Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)
Институт «Компьютерные науки и прикладная математика»

Курсовая работа

По курсу «Математические методы синтеза новых классов СУ»

Студент: Махмудов О.С.

Группа: М80-405Б-18

Преподаватель: Пантелеев А.В.

Москва

2021

№ 1

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + u(t) \qquad x(0) = -0{,}5$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{11}\left[\frac{1}{10}u^2(t) + x^2(t)\right]dt \to \min$$

а) $f(x,t,u) = -10x + u$, $f^0(t,x,u) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10}u^2 + x^2\right]$, $F(t_1, x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решаем задачу Лагранжа $\Gamma_1(t_1, x(t_1)) = t_1 - 8 = 0$

1) Составим Гамильтониан:

$$H(t, \psi, x, u) = \psi(-10x + u) - \frac{1}{20}u^2 - \frac{1}{2}x^2$$

2) Находим максимум гамильтониана по упр-ю

$$\frac{\partial}{\partial u}H(t, \psi(t), x(t), u) = \psi - \frac{1}{10}u = 0 \Rightarrow u^*(t) = 10\psi \to \max$$

т.к. $\frac{\partial^2}{\partial u^2}H(t, \psi(t), x(t), u) = -\frac{1}{10} < 0$

3) Выписываем ур-я с учётом п. 2

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + u^*(t) = -10x(t) + 10\psi, \quad x(0) = -0{,}5$$

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial}{\partial x}H(t, \psi(t), x(t), u(t)) = -(-10\psi - x) = 10\psi + x$$

4) Проверяем усл-е трансверсальности

т.к. $F(t,x) = 0$, то $\delta F = 0$ и $\left[-H(t_1)\delta t_1 + \psi(t_1)\delta x\right]\Big|_{t_1 = 11} = 0$

Поскольку $t_1 = 11$, то $\delta t_1 = 0$. Ограничений на $x(t_1)$ не наложено $\Rightarrow$

$\Rightarrow \delta x$ - произв. $\Rightarrow \psi(t_1)\delta x\Big|_{t_1 = 11} = 0 \Rightarrow \psi(11) = 0$

5) Решаем полученную двухточечную краевую задачу:

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + 10\psi(t), \quad x(0) = -0{,}5$$

$$\dot{\psi}(t) = 10\psi(t) + x(t), \quad \psi(11) = 0$$

$$x^*(t) = \frac{e^{(22-t)\sqrt{110}}\left((\sqrt{110}-10)e^{2(t-11)\sqrt{110}} + \sqrt{110}+10\right)}{(2\sqrt{110}+20)e^{22\sqrt{110}} + 2\sqrt{110} - 20}$$

$$\psi^*(t) = -\frac{\left(e^{2(t-11)\sqrt{110}} - 1\right)e^{(22-t)\sqrt{110}}}{(2\sqrt{110}+20)e^{22\sqrt{110}} + 2\sqrt{110} - 20}$$

б) $A(t) = -10,\ B(t) = 1,\ Q(t) = \frac{1}{10},\ S(t) = 1,\ \Lambda = 0$

Для общего случая одномерных систем:

$$\dot{K}_2(t) = -2AK_2(t) - \frac{K_2^2(t)B^2}{Q} + S,\ K_2(T) = -\Lambda,\ u^*(t,x) = \frac{B}{Q}K_2(t)x$$

Обозначая $r = \frac{Q}{B^2} = \frac{1}{10}$, $\beta = \sqrt{A^2 + \frac{S}{r}} = \sqrt{110}$

$$K_2(t) = \frac{1}{10}\ \frac{(-10+\sqrt{110})\left(-1-\frac{\sqrt{110}}{10}\right)e^{2\sqrt{110}(11-t)} - (10-\sqrt{110})\left(-1+\frac{\sqrt{110}}{10}\right)}{\left(-1+\frac{\sqrt{110}}{10}\right) - \left(-1-\frac{\sqrt{110}}{10}\right)e^{2\sqrt{110}(11-t)}} =$$

$$= \frac{1 - e^{2\sqrt{110}(11-t)}}{(\sqrt{110}+10)e^{2\sqrt{110}(11-t)} + \sqrt{110} - 10}$$

