Московский Авиационный Институт

(Национальный Исследовательский Университет)

Институт информационных технологий и прикладной математики

Курсовая работа

По курсу «Теория управления»

Студент: Махмудов О.С.

Группа: М80-405Б-18

Преподаватель: Пантелеев А.В.

Москва

2020

№1

а) $\sin\ddot{x} + \dot{x}x = tg^2 + g$, опорная траектория $x^*(t) = 10t$, $g^*(t) = 10$

$$F = \sin\ddot{x} + \dot{x}x - tg^2 - \dot{g} = 0 \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \end{cases}$$

$$a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)_* = \cos\ddot{x} = 1$$

$$a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* = 10t$$

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_* = \dot{x} = 10$$

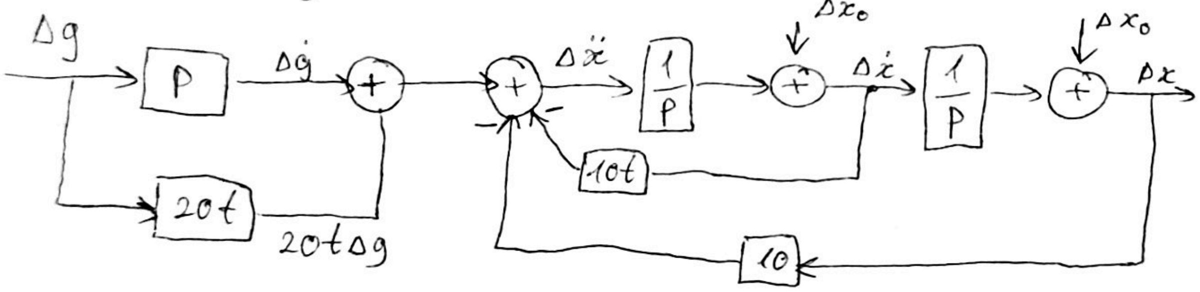
$$b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_* = 20t$$

$$b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{g}}\right)_* = 1$$

Ур-ие линеаризованной сист.:

$$\begin{cases} \Delta\ddot{x} + 10t\Delta\dot{x} + 10\Delta x = \Delta\dot{g} + 16t\Delta g \\ \Delta x(0) = x_0 - x_0^* \\ \Delta\dot{x}(0) = \dot{x}_0 - \dot{x}_0^* \\ \Delta\ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 - \ddot{x}_0^* \end{cases}$$

$$\Delta\ddot{x} = \Delta\dot{g} + 20t\Delta g$$



б) $\dddot{x}x^{10} + \ddot{x}\sin\dot{x} + \mathrm{arctg}\, x^{10} = -g\dot{x}^2 + e^{\dot{g}}$ опорн. траект. $x^*(t) = 1$, $g^*(t) = t\ln\frac{\pi}{4}$

$$F = \dddot{x}x^{10} + \ddot{x}\sin\dot{x} + \mathrm{arctg}\, x^{10} + g\dot{x}^2 - e^{\dot{g}} = 0 \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \\ \dddot{x}(0) = \dddot{x}_0 \end{cases}$$

$$a_3 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dddot{x}}\right)_* = (x^{10})_* = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right)_* = (\sin\dot{x})_* = 0$$

$$a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_* = (2g\dot{x})_* = 2t\ln\frac{\pi}{4}\cdot 0 = 0$$

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_* = \left(10x^9\ddot{x} + 10\frac{x^9}{x^{10}+1}\right)_* = 5$$

