№1

Основные формулы:

$$\mu_F\left([a,b)\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right).$$

ıая функция – мера, а по лемме Гейне-Бореля, она σ-аддитивна. Тогда, ı свойство непрерывности σ-аддитивных мер, получаем формулы:

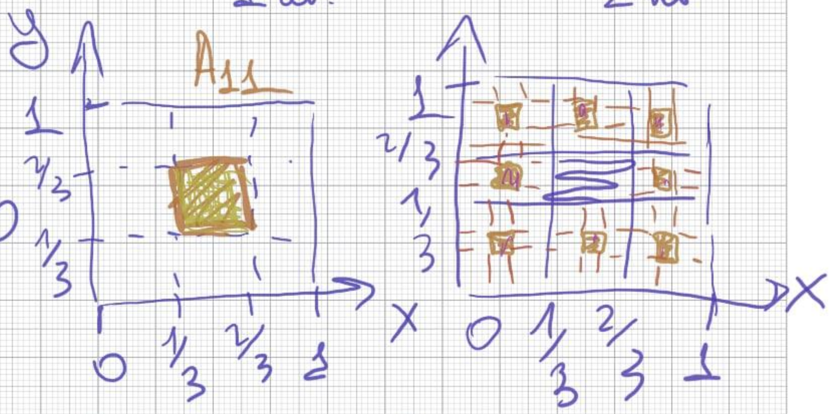
$$\mu_F\left(\left[a,b\right]\right) = \mu_F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[a,b+\frac{1}{n}\right]\right) = \mu_F\left(\lim_{n>1}\left[a,b+\frac{1}{n}\right]\right) =$$
$$= \lim_{n>1}\mu_F\left(\left[a,b+\frac{1}{n}\right]\right) = \lim_{n>1}\left(F\left(b+\frac{1}{n}\right) - F\left(a\right)\right) = F\left(b+0\right) - F\left(a\right)$$

$$\mu_F\left(\left\{a\right\}\right) = \mu_F\left(\left[a,a\right]\right) = F\left(a+0\right) - F\left(a\right)$$

$$\mu_F\left(\left(a,b\right]\right) = F\left(b+0\right) - F\left(a+0\right)$$

$$\mu_F\left(\left(a,b\right)\right) = F\left(b\right) - F\left(a+0\right)$$

Теория меры 2



Ex
Ковёр Серпинского

A_{nk} — открыты, непересек.

$A_{11} = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

n=1 1

n=2 8

8^{n-1}

$$K=[0,1]\times[0,1] \setminus \bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{8^{n-1}} A_{nk}$$

$$\mu(K)=\underbrace{\mu([0,1]\times[0,1])}_{\text{площ.}}-\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\bigsqcup_{k=1}^{8^{n-1}} A_{nk}\right)=$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{8^{n-1}}\underbrace{\mu(A_{nk})}_{\text{площадь}}=$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{8^{n-1}}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{3^n}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^{n-1}}{9^n}=$$

$$=1-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n \underset{S=\frac{b_1}{1-q}}{=} 1-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{8}{9}}=0$$

Мера Лебега – Стилтьеса

$\mu([a,b]) = b - a$ длина отр. мера Лебега

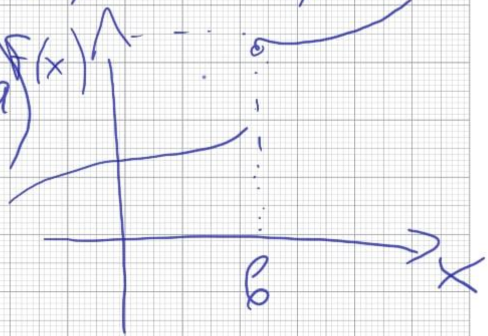
$F(x)$ 1) непрер. слева

2) монотонно не убывает

$\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$

$\mu_F([a,b]) = F(b+0) - F(a)$

$\mu_F(\{a\}) = F(a+0) - F(a)$



$\mu_F((a,b)) = F(b) - F(a+0)$

$\mu_F((a,b]) = F(b+0) - F(a+0)$

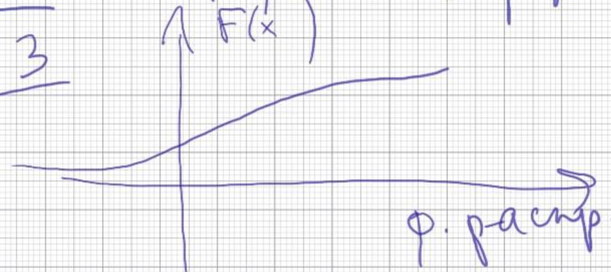
<u>Замеч</u> Равенство $\mu_F(\{a\}) = 0$ равносильно непрер. F в точке a