Оптимальное управление: $u^*(t,x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t) = 10K_2(t)x$

Найдём траектории и управление, порождаемое управлением $u^*(t,x)$ для различных начальных состояний. Уравнение модели объекта

$$\dot{x}(t) = -10x(t) + 10K_2(t)x\ ;\ x(0) = -0{,}5$$

Задача Коши имеет решение:

$$x^*(t) = -\frac{\exp\left(-\frac{10((\sqrt{110}+11)e^{2\sqrt{110}} + \sqrt{110} - 11)t}{(\sqrt{110}+10)e^{2\sqrt{110}} + \sqrt{110} - 10}\right)}{2}$$

$$\Rightarrow u^*(t) = u^*(t, x^*(t)) = 10K_2(t)x^*(t)$$

№2

Для задачи быстродействия

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $x_1(0) = 0$, $x_1(T) = 10$

$\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_2(0) = 0$, $x_2(T) = 0$

$|u(t)| \le 2{,}5$, $0 \le t \le T$

$$I = \int_0^T dt \to \min$$

Найти оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$, оптим. траекторию $x^*(\cdot)$ и время T^*

а) $f_1(t, x, u) = x_2$

$f_2(t, x, u) = u(t)$

$f^0(t, x, u) = 1$

$F(t, x) = 0$

$t_1 = T$

$\Gamma_1(T, x(T)) = x_1(T) = 10$

$\Gamma_2(T, x(T)) = x_2(T) = 0$

1) Составляем Гамильтониан $H(t, \psi, x, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - 1$

2) Находим условный максимум гамильтониана по упр-ю:

$u^*(t) = \arg\max H(t, \psi(t), x(t), u) = 2{,}5 \operatorname{sign} \psi_2$

3) Выписываем канонические ур-я принципа максимума:

$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$; $x_1(0) = 0$; $x_1(T) = 10$

$\dot{x}_2(t) = u^*(t) = 2{,}5 \operatorname{sign} \psi_2(t)$; $x_2(0) = 0$; $x_2(T) = 0$

$\dot{\psi}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$ (*)

$\dot{\psi}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t)$

4) Т.к. T не задан, а $x_1(T)$ и $x_2(T)$ заданы, то вариация δt_1 произвольна, а $\delta x_1 = 0$, $\delta x_2 = 0$ $\Rightarrow \left. \left[-H(t_1)\delta t_1 \right] \right|_{t_1=T} = 0 \Rightarrow H(t_1) = 0 =$
$= H(T, \psi, x, u)$

5) Из (*): $\psi_1(t) = C_1 - \text{const} \Rightarrow \psi_2(t) = -C_1 t + C_2$

$u^*(t) = 2{,}5 \operatorname{sign}(-C_1 t + C_2)$

6) Найдем время $T = \tau_1 + \tau_2$ - время перехода из $x_0 = (0,0)$ в т. $(10, 0)$

τ_1 - время движения с управлением $u^*(t) = 2{,}5$ до т. переключ.

τ_2 - время движение с управлением $u^*(t) = -2{,}5$

а) на первом участке $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$; $\dot{x}_2(t) = u^*(t) = 2{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2(t) = 2{,}5t + C_1$ и $x_1(t) = 1{,}25t^2 + C_1 t + C_2$. При $t = 0$:

$x_2(0) = C_1 = 0$ и $x_1(0) = C_2 = 0 \Rightarrow x_1(t) = 1{,}25t^2$; $x_2(t) = 2{,}5t$

б) на втором участке $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$; $\dot{x}_2(t) = u^*(t) = -2{,}5$, откуда

