I. Пространства Соболева и эллиптические краевые задачи

1. Теорема об эквивалентной норме.

Теорема об эквивалентной норме. Пусть даны $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in C^(\overline{\Omega})$, $A(x) \geqslant A^0 > 0$, $c \in C(\overline{\Omega})$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, где $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$. Тогда, если 1) $\min_{x\in\overline{\Omega}} c(x) \geqslant 0$; 2) $\min_{x\in\overline{\Omega}} \sigma(x) \geqslant 0$; 3) $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$ (хотя бы одна из функций отлична от тождественного нуля), то форма

$$(u,v)' = \int\limits_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int\limits_{\Omega} c(x)uv dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\, u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\, ds$$

задаёт скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, порождающее норму, эквивалентную стандартной: $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |u|^2 dx$.

Например, в $H^1_0(\Omega)$ скалярное произведение $(u,v)' = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx$ порождает норму, эквивалентную стандартной.

2. Эллиптические операторы второго порядка в дивергентной форме. Постановка краевых задач.

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) + c(x)u. \tag{1}$$

Предполагается, что $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $A(x) \geqslant A^0 > 0$ (условие равномерной эллиптичности), $c \in C(\overline{\Omega})$. Наряду с оператором (1) будем рассматривать эллиптический оператор в дивергентной форме вида

$$\mathcal{L}u = -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) + \mathrm{div}\,\left(\vec{b}(x)u\right) + c(x)u, \tag{2}$$

где A, c такие же, как и для оператора (1), $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, \ldots, n$. Формально сопряжённый оператор имеет вид
$\mathcal{L}^* v = -\mathrm{div}\,(A(x)\nabla v) - \mathrm{div}\,\left(\vec{b}(x)v\right) + c(x)v$.
Коэффициенты операторов (1) и (2) принимают вещественные значения. Поставим три стандартные внутренние краевые задачи для уравнения с оператором (2) или, в частности, оператором (1).

1. **Задача Дирихле** ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

2. **Задача Неймана** ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \Leftrightarrow \sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_k(x) = \varphi(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

3. **Третья краевая задача (задача Робена)** ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{5}$$

3. Определение обобщённых решений стандартных внутренних краевых задач для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка.

Основные инструментом исследования краевых задач, как и прежде, служит формула интегрирования по частям — теперь для функций из пространства Соболева.

Теорема 1.1

Пусть $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $u, v \in H^1(\Omega)$, $\vec{\nu}$ — поле единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\ v|_{\partial\Omega}\ \nu_i \,\mathrm{d}s - \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Действительно, по теореме о плотности (пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ всюду плотно в $H^1(\Omega)$, если $\partial\Omega \in C^1$) существуют последовательности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega})$, сходящиеся в $H^1(\Omega)$ к u, v, соответственно. Но тогда, очевидно, можно сделать предельный переход в классической формуле интегрирования по частям и получить формулу (6).

Определение 1.1

Сильным решением краевой задачи $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ с правыми частями $f \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^s(\partial\Omega)$ будем называть такую функцию $u \in H^2(\Omega)$, что $Lu = f \oplus \varphi$.

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u. \tag{1}$$

Из формулы интегрирования по частям следуют первая формула Грина для оператора Лапласа и оператора (1) в пространстве Соболева $H^2(\Omega)$: $\forall u, v \in H^2(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} v\mathcal{L}u \mathrm{d}x = -\int\limits_{\partial\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu})\, v \,\mathrm{d}s + \int\limits_{\Omega} A(x)\nabla v \cdot \nabla u \mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega} c(x) v u \mathrm{d}x.$$

Пусть $u \in H^2(\Omega)$ — сильное решение краевой задачи $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$, $v \in H^1(\Omega)$ — пока произвольная функция. Имеем $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}$. Преобразуем левую часть этого равенства с помощью первой формулы Грина для оператора (1):

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, v)_{L_2(\Omega)} \equiv \int\limits_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla v + c(x) u v)\,\mathrm{d}x + \\ - \int\limits_{\partial\Omega} A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7}$$

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Определение 1.2

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Дирихле (3), если $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ и для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (8).

3. **Третья краевая задача (задача Робена)** ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x) u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{5}$$

Из краевого условия задачи Робена (5) следует, что $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega} = \varphi(x) - \sigma(x)\, u|_{\partial\Omega}$. Подставим в формулу (7) выражение для $A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega}$ и перепишем интегральное равенство следующим образом:

$$a_{\mathcal{L}}(u, v) + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\, u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega}\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\Omega} f(x)\, v\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(x)\, v|_{\partial\Omega}\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Определение 1.3

Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется *обобщённым решением* задачи Робена (5) (в частности, задачи Неймана (4)), если для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное равенство (9).

4. Корректность позитивной задачи Дирихле для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка.

Исследуем существование и единственность обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения с дивергентным эллиптическим оператором (1). Задачу (3) для оператора (1) будем называть *позитивной*, если $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$.

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u. \tag{1}$$

Задача Дирихле ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

Исследуем существование и единственность обобщённого решения задачи Дирихле для уравнения с дивергентным эллиптическим оператором (1). Задачу (3) для оператора (1) будем называть *позитивной*, если $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$.

Теорема 1.2

Пусть в дивергентном эллиптическом операторе $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая от области Ω и оператора задачи $\mathcal{L}$, что для каждых $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение задачи Дирихле (3) и верна оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|'_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\right). \tag{10}$$

5. Корректность позитивной задачи Робена для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка.

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u. \tag{1}$$

Третья краевая задача (задача Робена) ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ A(x)\nabla u \cdot \vec{\nu} + \sigma(x)u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{5}$$

Задачу (5) для оператора (1) будем называть *позитивной*, если $c(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$, $\sigma(x) \geqslant 0$ при $x \in \partial\Omega$, $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$.

Теорема 1.3

Пусть в дивергентном эллиптическом операторе $c(x) \geqslant 0$, $x \in \overline{\Omega}$, а в краевом условии $\sigma(x) \geqslant 0$, $x \in \partial\Omega$; при этом $c \neq 0$ или $\sigma \neq 0$. Тогда для каждых $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi \in L_2(\partial\Omega)$ существует единственное обобщённое решение третьей краевой задачи (5) и верная оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C \left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L_2(\partial\Omega)}\right) \tag{11}$$

с независимой от f и φ константой C.

6. Фредгольмовы операторы, индекс фредгольмового оператора. Теорема Фредгольма.

1. **Задача Дирихле** ($\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$):

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x) \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \end{cases} \tag{3}$$

Дивергентный эллиптический оператор второго порядка имеет вид

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u. \tag{1}$$

Предполагается, что $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $A(x) \geqslant A^0 > 0$ (условие равномерной эллиптичности), $c \in C(\overline{\Omega})$. Наряду с оператором (1) будем рассматривать эллиптический оператор в дивергентной форме вида

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + \operatorname{div}\left(\vec{b}(x)u\right) + c(x)u, \tag{2}$$

где A, c такие же, как и для оператора (1), $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, $b_j \in C^1(\overline{\Omega})$, $j = 1, \ldots, n$. Формально сопряжённый оператор имеет вид
$\mathcal{L}^*v = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla v\right) - \operatorname{div}\left(\vec{b}(x)v\right) + c(x)v$.
Коэффициенты операторов (1) и (2) принимают вещественные значения. Поставим три стандартные внутренние краевые задачи для уравнения с оператором (2) или, в частности, оператором (1).

Задача Дирихле (3) для уравнения с общим эллиптическим оператором (2), если $\vec{b} \neq 0$ или функция $c(x)$ принимает отрицательные значения, может не иметь решений или иметь бесконечно много решений, т.е. быть некорректной. Приемлемое расширение корректности — *фредгольмова разрешимость*.

С неформальной точки зрения фредгольмова разрешимость есть однозначная разрешимость с точностью до конечномерных подпространств. Пусть $A : H \to H$ — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = F. \tag{12}$$

Оператор A *фредгольмов*, если $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ и $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$, где $\operatorname{Coker} A = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$ — коядро оператора. *Индексом* фредгольмового оператора называется число $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$. Условие на ядро означает, что однородное уравнение $Au = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений.

Теорема Фредгольма

Пусть H — гильбертово пространство, $K : H \to H$ — компактный оператор, $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda I + K$ — фредгольмов оператор с нулевым индексом.

7. Фредгольмова разрешимость внутренней задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Критерий разрешимости - ???
Решений - бесконечно много
Ядро из постоянных функций

8. Теорема Гильберта–Шмидта.

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство (вещественное или комплексное), $K : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор в H, $(\ker K)^{\perp}$ — ортогональное дополнение ядра K. Предположим, что $\dim (\ker K)^{\perp} = \infty$. Тогда

1) $\sigma(K) = \sigma_d(K) \Subset \mathbb{R}$, $\sharp\sigma(K) = \aleph_0$ (спектр оператора K дискретен, то есть состоит из собственных значений K, и представляет собой счётное ограниченное подмножество действительной прямой);

2) единственная предельная точка $\sigma(K)$ есть нуль;

3) $\forall \lambda \in \sigma(K) \backslash \{0\}$ $\dim \ker(K - \lambda I) < \infty$, т.е. любое ($\neq 0$) собственное значение K имеет конечную кратность (это немедленно следует из теоремы Фредгольма);

4) пусть $\sigma(K) \backslash \{0\} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $d_k = \dim \ker(K - \lambda_k I)$, $h_1^{(k)}, \ldots, h_{d_k}^{(k)}$ — ортогональный базис $\ker(K - \lambda_k I)$, тогда $\left\{ h_j^{(k)} \,|\, k \in \mathbb{N}, j = 1, \ldots, d_k \right\}$ — ортогональный базис $(\ker K)^{\perp}$.