<u>Th.</u> μ_F – σ-аддитивная мера

<u>Ex 1</u> $F(x) = x$, $\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a) = b - a$ мера Лебега

Ex 2 $F(x) = 1$, $\mu_F([a,b)) = 1 - 1 = 0$

Ex 3



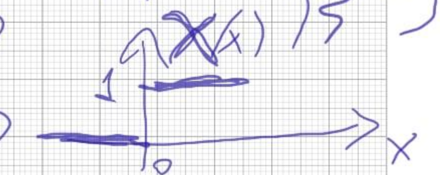
$F(-\infty) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$F(x) = P\{\xi < x\}$

Ex 4 $\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

Хэвисайд



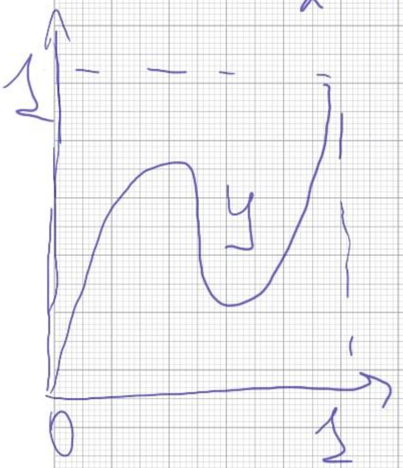
$\mu_F(\{0\}) = 1 - 0 = 1 = \delta_0$ мера Дирака

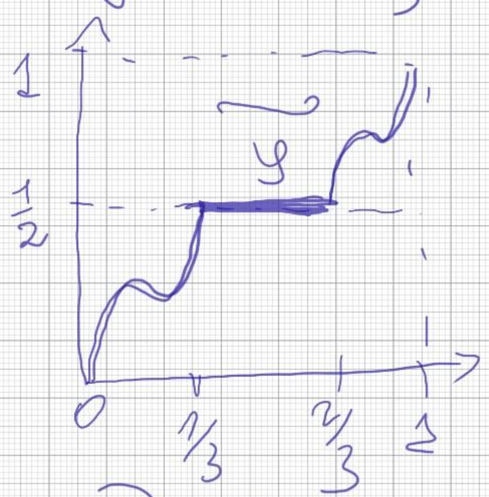
Опр Пусть X - мн-во, $x \in X$. Мерой Дирака, сосред. в т. x, назыв-ся ф-ция: $\delta_x : 2^X \to [0, +\infty]$

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Ex 6 Рассм отображ. K, которое отображает $\forall$ ф-цию $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ в ф-цию φ

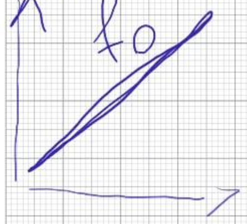
$$\tilde{y} = \begin{cases} \frac{1}{2}\, y(3x), & 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\left(1 + y(3x-2)\right), & \frac{2}{3} \le x \le 1 \end{cases}$$

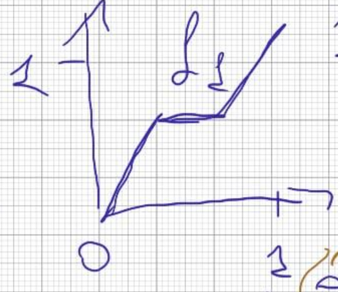


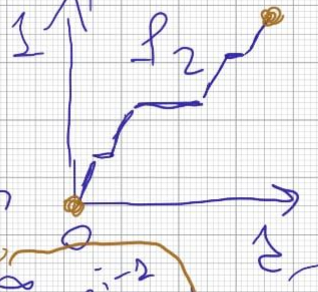


Пусть $f_0(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$. Положим $f_{n+1} = \tilde{(f_n)}$, $n \in \mathbb{N}$

Функция $f : [0,1] \to [0,1]$, опред. ф-лой $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ называется классич. ф. Кантора