$x_2(t) = -2{,}5t + C_1$ и $x_1(t) = -1{,}25t^2 + C_1 t + C_2$; при $t = T$:

$$\left. \begin{array}{l} x_2(T) = -2{,}5T + C_1 = 0 = x_2(\tau_1 + \tau_2) \\ x_1(T) = -1{,}25T^2 + C_1 T + C_2 = 10 = x_1(\tau + \tau_2) \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 2{,}5(\tau_1 + \tau_2) \\ C_2 = 10 - 1{,}25(\tau_1 + \tau_2)^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -1{,}25t^2 + 2{,}5(\tau_1 + \tau_2)t + 10 - 1{,}25(\tau_1 + \tau_2)^2 \\ x_2(t) = -2{,}5t + 2{,}5(\tau_1 + \tau_2) \end{cases}$$

7) В силу непрерывности при $t = \tau_1$

$$\begin{cases} -1{,}25\tau_1^2 + 2{,}5\tau_1(\tau_1 + \tau_2) + 10 - 1{,}25(\tau_1 + \tau_2)^2 = 1{,}25\tau_1^2 \\ -2{,}5\tau_1 + 2{,}5(\tau_1 + \tau_2) = 2{,}5\tau_1 \end{cases}$$

$\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow -1{,}25\tau_1^2 + 5\tau_1^2 + 10 - 5\tau_1^2 = 1{,}25\tau_1^2 \Rightarrow \tau_1^2 = 4 \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = 2 \Rightarrow$

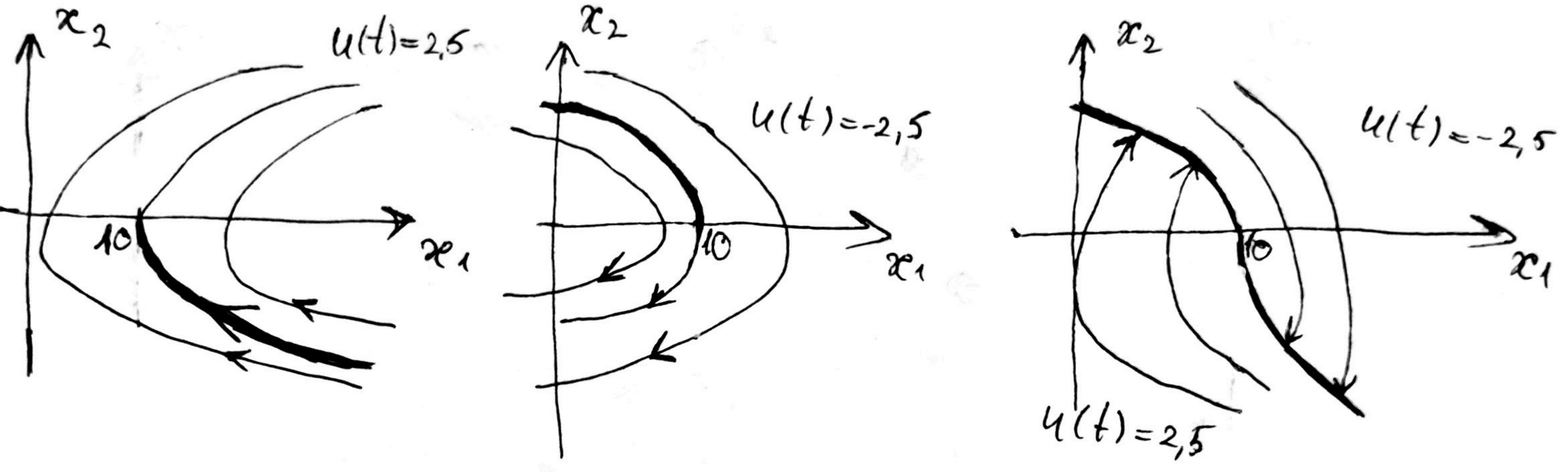
$\Rightarrow T = 4$

Построим фазовый портрет.