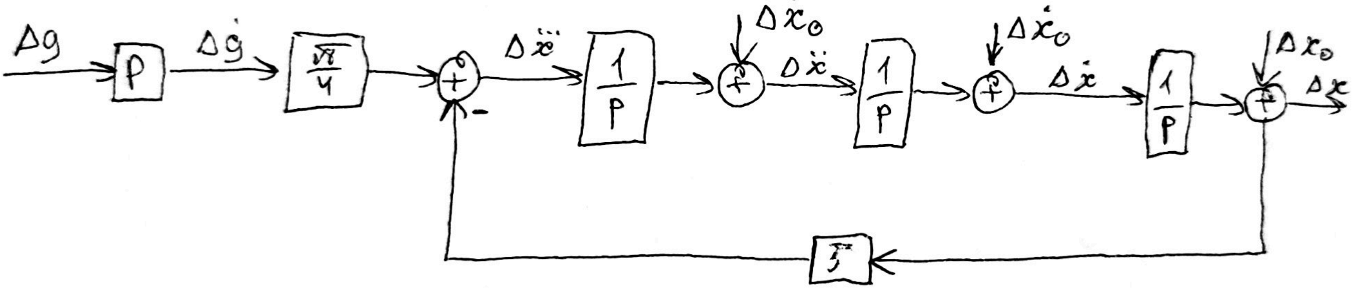
$$b_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{g}}\right)_* = -\left(-e^{\dot{g}}\right)_* = e^{\left(t\ln\frac{\pi}{4}\right)'} = \frac{\pi}{4}$$

$$b_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_* = -\left(\dot{x}^2\right)_* = 0$$

Ур-ие линеаризованной сист.:

$$\begin{cases} \Delta\dddot{x} + 4\Delta x = \frac{\pi}{4}\Delta\dot{g} \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \ddot{x}(0) = \ddot{x}_0 \\ \dddot{x}(0) = \dddot{x}_0 \end{cases}$$

$$\Delta\dddot{x} = -4\Delta x + \frac{\pi}{4}\Delta\dot{g}$$



№2

a) $\ddot{x} + 8\dot{x} - 20x = g$

$x(0) = 10$

$\dot{x}(0) = 0$

$g(t) = 10e^{-4t}, \ t>0$

1) Классический способ

I. $\ddot{x} - 8\dot{x} - 20x = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda - 20\lambda = 0$

$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = -2$

$x_0(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-2t}$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 10 \\ \dot{x}(0) = 10C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = \frac{20}{12} \\ C_2 = \frac{100}{12} \end{matrix}$$

$x_{св}(t) = \frac{20}{12}e^{10t} + \frac{100}{12}e^{-2t}$

II. $\ddot{x} - 8\dot{x} - 20x = 10e^{-4t}$

$x_0(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-2t}$

$g(t) = 10e^{-4t} \longrightarrow \begin{matrix} \alpha = -4 \\ \beta = 0 \\ R_q(t) = 10 \to q = 0 \end{matrix}$

$m = 0$

$s = 0$

$x_r(t) = e^{-4t}(C_1\cos 0t + C_2 \sin 0t)t^0 = e^{-4t}C_1$

$16C_1e^{-4t} + 32C_1e^{-4t} - 20C_1e^{-4t} = 10e^{-4t}$

$C_1 = \frac{10}{28} \Rightarrow x_n(t) = \frac{10}{28}e^{-4t}$

III Общее решение неоднородного ур-я

$$x(t) = x_o(t) + x_N(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-2t} + \frac{10}{28} e^{-4t}$$

$$x(0) = C_1 + C_2 + \frac{10}{28} = 0$$

$$\dot{x}(0) = 10C_1 - 2C_2 - \frac{40}{28} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{10}{168}, \quad C_2 = -\frac{5}{12}$$

$$x_{вых.}(t) = \frac{10}{168} C_1 e^{10t} - \frac{5}{12} C_2 e^{-2t} + \frac{10}{28} e^{-4t}$$

IV Выходной сигнал:

$$\frac{290}{168} C_1 e^{10t} + \frac{190}{24} C_2 e^{-2t} + \frac{10}{28} e^{-4t}$$

