МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего профессионального образования

Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет)

Факультет №8

«Информационные технологии и прикладная математика»

Кафедра 802

«Мехатроника и теоретическая механика»

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «Теоретическая механика»

IV семестр

Выполнил студент

2-го курса, 205-ой группы

Махмудов О. С.

____

(подпись)

Преподаватель

Холостова О. В.

____

(подпись)

Работа защищена

«__»___________ 2019

Оценка___________

Москва, 2019

ЗАДАНИЕ 17

Двойной маятник составлен из двух материальных точек M_1 и M_2 одинаковой массы m, невесомых стержней длины $\ell_1 \ell_2$ и пружины жесткости c (рис. 17). Пружина поддерживается в горизонтальном положении с помощью невесомого ползуна D. При $\varphi = 0$ пружина не напряжена.

1. Ввести подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой M_1, а оси движутся поступательно. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, вычислить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M_2. Изобразить на чертеже составляющие векторов $\vec{v}_{\text{абс}}$ и $\vec{w}_{\text{абс}}$.

2. Пусть стержень OM_1 вращается с угловой скоростью $\omega = $ $= \text{const}$. Составить дифференциальное уравнение движения точки M_2 относительно подвижной системы координат, введенной в п. 1.

3. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти проекции R_x и R_y реакции шарнира O. Используя теорему о движении центра масс механической системы, показать, что

$$R_x = -2mg - m\left[2\ell_1\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + \ell_2\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right)\right],$$

$$R_y = c\ell_1\sin\varphi + m\left[2\ell_1\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) + \ell_2\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right)\right].$$

4. Пусть стержни OM_1 и M_1M_2 движутся как одно тело $(\varphi = \psi)$. Составить дифференциальное уравнение движения системы. Применить теорему об изменении кинетического момента. Найти зависимость угловой скорости маятника от угла φ, если в начальный момент времени $\varphi_0 = 0$ и точке M_2 сообщена скорость v_0.

5. Полагая массу точки M_2 равной нулю, определить минимальную скорость, которую надо сообщить точке M_1 в нижнем положении, чтобы стержень OM_1 достиг горизонтального положения. Использовать теорему об изменении кинетической энергии.

6. Считая $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданными функциями времени, найти силы инерции точек M_1 и M_2.

7. Применяя принцип Даламбера, найти величину N реакции стержня M_1M_2. Показать, что она определяется формулой

$$N = m\left\{g\cos\psi - \ell_1\left[\ddot{\varphi}\sin(\psi - \varphi) - \dot{\varphi}^2\cos(\psi - \varphi)\right] + \ell_2\dot{\psi}^2\right\}.$$

8. Составить дифференциальные уравнения движения системы, исходя из общего уравнения аналитической динамики и приняв за обобщенные координаты φ и ψ.

9. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии системы, вычислить обобщенные силы.

10. Используя уравнения Лагранжа второго рода, показать, что дифференциальные уравнения движения системы имеют вид

$$2\ell_1\ddot{\varphi} + \ell_2\left[\ddot{\psi}\cos(\psi - \varphi) - \dot{\psi}^2\sin(\psi - \varphi)\right] = -\left[2g + (c\ell_1/m)\cos\varphi\right]\sin\varphi,$$

$$\ell_1\left[\ddot{\varphi}\cos(\psi - \varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\psi - \varphi)\right] + \ell_2\ddot{\psi} = -g\sin\psi.$$

Записать интеграл энергии системы.