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) = const$$

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{u} \Rightarrow dx_1 = \frac{x_2}{u}\,dx_2 \quad \text{или} \quad x_1 = \frac{x_2^2}{2u} + C$$



№3

Для задачи

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 11u(t)$$
$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left[121 x_1^2(t) + 2x_2^2 + u^2(t)\right] dt \to \min$$

найти оптимальный регулятор $u^*(x)$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $Q = 1$, $S = \begin{pmatrix} 121 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, где $p_{12} = p_{21}$

Составим алгебраическое ур-ие Риккати

$$-A^T P - PA + PBQ^{-1}B^T P - S = 0$$

$$\begin{pmatrix} 121 p_{12}^2 - 100 & 121 p_{12}p_{22} - p_{11} \\ 121 p_{12}p_{22} - p_{11} & 121 p_{22}^2 - 2p_{12} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выпишем структуру регулятора

$$u^*(x) = -Q^{-1}B^T P x$$

$$121 p_{12}^2 - 121 = 0$$
$$121 p_{12}p_{22} - p_{11} = 0 \quad \Rightarrow p_{12} = 1,\ p_{22} = \frac{2}{11},\ p_{11} = 22$$
$$121 p_{22}^2 - 2p_{12} - 2 = 0$$

Проверяем знакоопределённость P:

$\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$: $\Delta_1 = 22 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0 \Rightarrow u^*(x) = -11x_1 - 2x_2$

№4

$$dX(t) = [-X(t) + u(t)]dt + 10\,dW_1, \quad m_0 = 3, \quad D_0^x = 4$$

$$dY = 10X(t)dt + \sqrt{10}\,dW_2, \quad Y(0) = 0$$

$$J = M\left\{\frac{1}{2}\int_0^T 0{,}1u^2(t) + X^2(t)\,dt\right\} \to \min, \quad T = 2$$

найти управление $u^*(t, Y_0^t)$ из мн-ва допустимых, обеспеч. минимум функционала.

1) $A = -1$; $B = 1$; $\sigma_1(t) = 10$

$C = 10$; $\sigma_2(t) = \sqrt{10}$

$S = 1$; $Q = 0{,}1$; $\Lambda = 0$

$t_0 = 0$; $t_1 = T$

$R_1 = \sigma_1^2 = 100$; $R_2 = \sigma_2^2 = 10$

2) Оптимальное управление имеет вид:

$$u^*(t) = u^*(t, y_{t_0}^t) = 10 \cdot 1 \cdot K_2(t) \cdot \hat{x}(t)$$

где $\hat{x}(t) = [-\hat{x}(t) + u^*(t)]dt + K(t)[dY(t) - 10\hat{x}(t)dt]$, $\hat{x}(t_0) = m_0 =$

$$\dot{K}_2(t) = -2K_2(t) - 10K_2^2(t) + 1 \quad ; K_2(t_1) = 0$$

$$K(t) = \Gamma(t) \cdot 10 \cdot \frac{1}{10} = \Gamma(t)$$

$$(*)\ \dot{\Gamma} = -\Gamma(t) - \Gamma(t) - 10\Gamma^2(t) + 100; \ \Gamma(t_0) = D_0^x = 4$$

3) Примем, что $r = \frac{Q}{B^2} = \frac{1}{10}$; $\beta = \sqrt{A^2 + \frac{S}{r}} = \sqrt{1 + 10} = \sqrt{11}$

$$K_2(t) = r\,\frac{(A+\beta)(-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)} - (A-\beta)(-\Lambda + Ar + \beta r)}{(-\Lambda + Ar + \beta r) - (-\Lambda + Ar - \beta r)e^{2\beta(T-t)}} =$$

$$= \frac{(10\sqrt{11} - 10)e^{-2\sqrt{11}(-2+t)} + 10\sqrt{11} + 10}{(\sqrt{11}+1)e^{-2\sqrt{11}(-2+t)} + \sqrt{11} - 1}$$

Так как ковариационная матрица ошибки оценивания $\Gamma(t)$ удовлетворяет ур-ю $*$, имеющему вид:

$x' = -2ax - b^2x^2 + c^2$; $x(0) = d$, где $a = 1$, $b = \sqrt{10}$, $c = 10$, $d = 4$, то

решение для x будет:

$$x(t) = \frac{d(\beta - a) + c^2 + [d(a+\beta) - c^2]\exp^{-2\beta t}}{a + \beta + b^2 d + (\beta - a - b^2 d)\exp^{-2\beta t}}, \text{ где } \beta = \sqrt{a^2 + b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(t) = \frac{4\sqrt{1001} + 96 + (4\sqrt{1001} - 96)\,e^{-2\sqrt{1001}\,t}}{41 + \sqrt{1001} + (\sqrt{1001} - 41)\,e^{-2\sqrt{1001}\,t}}$$

Соотношение для оптимального регулятора:

$$u^*(t) = u^*(t, y_0^t) = 10K_2\hat{x} = \frac{((100\sqrt{11} - 100)\,e^{-2\sqrt{11}(-2+t)} + 100\sqrt{11} + 100)\,\hat{x}(t)}{(\sqrt{11}+1)\,e^{-2\sqrt{11}(-2+t)} + \sqrt{11} - 1}$$

Соотношение для оптимального фильтра:

$$d\hat{X} = [-\hat{x}(t) + u^*(t)]dt + \Gamma(t)[dY(t) - 10\hat{x}(t)dt], \quad \hat{x}(0) = 3$$

№5

Для задачи

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \ , \ x_1^* = 4 \ , \ y(t) = x_1(t) + 11 x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 10 u(t) \ , \ x_2^* = 4$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T [u^2(t) + x_1^2(t) + \frac{x_2^2(t)}{10}]\,dt + 5x_1^2(2) + \frac{1}{2}x_2^2(2) \Rightarrow \min, \ T=1$$

требуется найти управление с накоплением информации о состоянии

1) $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$y(t) = (1 \ \ 11)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow C = (1 \ \ 11)$

$Q = 1 \ ; \ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \ ; \ \lambda = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x_0^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2) Запишем ур-ие Риккати

$$\dot{K}_2(t) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} K_2(t) - K_2(t)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - K_2(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} K_2(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$u^*(t, x) = (0 \ \ 10)\, K_2(t) \cdot x$$

3) Для синтеза оценивающего устр-ва второго порядка зададим матрицу

$K = \begin{pmatrix} 11 \\ -0,5 \end{pmatrix} : (A - KC) = \begin{pmatrix} -10 & -120 \\ 0,5 & 5,5 \end{pmatrix} : \lambda_1 = -2,5 \ , \ \lambda_2 = -2 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\hat{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 11 \\ -0,5 \end{pmatrix}[y(t) - (1 \ \ 11)\hat{x}(t)], \ \hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = -10\hat{x}_1 - 120 + 11y \ ; \quad \hat{x}_1(0) = 4$

$\Rightarrow u^*(t, \hat{x}) = (0 \ \ 10)\, K_2(t)\, \hat{x}$

$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = 10u + 0,5\hat{x}_1 + 5,5\hat{x}_2 - 0,5y \ ; \quad \hat{x}_2(0) = 4$

№6

Для задачи

$$x(k+1) = 11x(k) + u(k) \ ; \ k=0,1; \quad x(0)=4$$

$$I = \sum_{k=0}^{1} [11u^2(k) + x^2(k)] + 10x^2(2) \to \min$$

найти

а) оптимальное программное управление и соотв. траектори..