9. Классические и обобщённые собственные значения и собственные функции противоположного оператора Лапласа в ограниченной области: определение (краевые условия на выбор).

$$\mathscr{L}u = -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + c(x)u. \quad (1.6)$$

Определение 1. Обобщённой с.ф. оператора (1.6) в области Ω с однородным краевым условием Дирихле, соответствующей обобщённому с.з. λ, называется функция $u \in H_0^1(\Omega)$, которая $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$a_{\mathscr{L}}(u, v) = \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (1.7)$$

Обобщённые с.з. и обобщённые с.ф. оператора $-\Delta$ с однородным условием Дирихле

Равенство (1.7) в этом случае имеет вид: $\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla dx = \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)}$.

Форма в левой части этого равенства есть скалярное произведение $H_0^1(\Omega)$, порождающее эквивалентную норму.

$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto (u, v)_{L_2(\Omega)}$ — функционал, принадлежащий $H_0^1(\Omega)^*$.

По теореме Рисса существует $U \in H_0^1(\Omega)$ т.ч.

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla U \cdot \nabla v dx.$$

Определение 2. Обобщённой с.ф. оператора (1.6) в области Ω с однородным краевым условием Робена $A(x)\nabla u \cdot \overrightarrow{\nu} + \sigma(x)u\Big|_{\partial\Omega} = 0$, соответствующей обобщённому с.з. λ, называется функция $u \in H^1(\Omega)$, которая $\forall v \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$a_{\mathscr{L}}(u, v) + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)uvds = \lambda(u, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (1.8)$$

10. Теорема об обобщённых собственных значениях и собственных функциях противоположного оператора Лапласа с краевым условием Дирихле в ограниченной области (краевые условия на выбор).

Теорема 3. Множество с.з. оператора (1.6) в области Ω с однородным краевым условием Дирихле $u\big|_{\partial\Omega} = 0$ 1) счётно и принадлежит действительной прямой; 2) имеет минимум λ_0; 3) не имеет конечных предельных точек. Кратность d_kкаждого с.з. конечна, т.е. ему отвечает конечное число лиц. нез. с.ф. Пусть $\{u_1^{(k)}, \ldots, d_{d_k}^{(k)}\}$ — ортогональный (в $L_2(\Omega)$) базис собственного подпространство, соответствующего с.з. $\lambda_k \to +\infty$, если $k \to \infty$. Любые две с.ф., отвечающие разным с.з., ортогональны в $L_2(\Omega)$. $\{u_1^{(0)}, \ldots, d_{d_0}^{(0)}, u_1^{(1)}, \ldots, d_{d_1}^{(1)}, \ldots\}$ — ортогональный базис $L_2(\Omega)$.

С консультации (10:16)

- λ —собственные значения (сз), то есть такие значения спектрального параметра, когда существует нетривиальные решения;
- $X = X(x)$ — собственные функции (сф), отличные от тождественного нуля, соответствующие собственному значению λ.

Определение 5. Обобщённым с.з. спектральной задачи (9) называется такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что существует функция $0 \neq X \in H_0^1(\Omega)$ и для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \nabla X \cdot \nabla v dx = \lambda \int\limits_{\Omega} X v dx.$$

Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть $K : H \to H$ — компактный самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ортогональное дополнение ядра K бесконечномерно. Тогда все сз $\in \mathbb{R}$ представляют счётное ограниченное множество с единственной предельной точкой $\lambda = 0$. Каждое собственное подпространство (для $\neq 0$ собственных значений) конечномерно, нет присоединённых элементов. Из собственных элементов, отвечающих $\neq 0$ собственным значениям, можно построить ортонормированный базис ортогонального дополнения ядра оператора K в пространстве H.

II. Теория обобщённых функций

11. Пространство основных функций D(Ω) и пространство обобщённых функций D' (Ω). Сходимость в D(Ω) и в D' (Ω).

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ состоит из всех финитных бесконечно дифференцируемых в области Ω функций со значениями в $\mathbb{R}$. Оно имеет естественную структуру векторного пространства.

$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ — носитель функции. Функция называется финитной в области Ω, если её $\operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega$ и компактен.

В отличии от предыдущих пространств пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ имеет несчётную нормировку. Определим непосредственно сходимость последовательности основных функций из $\mathscr{D}(\Omega)$.

Определение. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}(\Omega)$ сходится к функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, если

- существует такой компакт $K \subset \Omega$, что носители всех членов последовательности ему принадлежат: $\operatorname{supp}\varphi_k, \operatorname{supp}\varphi \subset K$;
- для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $\max\limits_{x \in K} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение. Обобщённой функцией (над одним из пространств $C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ или $\mathscr{D}(\Omega)$) называется всякий линейный непрерывный функционал над соответствующим пространством.

Примем обозначение: $(f, \varphi) := f(\varphi)$.

Пространства обобщённых функций имеют естественную структуру векторного пространства.

- $C^\infty(\Omega) \Rightarrow \mathscr{D}_0'(\Omega)$ (пространство *финитных* в области Ω обобщённых функций);
- $\mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \Rightarrow \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ (пространство обобщённых функций медленного роста);
- $\mathscr{D}(\Omega) \Rightarrow \mathscr{D}'(\Omega)$ (пространство всех обобщённых функций).

Очевидно вложение $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathscr{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \subset C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$. Но для пространств обобщённых функций всё наоборот: $\mathscr{D}_0'\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$.

12. Регулярные и сингулярные обобщённые функции. Примеры сингулярных функций: дельта-функция Дирака, простой слой, двойной слой, главные части.

Пусть $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ — локально суммируемая в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функция. Сопоставим ей линейный функционал следующего вида: $(\tilde{f}, \varphi) := \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)dx \ \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Из теоремы Лебега немедленно следует непрерывность этого функционала над $\mathscr{D}(\Omega)$. Итак, $\tilde{f} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Обобщённые функции, которые получаются таким образом называются *регулярными,* а все остальные — *сингулярными*.

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathscr{D}(\Omega)$ состоит из всех финитных бесконечно дифференцируемых в области Ω функций со значениями в $\mathbb{R}$. Оно имеет естественную структуру векторного пространства.

$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$ — носитель функции. Функция называется финитной в области Ω, если её $\operatorname{supp}\varphi \Subset \Omega$ и компактен.

Имеем отображение $\tilde{\ } : L_{1,loc}(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$. Его линейность очевидна, непрерывность следует из из свойств интеграла Лебега, а инъективность (тривиальное ядро) — из леммы Дюбуа-Реймона. Всюду далее мы отождествляем f и $\tilde{f}$.

Сингулярные обобщённые функции не соответствуют никаким локально суммируемым функциям, но могут порождаться некоторыми измеримыми функциями (см. далее *главные части*). Никто не поспорит, что самая популярная сингулярная обобщённая функция — дельта-функция Дирака.

Пусть $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим следующий функционал над $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$: $(\delta_{x^0}, \varphi) := \varphi\left(x^0\right)$. Его линейность и непрерывность очевидны. δ_{x^0} — дельта-функция Дирака с носителем в точке x^0. Дельта-функцию можно определить над любым пространством, состоящим из «настоящих» функций. Этот функционал будет непрерывен в любой топологии, которая сильнее слабейшей (топологии поточенной сходимости). Поэтому $\delta_{x^0} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\delta_{x^0} \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\delta_{x^0} \in \mathscr{D}'_0\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Следующий пример — меры. Пусть μ — счётно-аддитивная мера на сигма-алгебре борелевских подмножестве в $\mathbb{R}^n$, конечная на каждом ограниченном борелевском множестве. Тогда ей соответствует обобщённая функция $F_\mu \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, действующая на основные функции по формуле $(F_\mu, \varphi) := \displaystyle\int_{\operatorname{supp}\varphi} \varphi(x)d\mu(x)$.

Простой слой и двойной слой есть сингулярные обобщённые функции. Для $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega \in C^1$, $\rho_1, \rho_2 \in C(S)$ соответствующие сингулярные обобщённые функции определяются следующим образом:

$$\left(\rho_1\delta_S, \varphi\right) := \int_S \varphi(x)\rho_1(x)ds_x,\ \left(\partial_{\overrightarrow{\nu}}(\rho_2\delta_S), \varphi\right) := -\int_S \frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{\nu}}\rho_2(x)ds_x,$$

где ds_x — элемент гиперплощади, $\overrightarrow{\nu}$ — поле внешних нормалей к S.

Рассмотрим функцию $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Очевидно, что она принадлежит $L_{1,loc}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, но не принадлежит $L_{1,loc}(\mathbb{R})$. Хотелось бы найти такую сингулярную обобщённую функцию, чтобы она при сужении на проколотую прямую $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ давала $\dfrac{1}{x}$. Такая функция существует — это главная часть $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$:

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) := v.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)dx}{x} \right).$$

13. Сужение обобщённых функций на открытое подмножество. Носитель обобщенной функции.

Естественно, определить значение обобщённой функции в конкретной точке $x^0 \in \Omega$ совершенно невозможно. Однако, можно естественно сузить обобщённую функцию на любое открытое подмножество из Ω. Пусть $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, Q — открытое подмножество Ω. Определим тогда сужение $f\big|_Q \in \mathscr{D}'(Q)$ следующим образом. Для любой $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$ рассмотрим продолжение нулём в Ω и обозначим это продолжение через $\tilde{\varphi} \in \mathscr{D}(\Omega)$. Тогда

$$\left(f\big|_Q, \varphi\right) := (f, \tilde{\varphi}).$$

Пусть $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Рассмотрим объединение всех открытых подмножеств из Ω, сужение f на которые даёт нуль, то есть максимальное (по включению) открытое подмножество Q, такое, что $f\Big|_{Q} = 0$.

Определение. Носителем обобщённой функции $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ называется дополнение в Q максимального (по включению) открытого подмножества Q, сужение f на которое даёт нуль.

