1. Классификация полулинейных уравнений второго порядка в точке.

- совпадает с файлом вопросов от 24.05.21

Определение линейного и **полулинейного** уравнения:

Линейное уравнение второго порядка имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x). \qquad (1)$$

В настоящей теме мы также будем рассматривать полулинейные уравнения второго порядка вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(\nabla u, u, x) = 0. \qquad (2)$$

Матрица А:

Построим матрицу $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Без ограничения общности $A^T = A$. Действительно, поскольку для функций из $C^2(\Omega)$ $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$, имеет место равенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(x) u_{x_i x_j}$, где $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ симметричны по индексам i, j.

Тип уравнения (2) в точке x^0 полностью определяется главным символов в этой точке. Пусть n_+ — количество положительных собственных значений, n_- — количество отрицательных собственных значений, n_0 — кратность нулевого собственного значения матрицы $A(x^0)$ (или $n_0 = 0$, если $\det A(x^0) \neq 0$).

- Уравнение (2) имеет *эллиптический* тип в точке x^0, если $n_+ = n$ или $n_- = n$.
- Уравнение (2) имеет *гиперболический* тип в точке x^0, если $n_+ = n - 1$, $n_- = 1$ или $n_- = n - 1$, $n_+ = 1$.
- Уравнение (2) имеет *ультрагиперболический* тип в точке x^0, если $n_0 = 0$, $n_+ > 1$, $n_- > 1$.
- Уравнение (2) имеет *параболический* тип в точке x^0, если $n_0 = 1$, $n_+ = n - 1$ или $n_0 = 1$, $n_- = n - 1$.

Может, еще нужно сказать про **главный символ**:

Зафиксируем точку $x^0 \in \Omega$. Главный символ представляет собой квадратичную форму

$$q(x^0; \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \xi_i \xi_j = \xi^T A(x^0) \xi.$$

2. Алгоритм приведения к каноническому виду полулинейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в старшей части. - *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + F(\nabla u, u, x) = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим полулинейное уравнение с постоянными коэффициентами в старшей части. Перепишем уравнение (2) в виде

$$\operatorname{tr}(AH_x(u)) + F(\nabla_x u, u, x) = 0. \qquad (3)$$

Сделаем невырожденную линейную замену $y = Rx$ в уравнении (3):

$$\operatorname{tr}\left(AR^T H_y(u) R\right) + F\left(R\nabla_y u, u, R^{-1} y\right) = 0 \qquad (4)$$

(мы оставили прежнее обозначение неизвестной функции после замены переменных).

$\operatorname{tr}(PR) = \operatorname{tr}(RP) \Rightarrow$ след произведения нескольких матриц не изменяется при циклической перестановке сомножителей.

Т.о. уравнение (4) можно переписать в виде

$$\operatorname{tr}\left(RAR^T H_y(u)\right) + F\left(R\nabla_y u, u, R^{-1} y\right) = 0. \qquad (5)$$

Пусть $\xi = S\eta$ — ортогональное преобразование, приводящее главный символ к каноническому виду. Тогда замена $y = S^T x$ приводит уравнение к каноническому виду

$$\lambda_1 u_{y_1 y_1} + \ldots \lambda_n u_{y_n y_n} + F\left(S^T \nabla_y u, u, Sy\right) = 0.$$

Проблема: поиск собственных значений и собственных векторов матрицы A связан с решением алгебраического уравнения n-ой степени. По определению ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение. Откажемся от этого требования и расширим класс возможных преобразований до группы всех невырожденных линейных преобразований $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Дано: полулинейное уравнение второго порядка (2).
Требуется: определить тип и привести уравнение к каноническому виду.

Алгоритм 1.1

1. Записать главный символ уравнения — квадратичную форму $q = q(\xi)$.
2. Методом Лагранжа найти преобразование $\eta = P\xi$, приводящее квадратичную форму $q = q(\xi)$ к каноническому виду.
3. Сделать замену переменных $y = P^{-T}x$ и записать канонический вид

$$\sigma_1 u_{y_1y_1} + \ldots + \sigma_n u_{y_ny_n} + F\left(P^{-T}\nabla_y u, u, P^T y\right) = 0.$$

---

3. Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Уравнение характеристик, характеристики. - *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Вспомним классификацию полулинейных уравнений. Матрица старшей части имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение для неё суть

$$k^2 - (a+c)k + ac - b^2 = 0 \Rightarrow k_1k_2 = ac - b^2.$$

- $-\det A = b^2 - ac > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип, матрица старшей части его канонического вида есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $\widetilde{a} = -\widetilde{c} \neq 0, \widetilde{b} = 0;$
- $-\det A = b^2 - ac = 0,\ a + c \neq 0 \Rightarrow$ параболический тип, матрица старшей части его канонического вида есть $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \widetilde{a} = \widetilde{b} = 0, \widetilde{c} \neq 0;$
- $-\det A = b^2 - ac < 0 \Rightarrow$ эллиптический тип, матрица старшей части его канонического вида есть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \widetilde{b} = 0, \widetilde{a} = \widetilde{c} \neq 0.$

Нельзя просто так сказать, что есть уравнение характеристик. Нужно сначала сделать замену переменных, покрутить и тд. тп, ссылаясь на другие уравнения. Поэтому получилось много… И еще сначала вставлены формулы, на которые ссылаются.

Рассмотрим полулинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \ldots = 0. \qquad (1)$$

Здесь a, b, c — 'хорошие' функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (нам будет вполне достаточно $a, b, c \in C^1(\Omega)$), точки означают члены, содержащие неизвестную функции, её первые производные (т.е. младшую часть уравнения).

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases} \qquad (2)$$

где $\xi, \eta \in C^2$, причём замена (2) невырожденная, т.е. якобиан не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

В новых переменных уравнение (1) имеет аналогичный вид

$$\widetilde{a}u_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}u_{\xi\eta} + \widetilde{c}u_{\eta\eta} + \ldots = 0, \qquad (3)$$

где через многоточие обозначена младшая часть уравнения.

Гиперболический тип

Найдем, однако, такую замену переменных, что в уравнении (3) $\widetilde{b} \neq 0$, но $\widetilde{a} = \widetilde{c} = 0$. Если такая замена существует, то уравнение (1) приводится к виду $u_{\xi\eta} + \ldots = 0$ (второй канонический вид). Поиск такой замены приводит к уравнению

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \qquad (4)$$

От нас требуется найти два независимых решения уравнения (4) и проверить, что $\widetilde{b} \neq 0$. Пусть $a \neq 0$ в окрестности точки, где уравнение (1) имеет гиперболический тип. Так как $b^2 - ac > 0$, уравнение (4) можно переписать в виде

$$a(\xi_x - \lambda_1\xi_y)(\xi_x - \lambda_2\xi_y) = 0, \qquad (5)$$

где $\lambda_{1,2}$ — вещественные корни уравнения

$$a(x,y)\lambda^2 + 2b(x,y)\lambda + c(x,y) = 0.$$

Рассмотрим уравнение в частных производных первого порядка $\xi_x - \lambda_1\xi_y = 0$. Если $\xi = \varphi(x,y)$ — нетривиальное

(отличное от постоянного) частное решение этого уравнения и в окрестности точки гиперболичности есть градиентное векторное поле функции φ, отличное от нуля во всех точках окрестности. Но тогда $\varphi(x, y) = C_1$ есть общий интеграл дифференциального уравнения $dy + \lambda_1 dx = 0$.
Действительно,

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = \lambda_1 \varphi_y dx + \varphi_y dy = \varphi_y \left(\lambda_1 dx + dy\right),$$

поэтому $d\varphi = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 dx + dy = 0$, так как $\varphi_y \neq 0$ (если $\varphi_y = 0$, то из уравнения $\xi_x - \lambda_1 \xi_y = 0 \Rightarrow \varphi_x = 0$, а мы требуем ненулевой градиент.

Замечание. Общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения $dy + \lambda_1 dx = 0$, эквивалентного явному уравнению $y' = -\lambda_1$, всегда имеет то свойство, что $\varphi_y \neq 0 \Rightarrow$ условие $\neq 0$ градиента не обременяет.

Аналогично, если $\eta = \psi(x, y)$ — нетривиальное частное решение уравнения $\xi_x - \lambda_2 \xi_y = 0$ с ненулевым градиентом, то $\psi(x, y) = C_2$ — общий интеграл уравнения $dy + \lambda_2 dx = 0$.

Формально умножая уравнения $dy + \lambda_j dx = 0, j = 1{,}2$, друг на друга и на коэффициент a, имеем

$$a(dy + \lambda_1 dx)(dy + \lambda_2 dx) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a dy^2 + a(\lambda_1 + \lambda_2) dy dx + a \lambda_1 \lambda_2 dx^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(x, y)\lambda^2 + 2b(x, y)\lambda + c(x, y) = 0 \Leftrightarrow$$

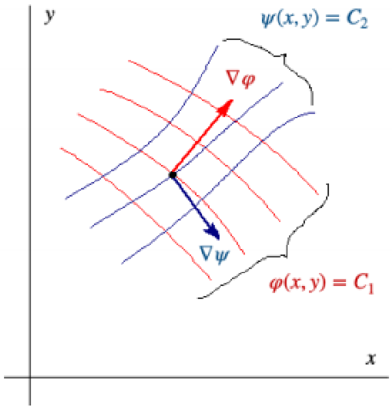
$$a(x, y) dy^2 - 2b(x, y) dy dx + c(x, y) dx^2 = 0. \quad (6)$$

Определение. Уравнение (6) называется *уравнением характеристик* для уравнения (1). Интегральная кривая уравнения (6) называется *характеристикой*.

Уравнение характеристик (6) имеет в окрестности гиперболического типа два *трансверсальных* семейства характеристик $\varphi(x, y) = C_1$ и $\psi(x, y) = C_2$. Действительно, неравенство $b^2 - ac > 0$ означает, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, откуда следует независимость градиентов функций φ и ψ. Замена

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

приводит уравнение (1) к виду $2\widetilde{b}u_{\xi\eta} + \ldots = 0$. Из трансверсальности семейств характеристик следует также, что $\widetilde{b} \neq 0 \Rightarrow$ канонический вид $u_{\xi\eta} + \ldots = 0$.