б) $\ddot{x} + 20\dot{x} + 101x = g$

$x(0) = 10$

$\dot{x}(0) = 0$

$g(t) = e^{-10t} \sin t, \ t > 0$

I $\ddot{x} + 20\dot{x} + 101x = 0$

$\lambda^2 + 20\lambda + 101x = 0$

$\lambda_1 = -10 - i \quad \lambda_2 = -10 + i \Rightarrow \alpha = -10, \ \beta = 1$

$$x_o(t) = C_1 \cos t\, e^{-10t} + C_2 \sin t\, e^{-10t}$$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 10 \\ \dot{x}(0) = -10C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = 10, \quad C_2 = 100$$

$$x_{св}(t) = 10 \cos t\, e^{-10t} + 100 \sin t\, e^{-10t}$$

II $\ddot{x}+20\dot{x}+101x=e^{-10t}\sin t$

при $\begin{cases} x(0)=0 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$

$x_o(t)=C_1\cos t\, e^{-10t}+C_2\sin t\, e^{-10t}$

$g(t)=e^{-10t}\sin t \Rightarrow$ $\alpha=-10$

$\beta=1$

$R_q(t)=1\to q=0$

$m=0$

$s=1$, т.к. $\lambda=\alpha+i\beta=-10+i$ совп. с корнем хр-ни 1

$x_ч(t)=e^{-10t}(A\cos t+B\sin t)t$

$e^{-10t}(A\cos t+B\sin t)t+e^{-10t}(-A\cos t-B\sin t)t+2e^{-10t}(-A\sin t+B\cos t)=e^{-10t}\sin t$

$-2e^{-10t}(A\sin t-B\cos t)=e^{-10}\sin t\Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_ч(t)=e^{-10t}(-\frac{1}{2}\cos t)t=-\frac{1}{2}e^{-10t}t\cos t$

III. $x(t)=e^{-10t}(C_1\cos t+C_2\sin t)-\frac{1}{2}e^{-10t}t\cos t$

$\begin{cases} x(0)=C_1=0 \\ \dot{x}(0)=-10C_1+C_2-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$

$x_{вын}(t)=\frac{1}{2}e^{-10t}\sin t-\frac{1}{2}e^{-10t}t\cos t$

IV Выходной сигнал

$x(t)=x_c(t)+x_{вын}(t)=10\cos t\, e^{-10t}+100\sin t\, e^{-10t}+\frac{1}{2}e^{-10t}t\cos t=$

$=10\cos t\, e^{-10t}+100{,}5\sin t\, e^{-10t}-\frac{1}{2}t\cos t\, e^{-10t},\ t\geq 0$

2) с применением преобр. Лапласа

а) $\ddot{x} - 8\dot{x} - 20x = g$

$$\begin{cases} x(0) = 10 \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad g(t) = e^{-4t}, \quad t > 0$$

I Изображение входного сигнала:

$$G(s) = \frac{10}{s+4}$$

II Передаточная ф-я

$$W(s) = \left.\frac{1}{p^2 - 8p - 20}\right|_{p=s} = \frac{1}{s^2 - 8s - 20} = \frac{M(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = s^2 - 8s - 20$$

$$D_н(s) = x_0(a_1 + a_2 s) + \dot{x}_0 a_2 = 10(-8+s) = 10(s-8)$$

$$\ddot{x} - 8\dot{x} - 20x = g \Leftrightarrow p^2 x - 8px - 20x = g \Leftrightarrow \underbrace{(p^2 - 8p - 20)}_{D(p)} x = \underbrace{1}_{M(p)} g$$

III Изобр. по Лапласу выходного сигнала

$$X(s) = \frac{10(s-8)}{s^2 - 8s - 20} + \frac{10}{(s^2 - 8s - 20)(s+4)} = \frac{10(s-8)}{(s+2)(s-10)} + \frac{10}{(s+2)(s-8)(s+4)} \ominus$$

$$\frac{10(s-8)}{(s+2)(s-10)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-10}, \quad A(s-10) + B(s+2) = 10(s-8)$$

при $s = -2 \rightarrow A = \frac{100}{12}$, при $s = 10 \rightarrow B = \frac{20}{12}$

$$\frac{10}{(s+2)(s-10)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-10} + \frac{C}{s+4}$$

$$10 = A(s-10)(s+4) + B(s+2)(s+4) + C(s+2)(s-10)$$

при $s = -2 \rightarrow A = -\frac{10}{24}$

при $s = 10 \rightarrow B = \frac{10}{168}$

при $s = -4 \rightarrow C = \frac{10}{\text{[illegible]}}$

$$\ominus\ \frac{\frac{100}{12}}{s+2}+\frac{\frac{20}{12}}{s-10}-\frac{\frac{10}{24}}{s+2}+\frac{\frac{10}{168}}{s-10}+\frac{\frac{10}{28}}{s+4}$$

