$$\int L(x, y, y') dx, \quad L = x \sqrt{1+y'^2(x)}$$

принимает стационарное значение. Условие стационарности этого интеграла эквивалентно условию Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

В нашем случае имеем

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \tag{1}$$

Если расписать его подробно, то получим нелинейное уравнение второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x} (y'(x) + y'^3(x)) = 0 \tag{2}$$

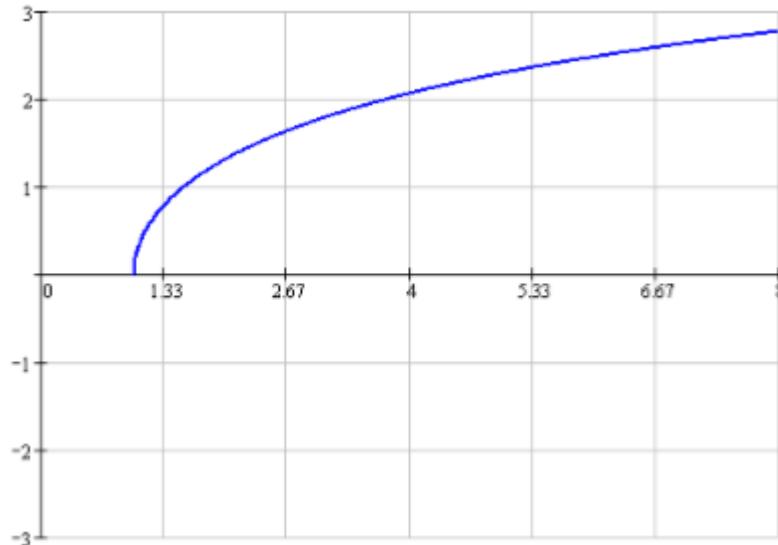
Из равенства (1) следует также, что

$$\frac{\partial L}{\partial y'} \equiv \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C (\text{const}) \tag{3}$$

Напомню, что  $x$  есть переменная величина,  $y$  – функция  $x$ , поэтому  $C$  мы должны рассматривать как величину, не зависящую от  $x$ , то есть как константу. С точки зрения классической механики, равенство (3) есть первый интеграл уравнения (2), называемый циклическим интегралом, а  $y$  – циклической обобщенной координатой.

Рассматривая равенство (3) как дифференциальное нелинейное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции  $y = y(x)$ , интегрируя его (с помощью MAPLE, либо MATHEMATICA), получим его общее решение в виде

$$y(x) = B + k \operatorname{arcch} \left( \frac{x}{k} \right), \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{arcch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$



Ареакосинус ( $\operatorname{arcch}(x)$ ) для действительного аргумента  $x$

Здесь  $B, k$  -- константы интегрирования уравнения (2). Тогда мы можем записать, что

$$y = B + k \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - k^2}}{k} \right) = D + k \ln \left( x + \sqrt{x^2 - k^2} \right)$$

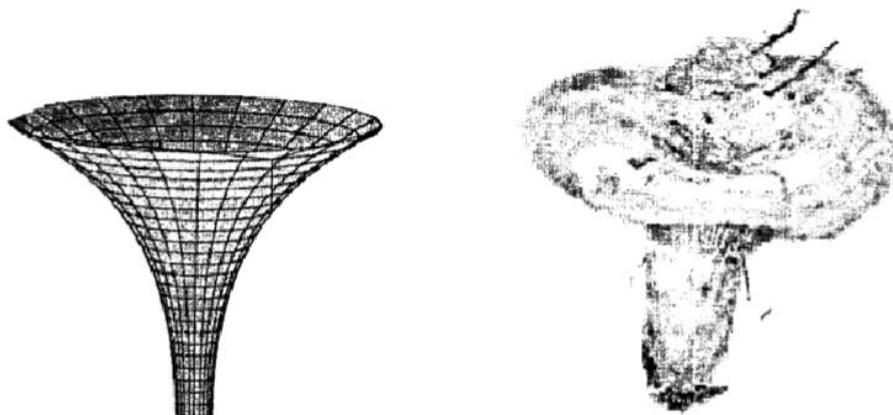
где  $D = B - k \ln |k|$ .

Таким образом, искомая кривая  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$  имеет вид

$$y = D + k \ln \left( x + \sqrt{x^2 - k^2} \right), \quad D, k = \text{const} \quad (4)$$

и удовлетворяет граничным условиям  $y_1 = y(x_1)$ ,  $y_2 = y(x_2)$ .

А теперь сравним поверхность, полученную путем вращения кривой (4) вокруг вертикальной оси  $U$ , с поверхностью реального гриба:



Формирование поверхности гриба по  
закону

$$y = D + k \ln \left( x + \sqrt{x^2 - k^2} \right)$$

Реальный гриб