б) оптимальный регулятор $u^*(k,x)$

а)

0) $f_1 = 11x(k) + u(k)$

$f^0(k, x, u) = 11u^2(k) + x^2(k)$

$F(x) = 10x^2$

$u(k) \in \mathbb{R} \ ; \ N=2$

1) Составим Гамильтониан

$$H(k, \Psi, x, u) = \Psi(11x+u) - (11u^2 + x^2)$$

2) найдём максимум Гамильтониана. Т.к. ограничений на управление нет, используем необх. усл-е безусл. экстрему..

$$\frac{\partial H(k, \Psi(k+1), x(k), u(k))}{\partial u} = \Psi(k+1) - 22uk = 0 \Rightarrow u^*(k) = \frac{\Psi(k+1)}{22}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -22 < 0 \Rightarrow \text{максимум}$$

3,4) составим краевую задачу:

$$x^*(k+1) = x^*(k) + \frac{\Psi(k+1)}{22} \ ; \quad x^*(0) = 4$$

$$\Psi(k) = \frac{\partial H(k, \Psi(k+1), x^*(k), u^*(k))}{\partial x} = 11\Psi(k+1) - 2x^*(k);$$

$$\Psi(2) = -20x^*(2)$$

5) решение краевой задачи

$k=0 \Rightarrow x(1) = 11x(0) + \frac{\psi(1)}{22}$; $x(0)=4$

$k=1 \Rightarrow \psi(1) = 11\psi(2) - 2x(1)$

$\psi(2) = -20x(2)$

$x(2) = 11x(1) + \frac{\psi(2)}{22}$

$x(1) = \frac{5082}{6781}$ $\qquad \psi(1) = -\frac{6452204}{6781}$ $\qquad u(0) = \frac{\psi_1}{22}$

$x(2) = \frac{29282}{6781}$ $\qquad \psi(2) = -\frac{585640}{6781}$ $\qquad u(1) = \frac{\psi_2}{22}$

$x^* = \left\{4;\ \frac{5082}{6781};\ \frac{29282}{6781}\right\}$; $u^* = \left\{-\frac{293282}{6781};\ -\frac{26620}{6781}\right\}$

б) 0) $A=11$; $B=1$; $S=1$; $Q=11$; $\Lambda=10$; $x_0=4$

1) составим $L(k)$ – м-цу коэфф усиления регулятора разм. $(q \times n)$

$L(k) = [11 + 1 \cdot P(k+1) \cdot 1]^{-1} \cdot 1 \cdot P(k+1) \cdot 11$; $k=0,1$

и $P(k)$ – м-цу размера $(n \times n)$ удовлетв. ур-ю

$P(k) = 1 + L^T(k) \cdot 11 L(k) + (11 - L(k))^T \cdot P(k+1)(11 - L(k))$, $P(2)=10$

2) решение ур-ий

$k=1 \Rightarrow L(1) = [11 + P(2)]^{-1} \cdot P(2) \cdot 11 = \frac{110}{21}$

$P(1) = 1 + \frac{110 \cdot 110 \cdot 11}{21 \cdot 21} + \left(11 - \frac{110}{21}\right) \cdot 10 \cdot \left(11 - \frac{110}{21}\right) = \frac{13331}{21}$

$k=0 \Rightarrow L(0) = [11 + P(1)]^{-1} \cdot P(1) \cdot 11 = \frac{21}{13562} \cdot \frac{13331}{\cancel{21}} \cdot 11 = \frac{146641}{13562}$

$P(0) = 1 + \frac{146641}{13562} \cdot \frac{146641}{13562} \cdot 11 + \left(11 - \frac{146641}{13562}\right) \cdot \frac{13331}{21} \cdot \left(11 - \frac{146641}{13562}\right)$

$= \frac{17757123}{13562}$

3) Оптимальный регулятор

$$u^*(0, x) = -L(0)x = -\frac{146641}{13562}x$$

$$u^*(1, x) = -L(1)x = -\frac{110}{21}x$$

Проверка: оптимальное знач. функционала:

$$\min I = p_0 x^2(0) = \frac{142056984}{6781}$$

Найдём знач. функционала:

$$11 \cdot u^2(0) + x^2(0) + 11u^2(1) + x^2(1) + 10x^2(2) = \frac{142056984}{6781}$$

№7

Для задачи

$$X(k+1) = 11X(k) + u(k) + W(k), \quad m_0 = 2, \quad D_0^x = 4$$

$$Y(k) = 11X(k) + V(k), \quad k = 0,1,2; \qquad R_1 = R_2 = 1$$

$$J = M\left\{\sum_{k=0}^{2}[11u^2(k) + X^2(k)] + 10X^2(3)\right\} \to \min$$

найти оптимальный регулятор с накоплением информации.