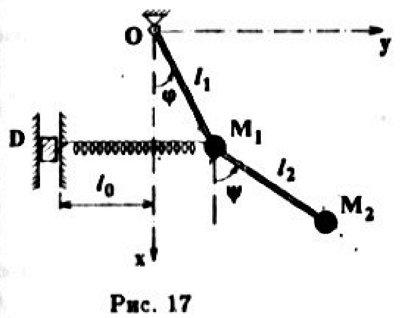


Рис. 17

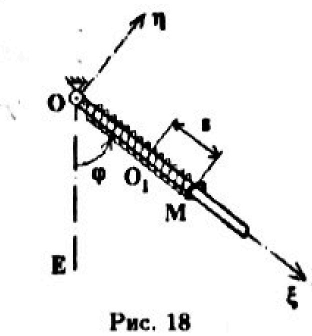
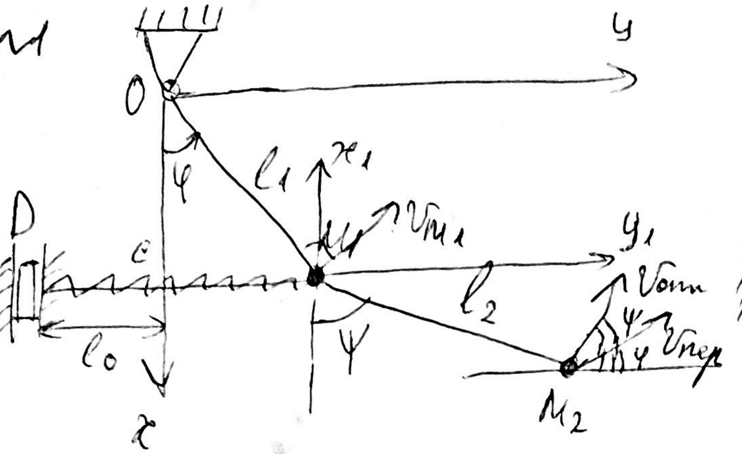
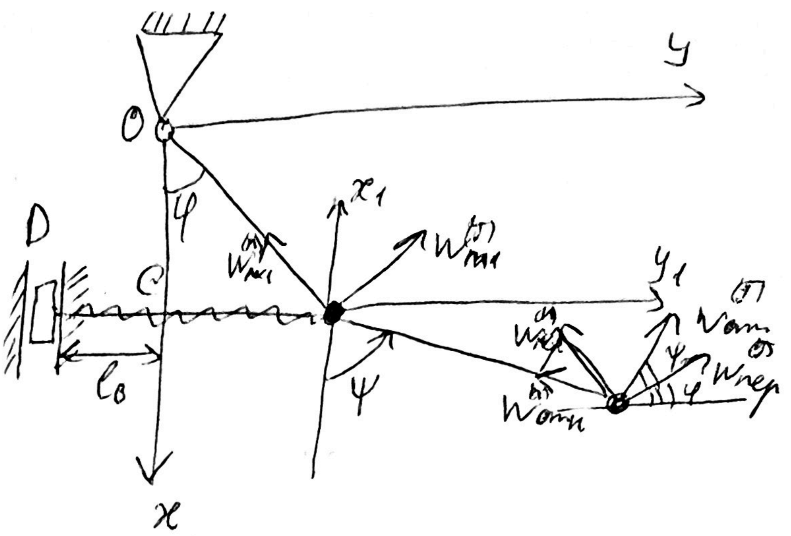


Рис. 18

11. Для условия п. 4 составить уравнение малых колебаний маятника в окрестности нижнего положения равновесия. Найти период малых колебаний.

№1





1) x_1, M_1, y_1 — поступ. движ. сист. коорд.

$\vec V_{абс} = \vec V_{отн.} + \vec V_{пер.}$

$V_{отн.} = \dot\psi l_2$

$V_{пер} = \dot\varphi l_1$; $\vec V_{пер} = \vec V_{M_1}$

$V_{абс}^2 = V_{отн}^2 + V_{пер}^2 + 2 V_{отн} \cdot V_{пер} \cdot \cos(\psi-\varphi)$

$V_{абс} = \sqrt{\dot\psi^2 l_2^2 + \dot\varphi^2 l_1^2 + 2\dot\psi l_2 \dot\varphi l_1 \cos(\psi-\varphi)}$

2) $\vec W_{абс} = \vec W_{отн} + \vec W_{пер} + \vec W_{кор}$

$W_{кор.} = 2\,\vec\omega_{пер.} \times \vec V_{отн.} = 0$, (т.к. $\omega_{пер} = 0$ — поступ. движ. сист. x_1, M_1, y_1)

$W_{отн} = W_{отн}^{(n)} + W_{отн}^{(\tau)}$

$W_{отн} = \dot\psi^2 l_2$

$W_{отн} = \ddot\psi l_2$

$\vec W_{пер} = \vec W_{пер}^{(n)} + \vec W_{пер}^{(\tau)} = \vec W_{M_1} = \vec W_{M_1}^{(n)} + W_{M_1}$

$W_{пер}^{(n)} = \dot\varphi^2 l_1$

$W_{пер}^{(\tau)} = \ddot\varphi l_1$

$W_{абс} = \sqrt{W_{абс\,x}^2 + W_{абс\,y}^2}$

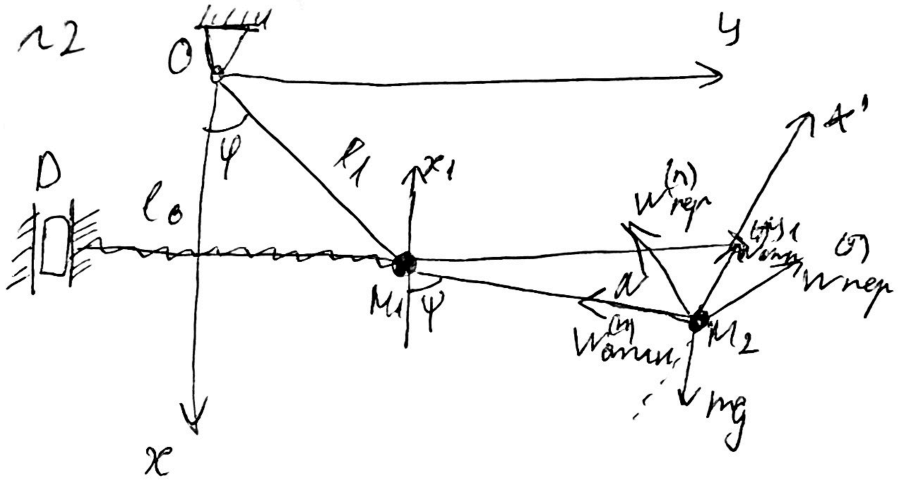
$W_{абс\,y} = W_{пер}^{(\tau)} \cos\varphi + W_{отн}^{(\tau)} \cos\psi - W_{пер}^{(n)} \sin\varphi - W_{отн}^{(n)} \sin\psi =$

$= \ddot\varphi l_1 \cos\varphi + \ddot\psi l_2 \cos\psi - \dot\varphi^2 l_1 \sin\varphi - \dot\psi^2 l_2 \sin\psi$