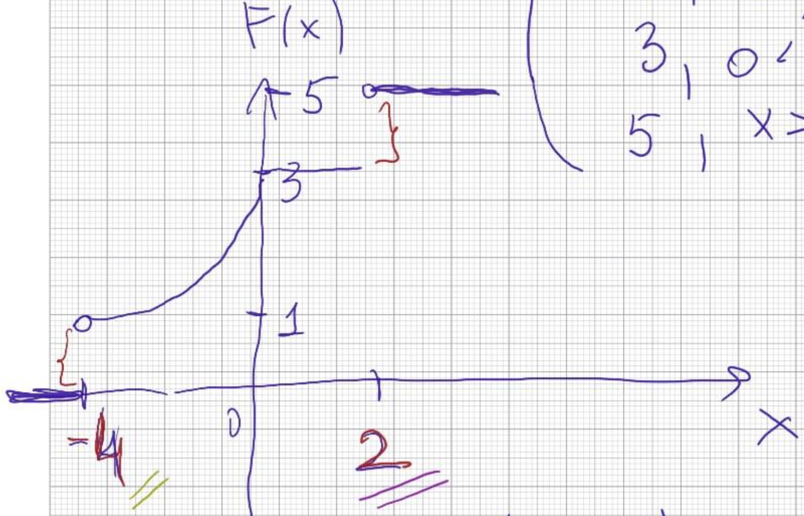


$$\mu_F(C) = \mu_F\left([0,1] \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{i-1}} A_{ik}\right) = \overset{=1}{\mu_F[0,1]} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{i-1}} \mu_F(A_{ik}) - 0 = 1$$

образ канторовой лестницы

Ex

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ -\sqrt{|x|}+3, & -4 < x \le 0 \\ 3, & 0 < x \le 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$



$$\mu_F(\{-4\}) = \underbrace{F(-4+0)}_{1} - \underbrace{F(-4)}_{0} = 1$$

$$\mu_F(\{-3\}) = 0 = F(-3+0) - F(-3)$$

$$\mu_F((-3,-2]) = F(-2+0) - F(-3+0)$$

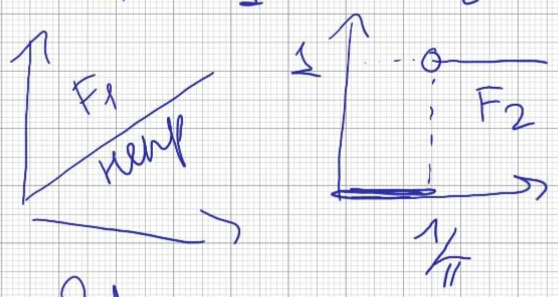
$$= (-\sqrt{2}+3) - (-\sqrt{3}+3) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\mu_F(\mathbb{Q}) = 1 + 2 = 3$$

$$\mu_F(\mathbb{Q}) = \mu_F\Big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}\Big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu_F(\{q\})$$

Всякая мера Л.-С. представима в виде суммы дискретной меры, непрерывной и сингулярной.

$$F(t) = F_1(t) + F_2(t) + \underbrace{F_3(t)}_{\text{сингул. в тервере нет}}$$



Измеримые функции

Опр Мн-во A называют измер. по Лебегу, если $\forall$ числа $\varepsilon > 0$ найд-ся такое мн-во $B \in \mathcal{R}(S)$, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Функция μ^* — м. Лебега, μ.

Опр Борелев. σ-алгеброй $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^n$ называют наим. σ-алгебру, содержащую все открыт. мн-ва в $\mathbb{R}^n$. Элементы борел. σ-алг. назыв. борел. множ-вами.

$$F_1(x)=\begin{cases} a_1, & x\in[0,b_1] \quad 0,2 \\ a_1+a_2x, & x\in(b_1,b_2] \\ a_1+a_2x+a_3x^2, & x\in(b_2,1] \end{cases}$$

0,2 0,4 $a_i\geq 0$, $i=1,2,3$

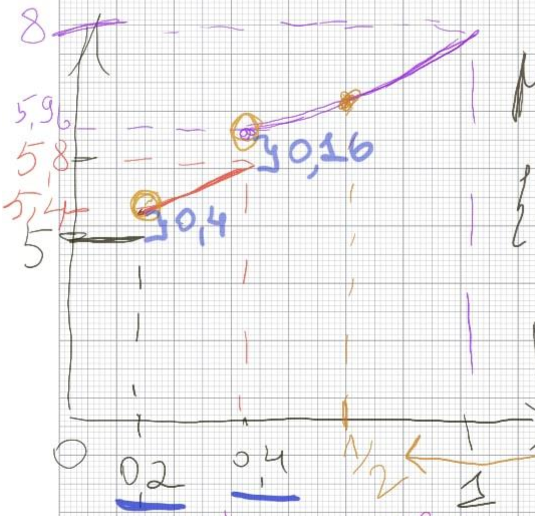
0,4

$0\leq b_1\leq b_2\leq 1$

$A_1=[b_1,b_2)\cup\{\frac{1}{2}\}$ $\mu_F(A_1)-?$

$A_2=[b_1,b_2]\setminus\mathbb{Q}$ $\mu_F(A_2)-?$

$b_1=0,2$ $b_2=0,4$ $a_1=5$ $a_2=2$ $a_3=1$



$\mu_{F_1}(A_1)=\mu_{F_1}([b_1,b_2)\cup\{\frac{1}{2}\})=\mu_{F_1}([b_1,b_2))+\mu_{F_1}(\{\frac{1}{2}\})$