---

4. Алгоритм приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.- *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Рассмотрим полулинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + \ldots = 0. \qquad (6)$$

Здесь a, b, c — «хорошие» функции в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (нам будет достаточно $a, b, c \in C^1$), точки означают члены, содержащие только неизвестную функции и ее первые производные.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y), \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\xi, \eta \in C^2(\Omega)$, причем замена (7) невырожденная, т.е. якобиан не принимает нулевое значение в области Ω:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

В новых переменных уравнение (6) имеет аналогичный вид

$$\widetilde{a}u_{\xi\xi} + 2\widetilde{b}u_{\xi\eta} + \widetilde{c}u_{\eta\eta} + \ldots = 0, \qquad (8)$$

где через многоточие обозначена младшая часть уравнения. Выпишем выражения для коэффициентов в старшей части уравнения (8):

$$\widetilde{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2,$$
$$\widetilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y,$$
$$\widetilde{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2.$$

- $b^2 - ac > 0$ (гиперболический тип) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \widetilde{a} = -\widetilde{c} \neq 0, \widetilde{b} = 0.$
- $b^2 - ac = 0$ (параболический тип) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{a} = \tilde{b} = 0, \tilde{c} \neq 0.$
- $b^2 - ac < 0$ (эллиптический тип) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{b} = 0, \tilde{a} = \tilde{c} \neq 0.$

---

5. Линейные дифференциальные операторы (ЛДО), символ и главный символ. Эллиптические ЛДО. Эллиптические ЛДО второго порядка, дивергентная форма эллиптического ЛДО второго порядка. Оператор Лапласа. - *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Определение 1.1

Линейным дифференциальным оператором (ЛДО) порядка m называется оператор $\mathcal{L} : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, действующий на гладкие функции $u \in C^\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha u$$

Определение 1.2

Символом ЛДО называется функция $P : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида $P(x;\xi) := \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ где $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

Главным символом ЛДО называется функция $P_0 : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ вида $P_0(x;\xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$.

Определение 2.1

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ называется *эллиптическим* в области Ω, если для любой точки $x^0 \in \Omega$ и вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ главный символ оператора не обращается в нуль:

$$\forall x^0 \in \Omega \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x^0) \xi^\alpha \neq 0.$$

Сделаем несколько замечаний к определению 2.1.

- Определение 2.1 остается в силе, если коэффициенты оператора принимают комплексные значения.
- При $n > 2$ всякий эллиптический оператор имеет чётный порядок. Для размерности $n = 2$ это неверно: например, оператор первого порядка Коши-Римана $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ эллиптический.
- Однако же, если все коэффициенты оператора принимают вещественные значения, то и при $n = 2$ порядок эллиптического оператора всегда чётный.

Дивергентная форма эллиптических операторов второго порядка

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ — её замыкание. Дивергентная форма эллиптического оператора второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) u_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_i(x) u\right) + c(x) u, \qquad (1)$$

где матрица $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ положительно определена для всех $x \in \overline{\Omega}$. Лаконичный вид формулы (1):

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x) \nabla u\right) + \operatorname{div}\left(\vec{b}(x) u\right) + c(x) u, \qquad (2)$$

где $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$. По умолчанию можно считать, что функции a_{ij}, b_i и c бесконечно дифференцируемые (гладкие) в $\overline{\Omega}$.

Фундаментальное решение оператора Лапласа: $\Delta E(x) = \delta(x)$. Если $x \neq 0$, то $\Delta E(x) = 0$.

Утверждение. Функция

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\omega_{n-1}} \dfrac{1}{|x|^{n-2}} \text{ при } n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|x| \text{ при } n = 2, \end{cases}$$

где ω_{n-1}— гиперплощадь ($(n-1)$-мерный объём) единичной гиперсферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, есть фундаментальное решение оператора Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

ГУГОЛ

дифференциальный оператор называется *эллиптическим*, *гиперболическим* или *параболическим*, если он определяется дифференциальным выражением соответствующего типа. Иногда рассматриваются функции F, зависящие от производных всех порядков (например, в виде формальной линейной комбинации их)

6. Области и границы, классы гладкости границ. Классические функциональные пространства. Носитель функции, пространства основных функций.- *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

В теории эллиптических операторов рассматриваются краевые задачи. Напомню, что *областью* в $\mathbb{R}^n$ называется всякое открытое линейно связное множество. *Границей* области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех её граничных точек. Обозначение: $\partial\Omega$.

Граница области принадлежит классу C^k (где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ или $k = \infty$), если каждая точка $x^0 \in \partial\Omega$ допускает такую окрестность $U(x^0) \subset \mathbb{R}^n$, что кусок границы $U_{\partial\Omega}(x^0) = \partial\Omega \cap U(x^0)$ имеет представление $x_j = \varphi(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где φ есть k раз непрерывно дифференцируемая функция $(n-1)$-ой переменной на открытом множестве определения. Обозначение: $\partial\Omega \in C^k$.

Кроме принадлежности $\partial\Omega$ классу гладкости C^k, будем предполагать, что область всегда (локально) находится по одну сторону от своей границы.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание Ω. Следующие функциональные пространства относят к *классическим*.

- $C^k(\Omega)$ — пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых функций в области Ω. $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций в Ω.
- $C^\infty(\Omega) = \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$ — пространство всех гладких (бесконечно дифференцируемых) функций в Ω.
- $C^k(\overline{\Omega})$ — подпространство в $C^k(\Omega)$ функций, допускающих непрерывное продолжение на $\partial\Omega$ вместе со всеми производными до k-го порядка включительно. $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ — пространство всех непрерывных на $\overline{\Omega}$ функций.
- $C^\infty(\overline{\Omega}) = \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$ — пространство всех гладких (бесконечно дифференцируемых) функций в $\overline{\Omega}$.

К сожалению, компактно-открытая топология пространства $C(\Omega)$ (а также пространства $C(\overline{\Omega})$ для неограниченной области) не порождается какой-либо нормой. Счастливое исключение — пространство $C(\overline{\Omega})$ для ограниченной области Ω.

Для последнего пространства компактно-открытая топология задаётся хорошо известной нормой $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$. Равномерная сходимость последовательности из $C(\overline{\Omega})$ и сходимость последовательности в смысле указанной нормы эквивалентны. Из критерия Коши равномерной сходимости следует, что $C(\overline{\Omega})$ — банахово пространство (на самом деле, банахова алгебра, если вспомнить об умножении функций).

Аналогично для пространств $C^k(\overline{\Omega})$ $(k < \infty)$, если $\overline{\Omega}$ есть компакт, сходимость в смысле нормы $\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})}$ эквивалентна равномерной сходимости последовательности функций и всех производных до k-го порядка включительно к соответствующим производным предельной функции.

Определение 2.3

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Носитель* функции $u \in C(\Omega)$ есть замыкание (в топологии $\mathbb{R}^n$) множества всех точек, где функция не равна нулю: $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$. Функция $u \in C(\overline{\Omega})$ называется *финитной* в области Ω, если её носитель $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ и компакт. Пространство всех финитных непрерывных в области Ω функций обозначается $C_0(\Omega)$.

Пространство $C_0^k(\Omega) = C_0(\Omega) \cap C^k(\Omega)$ состоит из всех финитных k раз непрерывно дифференцируемых в области Ω функций. Финитная бесконечно дифференцируемая в области Ω функция называется *основной*. Пространство всех основных функций обозначается $\mathcal{D}(\Omega)$ ($\mathcal{D}$ от французского слова *distribution* — распределение).

---

7. Постановка задачи Дирихле, задачи Неймана и задачи Робена для уравнения с эллиптическим оператором второго порядка. Внутренние краевые задачи.- *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Задача Дирихле

Поставим три классические краевые задачи для эллиптического оператора второго порядка $\mathcal{L}$ вида (2). Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ с непустой границей $\partial\Omega \in C^k$ ($k = 0$ для первой задачи, $k = 1$ для второй и третьей), $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ — известные функции.

Пусть $\mathcal{L}$ — оператор вида (2), f — заданная функция в области Ω, φ — заданная функция на $\partial\Omega$. Задача Дирихле (первая краевая задача) имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f,\ x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \tag{3}$$

(где $u|_{\partial\Omega}$ — след функции на границе области Ω). Классическим решением задачи (3) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — частное решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, удовлетворяющее краевому условию Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Задача Неймана

Пусть $\partial\Omega \in C^1$. Тогда на границе области Ω определено непрерывное поле единичных внешних нормалей $\vec{\nu}(x)$, $x \in \partial\Omega$. Производная по направлению внешней нормали функции $u \in C^1(\overline{\Omega})$ обозначается $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}$ и называется *нормальной производной*. Задача Неймана (вторая краевая задача) имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x),\ x \in \Omega, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{\partial\Omega} \nu_j = \varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Классическим решением задачи (4) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ — частное решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, удовлетворяющее краевому условию Неймана $A(x)\nabla u|_{\partial\Omega} \cdot \vec{\nu} = \varphi$. Если $\mathcal{L} = -\Delta$ (противоположный оператор Лапласа), то $A(x) = E$, а условие Неймана есть просто $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\big|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Задача Робена

Рассмотрим на $\partial\Omega \in C^1$ функцию $\sigma \in C(\partial\Omega)$.Третья краевая задача (задача Робена) имеет вид

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x),\ x \in \Omega, \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\bigg|_{\partial\Omega} \nu_j + u|_{\partial\Omega}\,\sigma = \varphi. \end{cases} \tag{5}$$

Классическим решением задачи (5) называется функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ — частное решение уравнения $\mathcal{L}u = f$, удовлетворяющее третьему краевому условию $A(x)\nabla u|_{\partial\Omega} \cdot \vec{\nu} + u|_{\partial\Omega}\,\sigma = \varphi$.