$W_{абс\,x} = W_{пер}^{(\tau)} \sin\varphi + W_{отн}^{(\tau)} \sin\psi + W_{пер}^{(n)} \cos\varphi + W_{пер}^{(n)} \cos\psi =$

$= \ddot\varphi l_1 \sin\varphi + \ddot\psi l_2 \sin\psi + \dot\varphi^2 l_1 \cos\varphi + \dot\psi^2 l_2 \sin\psi$

№2



OM₁ вращ. с угл. ск.
$\omega = const$

1) На точку M_2 действ. внешние силы: $\vec{mg}$ и $\vec{N}$

2) $m\vec{W}_{абс} = \vec{F}$ (по II закону Ньютона)

$m(\vec{W}_{отн} + \vec{W}_{пер} + \vec{W}_{кор}) = \vec{mg} + N$

$m\vec{W}_{отн} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{W}_{пер}$

$m(W^{(n)}_{отн} + W^{(\tau)}_{отн}) = m\vec{g} + \vec{N} - m(\vec{W}^{(n)}_{пер} + \vec{W}^{(\tau)}_{пер})$ – вект. ур-ие движ. т. M_2 отн. подв. сист.

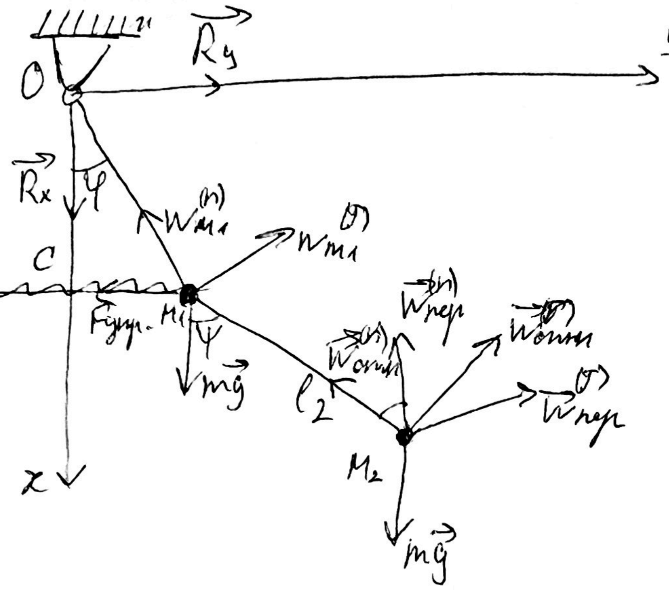
3) спроецируем на X': $W^{(\tau)}_{отн} = 0$

$m W^{(\tau)}_{отн} = -mg\sin\psi - m(W^{(n)}_{пер}\sin(\psi-\varphi) + W^{(\tau)}_{пер}\cos(\psi-\varphi))$

$m\ddot{\psi} l_2 = -mg\sin\psi - m(\dot{\varphi}^2 l_1 \sin(\psi-\varphi) + \ddot{\varphi} l_1\cos(\psi-\varphi))$

$\ddot{\psi} l_2 + g\sin\psi + \omega^2 l_1 \sin(\psi-\varphi) = 0$ (т.к. $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$)

№3



$\varphi(t), \psi(t)$ — зад функции

1) Внешние силы: $m\vec g$; mg; $F_{упр.}$; $\vec R_x, \vec R_y$

2) $M\vec W_c = \vec F^{(e)}$ — теор. о движ. ц. м.

$$M\vec W_c = m\vec W_1 + m\vec W_2 = m(W_1^{(n)} + W_1^{(\tau)} + W_{пер}^{(n)} + W_{пер}^{(\tau)} + W_{отн}^{(n)} + W_{отн}^{(\tau)})$$

$$W_1^{n} = W_{пер}^{n}; \quad W_1^{(\tau)} = W_{пер}^{(\tau)}$$

$$m(2(\vec W_{пер}^{(n)} + \vec W_{пер}^{(\tau)}) + \vec W_{отн}^{(n)} + \vec W_{отн}^{(\tau)}) = 2m\vec g + \vec F_{упр} + \vec R_x + \vec R_y$$

3) x: $m(2(-\vec W_{пер}^{(n)}\cos\varphi - W_{пер}^{(\tau)}\sin\varphi) - W_{отн}^{(n)}\cos\psi - W_{отн}^{(\tau)}\sin\psi = 2mg + R_x$