$\mu_F([a,b))=F(b)-F(a)$

$\mu_F(\{a\})=F(a+0)-F(a)$

$=F_1(b_2)-F_1(b_1)-\underbrace{[F_1(\frac{1}{2}+0)-F_1(\frac{1}{2})]}_{0}=$

$=F_1(0,4)-F_1(0,2)=a_1+a_2\cdot 0,4-a_1=5+2\cdot 0,4-5=0,8$

$$\mu_{F_1}(A_2) = \mu_{F_1}([b_1, b_2] \setminus Q) =$$

$$= \mu_{\tilde{F}_1}([b_1, b_2]) - \mu_{F_1}(Q) =$$

$$= F_1(b_2+0) - F_1(b_1) - 0{,}56 =$$

$$\mu_F(Q) = \mu_F\Big(\bigsqcup_{q\in Q}\{q\}\Big) = \sum_{q\in Q}\mu_F(\{q\})$$

$$= \underbrace{0{,}4}_{\text{в т. } 0{,}2} + \underbrace{0{,}16}_{\text{в т. } 0{,}4} = 0{,}56$$

величина скачка

$$\mu_F([a,b]) = F(b+0) - F(a)$$

$$= F_1(0{,}4+0) - F_1(0{,}2) - 0{,}56$$

$$= (a_1 + a_2\cdot 0{,}4 + a_3\cdot 0{,}4^2) - a_1 - 0{,}56$$

$$= \cancel{5} + 2\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}4^2 - \cancel{5} - 0{,}56$$

$$= 0{,}8 + 0{,}16 - 0{,}56 = 0{,}4.$$

Сходимости функциональных последовательностей

Опр 1 Поточечная сходимость

$$f_n \to f$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \text{ где } f(t) -$$

– предельная функция.

Опр 2 Равномерная сходимость

$$f_n \rightrightarrows f$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = 0$$

Опр 3 Сходимость почти всюду

$$f_n \xrightarrow{п.в} f$$

$$\mu\left(\{t : \lim_{n\to\infty} f_n(t) \neq f(t)\}\right) = 0$$

Опр 4 Сходимость по мере

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\left(\{t : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

равном. сх

$\Downarrow$

поточечн. сх

$\Downarrow$

почти всюду

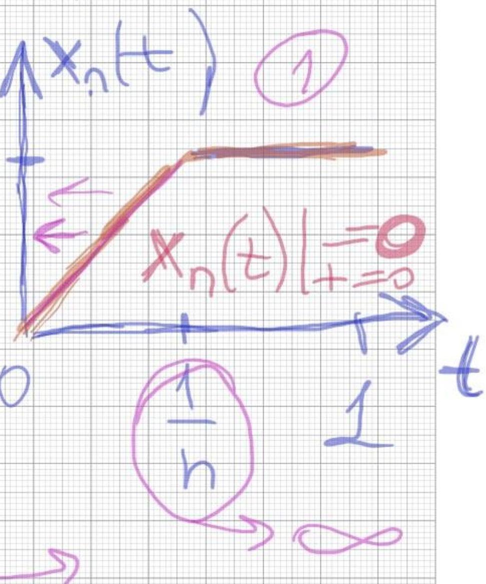
$\Downarrow$ (th. Лебега)

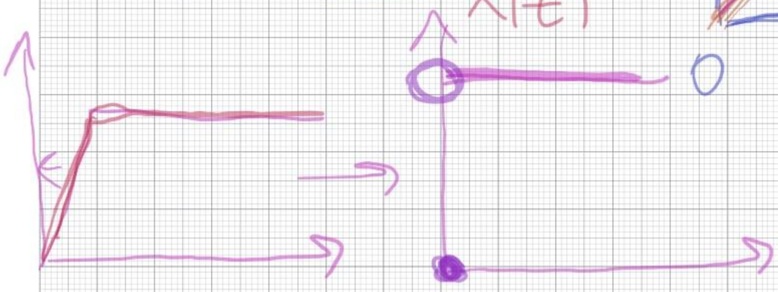
$[0,1]$ по мере

1) $x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \le \frac{1}{n} \\ 1, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$ $\qquad n \cdot \frac{1}{n} = 1$

I поточечная

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \underbrace{\begin{cases} 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0,1] \end{cases}}_{x(t)}$





II почти всюду $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в}} 1$

$\mu\left(t \in [0,1] \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \ne x(t)\right) = 0$

III) по мере Лебега

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(t \in [0,1] \;\middle|\; |X_n(t) - X(t)| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$$X_n(t) - X(t) = \begin{cases} 0-0, & t = 0 \\ nt - 1, & t \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 1-1, & t = \frac{1}{n} \\ 1-1, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