Пусть X — пространство решений, Y — пространство правых частей (данных) задачи (3), (4) или (5). В пространствах X, Y задана топология или хотя бы задан класс сходящихся последовательностей. Краевая задача суть линейный оператор $X \to Y$. Например, для задачи (3) имеем оператор

$$C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right) \ni u \mapsto \left(\mathcal{L}u,\, u|_{\partial\Omega}\right) \in C(\Omega) \times C(\partial\Omega).$$

Уравнение Пуассона

Теорема. Пусть $\varphi \in C\left(S_R\right)$. Тогда формула

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\omega_{n-1}R} \int\limits_{S_R} \frac{\varphi(x)ds_x}{\left(R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma\right)^{n/2}}, \tag{4}$$

где γ — угол между x и x^0, даёт единственное классическое решение $u \in C^2\left(B_R\right) \cap C\left(\overline{B}_R\right)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре B_R.

Формула (4) называется *формулой (интегралом) Пуассона*.

8. Корректность по Адамару краевых задач. - *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Определение 2.4

Линейная задача называется *корректно поставленной* (или *корректной* по Адамару) в классе пространств (X, Y), если выполнены три положения:

1) *существование*: решение существует для любой правой части из пространства Y;
2) *единственность*: решение единственно в пространстве X;
3) *устойчивость*: разрешающий оператор, сопоставляющий правым частям из Y единственное решение из X, непрерывен.

Пример. Пусть X, Y — банаховы пространства. Рассмотрим линейный оператор $A : X \to Y$. Условие 1) в определении 2.4 означает, что оператор A сюръективен $(\mathrm{Im}\, A = Y)$, условие 2) — что оператор A инъективен $(\mathrm{Ker}\, A = 0)$. Следовательно, если выполнены условия 1) и 2), то оператор A биективен. Наконец, условие 3) означает, что обратный оператор A^{-1} непрерывен. По теореме Банаха непрерывности A и A^{-1} эквивалентны.

---

9. Формально сопряжённый ЛДО. Определение фундаментального решения ЛДО. Фундаментальное решение ЛДО с постоянными коэффициентами. - *совпадает с файлом вопросов от 24.05.21*

Определение 2.5

Линейное пространство основных функций в Ω состоит из всех финитных бесконечно дифференцируемых функций в этой области. Обозначение: $C_0^\infty(\Omega)$ или $\mathcal{D}(\Omega)$.

Определим сходимость в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$.

Определение 2.7

Линейный непрерывный функционал $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ называется *обобщённой функцией* или *распределением*. Непрерывность понимается в смысле Гейне: для любой последовательности $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, сходящейся к $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f(\varphi_j) \to f(\varphi)$, $j \to \infty$.

Определение 2.11

ЛДО $\mathcal{L}^*$ формально сопряжён ЛДО $\mathcal{L}$, если для любой обобщённой функции $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо равенство

$$(\mathcal{L}u, \varphi) = (u, \mathcal{L}^*\varphi).$$

Формально сопряжённый линейный дифференциальный оператор существует, единственен и выражается формулой

$$\mathcal{L}^* u = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x)u).$$

Например, если $\mathcal{L}$ — оператор вида (2), то
$\mathcal{L}^* u = -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) - \mathrm{div}\left(\vec{b}(x)u\right) + c(x)u$ (проверьте). Оператор Лапласа формально сопряжён сам себе. Очевидно, что $\mathcal{L}^{**} = \mathcal{L}$.

Определение 2.12

Фундаментальным решением ЛДО $\mathcal{L}$ называется семейство обобщённых функций $E(\cdot; x^0) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $x^0 \in \Omega$, такое, что $\mathcal{L}E(\cdot; x^0) = \delta_{x^0}$ для любой $x^0 \in \Omega$. Или, что эквивалентно, в любой $x^0 \in \Omega$ и для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\left(\mathcal{L}E(\cdot; x^0), \varphi\right) \equiv \left(E(\cdot; x^0), \mathcal{L}^*\varphi\right) = \varphi(x^0).$$

Определение 2.10

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$. *Дельта-функцией* Дирака называется сингулярная обобщённая функция $\delta_{x^0} \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, действующая на основные функции по формуле $(\delta_{x^0}, \varphi) = \varphi\left(x^0\right)$.

Если оператор $\mathcal{L}$ имеет постоянные коэффициенты, то можно предложить альтернативное определение.

Определение 2.13

Фундаментальным решением ЛДО с постоянными коэффициентами $\mathcal{L}$ называется такая обобщённая функция $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta$.

Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ — фундаментальное решение ЛДО $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами в смысле определения 2.13. Тогда фундаментальное решение $E(\cdot; x^0) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ оператора $\mathcal{L}$ в смысле определения 2.12 получается из $\mathcal{E}$ заменой $x \mapsto x - x^0$, т.е. $E(x; x^0) = \mathcal{E}(x - x^0)$.

Теорема 2.1

Всякий ЛДО с постоянными коэффициентами допускает фундаментальное решение $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Пример 1. Рассмотрим ЛДО $\mathcal{L}$ порядка m, действующий в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ по формуле

$$\mathcal{L}y = a_0(x)y^{(m)} + \ldots + a_{m-1}(x)y' + a_m(x)y, \qquad (6)$$

Теорема 2.2

Пусть функция a_0 нигде не обращается в нуль на прямой. Тогда фундаментальное решение ЛДО (6) имеет вид $E(x; x_0) = y(x; x_0)\theta(x - x_0)$, где θ — функция Хевисайда, а y — решение задачи Коши $\mathcal{L}y = 0$, $y(x_0; x_0) = 0, \ldots, y^{(m-2)}(x_0; x_0) = 0$, $y^{(m-1)}(x_0; x_0) = 1$ (производные берутся по первому аргументу).

---

10. Формула Гаусса–Остроградского, формула многомерного интегрирования по частям. Первая формула Грина для оператора Лапласа. Вторая формула Грина для оператора Лапласа.

Формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{\nu}\, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dx, \text{ где } \quad \vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T,\ a_j \in C^1(\overline{\Omega}),$$

Дадим многомерное обобщение хорошо известной формулы интегрирования по частям из математического анализа

$$\int_a^b uv'\mathrm{d}x = uv|_a^b - \int_a^b vu'\mathrm{d}x,$$

где $u, v \in C^1[a, b]$. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, $\vec{\nu}$ — непрерывное поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда для любого индекса $j = 1, \dots, n$

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\nu_j\mathrm{d}s - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}x, \qquad (1)$$

где $\mathrm{d}s$ — элемент гиперплощади. Формула (1) легко следует из формулы Гаусса–Остроградского $\int\limits_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot\vec{\nu}\,ds = \int\limits_\Omega \mathrm{div}\,\vec{a}\mathrm{d}x$, где

Из формулы (1) следуют две формулы Грина для оператора Лапласа (не путайте их с классической формулой Грина $\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$). Для функций $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ первая формула Грина

$$\int_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x \qquad (2)$$

получается суммированием по $j = 1, \dots, n$ соотношений $\int\limits_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_j}\nu_j\mathrm{d}s - \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x$. Если в формуле (2) поменять функции u и v местами, а затем вычесть две первые формулы Грина друг из друга, получится вторая формула Грина для оператора Лапласа:

$$\int_\Omega u\Delta v\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\right)\mathrm{d}s + \int_\Omega v\Delta u\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

11. Фундаментальное решение оператора Лапласа: общая формула, свойства.

Утверждение 3.1

Функция

$$E(x;x^0) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-2)\omega_{n-1}} \dfrac{1}{|x-x^0|^{n-2}} \text{ при } n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln|x-x^0| \text{ при } n = 2, \end{cases}$$

где ω_{n-1} — гиперплощадь ($(n-1)$-мерный объём) единичной гиперсферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, есть фундаментальное решение оператора Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Объём единичной гиперсферы можно вычислить с помощью следующей цепочки равенств:

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2} \mathrm{d}r \int_{S_r} \mathrm{d}s = \omega_{n-1} \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} \mathrm{d}r = \frac{1}{2} \omega_{n-1} \Gamma(n/2).$$

Отсюда следует, что $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}$. Здесь $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ — знаменитая гамма-функция Эйлера. Например, $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 4\pi$, $\omega_3 = 2\pi^2$. Т.к. $\Gamma\left(\frac{2k}{2}\right) = (k-1)!$ $(k = 1, 2, \dots)$, $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$, имеем $\omega_{2k-1} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}$, $\omega_{2k} = \frac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}$, где $k \in \mathbb{N}$.

Отметим следующие свойства фундаментального решения оператора Лапласа, легко следующие из явной формулы утверждения 3.1:

- $E(x;x^0) = \mathcal{E}(|x-x^0|)$, где $\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r$ при $n = 2$ и $\mathcal{E}(r) = \frac{-1}{(n-2)\omega_{n-1}} r^{2-n}$ при $n > 2$;
- $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ $E(\cdot;x^0) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{x^0\})$;
- $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ $\Delta_x E(x;x^0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^0\}$, т.е. $E(x;x^0)$ — гармоническая относительно $x \neq x^0$ функция для каждой фиксированной точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$;
- $\forall x^0 \in \mathbb{R}^n$ $E(\cdot;x^0) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ (докажите самостоятельно).

12. Формула интегрального представления функций из пространства $C^2(\underline{\Omega}), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \partial\Omega \in C^1$

Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $B_\varepsilon(x^0) \Subset \Omega$. Через $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon(x^0)$ обозначим ε-перфорацию области Ω в точке x^0.