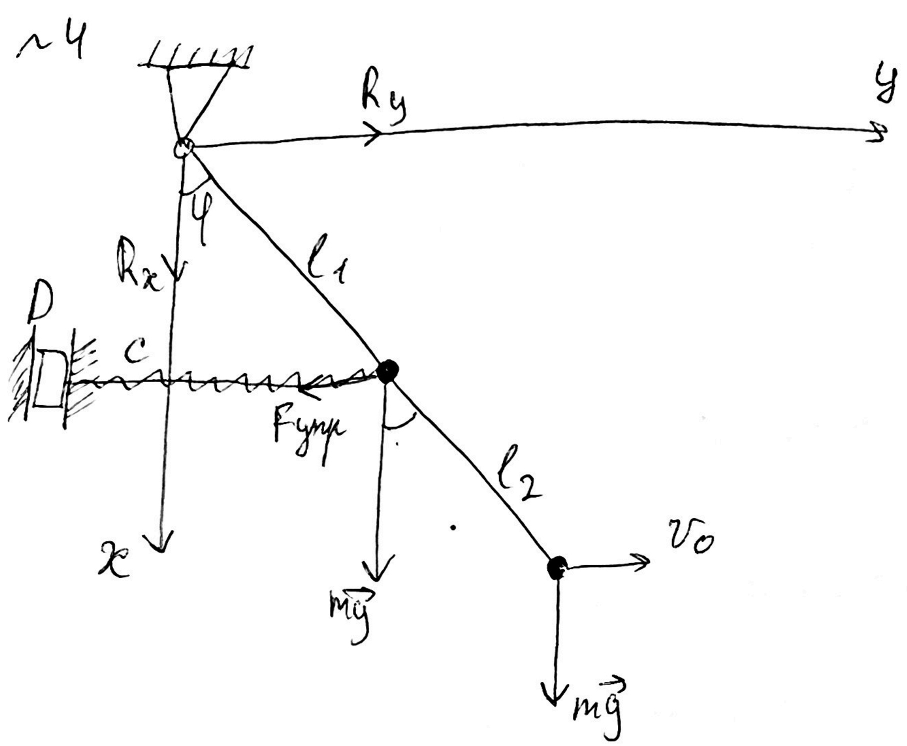
y: $m(2(-\vec W_{пер}^{(n)}\sin\varphi + \vec W_{пер}^{(\tau)}\cos\varphi) - W_{отн}^{(n)}\sin\psi + W_{отн}^{(\tau)}\cos\psi = -F_{упр} + R_y$

$$F_{упр} = c\, l_1 \sin\varphi$$

$$R_x = -2mg - m(2l_1(\dot\varphi^2\cos\varphi + \ddot\varphi\sin\varphi) + l_2(\dot\psi^2\cos\psi + \ddot\psi l_2\sin\psi)$$

$$R_y = c\, l_1\sin\varphi + m(2l_1(-\dot\varphi^2\sin\varphi + \ddot\varphi\cos\varphi) + l_2(-\dot\psi^2\sin\psi + \ddot\psi\cos\psi)$$

№4



m_1 и $M_1 M_2$ движ. как одно тело ($\varphi=\psi$), $\varphi_0=0$

Составить Д.У. движ. сист.

$\omega(\varphi)$ – ?

если в нач. момент времени в M_2 сообщили v_0

1) Внешние силы: $m\vec{g}, m\vec{g}, R_x, R_y, F_{упр}$

2) $\frac{d}{dt}\vec{K_0} = M_0(\vec{F}^{(e)})$ – теор. об изм. кин. момента

$K_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{r_k} \times m\vec{v_k}$; $v_k = \vec{\omega} \times \vec{r_k}$

$K_0 = K_1 + K_2 = m(l_1^2 + (l_1+l_2)^2)\dot{\varphi}$

$K_1 = m l_1^2 \dot{\varphi}$

$K_2 = m(l_1+l_2)^2\dot{\varphi}$

$\vec{M_0}(\vec{F}^{(e)}) = M(m\vec{g}) + M(m\vec{g}) + M(\vec{F_{упр}}) = -mg l_1 \sin\varphi - mg(l_1+l_2)\sin\varphi -$
$F_{упр}\, l_1 \cos\varphi = -(mg\sin\varphi(2l_1+l_2) + c l_1^2 \sin\varphi\cos\varphi)$

знак „–" т.к. момент внеш. сил действ. против движ.

3) $\frac{d}{dt}(m(l_1^2 + (l_1+l_2)^2)\dot{\varphi} = -(mg\sin\varphi(2l_1+l_2) + c l_1^2 \sin\varphi\cos\varphi)$

$m\ddot{\varphi}(l_1^2 + (l_1+l_2)^2 = -(mg\sin\varphi(2l_1+l_2) + c l_1^2 \sin\varphi\cos\varphi)$

$2m\ddot{\varphi}(l_1^2 + (l_1+l_2)^2) = -2mg\sin\varphi(2l_1+l_2) - c l_1^2 \sin 2\varphi$ – Д.У. движ. системы

$\omega(\varphi)$ - ? $\qquad \omega = \dot\varphi$

$$\underbrace{2m\left(l_1^2+(l_1+l_2)^2\right)}_{x_1}\ddot\varphi = -\underbrace{2mg(2l_1+l_2)}_{x_2}\sin\varphi - \underbrace{cl_1^2}_{x_3}\sin 2\varphi$$

Проинтегрируем!

$$x_1\ddot\varphi\, d\varphi = (x_2\sin\varphi + x_3\sin 2\varphi)\,d\varphi$$

$$x_1\frac{\dot\varphi^2}{2} = -x_2\cos\varphi - \frac{1}{2}x_3\cos 2\varphi + x \Rightarrow x = x_1\frac{\dot\varphi^2}{2} + x_2\cos\varphi + \frac{x_3}{2}\cos 2$$

Нач. усл. $\varphi_0 = 0$; $V_0 = \dot\varphi_0(l_1+l_2)$; $\dot\varphi_0 = \frac{V_0}{l_1+l_2}$