0) $A = 11$; $B = 1$; $C = 11$; $\lambda = 10$; $S = 1$; $Q = 11$; $N = 3$;

1) Находим опт. лин. регулятор для соотв. детерм. задачи:

$$X(k+1) = 11x(k) + u(k); \quad k = 0,1,2; \quad x_0 = x(0)$$

$$T = \sum_{k=0}^{2}[11u^2(k) + x^2(k)] + 10x^2(3) \to \min$$

Составляем ур-е:

$$L(k) = [11 + 1\cdot p(k+1)\cdot 1]^{-1}\cdot 1\cdot p(k+1)\cdot 11$$

$$p(k) = 1 + L^T(k)\cdot 11\cdot L(k) + [11 - L(k)]^T p(k+1)[11 - L(k)], \quad p(3) = 10$$

$$p(0) = \frac{2365263701\text{?}}{17906305} \quad p(1) = \frac{17757123}{13562} \quad p(2) = \frac{13331}{21}$$

Опт. лин. детерм. регулятор опред. соотн.

$$u^*(0,x) = -L(0)x = -\frac{195328353}{17906305}x$$

$$u^*(1,x) = -L(1)x = -\frac{146641}{13562}x$$

$$u^*(2,x) = -L(2)x = -\frac{110}{21}x$$

2) Синтезируем опт. лин. фильтр:

$$K(k) = \bar{\Gamma}(k)C^T(k)[C(k)\bar{\Gamma}(k)C^T(k) + R_2(k)]^{-1}, \quad k = 1,\ldots,N-1$$

$$\bar{\Gamma}(k+1) = A\Gamma(k)A + R_1; \quad k = 0,\ldots,N-2; \quad \bar{\Gamma}(0) = D_0^x$$

$$\Gamma(0) = D_0^x$$

$$\Gamma(k) = \bar{\Gamma}(k) - \bar{\Gamma}(k)C[C\bar{\Gamma}(k)C + R_2]^{-1}\cdot C\cdot\bar{\Gamma}(k); \quad k = 1,\ldots,N-1,$$

$\bar{\Gamma}(0)=4$; $\bar{\Gamma}(1)=485$; $\bar{\Gamma}(2)=58686$

$\Gamma(0)=4$; $\Gamma(1)=\dfrac{28457375}{58686}$; $\Gamma(2)=\dfrac{416729051256}{7101007}$

$K(1)=\dfrac{5335}{58686}$; $K(2)=\dfrac{645546}{7101007}$

3) Согласно теор. разделения опт. ур-е с накоплением инф-и находим по формулам:

$$u^*(0)=-\frac{195328353\,\hat{x}(0)}{17906305}$$

$$u^*(1)=-\frac{146641\,\hat{x}(1)}{13562}$$

$$u^*(2)=-\frac{110\,\hat{x}(2)}{21}$$

Уравнения блоков, входящих в замкнутую систему имеют вид:

$x(k+1)=11x(k)+u^*(k)+w(k)$; $k=0,1,2$; $x(0)=x_0$

$y(k)=11x(k)+v(k)$; $k=0,1,2$; $R_1=R_2=1$

$\bar{x}(k+1)=11\hat{x}(k)+u^*(k)$; $k=0,1$; $\bar{x}(0)=m_0=2$

$\hat{x}(k)=\bar{x}(k)+K(k)[y(k)-11\bar{x}(k)]$; $k=1,\ldots,N-1$; $\hat{x}(0)=m_0=2$

$K(1)=\dfrac{5335}{58686}$; $K(2)=\dfrac{645546}{7101007}$

4) Минимальное значение функционала:

$$\min J=2\cdot P(0)\cdot 2+4P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+\Gamma(0)\cdot L(0)\cdot(P(1)+11)L(0)+$$

$$+\Gamma(1)\cdot L(1)\cdot(P(2)+11)L(1)+\Gamma(2)\cdot L(2)\cdot(P(3)+11)L(2)=7106761{,}41$$