Применим вторую формулу Грина (3) к фунциям $E(\cdot; x^0) \in C^\infty(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ и $u \in C^2(\overline{\Omega}_\varepsilon)$, учитывая, что $\Delta_x E(x; x^0) = 0$ в Ω_ε:

$$0 = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u \Delta_x E \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \left(E \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} - u \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} \right) \mathrm{d}s_x + \\ + \int\limits_{S_\varepsilon(x^0)} \left(E \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}'} - u \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}'} \right) \mathrm{d}s_x - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} E \Delta u \mathrm{d}x \,. \tag{5}$$

Повторяя рассуждения при доказательстве утверждения 3.1, можно убедиться, что при $\varepsilon \to +0$ интеграл по $S_\varepsilon(x^0)$ в правой части равенства (5) стремится к $u(x^0)$. Переход к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (5) даёт формулу интегрального представления функций из пространства $C^2(\overline{\Omega})$.

Утверждение 3.2

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда для любой функции $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и любой точки $x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial E}{\partial \vec{\nu}} \mathrm{d}s_x - \int\limits_{\partial\Omega} E \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \mathrm{d}s_x + \int\limits_{\Omega} E \Delta u \mathrm{d}x \,. \tag{6}$$

Пусть функция $u \in C^2(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в Ω уравнению Пуассона $\Delta u = f$ и условиям на границе $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, $-\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}|_{\partial\Omega} = \psi$ ($f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi, \psi \in C(\partial\Omega)$). Тогда в любой точке $x^0 \in \Omega$

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x) \partial_{\vec{\nu}} E(x; x^0) \mathrm{d}s_x + \int\limits_{\partial\Omega} E(x; x^0) \psi(x) \mathrm{d}s_x + \int\limits_{\Omega} E(x; x^0) f(x) \mathrm{d}x.$$

Последняя формула даёт общее решение уравнение Пуасссона $\Delta u = f$, где $f \in C^1(\overline{\Omega})$, из пространства $C^2(\overline{\Omega})$. Но функции φ и ψ в этой формуле зависят друг от друга!

13. Потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя, объёмный потенциал (n=3). Свойства потенциала (одного из трёх н

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $S \in C^1$ — ориентируемая поверхность (в частности, $S = \partial\Omega$) в $\mathbb{R}^3$, $\vec{\nu}$ — ориентирующее непрерывное поле единичных нормалей к S, $\rho \in C(\Omega)$, $\rho_1, \rho_2 \in C(S)$. Тогда

- интеграл $\iiint_\Omega \rho(x)|x - x^0|^{-1}\mathrm{d}x$ называется *объёмным потенциалом* с плотностью ρ в области Ω;
- интеграл $\iint_S \rho_1(x)|x - x^0|^{-1}\mathrm{d}s_x$ называется *потенциалом простого слоя* с плотностью ρ_1 на поверхности S;
- интеграл $\iint_S \rho_2(x)\partial_{\vec{\nu}}|x - x^0|^{-1}\mathrm{d}s_x$ называется *потенциалом двойного слоя* с плотностью ρ_2 на поверхности S.

Электростатическая интерпретация потенциалов:

- потенциал электростатического поля, создаваемого зарядами, распределёнными в области Ω с плотностью ρ (сосредоточенными на поверхности S, имеющими поверхностную плотность ρ_1), есть объёмный потенциал (потенциал простого слоя);
- если же на поверхности S сосредоточены диполи с поверхностной плотностью дипольных моментов ρ_2, то создаваемое ими электростатическое поле имеет потенциал двойного слоя.

Свойства объёмного потенциала

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \in C^0$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$, $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Тогда объёмный потенциал $V_0(x^0) = \int_\Omega \frac{\rho(x)}{|x-x^0|}\mathrm{d}x$ существует для всех $x^0 \in \mathbb{R}^3$.
Отметим следующие свойства объёмного потенциала:

1) $V_0 \in C^1(\mathbb{R}^3) \cap C_b(\mathbb{R}^3)$;
2) $V_0(x^0) = O\left(\frac{1}{|x^0|}\right)$, если $|x^0| \to \infty$;
3) $\Delta V_0 = 0$ в области Q;
4) пусть $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, то $V_0 \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению Пуассона $\Delta V_0 = -4\pi\rho(x^0)$, $x^0 \in \Omega$.

Если продолжить функцию ρ нулём в Q и обозначить это продолжение через $\tilde{\rho}$, то объёмный потенциал есть *обобщённое решение* уравнения Пуассона $\Delta V_0 = -4\pi\tilde{\rho}$ в трёхмерном евклидовом пространстве. Кроме того, $V_0 \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$, где $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$ — (локальное) пространство Соболева первого порядка в $\mathbb{R}^3$.

14. Логарифмический потенциал простой кривой, логарифмический потенциал двойной кривой, потенциал площади. Свойства потенциала (одного из трёх на выбор).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Gamma \in C^1$ — кривая (в частности, $\Gamma = \partial\Omega$) в $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\nu}$ — ориентирующее поле непрерывных единичных нормалей к Γ, $\rho \in C(\Omega)$, $\rho_1, \rho_2 \in C(\Gamma)$. Тогда

- интеграл $V_0(x^0) = \iint\limits_{\Omega} \rho(x) \ln \dfrac{1}{|x - x^0|} dx$ называется *логарифмическим потенциалом площади* с плотностью ρ для области Ω;
- интеграл $V_1(x^0) = \int\limits_{\Gamma} \rho_1(x) \ln \dfrac{1}{|x - x^0|} ds_x$ называется *логарифмическим потенциалом простой кривой* с плотностью ρ_1 для кривой Γ;
- интеграл $V_2(x^0) = \int\limits_{\Gamma} \rho_2(x) \partial_{\overrightarrow{\nu}} \ln \dfrac{1}{|x - x^0|} ds_x$ называется *логарифмическим потенциалом двойной кривой* с плотностью ρ_2 для кривой Γ.

СВОЙСТВА:

Потенциал простой кривой

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$ в $\mathbb{R}^2$ — замкнутая гладкая кривая Жордана (Ω — внутренняя область), $\rho_2 \in C(\Gamma)$, $Q = \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$. Тогда потенциал простой кривой $V_2(x^0) = \oint_\Gamma \rho_2(x) \ln \frac{1}{|x - x^0|} ds_x$ существует для всех $x^0 \in \mathbb{R}^2$. Отметим следующие свойства логарифмического потенциала двойной кривой:

1) $V_1 \in C_b\left(\mathbb{R}^3\right)$ (непрерывная и ограниченная функция);
2) $V_1(x^0) = O\left(\ln \frac{1}{|x^0|}\right)$ при $|x^0| \to \infty$;
3) $\Delta V_1 = 0$ в отрытом множестве Q;
4) **разрыв нормальной производной потенциала простой кривой**: пусть $x^0 \in \Gamma$, тогда потенциал простого слоя имеет нормальные производные (по направлению внешней нормали к Γ относительно внутренней области Ω) в точке x^0 извне $\partial_{\vec{\nu}} V_1^+(x^0)$, изнутри $\partial_{\vec{\nu}} V_1^-(x^0)$, связанные соотношением
$$\partial_{\vec{\nu}} V_1^-(x^0) - \partial_{\vec{\nu}} V_1^+(x^0) = 2\pi\rho_1(x^0).$$

Потенциал двойной кривой

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$ в $\mathbb{R}^2$ — замкнутая гладкая кривая Жордана (Ω — внутренняя область), $\rho_2 \in C(\Gamma)$, $Q = \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$. Тогда потенциал двойной кривой $V_2(x^0) = \oint_\Gamma \rho_2(x) \frac{\partial}{\partial \vec{\nu}} \ln \frac{1}{|x - x^0|} ds_x$ существует для всех $x^0 \in \mathbb{R}^2$. Отметим следующие свойства логарифмического потенциала двойной кривой:

1) $V_2 \in L_\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ (ограниченность);

2) $V_2(x^0) = O\left(\dfrac{1}{|x^0|}\right)$ при $|x^0| \to \infty$;

3) $\Delta V_2 = 0$ в отрытом множестве Q;

4) **разрыв потенциала двойной кривой**: пусть $x^0 \in \Gamma$, тогда потенциал двойной кривой имеет в точке x^0 предел извне $V_2^+(x^0)$ (из внешней области), предел изнутри в точке $V_2^-(x^0)$ (из внутренней области Ω), значение $V_2(x^0)$ в самой точке x^0, и они связаны формулами Сохоцкого

$$V_2^+(x^0) = \pi\rho_2(x^0) + V_2(x^0),$$

$$V_2^-(x^0) = -\pi\rho_2(x^0) + V_2(x^0)\,.$$

Из этих формул следует, что

$$V_2^+(x^0) + V_2^-(x^0) = 2V_2(x^0).$$

Потенциал площади

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \in C^0$, $\rho \in C(\overline{\Omega})$, $Q = \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$. Тогда потенциал площади $V_0(x^0) = \displaystyle\int_\Omega \frac{\rho(x)}{|x - x^0|}dx$ существует для всех $x^0 \in \mathbb{R}^2$ и удовлетворяет следующим свойствам:

1) $V_0 \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap C_b(\mathbb{R}^2)$;

2) $V_0(x^0) = O\left(\ln \dfrac{1}{|x^0|}\right)$, если $|x^0| \to \infty$;

3) $\Delta V_0 = 0$ в открытом множестве Q;

4) пусть $\rho \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, тогда $V_0 \in C^2(\Omega)$ и удовлетворяет в Ω уравнению Пуассона $\Delta V_0 = -2\pi\rho(x^0)$, $x^0 \in \Omega$.

15. Функция Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона: определение, свойства. Формула интегрального представления решения внутренней задачи Дирихле.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi\,. \end{cases} \qquad (1)$$

$\partial\Omega \in C^1$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \Rightarrow$
$\exists!\, u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Определение. Функцией-корректором задачи Дирихле (1) называется такое семейство функций $g(\,\cdot\,; x^0) \in C^2(\overline{\Omega})$, $x^0 \in \Omega$, что

- $\forall x^0 \in \Omega \ \Delta_x g(x; x^0) = 0$, $x \in \Omega$ (гармоническая относительно $x \in \Omega$);
- $\forall x^0 \in \Omega \ g(x; x^0) = -E(x - x^0)$, $x \in \partial\Omega$.