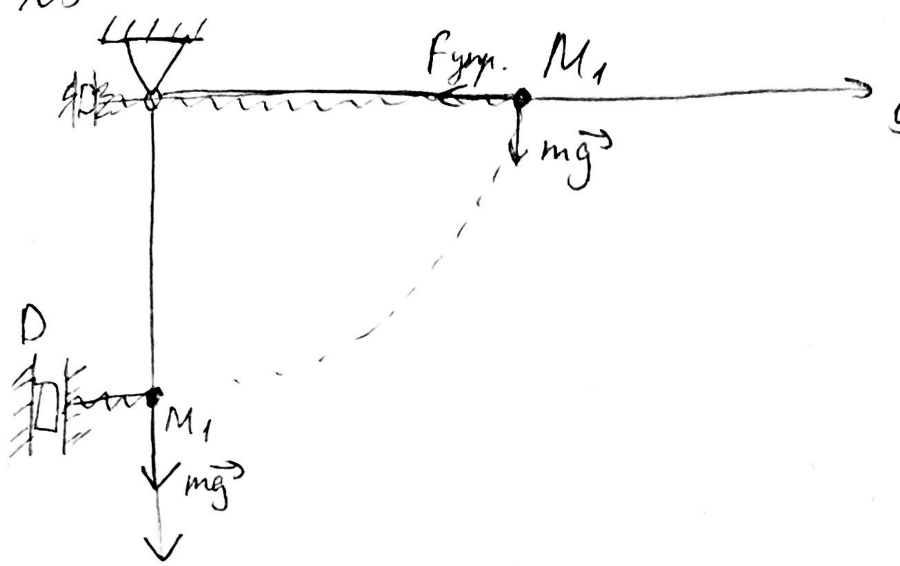
$$x = \frac{x_1}{2}\frac{V_0^2}{(l_1+l_2)^2} + x_2 + \frac{x_3}{2}$$

$$\cancel{2}m\left(l_1^2+(l_1+l_2)^2\right)\frac{\dot\varphi^2}{\cancel{2}} = 2mg\cos\varphi(2l_1+l_2 + \frac{cl^2}{2}\cos 2\varphi +$$

$$+\frac{2m\left(l_1^2+(l_1+l_2)^2\right)V_0^2}{2(l_1+l_2)^2} - 2\cdot mg(2l_1+l_2) - \frac{cl_1^2}{2}$$

№5

$M_z = 0$



1) Мех. сист.: стержень, мат. точка

2) $T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$ – теорема об измен. кинет. энергии

$\sum A_k^i = 0, \ T = 0$

$T_0 = T_{M_1} = \frac{1}{2} \cdot m v^2$

$A = A_{F упр} + A_{mg} = -\frac{c l_1^2}{2} - mgl_1 = -l_1\left(\frac{c l_1}{2} + mg\right)$

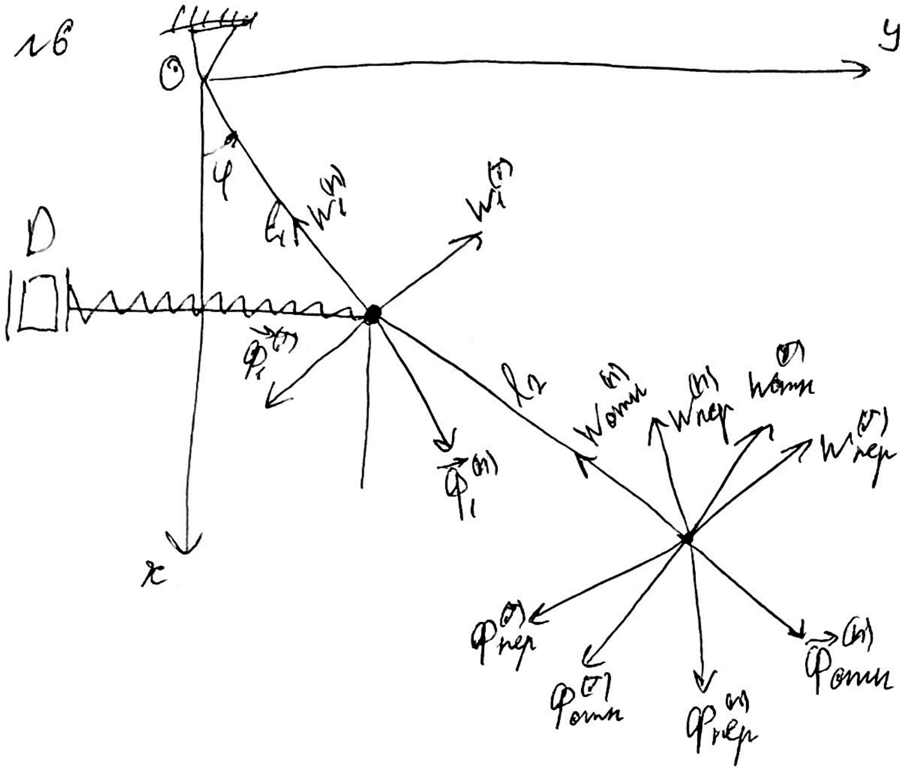
$A_{F упр} = -\int_0^l F_{упр} dl = \int_0^l c l_1 dl = -\frac{c l_1^2}{2}$