Обозначение: $\operatorname{supp} f := \Omega \backslash Q$. Это замкнутое в Q множество.

Утверждение. Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\operatorname{supp} f = \{x^0\}$. Тогда существует $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и множество чисел $\{c_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leqslant m\}$, такие, что $f = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha \delta_{x^0} = \mathscr{L}\delta_{x^0}$, где $\mathscr{L}u = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha u$.

14. Производные обобщённых функций. Умножение обобщённых функций на гладкие функции. Проблема с умножением обобщённых функций, контрпример Л. Шварца.

Умножение на гладкие функции.

Пусть $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $m \in C^\infty(\Omega)$. Тогда определим $mf \in \mathscr{D}'(\Omega)$ как функционал, действующий на основные функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ по формуле $(mf, \varphi) := (f, m\varphi)$. Определение происходит из обычного умножения гладких функций на локально суммируемые. $m\,\cdot : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ — линейный непрерывный оператор.

С умножением обобщённых функций медленного роста на гладкие функции дела обстоят сложнее. Дело в том, что из $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ не следует $m\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Определим $\mathscr{M} = \left\{m \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)\ \ m\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$ — алгебру мультипликаторов. Тогда обобщённые функции медленного роста $f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно умножать на $m \in \mathscr{M}$.

дифференцирование

Из формулы интегрирования по частям следуем, что
$\forall f \in C^k(\Omega)$ и $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} D^\alpha f \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} f D^\alpha \varphi dx$$

для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leqslant k$. Положим эту формулу в основу определения производной обобщённой функции $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$: $\left(D^\alpha f, \varphi\right) := (-1)^{|\alpha|}\left(f, D^\alpha \varphi\right)$ для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Определение для функций из пространств $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\mathscr{D}_0'(\Omega)$ аналогичное. Умножение на гладкие функции и дифференцирование делают возможным рассматривать линейные дифференциальные операторы с гладкими коэффициентами (коэффициентами из алгебры мультипликаторов) как непрерывные операторы, действующие в $\mathscr{D}'(\Omega)$ (в $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$): $\mathscr{L}f = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \mu_\alpha(x) D^\alpha f$, где $m = \operatorname{ord} \mathscr{L}$ (порядок оператора). Тогда

$$\forall f \in \mathscr{D}'(\Omega) \;\; \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \;\; (\mathscr{L}f, \varphi) = (f, \mathscr{L}^* \varphi),$$

где $\mathscr{L}^*$ — формально сопряжённый оператор.

Проблемы с умножением обобщенных функций. Контрпример Шварца

К сожалению, во всём $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ не существует умножения обобщённых функций, которое было бы 1) ассоциативным; 2) коммутативным; 3) с нейтральным элементом 1 (тождественная единица); 4) дистрибутивным; 4) согласованным с умножением на гладкие функции, т.е. $\forall f, g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\forall m \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ $m(fg) = (mf)g$. Говоря другими словами, в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ нельзя ввести структуру (ассоциативной и коммутативной) алгебры над кольцом $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$. Ситуация в $\mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ не лучше. Контрпример Л. Шварца:

$$0 = 0\mathscr{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathscr{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathscr{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\left(x\mathscr{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x).$$

Замена переменных

Рассмотрим C^∞-диффеоморфизм областей Ω и Q из $\mathbb{R}^n$:

$$\theta : \Omega \to Q,\ \ \Omega \ni x \mapsto y = \theta(x) \in Q$$

(бесконечно дифференцируемая биекция, такая, что обратное отображение тоже дифференцируемое). Тогда для интеграла первого рода

$$\int\limits_Q f(y)\varphi(y)dy = \int\limits_\Omega f\left(\theta(x)\right)\varphi\left(\theta(x)\right)\left|\det\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\right| dx,$$

где $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ — матрица Якоби отображения $\theta, f \in L_{1,loc}(Q)$, $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$.

Тогда можно определить замену переменных обобщённых функций — она же непрерывное линейное отображение $\circ\,\theta : \mathscr{D}'(Q) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ по формуле

$$\big((f\circ\theta)(x), \psi(x)\big) := \left(f(y), \left|\det\left(\frac{\partial\theta^{-1}}{\partial y}\right)\right| \left(\psi\circ\theta^{-1}\right)(y)\right).$$

Например, если $y = Ax + b$ (A — невырожденная матрица), то $\big(f(Ax+b), \psi(x)\big) := \left(f(y), \left|\det A\right|^{-1}\psi\left(A^{-1}(y-b)\right)\right)$.

15. Тензорное произведение обобщённых функций: определение и свойства.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ – обобщённые функции. Их тензорным произведением называется обобщённая функция $f \otimes g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\right) = \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$, действующая на основные функции $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$ по формуле

$$\big((f \otimes g)(x, y), \varphi(x, y)\big) = \big(f(x), (g(y), \varphi(x, y))\big).$$

Если $f \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^m\right)$, то $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$, то есть тензорное произведение есть обобщение обычного произведения локально суммируемых функций от разных переменных.

Определение основано на следующей лемме.

Лемма. Для любой $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ определён линейный и непрерывный оператор проекции $\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right) \to \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$, действующий по формуле

$$\mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{n+m}\right) \ni \varphi \mapsto \psi = \big(g(y), \varphi(\,\cdot\,, y)\big) \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Аналогично можно определить тензорное произведение любого числа обобщённых функций $f_1 \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n_1}\right), \ldots,$ $f_k \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n_k}\right)$.

Отметим следующие свойства тензорного произведения:

- коммутативность: для любых $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ $f \otimes g = g \otimes f$;
- ассоциативность: для любых $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$, $h \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^l\right)$
$(f \otimes g) \otimes h = g \otimes (f \otimes h) = f \otimes g \otimes h$;
- дистрибутивность: для любых $f_1, f_2 \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $m_1, m_2 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ и
$g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$, $m_3 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right)$
$(m_1 f_1 + m_2 f_2) \otimes (m_3 g) = m_1 m_3 (f_1 \otimes g) + m_2 m_3 (f_2 \otimes g)$;
- для любой $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$ линейный оператор
$\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right) \ni f \mapsto f \otimes g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+m}\right)$ непрерывен.
- для любых $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m\right)$
$\operatorname{supp}(f \otimes g) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$.

Аналогичные свойства и конструкции справедливы для обобщённых функций медленного роста.

Пример. $\delta(x_1, \ldots, x_n) = \delta(x_1) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n)$.

Будем говорить, что обобщённая функция $F \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y\right)$ не зависит от y, если её можно представить в виде
$F(x, y) = f(x) \otimes \mathbf{1}(y)$, где $\mathbf{1} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^m_y\right)$ — тождественная единица.

Такая обобщённая функция действует на основные функции $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y\right)$ по правилу

$$\left(f(x) \otimes 1(y), \varphi(x, y)\right) = \left(1(y), (f(x), \varphi(x, y))\right) = \int (f(x), \varphi(x, y)) dy$$

$$= \left(f(x), \int \varphi(x, y) dy\right)$$ (обобщение теоремы Фубини).

Пример. Все решения уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^2_{x,y}\right)$ имеют вид $u = f(x) \otimes \mathbf{1}(y)$, где $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — произвольная обобщённая функция.

16. Свёртка регулярных функций. Последовательности основных функций, аппроксимирующие единицу. Определение свёртки обобщённых функций. Достаточное условие существования свёртки.

Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ — суммируемые в n-мерном евклидовом пространстве функции. Определим их *свёртку* $f * g$ посредством формулы

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Очевидно, что $f * g = g * f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (следует из неравенства Гёльдера). Пусть теперь $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqslant 1.$

Нетрудно показать, что $f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, и

$\|f * g\|_{L_r} \leqslant \|f\|_{L_p} \|f\|_{L_q}.$

Но как быть, если $f, g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ (всего лишь локально суммируемые функции)? Для $R > 0$ рассмотрим множество

$M_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \operatorname{supp} f, y \in \operatorname{supp} g, |x + y| \leqslant R\}.$

Теорема. Пусть для любого $R > 0$ множество M_R ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда существует свёртка $f * g \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Например, если одна из функций f или g финитна, то свёртка $f * g$ существует.

Пусть $f * g \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Имеем

$$(f * g, \varphi) = \int \varphi(\xi)d\xi \int f(y)g(\xi - y)dy = \int f(y)dy \int \varphi(\xi)g(\xi - y)d\xi =$$

$$= \{x = \xi - y\} = \int f(y)dy \int \varphi(x + y)g(x)dx = \iint\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(x)\varphi(x + y)dxdy.$$

Определим *аппроксимацию единицы* следующим образом: пусть $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^m\right)$ — последовательность основных функций, равномерно ограниченная вместе со всеми производными в $\mathbb{R}^m$. Она аппроксимирует единицу, если для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^m$ существует $N = N(K) \in \mathbb{N}$, что $\eta_k(x) = 1$ для всех $k \geqslant N(k)$ и $x \in K$.

Определение. Пусть $f, g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ — последовательность основных функций, аппроксимирующая единицу в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда если для любой $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ существует предел

$$\left(f * g, \varphi\right) = \lim_{k \to \infty} \left((f \otimes g)(x, y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \Big((f(x), \left(g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)\right)\Big),$$

то соответствующий функционал называется свёрткой обобщённых функций f и g.

Утверждение. Если предел в правой части равенства существует для какой-нибудь аппроксимации единицы, то соответствующий функционал принадлежит $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ (обобщённая функция), а предел не зависит от выбора аппроксимации единицы.

Достаточное условие существования свёртки.

Для $R > 0$ и двух замкнутых непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим множество $M_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in A, y \in B, |x + y| \leqslant R\}$.

Теорема. Пусть $f, g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\operatorname{supp} f \subset A$, $\operatorname{supp} g \subset B$, для любого $R > 0$ множество M_R ограничено в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда существует свёртка $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{A + B}$.