V

$$\mu\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

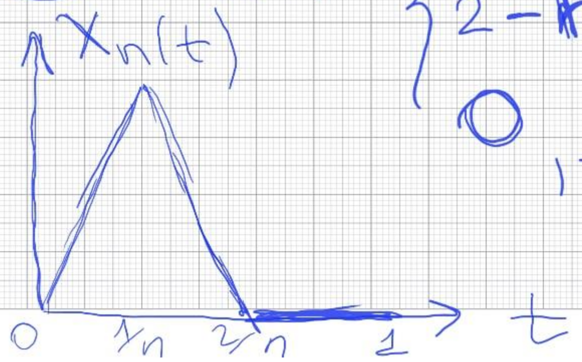
IV равномерная X

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

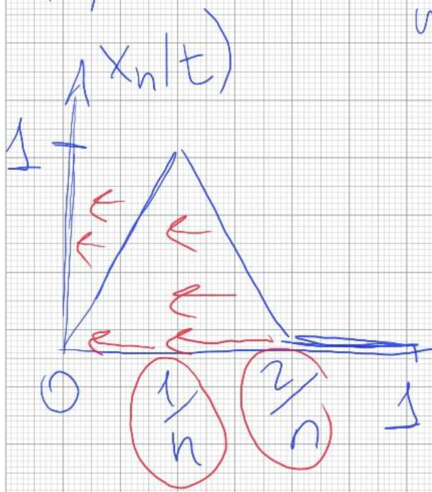
$$t = 0 \,\big|\, n \cdot 0 - 1 = -1$$

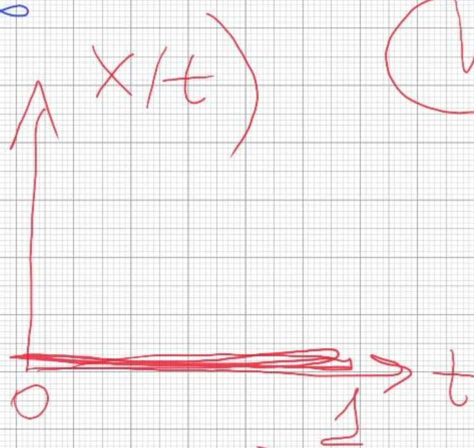
2

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nt, & \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0, & t > 2/n \end{cases}$$



I) поточеч. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$





II) $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$

$\mu\left(t\in[0,1] \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \neq x(t)\right) = 0$

$\mu\{\varnothing\} = 0$

III) по мере Лебега

$\forall \varepsilon>0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(t\in[0,1] \,\middle|\, |x_n(t)-x(t)|>\varepsilon\right) = 0$

$0-0 \qquad n\cdot\frac{1}{n} - 0 = 1 \qquad t=0$

$x_n(t)-x(t) = \begin{cases} nt, & t\in[0,\frac{1}{n}] \\ 2-nt, & t\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}] \\ 0, & t>\frac{2}{n} \end{cases}$

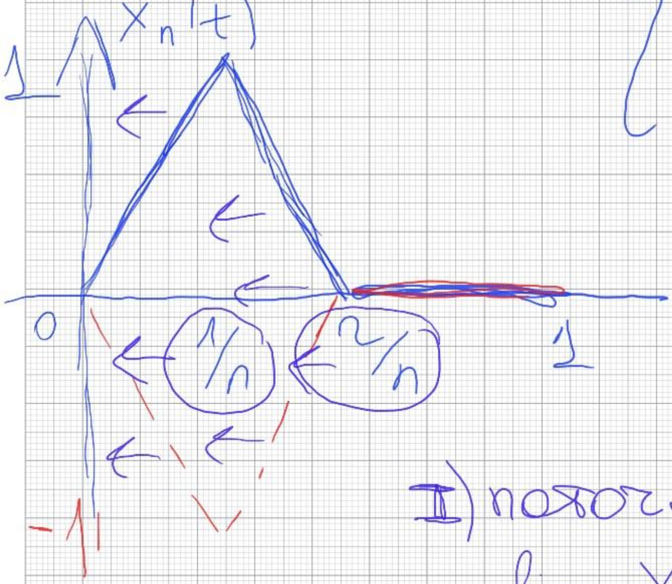
$\mu[0,\frac{1}{n}] = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

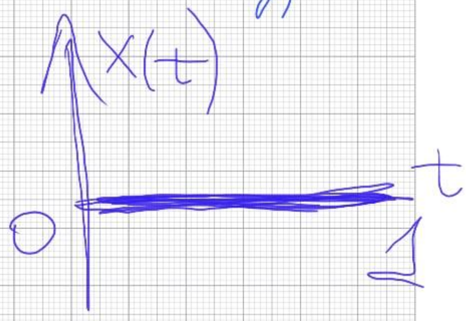
$\mu(\frac{1}{n},\frac{2}{n}) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

IV $\max_{t\in[0,1]} |X_n(t) - X(t)| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

X равномерная

3. $x_n(t) = (-1)^n \begin{cases} nt, & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ 2-nt, & \frac{1}{n} < t \le \frac{2}{n} \\ 0, & t > 2/n \end{cases}$





I) поточ.