3) $-\frac{1}{2} m v^2 = -l_1\left(\frac{c l_1}{2} + mg\right)$

$mv^2 = cl_1^2 + l_1 mg \rightarrow v^2 = \frac{c l_1^2}{m} + 2gl_1$

$v_{min} = \sqrt{\frac{c l_1^2}{m} + 2gl_1}$

№6



1) $\vec{\Phi} = -m\vec{W}$ – сила инерции

2) Для M_1:

$$\vec{\Phi}_1 = -m\vec{W}_1 = \underbrace{-m W_1^{(n)}}_{\Phi_1^{(n)}} \underbrace{- m\vec{W}_1^{(\tau)}}_{\Phi_1^{(\tau)}} = -m\dot{\varphi}^2 l_1 - m\ddot{\varphi} l_1 = -m l_1(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})$$

$$\Phi_1^{(n)} = m\dot{\varphi}^2 l_1$$

$$\Phi^{(\tau)} = m\ddot{\varphi} l_1$$

3) Для M_2:

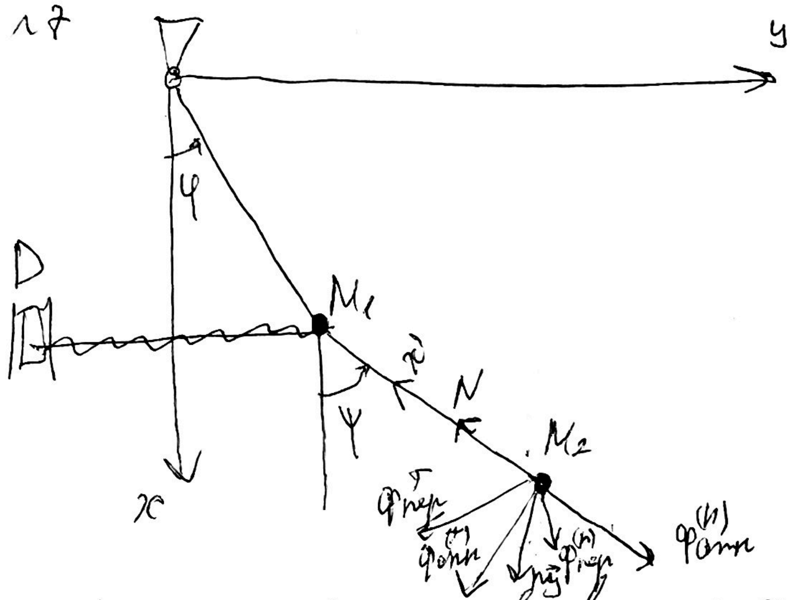
$$\Phi_2 = -m\vec{W}_2 = \underbrace{-m W_{отн}^{(n)}}_{\Phi_{отн}^{(n)}} \underbrace{- m W_{отн}^{(\tau)}}_{\Phi_{отн}^{(\tau)}} \underbrace{- m W_{пер}^{(n)}}_{\Phi_{пер}^{(n)}} \underbrace{- m W_{пер}^{(\tau)}}_{\Phi_{пер}^{(\tau)}} =$$

$$= -m\psi^2 l_2 - m\ddot{\psi} l_2 - m\dot{\varphi}^2 l_1 - m\ddot{\varphi} l_1 = -m l_2(\psi^2 + \ddot{\psi}) - m l_1(\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi})$$

$$\Phi_{отн}^{(n)} = m\dot{\psi}^2 l_2 \qquad \Phi_{пер}^{(n)} = m\varphi^2 l_1$$

$$\Phi_{отн}^{\tau} = m\ddot{\psi} l_2 \qquad \Phi_{пер}^{(\tau)} = m\ddot{\varphi} l_1$$

17



Реакция стержня $M_1 M_2$

N – ?

1) На точку M_2 действ. внешние силы: $m\vec{g}, \vec{N}$

Силы инерции: $\Phi_{пер}^{(n)}, \Phi_{пер}^{(\tau)}, \Phi_{отн}^{(n)}, \Phi_{отн}^{(\tau)}$

2) Принцип Даламбера:

$$F^{(e)} + \vec{\Phi} + R^{(e)} = 0$$

$$\vec{F}^{(e)} = m\vec{g}$$

$$R^{(e)} = \vec{N}$$

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{пер}^{(n)} + \vec{\Phi}_{пер}^{(\tau)} + \vec{\Phi}_{отн}^{(n)} + \Phi_{отн}^{(\tau)}$$

3) Спроецируем на ось x'

$$-mg\cos\psi + N - \Phi_{отн}^{(n)} - \Phi_{пер}^{(n)}\cos(\psi-\varphi) + \Phi_{пер}^{(\tau)}\sin(\psi-\varphi) = 0 \Rightarrow$$