18

$x_1(k+1) = 11x_1(k) + x_2(k)$ $\qquad x^*_{01} = 4$

$x_2(k+1) = x_1(k) + 11u(k)$, $\qquad x^*_{02} = 4$

$y(k) = 11x_1(k) + x_2(k)$, $k = 0, 1, 2$

$$I = \sum_{k=0}^{2} [u^2(k) + x_1^2(k) + 10x_2^2(k)] + x_1^2(3) + x_2^2(3) \to min$$

найти регулятор с накоплением информации.

0) $A = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$; $C = (11 \ 1)$; $Q = 1$; $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Синтезируем оптимальный регулятор

$$L(k) = [Q(k) + B^T p(k+1) B]^{-1} B^T p(k+1) A \; ; \; k = 2; 1; 0$$

$$p(k) = S + L^T(k) \cdot Q \cdot L(k) + [A(k) - BL(k)]^T p(k+1) [A - BL(k)], \; k = 2, 1, 0$$

$$p(3) = \lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L(2) = \begin{pmatrix} \frac{11}{122} & 0 \end{pmatrix}$; $p(2) = \begin{pmatrix} \frac{14885}{122} & 11 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$; $L(1) = \begin{pmatrix} \frac{121}{111} & \frac{121}{1332} \end{pmatrix}$

$p(1) = \begin{pmatrix} \frac{60641893}{4514} & \frac{16537345}{13542} \\ \frac{16537345}{13542} & \frac{9832829}{81252} \end{pmatrix}$; $L(0) = \begin{pmatrix} \frac{12114273589}{1189853561} & \frac{1091464772}{118985356} \end{pmatrix}$

$$p(0) = \begin{pmatrix} \frac{3201660990 68279}{2379707122} & \frac{29105592433269}{2379707122} \\ \frac{29105592433269}{2379707122} & \frac{26697419 78959}{23797707122} \end{pmatrix}$$

Оптим. регулятор имеет вид:

$$u^*(0,x) = -L(0)x = -\frac{12114273589}{1189853561}x_1 - \frac{1091464770}{1189853561}x_2$$

$$u^*(1,x) = -L(1)x = -\frac{121}{111}x_1 - \frac{121}{1332}x_2$$

$$u^*(2,x) = -L(2)x = -\frac{11}{122}x_1$$

2) Синтезируем наблюдатель

Наблюдатель полного порядка опред. ур-ием:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(k)[y(k) - C\hat{x}(k)]; \quad \hat{x}(0) = X_0^*$$

Получим матрицу $A - KC = \begin{pmatrix} 11 - 11K(1) & 1 - K(1) \\ 1 - 11K(2) & -K(2) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 11 - 11K_1 - \lambda & 1 - K_1 \\ 1 - 11K_2 & -K_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Характ. ур-е $\lambda^2 + (11K_1 + K_2 - 11)\lambda + K_1 - 1 = 0 \Rightarrow K_1 = 1; K_2 = 0$

Наблюдатель полного порядка имеет вид:

$$\hat{x}_1(k+1) = 11\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + 1(11x_1(k) + x_2(k) - 11\hat{x}_1(k) - \hat{x}_2(k)); \quad x_{01}^* = 4$$

$$\hat{x}_2(k+1) = \hat{x}_1(k) + 11u(k); \quad x_{02}^* = 4$$

3) Получим искомое ур-е с накоплением информации:

$$u^*(0) = -\frac{12114273589}{1189853561}\hat{x}_1(0) - \frac{1091464770}{1189853561}\hat{x}_2(0)$$

$$u^*(1) = -\frac{121}{111}\hat{x}_1(1) - \frac{121}{1332}\hat{x}_2(1)$$

$$u^*(2) = -\frac{11}{122}\hat{x}_1(2)$$