17. Свойства свёртки: коммутативность, билинейность, существование нейтрального элемента. Свёртка и линейные замены переменных. Дифференцирование свёртки. Проблема ассоциативности свёртки и её решение. Тройная свёртка.

Свойства свертки:

- Коммутативность: если существует $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, то существует $g * f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $f * g = g * f$.

- Дистрибутивность (билинейность): если существуют $f_1 * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right), f_2 * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, то для любых чисел λ_1, λ_2 существует $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * g = \lambda_1 f_1 * g + \lambda_2 f_2 * g$.

- Нейтральный элемент: свёртка любой обобщённой функции $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ с дельта-функцией существует и равна f: $f * \delta = \delta * f = f$.

- Сдвиг свёртки: если существует $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, то для любого $h \in \mathbb{R}^n$ существует $R_h f * g$, где $\left(R_h f, \varphi\right) = \left(f(x-h), \varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi(x+h)\right)$, и $R_h f * g = R_h(f * g)$, то есть $f(x) * g(x+h) = f(x+h) * g(x) = (f * g)(x+h)$.

- Дифференцирование свёртки: если существует $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, то при любом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существуют свёртки $D^\alpha f * g, f * D^\alpha g$ и

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g.$$

- носитель свёртки: если существует свёртка $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, то $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

Очевидно, что множество обобщённых функций $g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, таких, что существует свёртка $f * g$ (f фиксирована), образует линейное подпространство в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Однако, это подпространство не обязательно замкнутое в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, а свёрточный оператор $g \mapsto f * g$, вообще говоря, разрывен. Например, $\delta(x-k) \to 0$ в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ при $k \to \infty$ (проверьте), но $1 * \delta(x-k) = 1 * \delta(x) = 1$ и не стремится к нулю при $k \to \infty$.

Проблема неассоциативности свертки

Другая проблема: если $f, g, h \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$, то $(f * g) * h = f * (g * h)$ (ассоциативность свёртки). Но свёртка в пространстве $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, вообще говоря, не ассоциативна, например,

$(1 * \delta') * \theta = (1 * \delta)' * \theta = 1' * \theta = 0 * \theta = 0$, но с другой стороны $1 * (\delta' * \theta) = 1 * (\delta * \theta)' = 1 * \delta = 1$.

Ключ к решению проблемы ассоциативности — три-свёртка.

Определение. Пусть $f, g, h \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ — последовательность основных функций, аппроксимирующая единицу в $\mathbb{R}^{3n}$. Тогда если для любой $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$ существует предел

$$\left(f * g * h, \varphi\right) = \lim_{k\to\infty}\left((f \otimes g \otimes h)(x,y,z), \eta_k(x,y,z)\varphi(x+y+z)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(f(x), \left(g(y), \left(h(z), \eta_k(x,y,z)\varphi(x+y+z)\right)\right)\right),$$

то соответствующий функционал называется 3-свёрткой обобщённых функций f, g и h.

Определение аналогично определению 2-свёртки. Если предел существует для какой-нибудь аппроксимации единицы в $\mathbb{R}^{3n}$, то соответствующий функционал есть обобщённая функция, а предел не зависит от аппроксимации.

Утверждение. Пусть $f, g, h \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и существуют свёртки $f * g \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $f * g * h \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Тогда существует $(f * g) * h \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $(f * g) * h = f * g * h$.

Итак, если существуют бинарные свёртки и 3-свёртка трёх обобщённых функций, то свёртка ассоциативна.

18. Свёрточные уравнения. Определение фундаментального решения свёрточного оператора. Теорема об однозначной разрешимости свёрточного уравнения.

Свёрточные операторы и свёрточные уравнения — гениальная концепция, объединяющая все линейные уравнения с постоянными коэффициентами (дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные), а также некоторые интегральные и интегрально-дифференциальные уравнения.

Пусть $a \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — фиксированная обобщённая функция. Мы рассматриваем свёрточный оператор $a\,*$ на линейном замкнутом (или не замкнутом) подпространстве в $\mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, где этот оператор непрерывен (или разрывен), и уравнение

$$a * u = f$$

с неизвестной обобщённой функцией u и заданной обобщённой функцией f.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Линейное дифференциальное уравнение $\mathscr{L}u = f$, где $\mathscr{L} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, есть свёрточное уравнение $a_{\mathscr{L}} * u = f$, $a_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}\delta = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha \delta$.

2. Линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами $\mathscr{R}u = f,\ (\mathscr{R}u)(x) = \sum\limits_{j \in J} c_j u\left(x - x^j\right)$, есть свёрточное уравнение $a_{\mathscr{R}} * u = f$, $a_{\mathscr{R}}(x) = \sum\limits_{j \in J} c_j \delta\left(x - x^j\right)$.

3. Линейные дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами.

4. Линейное интегральное уравнение Вольтерра

$$(\mathscr{K}u)(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)u(y)dy = f(x),\ K \in L_{1,loc}(\mathbb{R}),$$

есть свёрточное уравнение $K * u = f$.

Определение. Пусть $a \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Фундаментальным решением свёрточного оператора $a*$ называется обобщённая функция $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, такая, что $a * \mathscr{E} = \delta$.

Теорема

Пусть $a \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — фундаментальное решение свёрточного оператора $a\,*$. Обозначим через $A(a, \mathscr{E})$ линейное подпространство обобщённых функций $f \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, для которых существует 2-свёртка $\mathscr{E} * f$ и три-свёртка $a * \mathscr{E} * f$.

Теорема. Пусть обобщённая функция $f \in A(a, \mathscr{E})$. Тогда решение свёрточного уравнения $a * u = f$ существует, выражается формулой $u = \mathscr{E} * f$ и единственно в подпространстве $A(a, \mathscr{E})$.

19. Пространство быстро убывающих основных функций S. Обобщённые функции медленного роста, сходимость в пространстве S'. Пространство мультипликаторов Фурье.

Пространство быстро убывающих основных функций S,

Определение. Пространство Шварца $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ состоит из всех быстро убывающих функций $\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$:

$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n, x^\alpha D^\beta \varphi(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty\right\}$.

Оно имеет естественную структуру векторного пространства.

Пример быстро убывающей функции: $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ имеет структуру пространства Фреше с нормами

$\|\varphi\|_m = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{m/2} |D^\alpha \varphi(x)|$ (или не сумма, а супремум по всем мультииндексам до m-го порядка).

Обобщенные функции медленного роста и сходимость в пространство S'.

Определение. Обобщённой функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал над $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

$\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — пространство всех обобщённых функций медленного роста. Сходимость в $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ определяется аналогично сходимости в $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ (*-слабая сходимость).

Теорема Шварца. Пусть $M \subset \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — слабо ограниченное множество. Тогда $\exists C \geqslant 0$ и $\exists m \in \mathbb{Z}_+$, такие, что $\forall f \in M$ и $\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ $|(f, \varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_m$.

Мультипликаторы

Пусть $\mathcal{S}_m\left(\mathbb{R}^n\right)$ — пополнение $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ относительно m-ой нормы. Это банахово пространство. Очевидно вложение

$$\mathcal{S}_0\left(\mathbb{R}^n\right) \supset \mathcal{S}_1\left(\mathbb{R}^n\right) \supset \ldots$$

Несложно доказать, что каждое вложение $\mathcal{S}_m\left(\mathbb{R}^n\right) \supset \mathcal{S}_{m+1}\left(\mathbb{R}^n\right)$ компактно и всюду плотно.

Оказывается, пространства $\mathcal{S}_m\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно описать вполне явным образом.

Утверждение.
$\mathcal{S}_m\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{u \in C^m\left(\mathbb{R}^n\right) : \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \, |\alpha| \leqslant m, |x|^m D^\alpha u(x) \to 0 \text{ при } |x| \to \infty\right\}$.

Можно определить $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ как бесконечное пересечение банаховых пространств $\mathcal{S}_0\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\mathcal{S}_1\left(\mathbb{R}^n\right)$,… Оно не будет банаховым, но, конечно, будет полным, будет пространством Фреше.

$\mathcal{M} = \left\{m \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right) : \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \;\; m\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$ — алгебра мультипликаторов. $m \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \; \exists c_\alpha \geqslant 0 \; \exists m_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ $|D^\alpha m(x)| \leqslant c_\alpha \left(1 + |x|\right)^{m_\alpha}$.

20. Преобразование Фурье регулярных функций. **Определение преобразования Фурье обобщённых функций медленного роста. Обратное преобразование Фурье, автоморфизм S'.**

Т.к. функции из пространства Шварца $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ суммируемы в $\mathbb{R}^n$, то для них определено преобразование Фурье: $\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx.$$

$\mathcal{F} : L_2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ – унитарный изоморфизм, если его нормировать: $\forall u, v \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ $(\mathcal{F}[u], \mathcal{F}[v]) = (2\pi)^n (u, v)$.

Поскольку $\varphi \in \mathcal{S}$, то

$$D^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(ix)^\alpha e^{i(x,\xi)} dx = \mathcal{F}\left[(ix)^\alpha \varphi\right](\xi),$$

$\mathcal{F}\left[D^\alpha \varphi\right](\xi) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)$. Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\left[\psi(-\xi)\right](x).$$

Утверждение. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ есть линейный топологический изоморфизм.

Определение. Пусть $f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — обобщённая функция медленного роста. Тогда её преобразование Фурье есть о.ф. медленного роста $\mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, такая, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right) \; \left(\mathcal{F}[f], \varphi\right) := \left(f, \mathcal{F}[\varphi]\right).$$

Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}\left[f(-\xi)\right](x).$$

Утверждение. Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right) \to \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ есть линейный топологический изоморфизм.

21. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье свёртки.