Согласно второй формуле Грина для любых $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и $x^0 \in \Omega$

$$0 = \int\limits_{\Omega} g(x; x^0)\Delta u\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{\nu}} - g\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} \right) ds_x. \ (2)$$

Складывая равенство (2) с интегральным представлением, получим

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} \left(E(x - x^0) + g(x; x^0)\right) \Delta u\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\nu}} \left(E(x - x^0) + g(x; x^0)\right) u\, ds_x.$$

Определение. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω называется семейство функций

$$G(x; x^0) = E(x - x^0) + g(x; x^0),\ x, x^0 \in \Omega,\ x \neq x^0,$$

где E — фундаментальное решение оператора Лапласа, g — функция-корректор задачи (1).

Утверждение. Если в $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, существует классическое решение задачи Дирихле $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и для области Ω существует функция Грина, то $\forall x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления решения

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} G(x; x^0) f(x) dx + \int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\overrightarrow{\nu}} G(x; x^0) \varphi(x) ds_x. \qquad (3)$$

Это утверждение имеет тот недостаток, что требует существование классического решения задачи Дирихле, принадлежащего пространству $C^2(\overline{\Omega})$. Оказывается, если $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$ и существует функция Грина, то для $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и $\varphi \in C(\partial\Omega)$ формула (3) даёт единственное классическое решение задачи Дирихле (1), принадлежащее пространству $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Свойства функции Грина

Утверждение 3.4 (свойства функции Грина)

Пусть G — функция Грина задачи (9), тогда:

- $G(x^0; x^1) = G(x^1; x^0)$ для всех $x^0, x^1 \in \Omega$, $x^0 \neq x^1$ (симметрия функции Грина);
- $G(x^0; x) < 0$ для всех $x^0, x \in \Omega$, $x^0 \neq x$ (функции Грина отрицательна).

16. Функция Грина внутренней однозначно разрешимой задачи Робена для уравнения Пуассона: определение, свойства. Формула интегрального представления решения внутренней задачи Робена.

Рассмотрим задачу Робена для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega \Subset \mathbb{R}^n, \\ \left. \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x) u \right|_{\partial\Omega} = \varphi . \end{cases} \quad (5)$$

Предположим, что соответствующая однородная задача (когда $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$) имеет единственное тривиальное решение. В теории краевых задач мы покажем, что решение задачи (5) единственно, если $\sigma(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \partial\Omega$; при этом функция σ не равна нулю тождественно. Это, однако, условие достаточное, необходимости (для единственности решения) в нём нет.

Обозначим граничный оператор задачи (5) через $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{B}u := \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x)u \Bigg|_{\partial\Omega}.$$

Определение. Функцией-корректором задачи Робена (5) называется такое семейство функций $g(\,\cdot\,; x^0) \in C^2(\overline{\Omega})$, $x^0 \in \Omega$, что

- $\forall x^0 \in \Omega$ $\Delta_x g(x; x^0) = 0$, $x \in \Omega$ (гармоническая относительно $x \in \Omega$);
- $\forall x^0 \in \Omega$ $\mathscr{B}g(x; x^0) = -\mathscr{B}E(x - x^0)$.

Согласно второй формуле Грина для любых $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и $x^0 \in \Omega$

$$0 = \int\limits_{\Omega} g(x; x^0) f(x) dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial g}{\partial \overrightarrow{\nu}} - g \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} \right) ds_x =$$

$$= \int\limits_{\Omega} g f dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(-u\sigma g - u \frac{\partial E}{\partial \overrightarrow{\nu}} - u\sigma E - g\varphi + g\sigma u \right) ds_x. \quad (6)$$

Складывая равенство (6) с формулой представления через потенциалы

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{\nu}} E(x - x^0) ds - \int\limits_{\partial\Omega} E(x - x^0) \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} ds + \int\limits_{\Omega} E(x - x^0) \Delta u dx,$$

имеем формулу

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} \left(E(x - x^0) + g(x; x^0) \right) \Delta u dx - \int\limits_{\partial\Omega} \left(E(x - x^0) + g(x; x^0) \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x) u \right) ds_x.$$

Определение. Функцией Грина задачи Робена (5) для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω называется семейство функций

$$G(x; x^0) = E(x - x^0) + g(x; x^0),\ x, x^0 \in \Omega, x \neq x^0,$$

где E — фундаментальное решение оператора Лапласа, g — функция-корректор задачи (5).

Отметим, что функция Грина есть версия фундаментального решения лапласиана, удовлетворяющая однородному третьему краевому, т.е. $\forall x^0 \in \Omega$ функция Грина удовлетворяет задаче Робена вида

$$\begin{cases} \Delta_x G(\,\cdot\,; x^0) = \delta(x - x^0), x \in \Omega, \\ \mathscr{B}G \equiv \partial_{\overrightarrow{\nu}} G(x; x^0) + \sigma(x) G(x, x^0)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Утверждение. Если в $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, существует единственное классическое решение задачи Робена $u \in C^2(\overline{\Omega})$ и для Ω существует функция Грина задачи Робена, то $\forall x^0 \in \Omega$ верна формула интегрального представления решения

$$u(x^0) = \int\limits_{\Omega} G(x; x^0) f(x) dx + \int\limits_{\partial\Omega} - G(x; x^0) \varphi(x) ds_x. \quad (7)$$

Если однородная задача (5) (при $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$) имеет нетривиальные решения, ситуация осложняется. Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Неймана для уравнения Пуассона. Она имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f, x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}}\Bigg|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \quad (8)$$

где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\overrightarrow{\nu}$ — поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

17. Необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана. Функция Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона. Формула интегрального представления решений внутренней задачи Неймана.

Необходимое условие разрешимости задачи Неймана имеет вид интегрального равенства

$$\int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,ds$$

и легко следует из второй формулы Грина для оператора Лапласа, применённой для u и тождественной единицы.

$$\begin{cases} \Delta_x G(x;x^0) = \delta(x-x^0),\ x\in\Omega, \\ \partial_{\overrightarrow{\nu}} G(x;x^0)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$ $\Rightarrow$ такой функции Грина не существует, потому что $1 = \int_{\Omega} \delta(x-x^0)\,dx \neq \int_{\partial\Omega} 0\,ds = 0$. Зато $1 = \int_{\Omega} \delta(x-x^0)\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{ds_x}{\mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Omega)} = 1$.

Таким образом, функция Грина задачи Неймана имеет вид $G\left(x;x^0\right) = E\left(x-x^0\right) + g\left(x;x^0\right)$, где E — фундаментальное решение оператора Лапласа, g — функция-корректор, т.е. $\forall x^0 \in \Omega$ гармоническая относительно $x\in\Omega$ функция, удовлетворяющая краевому условию

$\partial_{\overrightarrow{\nu}_x} g\left(x;x^0\right) = \dfrac{1}{|\partial\Omega|} - \partial_{\overrightarrow{\nu}_x} E\left(x;x^0\right),\ x\in\partial\Omega$, где

$|\partial\Omega| = \mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Omega)$ — гиперплощадь $\partial\Omega$. Т.е. функция Грина задачи Неймана удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta_x G(x;x^0) = \delta(x-x^0),\ x\in\Omega, \\ \partial_{\overrightarrow{\nu}} G(x;x^0)\Big|_{\partial\Omega} = \dfrac{1}{\mathrm{mes}_{n-1}(\partial\Omega)}. \end{cases}$$

Для указанного класса областей ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega\in C^1$) существует единственная (с точностью до аддитивной постоянной) функция Грина задачи Неймана. Классическое решение задачи Неймана $u\in C^2(\Omega)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ существует, если $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$, и его можно найти по формуле $u\left(x^0\right) = \int_\Omega G\left(x; x^0\right) f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} - G\left(x; x^0\right) \varphi(x)\, ds_x + C$, где C — произвольная постоянная.

Ответ. Внутренняя задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = f(x),\ x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\vec{\nu}$ — поле внешних нормалей к $\partial\Omega$. Необходимое уловие разрешимости задачи Неймана имеет вид интегрального равенства

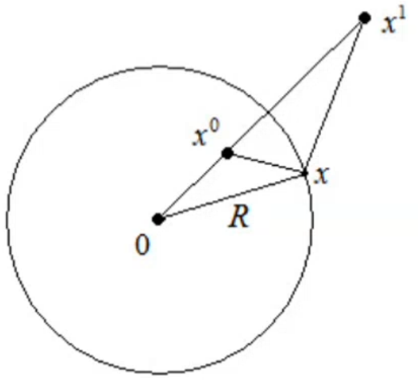
$$\int\limits_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)\,\mathrm{d}s$$

и легко следует из второй формулы Грина для оператора Лапласа, применённой для u и тождественной единицы. Функция Грина задачи Неймана имеет вид $G\left(x; x^0\right) = E\left(x; x^0\right) + g\left(x; x^0\right)$, где E — фундаментальное решение оператора Лапласа, g — функция-корректор, т.е. $\forall x^0 \in \Omega$ гармоническая по $x \in \Omega$ функция, удовлетворяющая краевому условию $\partial_{\vec{\nu}_x} g\left(x; x^0\right) = \frac{1}{|\partial\Omega|} - \partial_{\vec{\nu}_x} E\left(x; x^0\right)$, $x \in \partial\Omega$, $|\partial\Omega| = \mathrm{mes}_{n-1}\partial\Omega$ — гиперплощадь $\partial\Omega$. Для указанного класса областей ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$) существует единственная с точностью до аддитивной постоянной функция Грина задачи Неймана. Классическое решение задачи Неймана $u \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ существует, принадлежит пространству $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, если $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$, и его можно найти по формуле $u\left(x^0\right) = \int_\Omega G\left(x; x^0\right) f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} G\left(x; x^0\right) \varphi(x)\,\mathrm{d}s_x + C$, где C — произвольная постоянная.

18. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Формула Пуассона.