$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = 0$

$2 - n \cdot \frac{2}{n} = 0$

II) почти всюду

$\mu\left(t\in[0,1] \mid \lim_{n\to\infty} X_n(t) \ne X(t)\right) = 0$

$\mu\{\varnothing\} = 0$

пустое

$\mu(0, \frac{1}{n}] = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

III) по мере $\forall \varepsilon > 0$

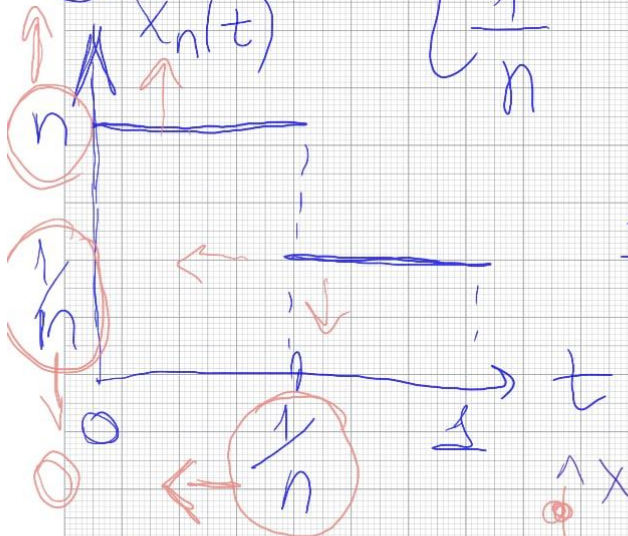
$\mu[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

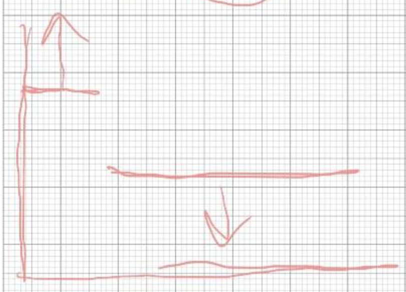
$\lim_{n\to\infty} \mu\left(t\in[0,1] \mid \underbrace{|X_n(t) - X(t)|}_{x_n(t)} > \varepsilon\right) = 0$

IV равномерная X

$$\max_{t\in[0,1]} |X_n(t) - X(t)| = 1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

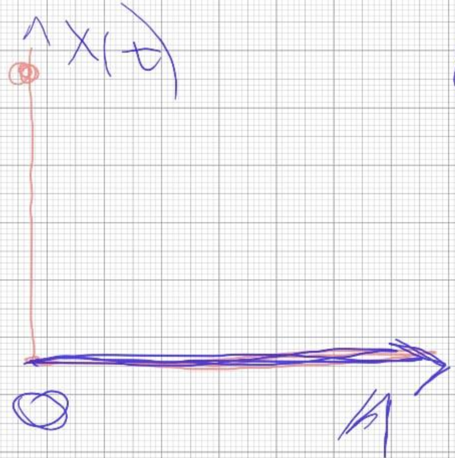
4 $$x_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \le t \le \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n}, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$





I поточечн. X

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \in (0,1] \end{cases}$$



II почти всюду $X_n(t) \xrightarrow{п.в.} 0$

$\mu\{0\} = 0$

III по мере ✓

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(t \in [0,1] \;\middle|\; |X_n(t) - X(t)| > \varepsilon\right) = 0$$

$$X_n(t) - X(t) = \begin{cases} -\infty, & t = 0 \\ n, & 0 < t \le \frac{1}{n} \\ 1/n, & \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ бесконечно малое

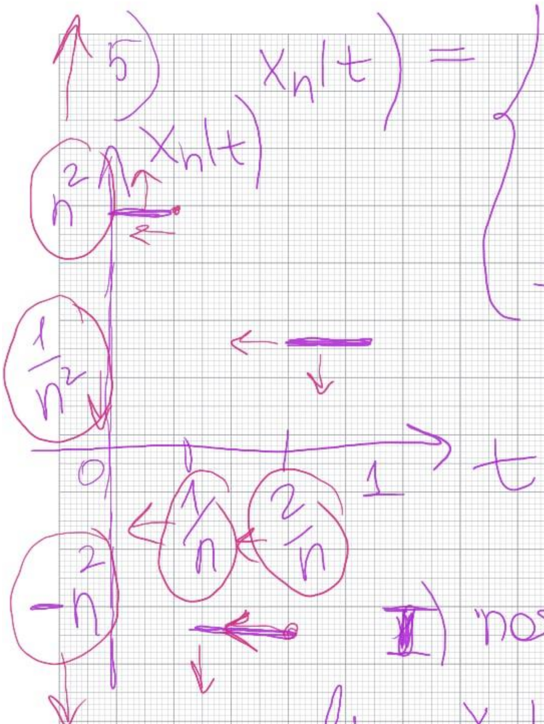
$$\mu\{0\} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