Выходной сигнал

$$x(t)=\underbrace{\frac{100}{12}e^{-2t}+\frac{20}{12}e^{10t}}_{x_{св}(t)}-\underbrace{\frac{10}{24}e^{-2t}+\frac{10}{168}e^{10t}+\frac{10}{28}e^{-4t}}_{x_{вын}(t)}=\frac{190}{24}e^{-2t}+\frac{290}{168}e^{10t}+\frac{10}{28}e^{-4t}$$

б) $\ddot{x}+20\dot{x}+101x=g$

$$\begin{cases}x(0)=10\\ \dot{x}(0)=0\end{cases}\quad g(t)=e^{-10t}\sin t,\ t>0$$

I Изобр. входного сигнала

$$G(t)=\frac{1}{(s+10)^2+1}$$

II Передаточная ф-я

$$W(s)=\frac{1}{s^2+20s+101}$$

$$D(s)=s^2+20s+101$$

$$D_н(s)=x_0(a_1+a_2s)+\dot{x}_0a_2=10(20+s)$$

$$p^2x+20px+101=g\Leftrightarrow\underbrace{(p^2+20p+101)}_{D(p)}x=\underbrace{1}_{M(p)}g$$

III Изобр. по Лапласу выходного сигнала

$$X(s)=\frac{10(20+s)}{s^2+20s+101}+\frac{1}{(s^2+20s+101)^2}=\frac{10(s+10)}{(s+10)^2+1}+\frac{100}{(s+10)^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+10)^2+1}-$$

$$-\frac{(s+10)^2+1}{((s+10)^2+1)^2}$$

IV $x(t)=10\cos t\,e^{-10t}+100\sin t\,e^{-10t}+\frac{1}{2}\sin t\,e^{-10t}-\frac{1}{2}t\cos t\,e^{-10t}=$

$$=10\cos t\,e^{-10t}+100.5\sin t\,e^{-10t}-\frac{1}{2}t\cos t\,e^{-10t}$$

№9

a) Классич.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 12x_1 + x_2 + g_1 \\ \dot{x}_2 = -28x_1 - 4x_2 + g_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$y = x_1 + 2x_2$

$g_1(t) = 10$

$g_2(t) = 2 \qquad t>0$

0) $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -28 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $C = (1\ 2)$; $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Найти переходную матрицу

I способ

а) характ. ур-е $|A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 12-\lambda & 1 \\ -28 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(12-\lambda)(-4-\lambda) + 28 = 0$

$-48 - 12\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 28 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$

$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad$ (действ., разные)

б) Общ. решение одор. сист-мы $(g(t) \equiv 0)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 12x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -24x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$x_1(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-2t}$

$x_2(t) = B_1 e^{10t} + B_2 e^{-2t}$

в) Подст. в сист.

$10C_1 e^{10t} - 2C_2 e^{-2t} = 12C_1 e^{10t} + 12C_2 e^{-2t} + B_1 e^{10t} + B_2 e^{-2t}$

$$\begin{array}{l|l} e^{10t} & 10C_1 = 12C_1 + B_1 \to B_1 = -2C_1 \\ e^{-2t} & -2C_2 = 12C_2 + B_2 \to B_2 = -14C_2 \end{array}$$

г) $x_1(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-2t}$

$x_2(t) = -2C_1 e^{10t} - 14C_2 e^{-2t}$

$$x(t) = C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{10t} \\ -2e^{10t} \end{pmatrix}}_{\varphi_1(t)} + C_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -14e^{-2t} \end{pmatrix}}_{\varphi_2(t)}$$

ФСР

д) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} e^{10t} \\ -2e^{10t} \end{matrix}}_{\varphi_1} & \underbrace{\begin{matrix} e^{-2t} \\ -14e^{-2t} \end{matrix}}_{\varphi_2} \end{pmatrix}$

е) $\varphi^{-1}(t)$ – ?