Функция Грина задачи Дирихле в шаре

Здесь x^1 лежит вне шара B_R на луче из O, проходящем через $x^0 \neq 0$. $\mathcal{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x - x^1|\right)$ — гармоническая функция относительно x при $x \neq x^1$, так как она получена из фундаментального решения конформным преобразованием инверсии. Точки x^0 и x^1 называются *симметричными* относительно сферы S_R, если $|x^0||x^1| = R^2$.



Для $x \in S_R$ треугольники x^0Ox и xOx^1 подобны для симметричных точек x^0 и x^1. Из подобия следует, что $\frac{|x^0|}{R} = \frac{R}{|x^1|} = \frac{|x-x^0|}{|x-x^1|}$. Поэтому, когда $x \in S_R$, имеем $G(x;x^0) = \mathcal{E}(|x - x^0|) - \mathcal{E}\left(\frac{|x^0|}{R}|x - x^1|\right) = 0$.

Для n=3:

Теорема. Пусть $\varphi \in C\left(S_R\right)$. Тогда формула

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{\omega_{n-1}R} \int\limits_{S_R} \frac{\varphi(x)ds_x}{\left(R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos\gamma\right)^{n/2}}, \quad (4)$$

где γ — угол между x и x^0, даёт единственное классическое решение $u \in C^2\left(B_R\right) \cap C\left(\overline{B}_R\right)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре B_R.

Формула (4) называется *формулой (интегралом) Пуассона*.

Формула Пуассона при $n = 2$ имеет вид

$$u(|x^0|\cos\psi, |x^0|\sin\psi) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta)}{R^2 + |x^0|^2 - 2R|x^0|\cos(\psi - \theta)} R d\theta,$$

где $x_1^0 = |x^0|\cos\psi$, $x_2^0 = |x^0|\sin\psi$, $\gamma = \psi - \theta$.

---

19. Уравнение Лапласа, гармонические функции. Теоремы о среднем для гармонических функций.

$$-\Delta u = f(x)$$

Здесь $f(x)$ — заданная функция. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным уравнением Лапласа*. При $f(x) = 0$ имеем *однородное уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^2 u}{dx_k^2}$$ - лапласиан

Функция $u(x)$ называется *гармонической в конечной области* Ω, если она в этой области дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет однородному уравнению Лапласа.

Теоремы о среднем

Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$ — гармоническая функция. Простое наблюдение: $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \mathrm{d}s = 0$ (теорема о потоке тепла). Действительно, по второй формуле Грина для функций u и тождественной единицы $0 = \int\limits_{\Omega} \Delta u \mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} ds$. Физический смысл теоремы о потоке тепла: при стационарном распределении температуры внутри ограниченной области Ω поток тепла через её поверхность равен нулю.

Теорема 4.1 (о среднем по сфере)

Пусть $u \in C^2(B_R(x^0)) \cap C\left(\overline{B}_R(x^0)\right)$ — гармоническая функция в шаре $B_R(x^0)$. Тогда

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_{n-1} R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x^0)} u(x) \mathrm{d}s_x. \tag{1}$$

Теорема 4.2 (о среднем по шару)

Пусть $u \in C^2(B_R(x^0)) \cap C\left(\overline{B}_R(x^0)\right)$ — гармоническая функция в шаре $B_R(x^0)$. Тогда

$$u(x^0) = \frac{1}{\kappa_n R^n} \int\limits_{B_R(x^0)} u(x) \mathrm{d}x$$

где $\kappa_n = \frac{\omega_{n-1}}{n}$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

20. Принцип максимума для гармонических функций. Единственность решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Теорема 4.3 (принцип максимума гармонических функций)

Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — гармоническая функция в области Ω, $M = \sup\limits_{x \in \Omega} u(x)$. Если $u(x^0) = M$ в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, то $u \equiv M$ в Ω.

Другими словами, непостоянная и ограниченная сверху гармоническая функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ достигает свой максимум на границе области.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Следствие 4.1

Гармоническая функция $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, отличная от постоянной, удовлетворяет в любой точке $x \in \Omega$ неравенству

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u. \qquad (3)$$

Следствие 4.2

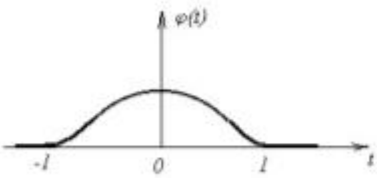
Классическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона единственно.

Для доказательства единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона необходимо показать, что задача Дирихле для уравнения Лапласа с однородным граничным условием имеет единственное тривиальное решение. Но это немедленно следует из неравенства (3).

21. Оператор усреднения: определение, свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций.

Техника усреднения

Функция $\varphi(t) = C_n \exp\left(\frac{-1}{1-t^2}\right)$ при $|t| < 1$, $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$, где $C_n > 0$ — некоторая постоянная (см. далее), получила название «шапочка» благодаря виду своего графика:



Перечислим некоторые свойства функции φ:

- $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$;
- $\varphi(-t) \equiv \varphi(t)$;
- $\forall t \in \mathbb{R}\ \varphi(t) \geqslant 0$;
- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Константа C_n определяется из условия нормировки:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)\mathrm{d}x = \omega_{n-1} \int\limits_0^1 r^{n-1}\varphi(r)\mathrm{d}r = 1.$$

Определение 5.2

Ядром усреднения радиуса $h > 0$ называется функция $\zeta_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, определённая формулой $\zeta_h(x) = \frac{1}{h^n}\varphi\left(\frac{|x|}{h}\right)$.

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $x^0 \in \Omega$ и $0 < h < \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$. Положим

$$(J_h u)(x^0) = \int\limits_{B_h(x^0)} \zeta_h(x^0 - y)u(y)\mathrm{d}y = (\zeta_h * u)(x^0). \qquad (1)$$

Оператор J_h называется *оператором усреднения* радиуса h. Его основная задача — сглаживание функций. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то $J_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Лемма 5.1 (об усреднении)

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда $\|J_h u - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $h \to +0$, т.е. квадратично интегрируемая функция может быть сколь угодно точно (в смысле L_2-нормы) аппроксимирована своими средними.

Теорема 4.4

Функция $u \in C^2(\Omega)$, гармоническая в области Ω, бесконечно дифференцируема в Ω.

---

22. Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонический функций.

Поговорим об априорных оценках. Априорные оценки позволяют оценить решение и/или производные решения уравнения без предъявление какой-либо для него формулы. Они бывают разных видов (точечные, интегральные, внутренние, глобальные) и чрезвычайно важны в функциональной и качественной теории УЧП.

Внутренняя точечная априорная оценка производных гармонических функций

Теорема 4.5

Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — гармоническая функция в области $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $Q \Subset \Omega$ и $d = \operatorname{dist}(Q, \partial\Omega) > 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ и любой точки $x^0 \in \overline{Q}$ при $|\alpha| = k$ имеет место неравенство

$$|D^\alpha u(x^0)| \leqslant \left(\frac{nk}{d}\right)^k \max_{\overline{\Omega}} |u|\,.$$

Область омега должна быть ограниченной. Q - строго внутренняя подобласть. d - расстояние от Q до d омега.

---

23. *Аналитичность гармонических функций. Теорема Лиувилля для гармонических функций.*

Аналитичность гармонических функций

Определение 4.1

Функция u в области Ω называется *аналитической*, если в некоторой окрестности любой точки $x^0 \in \Omega$ её можно представить в виде сходящегося степенного ряда относительно $x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0$.

В теории функций одной комплексной переменной доказывается, что голоморфная (комплексно дифференцируемая) функция f в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ допускает разложение Тейлора в окрестности любой точки Ω. Но вспомним, что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ — гармонические функции...

Теорема 4.6

Гармоническая в Ω функция u аналитична в Ω.

Теорема Лиувилля для гармонических функций

Теорема 4.7

Пусть u — гармоническая функция во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и существуют константы $m \geqslant 0$, $C \geqslant 0$ такие, что при любом $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|u(x)| \leqslant C(1 + |x|^m). \tag{4}$$

Тогда u — многочлен относительно $x_1, \ldots, x_n$ и $\deg u \leqslant [m]$.

---

24. Теорема об устранимой особенности гармонической функции.

Теорема об устранимой особенности

Теорема 4.8

Пусть u – гармоническая функция в $\Omega \backslash x^0$ ($x^0 \in \Omega$). Рассмотрим функцию $m(\rho) = \sup_{S_\rho(x^0)} |u|$. Предположим, что

$$m(\rho) \leqslant |\mathcal{E}(\rho)| a(\rho), \tag{5}$$

где $a(\rho) \to 0$ при $\rho \to +0$. Тогда особенность в точке x^0 устранима, т.е. существует гармоническое продолжение функции u в точку x^0.

---

25. *Обратная теорема о среднем для гармонических функций. Теоремы о сходимости гармонических функций.*

Обратная теорема о среднем

Для доказательства утверждений о сходимости последовательностей функций нам будет нужен один критерий гармоничности непрерывной функции.

Теорема 4.9

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C(\Omega)$ и для любой сферы $S_R(x^0) \subset \Omega$ выполнено свойство среднего

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_{n-1}R^{n-1}} \int\limits_{S_R(x^0)} u(x)\mathrm{d}s_x. \qquad (8)$$

Тогда u — гармоническая функция в Ω.

Теорема 4.10 (теорема Вейерштрасса для гармонических функций)

Пусть последовательность гармонических функций $\{u_k : \Omega \to \mathbb{R}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на любом компакте $K \subset \Omega$.

Действительно, в силу равномерной сходимости возможен предельный переход в формуле (8). Поэтому предел будет гармонической функцией.

Смутило слово теоремЫ, тк нашла только одну, нашла еще инфу, но не знаю, можно ли вставить: ссылка страница 191

ГУГОЛ

Т е о р е м а 2.9. *Пусть $\{u_n\}$ – монотонно неубывающая последовательность гармонических в области Ω функций. Предположим, что для некоторой точки $y \in \Omega$ последовательность $\{u_n(y)\}$ ограничена. Тогда последовательность $\{u_n\}$ равномерно на любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$ сходится к гармонической функции.*

Теорема 4 (о равномерно сходящейся последовательности гармонических функций). *Если последовательность функций $u_k(x, y)$, $k = 1, 2, \ldots$, гармонических внутри конечной области G и непрерывных в $\overline{G}$, сходится равномерно на границе G, то она равномерно сходится во всей области G. При этом предельная функция будет гармонической внутри G.*

---

26. Субгармонические и супергармонические непрерывные функции: определение и свойства.