Свойства преобразования Фурье

$\mathcal{F}\left[\delta\left(x - x^0\right)\right](\xi) = e^{i\left(\xi, x^0\right)}$. Действительно, для любой $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$
$\left(\mathcal{F}\left[\delta(x - x^0)\right], \varphi\right) = \left(\delta\left(x - x^0\right), \mathcal{F}[\varphi]\right) = \mathcal{F}[\varphi]\left(x^0\right) =$

$$= \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{i\left(x^0, \xi\right)}dx \Rightarrow \mathcal{F}\left[\delta\left(x - x^0\right)\right](\xi) = e^{i\left(\xi, x^0\right)}.$$

1) Дифференцирования преобразования Фурье: $\forall f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ $D^\alpha \mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}\left[(ix)^\alpha f(x)\right]$.

2) Преобразование Фурье производной: $\forall f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ $\mathcal{F}\left[D^\alpha f(x)\right](\xi) = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[f(x)](\xi)$.

3) Сдвиг преобразования Фурье: $\forall f \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$
$\mathscr{F}[f(x)](\xi + \xi^0) = \mathscr{F}\left[e^{i(\xi^0, x)} f(x)\right](\xi)$.

4) Преобразования Фурье сдвига: $\forall f \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$
$D^\alpha \mathscr{F}[f(x - x^0)](\xi) = e^{i(\xi, x^0)} \mathscr{F}\left[f(x)\right](\xi)$.

5) Преобразование Фурье тензорного произведения: $\forall f \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$
$\forall g \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^m\right) \mathscr{F}_{x,y}\left[f(x) \otimes g(y)\right] = \mathscr{F}_x[f] \otimes \mathscr{F}_y[g]$,
$\mathscr{F}_x\left[f(x) \otimes g(y)\right] = \mathscr{F}_x[f] \otimes g(y)$.

6) Преобразование Фурье финитной обобщённой функции: пусть $f \in \mathscr{D}_0'\left(\mathbb{R}^n\right)$, тогда $\mathscr{F}[f] \in \mathscr{M}\left(\mathbb{R}^n\right)$ и представляется в виде

Преобразование Фурье свёртки

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \left(f(x), \eta(x) e^{-i(\xi, x)}\right),$$

где $\eta \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$, $\eta(x) = 1$, если $x \in U(\operatorname{supp} f)$ (окрестности носителя).

Теорема. Пусть $f \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$, $g \in \mathscr{D}_0'\left(\mathbb{R}^n\right)$. Тогда их свёртка $f * g \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ и преобразование Фурье свёртки есть произведение преобразований Фурье сомножителей:

$$\mathscr{F}[g * f] = \mathscr{F}[g]\mathscr{F}[f].$$

III. Начальные задачи

22. Линейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система. Структура (локального) общего решения линейного уравнения.

23. Задача Коши для линейного уравнения первого порядка. Условие трансверсальности: геометрическая и аналитическая формулировка.

24. Существование и единственность решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка. Понятие об области влияния.

25. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристическая система. Структура (локального) общего решения квазилинейного уравнения.

26. Задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Геометрическая интерпретация задачи Коши, интегральная поверхность. Условие трансверсальности: геометрическая и аналитическая формулировка.

27. Теорема о локальном существовании и единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка. Разрушение решений квазилинейных уравнений на примере уравнения Хопфа.

28. Определение обобщённого (слабого) решения уравнения $u_t + (f(u))_x = 0$. Условие Ранкина–Гюгонио.

29. Задача Гурса для линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными: постановка, эквивалентность системе интегральных уравнений, метод последовательных приближений. Существование и единственность классического решения задачи Гурса.

Постановка

Далее работаем сразу с каноническим видом уравнения гиперболического типа. Рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \\ u\big|_{x=x_0} = \psi(y) \ \Leftrightarrow\ u(x_0,y) = \psi(y), \\ u\big|_{y=y_0} = \varphi(x)\,. \end{cases} \qquad (4)$$

Задача (4) называется *задачей Гурса*. Условия $u\big|_{x=x_0} = \psi(y)$, $u\big|_{y=y_0} = \varphi(x)$ рассматриваются на *характеристиках* оператора

$$\mathscr{L}u = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u.$$

Эквивалентность системе интегральных уравнений

Пусть $u_x = v$, $u_y = w$. Заменим в уравнении $\mathscr{L}u = f(x, y)$ переменную x на переменную s, после проинтегрируем уравнение по s от x_0 до x:
$u_{sy} = -a(s, y)u_s - b(s, y)u_y - c(s, y)u + f(s, y) \Rightarrow$

$$\int_{x_0}^{x} u_{sy}ds = -\int_{x_0}^{x} a(s, y)u_s ds - \int_{x_0}^{x} b(s, y)u_y ds - \int_{x_0}^{x} c(s, y)u ds + \int_{x_0}^{x} f(s, y)ds$$

$$\Rightarrow w(x, y) - w(x_0, y) = -\int_{x_0}^{x} a(s, y)v(s, y)ds - \int_{x_0}^{x} b(s, y)w(s, y)ds -$$

$-\int_{x_0}^{x} c(s, y)u(s, y)ds + \int_{x_0}^{x} f(s, y)ds$. Но $w(x_0, y) = u_y(x_0, y) = \psi'(y)$, поэтому получаем уравнение для w:

$$w(x, y) = -\int_{x_0}^{x} c(s, y)u(s, y)ds - \int_{x_0}^{x} a(s, y)v(s, y)ds - \int_{x_0}^{x} b(s, y)w(s, y)ds +$$

$+\psi'(y) + \int_{x_0}^{x} f(s, y)ds$. Рассуждая аналогично, можно получить уравнение для v: $v(x, y) = -\int_{y_0}^{y} c(x, t)u(x, t)dt - \int_{y_0}^{y} a(x, t)v(x, t)dt - \int_{y_0}^{y} b(x, t)w(x, t)dt +$

$+\varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x, t)dt$. Уравнения для u:

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x}^{x_0} v(s, y)ds = \psi(y) + \int_{x}^{x_0} v(s, y)ds,$$

$u(x,y) = u(x,y_0) + \int_y^{y_0} w(x,t)dt = \varphi(x) + \int_y^{y_0} w(x,t)dt$. Нужно оставить какое-нибудь одно из уравнений. В результате получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} u(x,y) = \int_{y_0}^{y} w(x,t)dt + \varphi(x), \\ v(x,y) = -\int_{y_0}^{y} c(x,t)u(x,t)dt - \int_{y_0}^{y} a(x,t)v(x,t)dt - \int_{y_0}^{y} b(x,t)w(x,t)dt + \\ +\varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x,t)dt, \\ w(x,y) = -\int_{x_0}^{x} c(s,y)u(s,y)ds - \int_{x_0}^{x} a(s,y)v(s,y)ds - \int_{x_0}^{x} b(s,y)w(s,y)ds + \\ +\psi'(y) + \int_{x_0}^{x} f(s,y)ds. \end{cases} \tag{5}$$

Метод Пикара

Теорема (принцип сжимающих отображений). Пусть (X,ρ) — полное метрическое пространство, $f: X \to X$ — сжимающее отображение, т.е. $\exists \lambda \in [0,1)\ \forall x, \tilde{x} \in X\ \rho\left(f(x), f(\tilde{x})\right) \leqslant \lambda\rho(x,\tilde{x})$. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $\hat{x} \in X$, т.е. $f(\hat{x}) = \hat{x}$.

Метод простых итераций: $x_0 \in X$, $x_k = f(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$; $\hat{x} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Рассмотрим задачу Коши вида $\dot{x} = f(x,t)$, $x(0) = x_0 \iff$

$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f\left(\tau, x(\tau)\right) d\tau$. Если f — непрерывная функция, удовлетворяет условию Липшица по x, то существует $(\alpha, \beta) \ni 0$, на котором существует единственное решение задачи Коши.

Рассмотрим пространство $C\left(\overline{D}\right)^3 = \left\{(u,v,w)^T : u,v,w \in C\left(\overline{D}\right)\right\}$, $\|(u,v,w)^T\| = \|u\|_{C(\overline{D})} + \|v\|_{C(\overline{D})} + \|w\|_{C(\overline{D})}$, и оператор в нём

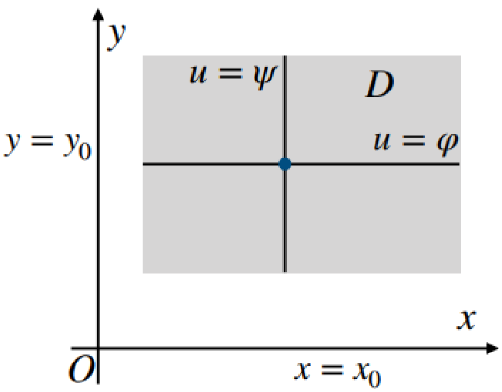
$$C\left(\overline{D}\right)^3 \ni (u,v,w)^T \mapsto \Bigg(\int_{y_0}^{y} w(x,t)dt,$$

$$-\int_{y_0}^{y} c(x,t)u(x,t)dt - \int_{y_0}^{y} a(x,t)v(x,t)dt - \int_{y_0}^{y} b(x,t)w(x,t)dt,$$

$$-\int_{x_0}^{x} c(s,y)u(s,y)ds - \int_{x_0}^{x} a(s,y)v(s,y)ds - \int_{x_0}^{x} b(s,y)w(s,y)ds \Bigg)^T \in C\left(\overline{D}\right)^3;$$ обозначим этот оператор через A. Тогда систему (5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x,t)dt \\ \psi'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} f(s,y)ds \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi'(x) + \int_{y_0}^{y} f(x,t)dt \\ \psi'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} f(s,y)ds \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \\ w^{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \\ w^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{pmatrix}.$$

классическое решение I



Пусть I — промежуток на оси Ox, содержащий точку x_0, J — промежуток на оси Oy, содержащий точку y_0, $D = I \times J$. Классическим решение I задачи (4) в области D называется функция $u \in C^2(D)$, удовлетворяющая условиям Гурса и уравнению $\mathscr{L}u = f(x,y)$ в D. Очевидно, для существования классического решения I необходимо условие согласования $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$.