$\det \varphi = e^{10t} \cdot (-14e^{-2t}) - e^{-2t} \cdot (-2e^{10t}) = -14e^{8t} + 2e^{8t} = -12e^{8t}$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{-12e^{8t}} \begin{pmatrix} -14e^{-2t} & -e^{-2t} \\ 2e^{10t} & e^{10t} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14e^{-10t} & e^{-10t} \\ -2e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

ж) $\Phi(t, \tau) = \varphi(t)\varphi^{-1}(\tau)$

$$\Phi(t,\tau) = \begin{pmatrix} e^{10t} & e^{-2t} \\ -2e^{10t} & -14e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14e^{-10\tau} & e^{-10\tau} \\ -2e^{2\tau} & -e^{2\tau} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14e^{10(t-\tau)} - 2e^{2(t-\tau)} ; & e^{10(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -28e^{10(t-\tau)} + 28e^{-2(t-\tau)} ; & -2e^{10(t-\tau)} + 14e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix} =$$

$$\underset{\eta = t-\tau}{=} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14e^{10\eta} - 2e^{-2\eta} ; & e^{10\eta} - e^{-2\eta} \\ -28e^{10\eta} + 28e^{-\eta} ; & -2e^{10\eta} + 14^{-2\eta} \end{pmatrix}$$

II Способ. Прим-е теор. разлож-я Сильвестра

$$\Phi(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \left[e^{\lambda_i \eta} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{A - \lambda_j E}{\lambda_i - \lambda_j} \right]$$

$n = 2$

$$\Phi(\eta) = e^{10\eta} \frac{A - (-2)E}{10 - (-2)} + e^{-2\eta} \frac{A - 10E}{-2 - 10} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -28 & -2 \end{pmatrix} e^{10\eta} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -28 & -14 \end{pmatrix} e^{-2\eta} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14e^{10\eta} - 2e^{-2\eta} ; & e^{10\eta} - e^{-2\eta} \\ -28e^{10\eta} + 28e^{-\eta} ; & -2e^{10\eta} + 14e^{-2\eta} \end{pmatrix}$$

Решения по I и II сп. совпадают

2) $x(t) - ?$

$y(t) - ?$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)x_0}_{X_{св}(t)} + \underbrace{\int_0^t \Phi(t-\tau)\,B\,g(\tau)\,d\tau}_{X_{вын}(t)} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 14e^{10t}-2e^{-2t}; & e^{10t}-e^{-2t} \\ -28e^{10t}+28e^{-2t}; & -2e^{10t}+14e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\int_0^t \begin{pmatrix} 14e^{10(t-\tau)}-2e^{-2(t-\tau)}; & e^{10(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} \\ -28e^{10(t-\tau)}+28e^{-2(t-\tau)}; & -2e^{10(t-\tau)}+14e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 28e^{10t}-4e^{-2t} \\ -56e^{10t}+56e^{-2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{12}\int_0^t \begin{pmatrix} 142e^{10(t-\tau)}-22e^{-2(t-\tau)} \\ -284e^{10(t-\tau)}+308e^{-2(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau =$$

1. $142e^{10t}\int_0^t e^{-10\tau}d\tau = 142e^{10t}\cdot\left(-\frac{e^{-10t}}{10}\right)\Big|_0^t = -14{,}2e^{10t}(e^{-10t}-1) = 14{,}2(e^{10t}-1)$

2. $-22e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau = -22e^{-2t}\cdot\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)\Big|_0^t = -11e^{-2t}(e^{2t}-1) = 11(e^{-2t}-1)$

3. $-284e^{10t}\int_0^t e^{-10\tau}d\tau = -284e^{10t}\cdot\left(-\frac{e^{-10t}}{10}\right)\Big|_0^t = 28{,}4e^{10t}(e^{-10t}-1) = 28{,}4(1-e^{10t})$