Во-первых надо знать что такое классические субгармонические, супергармонические функции.

Следствие 4.3

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется: а) *субгармонической*, если $\Delta u \geqslant 0$ в Ω, б) *супергармонической*, если $\Delta u \leqslant 0$ в Ω. Для субгармонических функций $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ справедлив принцип максимума, для супергармонических функций — принцип минимума.

А в вопросе 26 на самом деле определяются **непрерывные** субгармонические, супергармонические функции.

Определение 4.2

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Функция $u \in C(\Omega)$ называется *субгармонической* (*супергармонической*) в Ω, если для любого шара $B \Subset \Omega$ и любой функции $h \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, гармонической в B и удовлетворяющей неравенству $u \leqslant h$ ($u \geqslant h$) на ∂B, имеет место неравенство $u \leqslant h$ ($u \geqslant h$) в B.

По свойствам пока нашел ток вот

Свойства субгармонических функций

- Если $u \in C(\overline{\Omega})$ — субгармоническая функция, $v \in C(\overline{\Omega})$ — супергармоническая функция и $u \leqslant v$ на $\partial\Omega$, то либо $u < v$ в Ω, либо $u \equiv v$ (доказательство — упражнение).

ГУГОЛ

Основные свойства [править | править код]

1. f — гармоническая функция, только если она одновременно является суб- и супергармонической.
2. Если $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f \in \mathcal{C}^2(G)$ ($\mathcal{C}^2(G)$ — класс дважды непрерывно дифференцируемых на G функций), то для субгармоничности f необходимо и достаточно выполнение на G условия $\Delta f \geqslant 0$ (Δ — оператор Лапласа).
3. Субгармоническая функция не может достигать своего максимума внутри области своей субгармоничности (сравните с принципом максимума для аналитических функций). Если максимум все же достигается, то функция тождественно равна постоянной.

Свойства [править | править код]

- Для любой аналитической функции $f(z)$ определённой на открытом множестве комплексной плоскости, функция

$$\varphi(z) = \log|f(z)|$$

является субгармонической.

27. Множество субфункций внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Теорема Перрона.

Пусть теперь Ω – ограниченная область, а φ – ограниченная функция на $\partial\Omega$. Непрерывная в $\overline{\Omega}$ субгармоническая функция u называется *субфункцией* относительно φ, если она удовлетворяет неравенству $u \leqslant \varphi$ на $\partial\Omega$. Аналогично непрерывная в $\overline{\Omega}$ супергармоническая функция u называется *суперфункцией* относительно φ, если $u \geqslant \varphi$ на $\partial\Omega$.

В силу принципа максимума каждая субфункция меньше или равна любой суперфункции. Субфункциями (суперфункциями) являются, в частности, постоянные функции, значения которых не больше $\inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$ (не меньше $\sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$). Обозначим через S_φ множество всех субфункций для φ.

Основной результат метода Перрона содержится в следующей теореме.

Теорема 2.12. *Функция* $u(x) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(x)$ *гармонична в* Ω.

---

28. Локальные барьеры и регулярные точки границы. Критерий существования классического решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Достаточное условие внешней кривой. Достаточное условие внешней сферы.

В методе Перрона изучение граничного поведения решения существенно отделено от вопроса о его существовании. Непрерывное достижение решением Перрона заданных граничных значений определяется геометрическими свойствами границы рассматриваемой области и изучается с помощью *барьерных* функций.

Пусть ξ — точка $\partial\Omega$. Функция $w = w_\xi$, принадлежащая $C^0(\overline{\Omega})$, называется *барьером* в точке ξ для Ω, если

(i) w супергармонична в Ω,

(ii) $w > 0$ в $\overline{\Omega} - \xi$; $w(\xi) = 0$.

Более общее определение барьера требует, что супергармоническая функция w является лишь непрерывной и положительной в области Ω и удовлетворяет условию $w(x) \to 0$ при $x \to \xi$. Результаты этого раздела в том же самом виде справедливы и для таких слабых барьеров (см., напри-

Но самое главное, что надо ответить в этом вопросе:

Теорема 2.14. *Классическая задача Дирихле в ограниченной области разрешима для любых непрерывных граничных значений тогда и только тогда, когда все граничные точки области регулярны.*

Слово значений заменить на слово функций.

Можно подчеркнуть слова для любых непрерывных функций.

29. Пространство $L_2(\omega)$: определение и простые свойства. Теорема о плотности пространства непрерывных функций $C(\underline{\Omega})$в пространстве $L_2(\Omega)$.

Разговор идёт о пространствах Лебега

Определение 5.1

Пространство квадратично интегрируемых функций $L_2(\Omega)$ состоит из всех (классов) измеримых функций с конечным интегралом Лебега $\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \mathrm{d}x$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ определяется формулой

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Про плотность:

Плотность $C(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$

Теорема 5.1

Пространство непрерывных функций $C(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

30. Непрерывность функций из $L_2(\Omega)$в среднеквадратичном. Лемма об усреднении функций из $L_2(\Omega)$.

Непрерывность в среднеквадратичном

Для доказательства леммы об усреднении нам потребуется одно свойство квадратично интегрируемых функций (аналог равномерной непрерывности функций из $C(\overline{\Omega})$).

Теорема 5.2

Функции из $L_2(\Omega)$ непрерывны в среднеквадратичном, т.е. для любой $u \in L_2(\Omega)$ $\|u(\cdot + z) - u(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $z \to 0$.

Замечание. Функции продолжаются нулем вне Ω.

Лемма об усреднении

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, $x^0 \in \Omega$ и $0 < h < \mathrm{dist}(x^0, \partial\Omega)$. Положим

$$(J_h u)(x^0) = \int\limits_{B_h(x^0)} \zeta_h(x^0 - y)u(y)\mathrm{d}y = (\zeta_h * u)(x^0). \qquad (1)$$

Оператор J_h называется *оператором усреднения* радиуса h. Его основная задача — сглаживание функций. Если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то $J_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (упражнение).
Продолжим функцию $u \in L_2(\Omega)$ нулём вне Ω и рассмотрим оператор усреднения $J_h : L_{2,loc}(\mathbb{R}^n) \to L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$, действующий по формуле (1).

Лемма 5.1 (об усреднении)

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда $\|J_h u - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $h \to +0$, т.е. квадратично интегрируемая функция может быть сколь угодно точно (в смысле L_2-нормы) аппроксимирована своими средними.

31. Теорема о плотности основных функций $D(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Лемма Дюбуа-Реймона.

Теорема 5.3

Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Лемма 5.2 (Paul du Bois-Reymond / Поль Дюбуа-Реймон)

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Тогда $u(x) = 0$ п.в. в Ω.

---

32. Определение и основные свойства обобщённых производных. Лемма об усреднении обобщённых производных.

Определение 5.4

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Будем называть *обобщённой производной* функции $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ функцию $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$, если для любой основной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega D^\alpha u\,\varphi\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u\,D^\alpha \varphi\,\mathrm{d}x\,.$$

Основные свойства обобщённых производных (о. п.).

- О. п. определена единственным образом. Это немедленно следует из леммы 5.2.
- О. п. не зависит от порядка дифференцирования, а именно: пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $u \in L_{2,loc}(\Omega)$, существуют о. п. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^\beta(D^\alpha u) \in L_{2,loc}(\Omega)$, тогда существует о.п. $D^{\alpha+\beta} u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u)$.

Свойства обобщённых производных

Замечание. В отличие от классической производной, из существования о.п. порядка k не следует существование о.п. порядка $k-1$ (придумайте пример функции $u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^2)$, когда существует о.п. $u_{x_1 x_2}$, но не существует о.п. u_{x_1}).

- Линейность о.п.: если существуют о.п. $D^\alpha u, D^\alpha v \in L_{2,loc}(\Omega)$, то существует о.п. $D^\alpha(\lambda u + \mu v) \in L_{2,loc}(\Omega)$ и $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ (λ, μ — произвольные числа).
- Пусть $v \in C^1(\Omega)$, $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и существует о.п. $u_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$. Тогда существует о.п. $(vu)_{x_j} \in L_{2,loc}(\Omega)$ и справедливо тождество Лейбница $(vu)_{x_j} = v_{x_j} u + v u_{x_j}$.
- Пусть $\Omega' \subset \Omega$, $u \in L_2(\Omega)$ и существует о.п. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$. Тогда сужение $u|_{\Omega'}$ имеет о.п. $D^\alpha\left(u|_{\Omega'}\right) \in L_2(\Omega')$ и $D^\alpha\left(u|_{\Omega'}\right) = D^\alpha u|_{\Omega'}$.
- Пусть Ω_1, Ω_2 — две области в $\mathbb{R}^n$, $u_j \in L_2(\Omega_j)$, существуют о.п. $D^\alpha u_j \in L_2(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, и $u_1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = u_2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. Тогда существует о.п. склейки $D^\alpha u \in L_2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

Лемма 5.3

Пусть $u \in L_{2,loc}(\Omega)$ и существует о.п. $D^\alpha u \in L_{2,loc}(\Omega)$.
1. Для $x^0 \in \Omega$ при $0 < h < \operatorname{dist}(x^0, \partial\Omega)$ имеем $J_h(D^\alpha u)(x^0) = D^\alpha(J_h u)(x^0)$.
2. Для подобласти $Q \Subset \Omega$ имеем $\|J_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $h \to +0$.
3. Если $\operatorname{supp} u \subset \Omega$, то первый пункт выполнен для всех $x^0 \in \overline{\Omega}$ и $\|J_h D^\alpha u - D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $h \to +0$.