Теорема о существовании и единственности решения задачи Гурса

Отображение сжимающее $\Leftrightarrow$ $\|A\| < 1$.

Теорема. Пусть $a, b, c \in C(\overline{D})$, $f \in C(\overline{D})$, $\varphi \in C^2[x_0, x_1]$, $\psi \in C^2[y_0, y_1]$, $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$. Тогда существует единственное решение задачи (5) $u \in C^2(D) \cap C\left(\overline{D}\right)$.

30. Формула Римана. Функция Римана линейного гиперболического оператора с двумя независимыми переменными: определение, существование и единственность.

Определение функции Римана

Рассмотрим гиперболический оператор второго порядка вида $\mathscr{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y} + c(x,y)$, где $a, b \in C^1(D)$, $c \in C(D)$, где $D = I \times J$, I, J — промежутки на прямой. Напомню, что формально сопряжённый оператор имеет вид $\mathscr{L}^* v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial}{\partial x}\big(a(x,y)v\big) - \dfrac{\partial}{\partial y}\big(b(x,y)v\big) + c(x,y)v,$ где $v \in C^2(D)$.

Определение. Функцией Римана оператора $\mathscr{L}$ в прямоугольной области D называется функция $R = R(s,t;x,y)$, $(s,t) \in D$, $(x,y) \in D$, удовлетворяющая для любой $(x,y) \in D$ задаче Гурса вида

$$\begin{cases} \mathscr{L}^*_{s,t} R = 0, (s,t) \in D, \\ R\big|_{s=x} = \exp \displaystyle\int_y^t a(x,\theta)d\theta, \\ R\big|_{t=y} = \exp \displaystyle\int_x^s b(\theta,y)d\theta. \end{cases} \qquad (6)$$

Условия Гурса означают, что $R_s - b(s,y)R = 0$, $R_t - a(x,t)R = 0$.

Существование и единственность функции Римана

Из теоремы о существовании и единственности решения задачи Гурса, доказанной выше, следует существование и единственность функции Римана гиперболического оператора

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y). \quad (7)$$

Утверждение. Пусть $a, b \in C^1(D)$, $c \in C(D)$, где D — прямоугольная область. Тогда существует единственная функция Римана оператора (7).

Формула Римана

Имеет место формула Римана

$$\iint_{\Omega} \left(v\mathscr{L}u - u\mathscr{L}^{*}v\right) dxdy = \oint_{C=\partial\Omega} Pdx + Qdy,$$

где

$P = \dfrac{1}{2}\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - b(x,y)uv,$

$Q = \dfrac{1}{2}\left(v\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + a(x,y)uv$. Формула Римана непосредственно следует из формулы Грина, если предположить, что $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$, что всегда так.

31. Задача Коши для линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Условия трансверсальности: геометрическая и аналитическая формулировка.

Рассмотрим гиперболический оператор второго порядка вида

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y)$$

, где $a, b \in C^1(D)$, $c \in C(D)$, где $D = I \times J$, I, J — промежутки на прямой. Напомню, что формально

Пусть $\gamma = \{y = \mu(x) : x \in (x_1, x_2)\}$ — начальная кривая ($\mu \in C^1(x_1, x_2)$). Поставим задачу Коши для оператора (7) на начальной кривой γ:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x,y), (x,y) \in ?, \\ u\big|_{\gamma} = \varphi_0 \Leftrightarrow u\left(x, \mu(x)\right) = \varphi_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_{\gamma} = \varphi_1 \Leftrightarrow \xi(x)u_x\left(x,\mu(x)\right) + \eta(x)u_y\left(x,\mu(x)\right) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{9}$$

где $\vec{\tau} = \xi\,\overrightarrow{e}_x + \eta\,\overrightarrow{e}_y$ — поле направлений дифференцирования, заданное на кривой γ.

Первое условие трансверсальности: $\forall x \in (x_1, x_2)\ \exists \mu'(x) \neq 0, \mu'(x) \neq \infty$.
Геометрический смысл: начальная кривая γ не касается характеристик.

Второе условие трансверсальности: поле направление $\vec{\tau}$ не касается кривой γ, т.е. $\vec{\tau} \cdot \overrightarrow{\nu} = \eta(x) - \mu'(x)\xi(x) \neq 0$, где $\overrightarrow{\nu} = \overrightarrow{e}_y - \mu'(x)\overrightarrow{e}_x$ — вектор нормали к γ.

Если выполнены условия трансверсальности, то можно найти u_x и u_y, решив систему уравнений

$$\begin{cases} u_x + \mu'(x)u_y = \varphi_0'(x), \\ \xi(x)u_x + \eta(x)u_y = \varphi_1(x)\,. \end{cases}$$

Действительно, определитель системы $\eta(x) - \mu'(x)\xi(x) \neq 0 \Rightarrow u_x\Big|_\gamma = \varphi(x)$, $u_y\Big|_\gamma = \psi(x)$.

32. Теорема о существовании и единственности классического решения задачи Коши. Область влияния и область единственности.

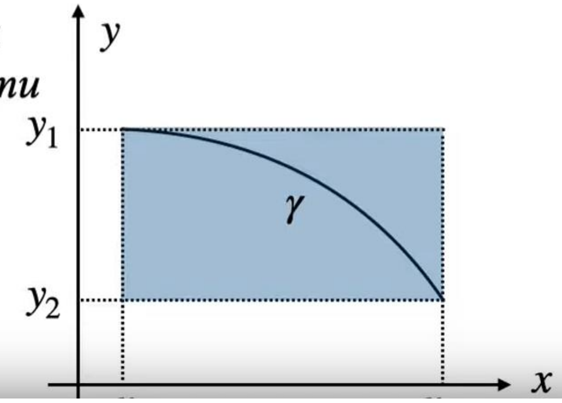
Пусть $\gamma = \{y = \mu(x) : x \in (x_1, x_2)\}$ — начальная кривая ($\mu \in C^1(x_1, x_2)$). Поставим задачу Коши для оператора (7) на начальной кривой γ:

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f(x, y), (x, y) \in ?, \\ u\big|_\gamma = \varphi_0 \Leftrightarrow u\left(x, \mu(x)\right) = \varphi_0(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\tau}}\right|_\gamma = \varphi_1 \Leftrightarrow \xi(x)u_x\left(x, \mu(x)\right) + \eta(x)u_y\left(x, \mu(x)\right) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{9}$$

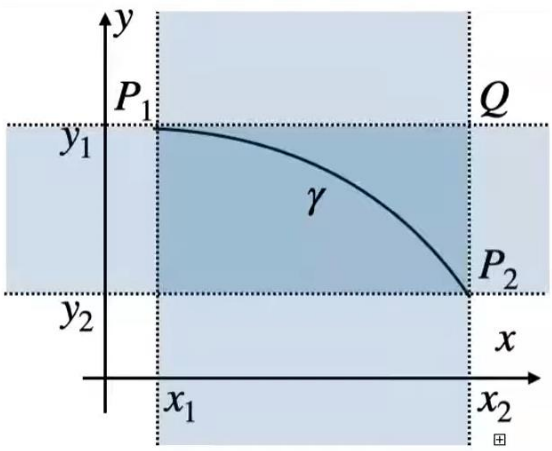
где $\vec{\tau} = \xi\overrightarrow{e}_x + \eta\overrightarrow{e}_y$ — поле направлений дифференцирования, заданное на кривой γ.

Теорема. Пусть $f \in C^1$, $\varphi_0 \in C^2$, $\varphi_1 \in C^1$, и выполнены условия трансверсальности. Тогда в окрестности точки начальной кривой γ существует единственное решение $u \in C^2$ задачи Коши (9).

Решение единственности в *области единственности* $(x_1, x_2) \times (y_2, y_1)$.



Проведём через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ *характеристики* — горизонтальные и вертикальные прямые. *Область влияния* есть объединение вертикальной и горизонтальных полос, образованных характеристиками. Она включает в себя область единственности.



Интегральная формула получается применением формулы Римана к решению задачи и функции Римана к области P_1QP_2.

33. Определение фундаментального решения линейного дифференциального оператора. Теорема о существовании фундаментального решения медленного роста оператора с постоянными коэффициентами.

Определение фундаментального решения:

$$\mathscr{L}\mathscr{E} = \delta$$

Теорема о существовании фундаментального решения медленного роста оператора с постоянными коэффициентами:

Теорема Хёрмандера-Лоясевича

Теорема. Пусть $\mathscr{L} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha D^\alpha$ — линейный дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$. Тогда существует $\mathscr{E} \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — фундаментальное решение медленного роста оператора $\mathscr{L}$, т.е. $\mathscr{L}\mathscr{E} = \delta$.

34. Метод спуска построения фундаментального решения линейного дифференциального оператора.

Определение. Обобщённая функция $u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ допускает расширение действия на функции вида $\varphi(x)1(z)$, где $\varphi \in \mathscr{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$, если для любой аппроксимации единицы $\{\eta_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ существует не зависящий от неё предел

$$\lim_{j\to\infty}\Big(u(x,z),\varphi(x)\eta_j(z)\Big) = \big(u(x,z),\varphi(x)1(z)\big).$$

Пусть обобщённая функция $u \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ допускает расширение действия на функции вида $\varphi(x)1(z)$. Обозначим предел в определении выше через

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\,\cdot\,,z)dz \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Замечание. Если функция $u \in L_{1,loc}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ имеет то свойство, что для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ $u(x,\cdot\,) \in L_1(\mathbb{R})$, то u допускает расширения действия на функции $\varphi(x)1(z)$, причём упомянутой выше интеграл имеет обычный смысл.