4. $308e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau = 308e^{-2t}\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)\Big|_0^t = 154e^{-2t}(e^{2t}-1) = 154(1-e^{-2t})$

$$= \underbrace{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 28e^{10t}-4e^{-2t} \\ -56e^{10t}+56e^{-2t} \end{pmatrix}}_{X_{св}(t)} + \underbrace{\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 14{,}2(e^{10t}-1)+11(e^{-2t}-1) \\ 28{,}4(1-e^{10t})+154(1-e^{-2t}) \end{pmatrix}}_{X_{вын}(t)} =$$

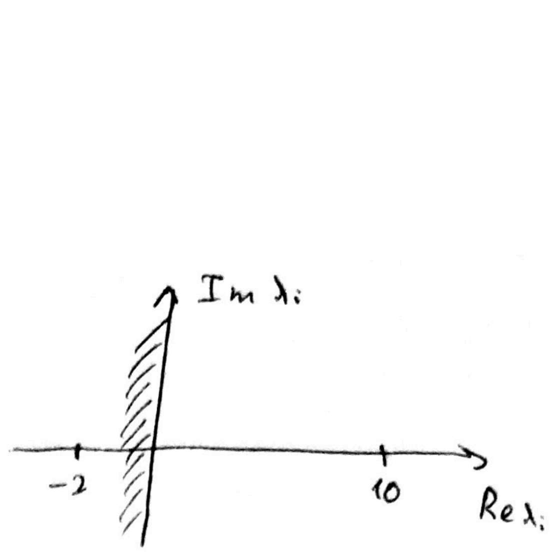
$$= \begin{pmatrix} -2{,}1+3{,}52e^{10t}+0{,}58e^{-2t} \\ 15{,}2-7{,}03e^{10t}-8{,}17e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$y(t) - ?$

$$y(t) = Cx(t) = (1\ 2)\begin{pmatrix} -2{,}1+3{,}52e^{10t}+0{,}58e^{-2t} \\ 15{,}2-7{,}03e^{10t}-8{,}17e^{-2t} \end{pmatrix} = -2{,}1+3{,}52e^{10t}+0{,}58e^{-2t} +$$

$$+30{,}4-14{,}06e^{10t}-16{,}34e^{-2t} = 28{,}3-10{,}54e^{10t}-15{,}76e^{-2t}$$

Анализ устойчивости



$\operatorname{Re} \lambda_i < 0,\ i = 1, \ldots, n$ – усл. устойчивости

$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = -2 \Rightarrow$ сист. не явл. асимптот. уст.

0. $n = 2,\ n = 2,\ k = 1$

$A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -28 & -4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ C = (1\ 2)$

1. Кр. упр-ти по сост.

$\operatorname{rg} W = \operatorname{rg} [B \ \ AB] = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & -28 & -4 \end{bmatrix} = 2 = n \Rightarrow$ сист. упр. по сост.

2. Кр упр-ти по вых

$\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} [CB \ \ CAB] = \operatorname{rg} [1 \ \ 2 \ \ -38 \ \ 9] = 1 = k \Rightarrow$ сист. упр. по вых.

3. Кр набл-ти

$\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} [C^T \ \ A^T C^T] = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & -38 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = 2 = n \Rightarrow$ сист. наблюд.

№3

б) с примен. преобр. Лапласа

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 12x_1 + x_2 + g_1, & x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2 = -28x_1 - 4x_2 + g_2, & x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$y = x_1 + 2x_2$

$g_1(t) = 10$

$t > 0$

$g_2(t) = 2$

0. $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -28 & -4 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \qquad y = \underbrace{(1 \;\; 2)}_{C}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1. Изобр. вх. сигнал

$$G(S) = \begin{pmatrix} \frac{10}{s} \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix}$$

2. Передат. ф-ции

$$[sE - A] = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ -28 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-12 & -1 \\ 28 & s+4 \end{pmatrix}$$

$$[sE - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 - 8s - 20}\begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -28 & s-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+2)(s-10)} & \frac{1}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-28}{(s+2)(s-10)} & \frac{s-12}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

$$C[sE-A]^{-1} = (1 \;\; 2)\begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+2)(s-10)} & \frac{1}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-28}{(s+2)(s-10)} & \frac{s-12}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-52}{(s+2)(s-10)} & \frac{2s-23}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

$$W^x(s) = [sE-A]^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+2)(s-10)} & \frac{1}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-28}{(s+2)(s-10)} & \frac{s-12}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

$$W^y(s) = C[sE-A]^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{s-52}{(s+2)(s-10)} & \frac{2s-23}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