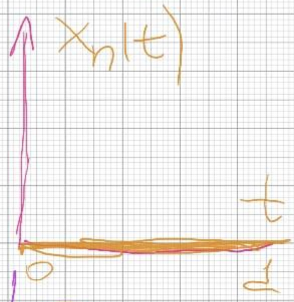
$$\mu\left(0, \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

IV равномерная ✗

$$\sup_{t\in[0,1]} |X_n(t) - X(t)| = \infty$$

5) $x_n(t) = \begin{cases} n^2, & 0 \le t < \frac{1}{n} \\ -n^2, & \frac{1}{n} \le t < \frac{2}{n} \\ \frac{1}{n^2}, & t \ge \frac{2}{n} \end{cases}$





I) поточечн

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = \begin{cases} ?, & t=0 \\ 0, & t\in(0,1] \end{cases}$ ✗

II почти всюду (✓) $\mu\{0\} = 0$

$x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$

$\mu\left(t\in[0,1] \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \ne x(t)\right) = 0$

III по мере ✓

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(t\in[0,1] \mid |x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\right) = 0$

$x_n(t) - x(t) = \begin{cases} ?, & t=0 \\ n^2, & 0 < t < \frac{1}{n} \\ -n^2, & \frac{1}{n} \le t < \frac{2}{n} \\ \frac{1}{n^2}, & t \ge \frac{2}{n} \end{cases}$

$\mu\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\mu\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ бескон.

$\underline{\text{IV}}$ $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x(t)| = \infty$

$\times$

6 аналогично примеру 1

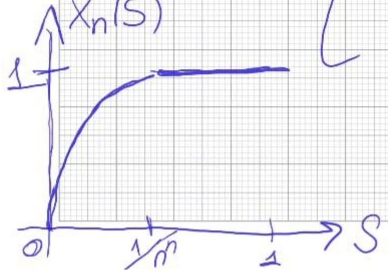
$$x_n^n(t^n) = \begin{cases} nt, & t \le \frac{1}{n} \\ 1, & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$t^n = S \quad t = \sqrt[n]{S}$

$$x_n^n(S) = \begin{cases} n \cdot \sqrt[n]{S}, & \sqrt[n]{S} \le \frac{1}{n} \\ 1, & \sqrt[n]{S} > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$x_n^n(S) = \begin{cases} n \cdot \sqrt[n]{S}, & S \le \frac{1}{n^n} \\ 1, & S > \frac{1}{n^n} \end{cases}$$

$$x_n(S) = \begin{cases} \sqrt[n]{n \cdot \sqrt[n]{S}}, & S \le \frac{1}{n^n} \\ 1, & S > \frac{1}{n^n} \end{cases}$$



Интеграл Лебега-Стильтеса

<u>Опр</u> Интеграл Л.-С.

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,d\mu_F$$

где μ_F — мера Лебега-Стильтеса, порожд-я ф-цией F.

Теор. вер. $$M\xi = \int_{-\infty} x\,dF(x)$$

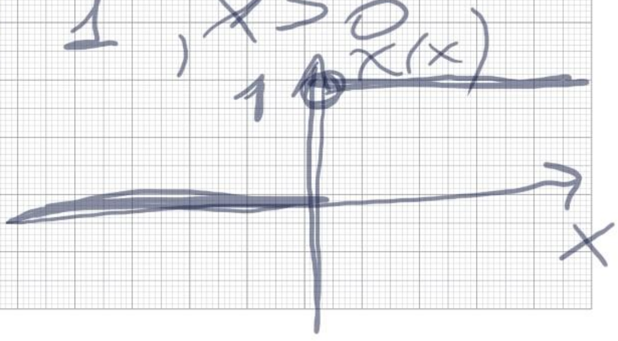
$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\,dF(x)$$

где $F(x)$ — функц. расп.