Первая часть леммы следует из свойства дифференцирования свёртки и определения 5.4. Вторая и третья часть вытекает из леммы 5.1 и свойств ядра усреднения. Слушателям предлагается доказать лемму 5.3 самостоятельно и со всей строгостью.

33. Определение и простые свойства пространств Соболева $H^k(\Omega)$.

Определение 5.5

Пусть k — натуральное число. Пространство Соболева $H^k(\Omega)$ состоит из всех (классов) функций $u \in L_2(\Omega)$, таких, что для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ при $|\alpha| \leqslant k$ существует о.п. $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$.

Простые свойства $H^k(\Omega)$

В пространстве $H^k(\Omega)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega D^\alpha u \, D^\alpha v \, \mathrm{d}x = \sum_{|\alpha| \leqslant k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} .$$

К примеру, в пространстве $H^1(\Omega)$ скалярное произведение определяется формулой $(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L_2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x$.

Простейшие свойства пространств Соболева, вытекающие из свойств обобщённых производных (доказательства — упражнения).

1. $H^k(\Omega)$ — гильбертово пространство.
2. Если $\Omega' \subset \Omega$ и $u \in H^k(\Omega)$, то $u|_{\Omega'} \in H^k(\Omega')$.
3. Если $u|_{\Omega_j} \in H^k(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, $u \in L_2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, то $u \in H^k(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.
4. Пусть $v \in C^1(\overline{\Omega})$, $u \in H^1(\Omega)$. Тогда $vu \in H^1(\Omega)$.

34. Принцип разбиения единицы для компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$.

Принцип разбиения единицы

Принцип разбиения единицы — замечательный инструмент анализа, позволяющий свести сложные глобальные задачи к локальным простым.

Теорема 5.4

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ — покрытие K открытыми множествами (I — некоторое множество индексов). Тогда существует конечная система функций $\{\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}_{j=1}^N$, такая, что

1. $\varphi(x) \geqslant 0$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$, $x \in \mathbb{R}^n$;
2. для любого $j \in \{1, \dots, N\}$ существует $i \in I$, такой, что $\operatorname{supp} \varphi_j \subset U_i$;
3. $\sum\limits_{j=1}^N \varphi_j(x) \leqslant 1$ в любой $x \in \mathbb{R}^n$ и $\sum\limits_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1$ для любой $x \in K$.

Замечание 5.1

Семейство функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ называется *разбиением единицы*, подчинённым покрытию $\{U_i\}_{i \in I}$.

35. Теорема о финитном ограниченном продолжении функций из пространств Соболева.

Теорема 5.5

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$, $\Omega \Subset Q \Subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует ограниченный оператор финитного продолжения $H^k(\Omega) \to H^k(Q)$, т.е. для любой функции $u \in H^k(\Omega)$ существует такая функция $U \in H^k(Q)$, что $U|_\Omega = u$, $\operatorname{supp} U \subset Q$ и $\|U\|_{H^k(Q)} \leqslant C\|u\|_{H^k(\Omega)}$, где константа C не зависит от u. Кроме того, существует компакт $K \subset Q$, содержащий носители всех продолжений.

Дополнительно, если кто забыл что такое продолжения

Сечением оператора $A : X \to Y$ называется правый обратный оператор $R : Y \to X$, т.е. $AR = I_Y$. Сечение оператора сужения называется *продолжением*.

---

36. Теорема о плотности пространства гладких функций в пространствах Соболева. Теорема о сепарабельности пространств Соболева.

Теорема о плотности $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $H^k(\Omega)$

Теорема 5.6

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^k(\Omega)$.

Сепарабельность пространства Соболева

Теорема 5.7

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^k$. Тогда пространство Соболева $H^k(\Omega)$ сепарабельно.

---

37. Понятие сопряжённого оператора, самосопряжённые операторы. Компактные операторы. Теорема Гильберта–Шмидта.

6) Понятие сопряжённого оператора, самосопряжённые операторы. Компактные операторы. Теорема Гильберта–Шмидта.

Ответ. Пусть H, V — векторные пространства (над полем комплексных чисел) со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_H$ и $(\cdot,\cdot)_V$, соответственно, $A : H \to V$ — линейный оператор. Оператор $A^* : V \to H$ называется *сопряжённым* к A, если для любых $h \in H$, $v \in V$ $(Ah, v)_V = (h, A^*v)_H$. Если A — ограниченный линейный оператор, то A^* существует и тоже ограничен. Пусть $V = H$ и $A^* = A$; тогда оператор A называется *самосопряжённым*. Оператор $K : H \to V$ называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если он отображает всякое ограниченное множество из H во вполне ограниченное (следовательно, предкомпактное) множество из V. Очевидно, что всякий компактный оператор есть ограниченный оператор. Если $\dim V < \infty$, то всякий линейный оператор $A : H \to V$ компактен.

Теорема Гильберта–Шмидта. Пусть K — компактный самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $(\mathrm{Ker} K)^\perp \neq 0$. Тогда его спектр $\sigma(K)$ состоит из собственных значений и нуля, 1) $\sigma_d(K) \subset \mathbb{R}$, 2) $\sigma_d(K)$ не более чем счётно, 3) каждое $\lambda \in \sigma_d(K)$, $\lambda \neq 0$, имеет конечную кратность (следует из теоремы Фредгольма), 4) множество $\sigma_d(K)$ ограничено и может имеет единственную предельную точку — нуль. Взяв из каждого собственного подпространства оператора K конечное число ортогональных элементов и объединив их в упорядоченную

систему, мы получим ортогональный базис подпространства $(\mathrm{Ker} K)^\perp$ (ортогональное дополнение в H к ядру оператора K).

Другая формулировка(тоже Байкова)

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть $K : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ортогональное дополнение ядра K бесконечномерно. Тогда все сз $\in \mathbb{R}$ представляют счётное ограниченное множество с единственной предельной точкой $\lambda = 0$. Каждое собственное подпространство (для $\neq 0$ собственных значений) конечномерно, нет присоединённых элементов. Из собственных элементов, отвечающих $\neq 0$ собственным значениям, можно построить ортонормированный базис ортогонального дополнения ядра оператора K в пространстве H.

38. Простейшая версия теоремы Реллиха–Гординга.

Теорема 5.8 (простейшая версия теоремы Реллиха—Гординга). Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно, т.е. оператор вложения $I : H^1(\Omega) \to L_2(\Omega)$ компактен.

Очевидно, что $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1(\Omega)}$, так как $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\,|\nabla u|\,\|^2_{L_2(\Omega)}$. Оператор называется компактным, если образ любого ограниченного множества предкомпактен.

---

39. Конструкция оператора следа на гиперповерхности. Компактность оператора следа.

Оператор следа. Пространство $H_0^1(\Omega)$ и пространство следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u \in H^1(\Omega)$. Как понимать $u\big|_{\partial\Omega}$?

Рассмотрим оператор следа $T : C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \to L_2(\partial\Omega)$, $Tu = u\big|_{\partial\Omega}$

Можно показать, что $\exists C_\Omega > 0$, такая, что $\forall u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$

$$\|Tu\|_{L_2(\partial\Omega)} \leqslant C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Согласно принципу непрерывного продолжения, $\exists T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$ — оператор продолжения классического оператора следа $T : C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \to L_2(\partial\Omega)$.

---

40. Два определения пространства $H^1{}_0(\Omega)$, их эквивалентность. Пространства следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$, эквивалентная нормировка пространства следов. (ответ взят из ниже расписанных вопросов)

7) Два определения пространства $H_0^1(\Omega)$, их эквивалентность. Пространства следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$, эквивалентная нормировка пространства следов.

Ответ. Пространство $H_0^1(\Omega)$ есть ядро оператора следа $T : H^1(\Omega) \to L_2(\partial\Omega)$, т.е. $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Оказывается, что $H_0^1(\Omega)$ можно получить замыканием (в смысле нормы пространства Соболева) основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$. Включение $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \subset H_0^1(\Omega)$ очевидно, а в другую сторону нужно доказывать. Пространство следов $H^{1/2}(\partial\Omega)$ есть образ оператора следа, всюду плотный в $L_2(\partial\Omega)$. Норма, эквивалентная стандартной норме пространства Соболева дробного порядка на замкнутом римановом многообразии, имеет вид $\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf\limits_{w \in T^{-1}\varphi} \|w\|_{H^1(\Omega)}$.
Относительно этой нормы пространство $H^{1/2}(\partial\Omega)$ банахово, но не гильбертово.

---

41. Теорема об эквивалентной норме.

Теорема об эквивалентной норме

Определение. Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если $\exists m, M > 0$ такие, что
$\forall x \in X\ m\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant M\|x\|$.

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Рассмотрим в пространстве $H^1(\Omega)$ билинейную симметрическую форму

$$w(u,v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}dx + \int\limits_{\Omega} q(x)uv\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} r(x)u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, ds_x.$$

---

42. Теорема вложения Соболева.

Теорема вложения Соболева

Теорема. Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^{k+[n/2]+1}$. Тогда существует вложение $H^{k+[n/2]+1}(\Omega) \subset C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, то есть каждая функция $u \in H^{k+[n/2]+1}(\Omega)$ допускает такого представителя, что он принадлежит пространству $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$. При этом данный оператор вложения есть компактный оператор между гильбертовым пространством $H^{k+[n/2]+1}(\Omega)$ и банаховым пространством $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$.

В частности, при $k = 0$ $H^{[n/2]+1}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$.

---

43. Определение обобщенных решений внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. (ответ взят из ниже расписанных вопросов)

8) Определение обобщённого решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Ответ. Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{1}$$

Обобщённым решением задачи (1) называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая краевому условию Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ (в смысле следов) и интегральному тождеству $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = 0$ для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$. Такая постановка задачи Дирихле корректна в классе правых частей $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, т.е. для каждой $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение и верна оценка $\|u\|'_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$, где $\|u\|'_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$ — эквивалентная норма пространства $H_0^1(\Omega)$, константа C зависит только от области.