3. Изобр-я законов изм-я векторов сост. и вых.

$$X(s) = [sE-A]^{-1}x_0 + W^x(s)\,G(s) =$$

$$(1) = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+2)(s-10)} & \frac{1}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-28}{(s+2)(s-10)} & \frac{s-12}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2(s+4)}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-56}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

$$(2) = \begin{pmatrix} \frac{s+4}{(s+2)(s-10)} & \frac{1}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-28}{(s+2)(s-10)} & \frac{s-12}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{s} \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10s+42}{s(s+2)(s-10)} \\ \frac{2s-304}{s(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2(s+4)}{(s+2)(s-10)} \\ \frac{-56}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}}_{X_{св}(s)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{10s+42}{s(s+2)(s-10)} \\ \frac{2s-304}{s(s+2)(s-10)} \end{pmatrix}}_{X_{вын}(s)}$$

$$Y(s) = C[sE-A]^{-1}x_0 + W^y(s)G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-52}{(s+2)(s-10)} & \frac{2s-23}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{s-52}{(s+2)(s-10)} & \frac{2s-23}{(s+2)(s-10)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{s} \\ \frac{2}{s} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2s-104}{(s+2)(s-10)} + \frac{10-\frac{520}{s}}{(s+2)(s-10)} + \frac{4-\frac{46}{s}}{(s+2)(s-10)} = \underbrace{\frac{2s-104}{(s+2)(s-10)}}_{y_{св}(s)} + \underbrace{\frac{14-\frac{566}{s}}{(s+2)(s-10)}}_{y_{вын}(s)}$$

4. Искомые законы изменения в-в сост и вых:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] =$$

$$\mathrm{I} \quad \frac{2(s+4)}{(s+2)(s-10)} = \frac{2\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s-10)} + \frac{4}{(s+2)(s-10)} = 2e^{10t} + 4\,\frac{e^{-2t}-e^{10t}}{-12} = 2{,}33e^{10t} - 0{,}33e^{-2t}$$

$$\mathrm{II} \quad \frac{-56}{(s+2)(s-10)} = -56\,\frac{e^{-2t}-e^{10t}}{-12} = 4{,}67e^{-2t} - 4{,}67e^{10t}$$

III $\frac{10s+42}{s(s+2)(s-10)} = \frac{10(s+2+2,2)}{s(s+2)(s-10)} = \frac{10}{s(s-10)} + \frac{22}{s(s+2)(s-10)} = 10 \cdot \frac{1}{10}(e^{10t}-1) +$

$+ 22\left(\frac{-10e^{-2t} - 2e^{10t} + 12}{(-2)\cdot(-10)(-12)}\right) = e^{10t} - 1 + 0,92\,e^{-2t} + 0,18e^{10t} - 1,1 = 1,18e^{10t} + 0,92e^{-2t} - 2,1$

IV $\frac{2s-304}{s(s+2)(s-10)} = \frac{2(s+2-154)}{s(s+2)(s-10)} = \frac{2}{s(s-10)} - \frac{308}{s(s+2)(s-10)} = \frac{1}{5}e^{10t} - \frac{1}{5} - 308\left(\frac{-10e^{-2t} - 2e^{10t} + 12}{(-2)(-10)(-12)}\right) =$

$= 0,2e^{10t} - 0,2 - 12,83e^{-2t} - 2,57e^{10t} + 15,4 = -2,37e^{10t} - 12,83e^{-2t} + 15,2$

$= \begin{pmatrix} 2,33e^{10t} - 0,33e^{-2t} + 1,18e^{10t} + 0,92e^{-2t} - 2,1 \\ 4,67e^{-2t} - 4,67e^{10t} - 2,37e^{10t} - 12,83e^{-2t} + 15,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,52e^{10t} + 0,58e^{-2t} - 2,1 \\ -7,03e^{10t} - 8,17e^{-2t} + 15,2 \end{pmatrix}$