Функция Хэвисайда

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$1(x)$



$a, b \in [-1,1]$

$a = 1/2 \quad b = -1/4$

$$\int_A f(x)\, d\chi(x-a) = \begin{cases} 0, & a \notin A \\ f(a), & a \in A \end{cases}$$

а) $\int_{[-1,1]} \chi(x-a)\, d\chi(x+b) = \int_{[-1,1]} \chi\left(x-\frac{1}{2}\right) d\chi\left(x+\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \chi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = \chi\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$

$1/4 \in [-1,1]$

б) $\int_{[-1,1]} \chi(x-a)\,\chi(x+b)\, d\chi(x) =$ $\quad 0 \in [-1,1]$

$= \chi(0-a)\,\chi(0+b) =$

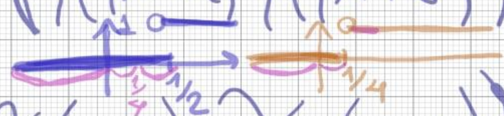
$= \chi\left(0-\frac{1}{2}\right)\chi\left(0-\frac{1}{4}\right) = 0 \cdot 0 = 0$

в) $\int_{[-1,1]} \left(\chi(x-a) + \chi(x+b)\right) d\chi(x) =$ $\quad 0 \in [-1,1]$

$= \chi(0-a) + \chi(0+b) =$

$= \chi\left(0-\frac{1}{2}\right) + \chi\left(0-\frac{1}{4}\right) = 0 + 0 = 0$

г) $\int_{[-1,1]} \chi(x)\, d\left(\chi(x-a)\,\chi(x+b)\right) =$



$[-1, \frac{1}{4}]$ $\quad 0 \cdot 0 = 0$

$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $\quad 0 \cdot 1 = 0$

$(\frac{1}{2}, 1]$ $\quad 1 \cdot 1 = 0$

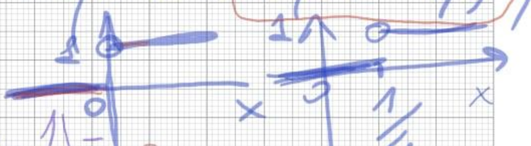
$= \int_{[-1,1]} \chi(x)\, d\left(\chi\left(x-\frac{1}{2}\right)\chi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)$ $=$

$$= \int_{[-1,1]} \chi(x)\, d\chi\left(x-\frac{1}{2}\right) = \chi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$1/2 \in [-1,1]$

g) $$\int_{[-1,1]} \chi(x)\chi(x-a)\, d\big(\chi(x)\cdot\chi(x+b)\big) =$$

$$= \int_{[-1,1]} \chi(x)\chi\left(x-\frac{1}{2}\right) d\left(\chi(x)\chi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)$$



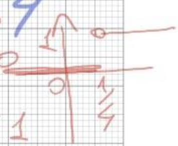
$$= \int_{[-1,1]} \chi(x)\chi\left(x-\frac{1}{2}\right) d\chi\left(x-\frac{1}{4}\right) =$$

$1/4 \in [-1,1]$

$[-1,0]$ $0\cdot 0=0$

$(0,1/4]$ $1\cdot 0=0$

$(1/4,1]$ $1\cdot 1=1$



$$= \chi(1/4)\cdot\chi\left(\underbrace{1/4-\frac{1}{2}}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

e) $$\int_{[-1,1]} \big(\chi(x)+\chi(x-a)\big)\, d\big(\chi(x)+\chi(x-b)\big)$$

$$\int_{[-1,1]} \left(\chi(x)+\chi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) d\chi(x)$$

$0 \in [-1,1]$

аддитивность по мере

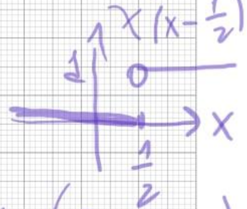
$$+ \int_{[-1,1]} \left(\chi(x)+\chi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) d\left(\chi\left(x+\frac{1}{4}\right)\right)$$

$-1/4 \in [-1,1]$

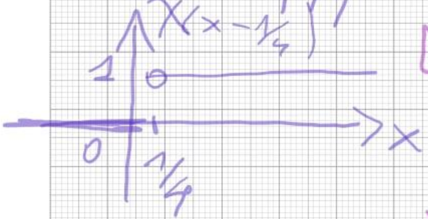
$$= \left(\chi(0)+\chi\left(0-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(\chi\left(-\frac{1}{4}\right)+\chi\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= 0+0+0+0=0$$

ж) $\int\limits_{[-1,1]} (\chi(x-a) + \chi(x+b))\, d(\chi(x-a)\cdot\chi(x+b)) =$



$= \int\limits_{[-1,1]} (\chi(x-\frac{1}{2}) + \chi(x-\frac{1}{4}))\, d(\chi(x-\frac{1}{2})\cdot\chi(x-\frac{1}{4})) = \int\limits_{[-1,1]} (\chi(x-\frac{1}{2}) + \chi(x-\frac{1}{4}))\, d(\chi(x-\frac{1}{2}))$



$\frac{1}{2} \in [-1,1]$

$= \chi(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}) + \chi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) =$

$= \underbrace{\chi(0)}_{0} + \underbrace{\chi(\frac{1}{4})}_{1} = 0 + 1 = 1$