35. Фундаментальное решение волнового оператора для одной, двух и трёх пространственных переменных.

$\mathscr{L}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x u$ — волновой оператор, $a > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.
Волновой оператор (оператор Д' Аламбера) имеет гиперболический тип.

$\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x E = \delta(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t)$. $\hat{E}(\xi,t) = \mathscr{F}_x\left[E(x,t)\right]$ — фурье-образ фундаментального решения.

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x E\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x) \otimes \delta(t)\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x)\right] \otimes \delta(t) = 1(\xi) \otimes \delta(t);$$

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}\right] - a^2 \mathscr{F}_x\left[\Delta_x E\right] = 1(\xi) \otimes \delta(t) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 \hat{E} = 1(\xi) \otimes \delta(t).$$

$\hat{E}(\xi,t) = X(\xi,t)\theta(t)$, где X есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} + a^2 |\xi|^2 X = 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$X(\xi,t) = A(\xi)\cos(a|\xi|t) + B(\xi)\sin(a|\xi|t)$ — общее решение, если $|\xi| > 0 \Rightarrow$ решение имеет вид
$X(\xi,t) = \dfrac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \to t$ при $|\xi| \to 0$ — решение задачи Коши при $|\xi| = 0 \Rightarrow \hat{E}(\xi,t) = \theta(t)\dfrac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}$.

$$E(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\hat{E}(\xi,t)\right] = \theta(t)\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|}\right] = ?, \ \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|} \notin L_1\left(\mathbb{R}^n\right)$$

при $t > 0$.

- $n = 1 \Rightarrow E_1(x,t) = \dfrac{1}{2a}\theta\left(at - |x|\right)$;
- $n = 2 \Rightarrow E_2(x,t) = \dfrac{\theta\left(at-|x|\right)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}$;
- $n = 3 \Rightarrow E_3(x,t) = \dfrac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x)$, где $\delta_{S_{at}} \in \mathscr{D}_0'\left(\mathbb{R}^n\right)$ — простой слой на сфере $|x| = at$ с единичной плотностью ($\delta_{S_{at}} \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ — простой слой на половине конической гиперповерхности $|x| = at$).

36. Классическая задача Коши для волнового уравнения: постановка, классическое решение. Преобразование классической задачи Коши к волновому уравнению с обобщённой функцией в правой части.

Постановка

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

$n \in \{1,2,3\}$, $Q = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\right\}$,
$\overline{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0\right\}$.
$\widetilde{u}(x,t) = \theta(t)u(x,t)$, $\tilde{f}(x,t) = \theta(t)f(x,t)$.

Утверждение. Пусть $u \in C^2(Q) \cap C^1\left(\overline{Q}\right)$ — классическое решение задачи Коши. Тогда $\widetilde{u} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{u}_{tt} - a^2\Delta\widetilde{u} = \tilde{f}(x,t) + \varphi(x) \otimes \delta'(t) + \psi(x) \otimes \delta(t).$$

Теорема. Пусть $\operatorname{supp} F \subset \overline{Q}$. Тогда свёрточное уравнение для волнового оператора имеет единственное решение с носителем, принадлежащим $\overline{Q}$, которое выражается формулой

$u(x,t) = E_n(x,t) * F(x,t)$, где $E_n(x,t)$ — фундаментальное решение волнового оператора.

37. Формула Д'Аламбера, формула Пуассона и формула Кирхгофа.

$\Box_a u = u_{tt} - a^2 \Delta u$ — волновой оператор или оператор Д'Аламбера.

$\Box_a u = F(x,t)$, $F \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ — известная обобщённая функция, $u \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ — неизвестная обобщённая функция.

Теорема. Пусть $\operatorname{supp} F \subset \overline{\overline{Q}}$. Тогда свёрточное уравнение для волнового оператора имеет единственное решение с носителем, принадлежащим $\overline{Q}$, которое выражается формулой

$u(x,t) = E_n(x,t) * F(x,t)$, где $E_n(x,t)$ — фундаментальное решение волнового оператора.

1) $n = 1 \Rightarrow$ формула Д'Аламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi.$$

2) $n = 2 \Rightarrow$ формула Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi - x|^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi - x|^2}}.$$

3) $n = 3 \Rightarrow$ формула Кирхгофа

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \varphi(\xi)d\sigma_\xi\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at} \psi(\xi)d\sigma_\xi +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{1}{|\xi - x|} f\left(\xi, t - \frac{|\xi - x|}{a}\right)d\xi.$$

$$E_3(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(x) * \left(\tilde{f}(x,t) + \varphi(x)\otimes\delta'(t) + \psi(x)\otimes\delta(t)\right)\ldots$$

38. Теорема о существовании и единственности решения классической задачи Коши для волнового уравнения (с одной, двумя и тремя пространственными переменными).

Теорема.

- $n = 1, \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^1\left(\overline{Q}\right) \Rightarrow \exists ! u \in C^2\left(\overline{Q}\right)$ — единственное классическое решение задачи Коши, которое выражается формулой Д'Аламбера;
- $n \in \{2,3\}, \varphi \in C^3\left(\mathbb{R}^n\right), \psi \in C^2\left(\mathbb{R}^n\right), f \in C^2\left(\overline{Q}\right) \Rightarrow \exists ! u \in C^2\left(\overline{Q}\right)$ — единственное классическое решение задачи Коши, которое выражается формулой Пуассона ($n = 2$) / формулой Кирхгофа ($n = 3$).

$$Q = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\right\},$$

и вроде так

$$\overline{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0\right\}.$$

39. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.

$\mathscr{L}u = \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta_x u$ — оператор теплопроводности, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{S}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, $\Delta_x u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$. Оператор теплопроводности имеет параболический тип.

$\dfrac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta_x E = \delta(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t)$. $\hat{E}(\xi, t) = \mathscr{F}_x\left[E(x,t)\right]$ — фурье-образ фундаментального решения.

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta_x E\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x) \otimes \delta(t)\right] = \mathscr{F}_x\left[\delta(x)\right] \otimes \delta(t) = 1(\xi) \otimes \delta(t);$$

$$\mathscr{F}_x\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right] - a^2\mathscr{F}_x\left[\Delta_x E\right] = 1(\xi)\otimes\delta(t) \Leftrightarrow \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} + a^2|\xi|^2\hat{E} = 1(\xi)\otimes\delta(t).$$

Утверждение. Фундаментальное решение $E \in \mathscr{S}'[0,+\infty)$ (т.е. $E \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} E \subset [0,+\infty)$) линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами вида

$$\mathscr{L} = \frac{d^m}{dt^m} + c_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + c_m$$

есть $E(t) = X(t)\theta(t)$, где

$$\begin{cases} \mathscr{L}X = 0, \\ X(0) = 0, X'(0) = 0, \ \ldots, X^{(m-1)}(0) = 1, \end{cases}$$

а θ — функция Хевисайда.

Получим образом фундаментального решения оператора теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t} + a^2|\xi|^2 X = 0, \\ X(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow X(\xi,t) = e^{-a^2|\xi|^2 t} \Rightarrow$$

$\hat{E}(\xi,t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}\theta(t)$. Найдём само фундаментальное решение $E(x,t) = \mathscr{F}_\xi^{-1}\left[\hat{E}(\xi,t)\right] =$

$$= \theta(t)\mathscr{F}_\xi^{-1}\left[e^{-a^2|\xi|^2 t}\right] = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|\xi|^2 t}e^{-i(x,\xi)}d\xi = \ldots = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

40. Классическая задача Коши для уравнения теплопроводности: постановка, классическое решение. Преобразование задачи Коши к уравнению теплопроводности с обобщённой функцией в правой части.

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$

$$Q = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\right\}, Q_T = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\right\},$$
$$\overline{Q} = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \geqslant 0\right\}, \overline{Q}_T = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant t \leqslant T\right\}.$$

$\widetilde{u}(x,t) = \theta(t)u(x,t), \tilde{f}(x,t) = \theta(t)f(x,t)$. Замечание: $f \in C(\overline{Q})$.

Утверждение. Пусть $u \in C^2(Q) \cap C\left(\overline{Q}\right)$ — классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Тогда $\widetilde{u} \in \mathscr{D}'\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{u}_t - a^2\Delta\widetilde{u} = \tilde{f}(x,t) + \varphi(x) \otimes \delta(t).$$

41. Теорема о существовании и единственности решения классической задачи Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.

$\widetilde{C}_b^2\left(\overline{Q}\right)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $\forall T > 0$ функции ограничены вместе со своими производными до второго порядка включительно в $\overline{Q}_T$.
$\widetilde{C}_b\left(\overline{Q}\right)$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций, таких, что $\forall T > 0$ функции ограничены в $\overline{Q}_T$.
Теорема. Пусть $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^n\right)$ (непрерывная и ограниченная функция), $f \in \widetilde{C}_b^2\left(\overline{Q}\right)$. Тогда существует единственное решение классической задачи Коши для уравнения теплопроводности $u \in \widetilde{C}_b\left(\overline{Q}\right) \cap C^2(Q)$.
Замечание. Условия $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно заменить на $\varphi \in L_\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Формула Пуассона

$$\widetilde{u}(x,t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}} * \left(\varphi(x) \otimes \delta(t) + f(x,t)\theta(t)\right)$$

При $t > 0$ получим формулу Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi - x|^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)d\xi$$

Замечание. $f(x,t) \equiv 0, \varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^n\right) \Rightarrow$
$u \in \widetilde{C}_b\left(\overline{Q}\right) \cap C^\infty(Q)$.

IV. Начально-краевые задачи

42. Постановка начально-краевых задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. Определение обобщённых решений одной начально-краевой задачи (на выбор).