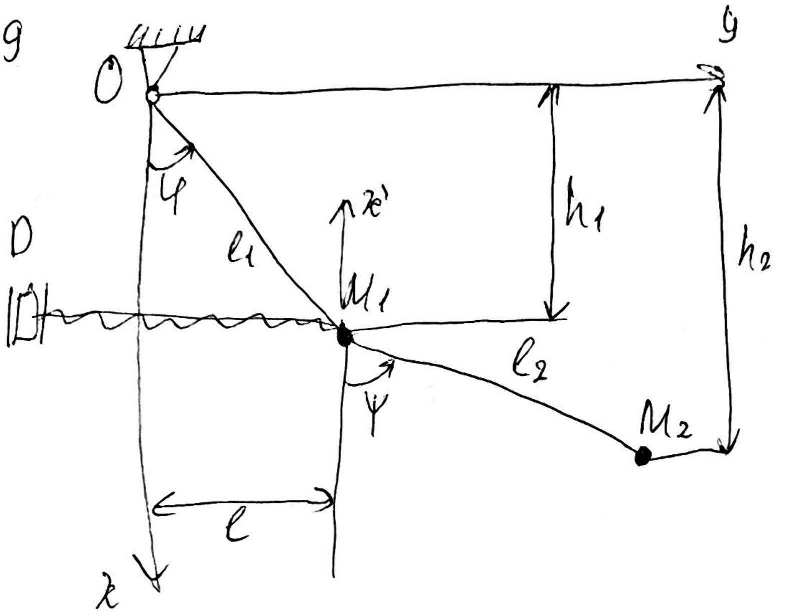
$$\Rightarrow N = mg\cos\psi + \Phi_{отн}^{(n)} + \Phi_{пер}^{(n)}\cos(\psi-\varphi) - \Phi_{пер}^{(\tau)}\sin(\psi-\varphi).$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{отн}^{(n)} &= m\dot{\psi}^2 l_2 \\ \Phi_{пер}^{(n)} &= m\dot{\varphi}^2 l_1 \\ \Phi_{пер}^{(\tau)} &= m\ddot{\varphi} l_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$N = mg\cos\psi + m\dot{\psi}^2 l_2 + m\dot{\varphi}^2 l_1\cos(\psi-\varphi) - m\ddot{\varphi} l_1\sin(\psi-\varphi) =$$

$$= m(g\cos\psi - l_1(\ddot{\varphi}^2\sin(\psi-\varphi) - \dot{\varphi}^2\cos(\psi-\varphi) + \dot{\psi}^2 l_2)$$

19



Сост. выраж. для кин. и потенц. энергии сист., вычислить обобщ. силы:

1) $T = T_1 + T_2$ — кин. энергия

$$T_1 = \frac{mV_1^2}{2} = \frac{1}{2} m l_1^2 \dot\varphi^2 \; ; \; V_1 = (l_1 \dot\varphi)^2$$

$$T_2 = \frac{mV_2^2}{2} = \frac{1}{2} m(\dot\psi^2 l_2^2 + \dot\varphi^2 l_1^2 + 2\dot\psi\dot\varphi l_1 l_2 \cos(\psi-\varphi))$$

$$V_1^2 = \dot\psi^2 l_2^2 + \dot\varphi^2 l_1^2 + 2\dot\psi\dot\varphi l_1 l_2 \cos(\psi-\varphi)$$ — из 1-ого номера

$$T = \frac{1}{2} m l_1^2 \dot\varphi^2 + \frac{1}{2} m(\dot\psi^2 l_2^2 + \dot\varphi^2 l_1^2 + 2\dot\psi\dot\varphi l_1 l_2 \cos(\psi-\varphi)) =$$

$$= \frac{1}{2} m(2\dot\varphi^2 l_1^2 + \dot\psi^2 l_2^2 + 2\dot\psi\dot\varphi l_1 l_2 \cos(\psi-\varphi))$$

2) $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$

$$\Pi_1 = -mgh_1 = -mgl$$

$$\Pi_2 = -mgh_2 = -mg(l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi)$$

$$\Pi_3 = \frac{cl^2}{2} = \frac{c(l_1\sin\varphi)^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl\cos\varphi - mg(l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi) + \frac{c(l_1\sin\varphi)^2}{2} =$$

$$= -mg(2l_1\cos\varphi + l_2\cos\psi) + \frac{c\cdot l_1^2\sin^2\varphi}{2}$$

3) $$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -2l_1 mg\sin\varphi - cl_1^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = -l_2 mg\cos\psi$$

№10

Используя ур-ие Лагранжа второго рода, показать, что диф. ур-ния системы имеют вид:

$$2l_1\ddot{\varphi}+l_2(\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi)-\dot{\psi}^2\sin(\psi-\varphi))=-(2g+(cl_1/m)\cos\varphi)\sin\varphi$$

$$l_1(\ddot{\varphi}\cos(\psi-\varphi)+\dot{\varphi}^2\sin(\psi-\varphi))+l_2\ddot{\psi}=-g\sin\psi$$

Записать интеграл энергии системы.

Уравнения Лагранжа второго рода:

1) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad i=\overline{1,n}$$

2) $$T=\frac{1}{2}m(2l_1^2\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2l_2^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}l_1l_2\cos(\psi-\varphi))$$

$$\varphi:\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{1}{2}m(4l_1^2\dot{\varphi}+2\dot{\psi}l_1l_2\cos(\psi-\varphi))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{1}{2}(4l_1^2\ddot{\varphi}+2l_1l_2(\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi)-\dot{\psi}\sin(\psi-\varphi)(\dot{\psi}-\dot{\varphi}))$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=m\dot{\psi}\dot{\varphi}l_1l_2\sin(\psi-\varphi)$$

$Q_\varphi=-2mgl_1\sin\varphi-cl_1^2\sin\varphi\cos\varphi$ – из 9 номера

$$2ml_1^2\ddot{\varphi}+ml_1l_2(\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi)-\dot{\psi}\sin(\psi-\varphi)(\dot{\psi}-\dot{\varphi})-m\dot{\psi}\dot{\varphi}l_1l_2\sin(\psi-\varphi)=$$
$$=-2mgl_1\sin\varphi-cl_1^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \Big/ :m,\ :l_1$$

$$2l_1\ddot{\varphi}+l_2\ddot{\psi}\cos(\psi-\varphi)-l_2\dot{\psi}^2\sin(\psi-\varphi)=\sin\varphi\left(-2g-\frac{cl_1}{m}\cos\varphi\right)$$

ч.т.д.

3) ψ: $\dfrac{\partial T}{\partial \dot\psi} = \dfrac{1}{2} m\left(2\dot\psi l_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot\varphi \cos(\psi-\varphi)\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\psi}\right) = \frac{1}{2} m\left(2\ddot\psi l_2^2 + 2 l_1 l_2 \left(\ddot\varphi \cos(\psi-\varphi) - \dot\varphi \sin(\psi-\varphi)(\dot\psi-\dot\varphi)\right)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = m\dot\varphi\dot\psi l_1 l_2 \sin(\psi-\varphi)$$

$Q_\psi = -mg l_2 \sin\psi$ – из 9 номера

$$m\ddot\psi l_2^2 + m l_1 l_2 \left(\ddot\varphi \cos(\psi-\varphi) - \dot\varphi\dot\psi \sin(\psi-\varphi) + \dot\varphi^2 \sin(\psi-\varphi)\right) +$$
$$+ m\dot\psi\dot\varphi \sin(\psi-\varphi) l_1 l_2 = -mg l_2 \sin\psi \qquad \Big/ :m,\ :l_2$$

$$\ddot\psi l_2 + l_1\left(\ddot\varphi \cos(\psi-\varphi) + \dot\varphi^2 \sin(\psi-\varphi)\right) = -g\sin\psi$$

ч.т.д.

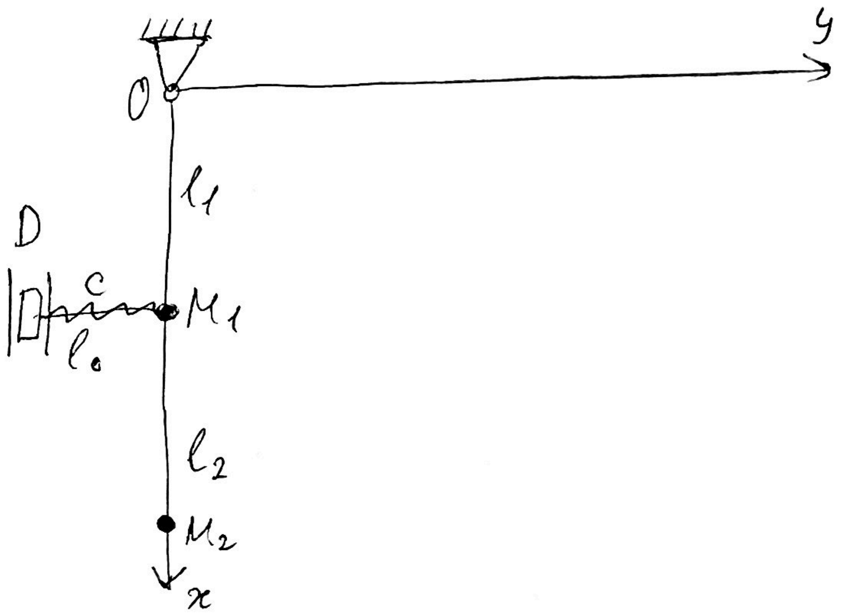
4) Интеграл энергии системы:

$T + П = const \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} m\left(2 l_1^2 \dot\varphi^2 + \dot\psi^2 l_2^2 + 2\dot\psi\dot\varphi l_1 l_2 \cos(\psi-\varphi)\right) - mg(2 l_1 \cos\varphi + l_2\cos\psi) + \frac{c l_1^2 \sin^2\varphi}{2} =$$
$$= const$$

№ 11

Для усл.-ч сост. ур-ие малых колебаний маятника в окр. нижнего полож. равновесия. Найти период малых колебаний



1) Рассм. малые колебания в окр. ниж. полож. $\varphi=0$

$$2m\ddot{\varphi}(l_1^2+(l_1+l_2)^2)=-2mg\sin\varphi(2l_1+l_2)-cl_1^2\sin 2\varphi \quad /:2$$

$$m\ddot{\varphi}(l_1^2+(l_1+l_2)^2)=-mg\sin\varphi(2l_1+l_2)-cl_1^2\sin\varphi\cos\varphi$$

Пусть φ — малое отклонение, тогда $\begin{matrix}\sin\varphi=\varphi\\ \cos\varphi=1\end{matrix}$

$$m\ddot{\varphi}(l_1^2+(l_1+l_2)^2)=-mg\varphi(2l_1+l_2)-cl_1^2\varphi=0$$ — ур-ие малых колеб.

$$\ddot{\varphi}+\varphi\left(\frac{mg(2l_1+l_2)+cl_1^2}{m(l_1^2+(l_1+l_2)^2)}\right)=0$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}, \text{ где } \omega=\sqrt{\frac{mg(2l_1+l_2)+cl_1^2}{m(l_1^2+(l_1+l_2)^2)}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m(l_1^2+(l_1+l_2)^2)}{mg(2l_1+l_2)+cl_1^2}}$$ — период малых колеб.