Начально-краевые задачи для волнового уравнения:

I. Первая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow u(x,t) = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Пример: $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), 0 < x < l, \\ u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = A \sin \Omega t. \end{cases}$

II. Вторая начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}}\right|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow \partial_{\overrightarrow{\nu}} u = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

III. Третья начально-краевая задача для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x,t) u\right|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow \partial_{\overrightarrow{\nu}} u + \sigma(x,t) u = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности:

Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow u(x,t) = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Вторая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\bigg|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow \partial_{\vec{\nu}} u = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Третья начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + \sigma(x,t)u\bigg|_{\Gamma_T} = \nu(x,t) \Leftrightarrow \partial_{\vec{\nu}} u + \sigma(x,t)u = \nu(x,t), (x,t) \in \Gamma_T. \end{cases}$$

Пример начально-краевой задачи со смешанными условиями:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ u\big|_{x=0} = A,\ u_x\big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Определение обобщенных решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу с однородным краевым условием Дирихле:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$H^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(Q_T), k = 1,\ldots,n \right\}$ — анизотропное пространство Соболева.

Определение 1. Обобщённым (слабым) решением задачи (1) называется функция $u \in H^{1,0}(Q_T)$, такая, что 1) $u\big|_{\Gamma_T} = 0$ (оператор следа на боковой поверхности от решения равен нулю); 2) для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Gamma_T} = 0$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u v_t\right) dxdt = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) v\big|_{\Omega_0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v\, dxdt.$$

Объяснение определения: пусть $u \in H^2(Q_T)$ — сильное решение начально-краевой задачи (оно при подстановке в уравнение, в начальные и краевые условия даёт тождества), $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Gamma_T} = 0$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$. Умножим уравнение теплопроводности на пробную функцию и проинтегрируем по Q_T:

ИЛИ (в вопросе сказано "на выбор")

Определение обобщенных решений третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим третью начально-краевую задачу с однородным краевым условием Ньютона

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x,t)u\Bigg|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$H^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(Q_T), k = 1,\dots,n \right\}$ — анизотропное пространство Соболева.

Определение 2. Обобщённым (слабым) решением задачи (2) называется функция $u \in H^{1,0}(Q_T)$, такая, что для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u v_t\right) dxdt + \int\limits_{\Gamma_T} \sigma(x,t) u\big|_{\Gamma_T} v\big|_{\Gamma_T} ds = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) v\big|_{t=0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v dxdt.$$

ИЛИ (в вопросе сказано "на выбор")

Определение обобщенных решений первой начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу с однородным краевым условием Дирихле

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T), k = 1,\ldots,n \right\}$ — пространство Соболева первого порядка.

Определение 3. Обобщённым (слабым) решением задачи (3) называется функция $u \in H^1(Q_T)$, такая, что 1) $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, 2) $u\big|_{\Gamma_T} = 0$, 3) для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Gamma_T} = 0$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u_t v_t\right) dxdt = \int\limits_{\Omega} \psi(x) v\big|_{t=0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v dxdt.$$

ИЛИ (в вопросе сказано “на выбор”)

Определение обобщенных решений третьей начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Рассмотрим третью начально-краевую задачу с однородным краевым условием Робена

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x,t) u\Bigg|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T), k = 1,\ldots,n \right\}$ — пространство Соболева первого порядка.

Определение 4. Обобщённым (слабым) решением задачи (4) называется функция $u \in H^1(Q_T)$, такая, что 1) $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, 2) для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$ (терминальное условие), выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u_t v_t\right) dxdt + \int\limits_{\Gamma_T} \sigma(x,t) u\big|_{\Gamma_T} v\big|_{\Gamma_T} ds = \int\limits_{\Omega} \psi(x) v\big|_{t=0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v dxdt.$$

43. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Априорная оценка решения.

Рассмотрим задачу с однородным краевым условием Дирихле:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

$H^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(Q_T), k = 1,\ldots,n \right\}$ — анизотропное пространство Соболева.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in L_2(\Omega), f \in L_2(Q_T)$. Тогда задача (1) имеет единственное решение, которое удовлетворяет априорной оценке

$$\|u\|_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_{\Omega,a,T}\left(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad (5)$$

Замечание. Неравенство (5) означает ограниченность разрешающего оператора $L_2(\Omega) \oplus L_2(Q_T) \to H^{1,0}(Q_T)$. Ограниченность эквивалентна непрерывности.

44. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения третьей (в частности, второй) начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Априорная оценка решения.

Рассмотрим третью начально-краевую задачу с однородным краевым условием Ньютона

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \overrightarrow{\nu}} + \sigma(x,t)u\right|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$H^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \in L_2(Q_T), k = 1,\ldots,n \right\}$ — анизотропное пространство Соболева.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in L_2(\Omega), f \in L_2(Q_T), \sigma \in C\left(\overline{\Gamma}_T\right), \sigma \geqslant 0$ на $\overline{\Gamma}_T$. Тогда задача (2) имеет единственное решение, которое удовлетворяет априорной оценке

$$\|u\|_{H^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_{\Omega,T,\sigma}\left(\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \qquad (6)$$

45. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения первой начально-краевой задачи для волнового уравнения. Априорная оценка решения.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу с однородным краевым условием Дирихле

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T), k = 1,\dots,n \right\}$ — пространство Соболева первого порядка.

Определение 3. Обобщённым (слабым) решением задачи (3) называется функция $u \in H^1(Q_T)$, такая, что 1) $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, 2) $u\big|_{\Gamma_T} = 0$, 3) для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Gamma_T} = 0$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$, выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u_t v_t\right) dxdt = \int\limits_{\Omega} \psi(x) v\big|_{t=0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v dxdt.$$

Теорема 3. Пусть $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$. Тогда задача (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет априорной оценке

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C_{\Omega,T}\left(\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \quad (7)$$

46. Теорема о существовании и единственности обобщённого решения третьей (в частности, второй) начально-краевой задачи для волнового уравнения. Априорная оценка решения.

Рассмотрим третью начально-краевую задачу с однородным краевым условием Робена

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} + \sigma(x,t) u\right|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T), k = 1,\dots,n \right\}$ — пространство Соболева первого порядка.

Определение 4. Обобщённым (слабым) решением задачи (4) называется функция $u \in H^1(Q_T)$, такая, что 1) $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, 2) для любой пробной функции $v \in H^1(Q_T)$, $v\big|_{\Omega_T} = 0$ (терминальное условие), выполнено интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} \left(a^2 \nabla_x u \cdot \nabla_x v - u_t v_t\right) dxdt + \int\limits_{\Gamma_T} \sigma(x,t) u\big|_{\Gamma_T} v\big|_{\Gamma_T} ds = \int\limits_{\Omega} \psi(x) v\big|_{t=0} dx + \iint\limits_{Q_T} f(x,t) v dxdt.$$

Теорема 4. Пусть $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, $\sigma \in C\left(\overline{\Gamma}_T\right)$, $\sigma \geqslant 0$ на $\overline{\Gamma}_T$. Тогда задача (4) имеет единственное решение, которое удовлетворяет априорной оценке

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} \leqslant C_{\Omega,T,\sigma}\left(\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q_T)}\right). \quad (8)$$

47. Метод Фурье: формальное решение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Ряд Фурье: $u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right) X_k(x)$,

$$Y_k(t) = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau.$$

48. Метод Фурье: формальное решение первой начально-краевой задачи для волнового уравнения.

Метод Фурье (метод разделения переменных)

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_T} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Первый этап. Найдём решения однородного волнового уравнения специального вида: $U_{tt} - a^2\Delta U = 0$, $U(x,t) = X(x)Y(t)$ — анзац Фурье, удовлетворяющие краевому условию Дирихле на Γ_T. Подстановка в уравнение: $X(x)Y''(t) - a^2\Delta_x X(x)Y(t) = 0 \Rightarrow$
$\dfrac{Y''(t)}{a^2Y(t)} = \dfrac{\Delta_x X(x)}{X(x)} = \mathrm{const} = -\lambda.$

Функции $X = X(x)$ удовлетворяют *спектральной задаче*

$$\begin{cases} -\Delta X = \lambda X, x \in \Omega, \\ X\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

- λ —собственные значения (сз), то есть такие значения спектрального параметра, когда существует нетривиальные решения;
- $X = X(x)$ — собственные функции (сф), отличные от тождественного нуля, соответствующие собственному значению λ.

Определение 5. Обобщённым с.з. спектральной задачи (9) называется такое $\lambda \in \mathbb{C}$, что существует функция $0 \neq X \in H_0^1(\Omega)$ и для любой пробной функции $v \in H_0^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \nabla X \cdot \nabla v dx = \lambda \int\limits_\Omega X v dx.$$

второй этап:

Будем искать обобщённое решение задачи (3) в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи (9) с коэффициентами $Y_k = Y_k(t)$:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) X_k(x).$$

Получим задачки Коши для коэффициентов Y_k:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(Y_k''(t) + a^2\lambda_k Y_k(t)\right) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), (x,t) \in Q_T, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_k(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} Y_k'(0) X_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x). \end{cases}$$

Имеем задачки Коши для коэффициентов Y_k:

$$\begin{cases} Y_k''(t) + a^2\lambda_k Y_k(t) = f_k(t), 0 < t < T, \\ Y_k(0) = \varphi_k, Y_k'(0) = \psi_k\,. \end{cases}$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$Y_k(t) = \varphi_k \cos(a\omega_k t) + \frac{\psi_k}{\omega_k}\sin(a\omega_k t) + \int_0^t \frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(t-\tau)\right) f_k(\tau)d\tau.$$

Таким образом, ряд Фурье, представляющий решение задачи (3) имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k \cos(a\omega_k t) + \frac{\psi_k}{\omega_k}\sin(a\omega_k t) + \int_0^t \frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(t-\tau)\right) f_k(\tau)d\tau\right) X_k(x).$$