$y(t) = L^{-1}[Y(s)] =$

V $\frac{2s-104}{(s+2)(s-10)} = \frac{2(s+2-54)}{(s+2)(s-10)} = \frac{2}{s-10} - \frac{108}{(s+2)(s-10)} = 2e^{10t} + 9\,e^{-2t} - 9\,e^{10t} =$

$= -7\,e^{10t} + 9\,e^{-2t}$

VI $\frac{14s-566}{s(s+2)(s-10)} = \frac{14(s+2-42,43)}{s(s+2)(s-10)} = \frac{14}{s(s-10)} - \frac{594,02}{s(s+2)(s-10)} = 1,4e^{10t} - 1,4 - 24,75e^{-2t} -$

$- 4,95e^{10t} + 29,7 = -3,55e^{10t} - 24,75e^{-2t} + 28,3$

$= 9\,e^{-2t} - 7\,e^{10t} - 3,55e^{10t} - 24,75e^{-2t} + 28,3 = -10,54e^{10t} - 15,76e^{-2t} + 28,3$

№4

а) Найти ИПФ системы, опис. дифф. ур-нем

$$\dot{x} + \frac{10t}{t^2+10} x = g$$

$n = 1$, $a_1(t) = 1$, $a_0(t) = \frac{10t}{t^2+10}$

Общее решение однор. ур-я

$$\dot{K_0} + \frac{10t}{t^2+10} K_0 = 0$$

$$\frac{dK_0}{dt} = -\frac{10t}{t^2+10} K_0$$

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{10t\,dt}{t^2+10}$$

$$\ln|K_0| = -\frac{10}{2} \cdot \ln|t^2+10| + \ln C$$

$$K_0 = \frac{C}{(t^2+10)^5}$$

$$K_0(\tau+0, \tau) = \frac{C}{(\tau^2+10)^5} = 1 \Rightarrow C = (\tau^2+10)^5$$

$$K_0(t, \tau) = \frac{(\tau^2+10)^5}{(t^2+10)^5} = \left(\frac{\tau^2+10}{t^2+10}\right)^5$$

б) Найти ИПФ системы и её реакцию на вх. возд. при нулевых НУ.

1) $t^2\dot{x} + tx = -g$, $g(t) = \begin{cases} t^{10}, & t > 5 \\ 0, & t \le 5 \end{cases}$

$n = 1$, $a_1(t) = t^2$, $a_0(t) = t$, $b_0(t) = -1$

$$t^2 \dot{K_0} + tK_0 = 0$$

$$t^2 \frac{dK_0}{dt} = -tK_0$$

$$\frac{dK_0}{K_0} = -\frac{dt}{t}$$

$$\ln|K_0| = -\ln|t| + \ln|C|$$

$$k_0 = \frac{C}{t}$$

$$k_0(\tau+0, \tau) = \frac{C}{\tau} = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow C = \frac{1}{\tau}$$

$$k_0(t, \tau) = \frac{1}{t \cdot \tau}$$

Закон изм. вых. сигнала:

$$x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,\tau) g(\tau) d\tau = \int\limits_{5}^{t} \frac{1}{t\tau} \cdot (-\tau^{10}) d\tau = -\frac{1}{t} \int\limits_{5}^{t} \tau^9 d\tau = -\frac{1}{t}\left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{5^{10}}{10}\right) = \frac{t^9}{10} - \frac{5}{10}$$

2) $t\dot{x} - x = t^2 \cos t\, g$, $g(t) = \begin{cases} \sin^{10} t, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

$$t\dot{k}_0 - k_0 = 0$$

$$\frac{dK_0}{K_0} = \frac{dt}{t}$$

$$k_0 = Ct$$

$$K_0(\tau+0, \tau) = C\tau = \frac{1}{\tau} \Rightarrow C = \frac{1}{\tau^2}$$

$$K_0(t, \tau) = \frac{1}{\tau^2}$$

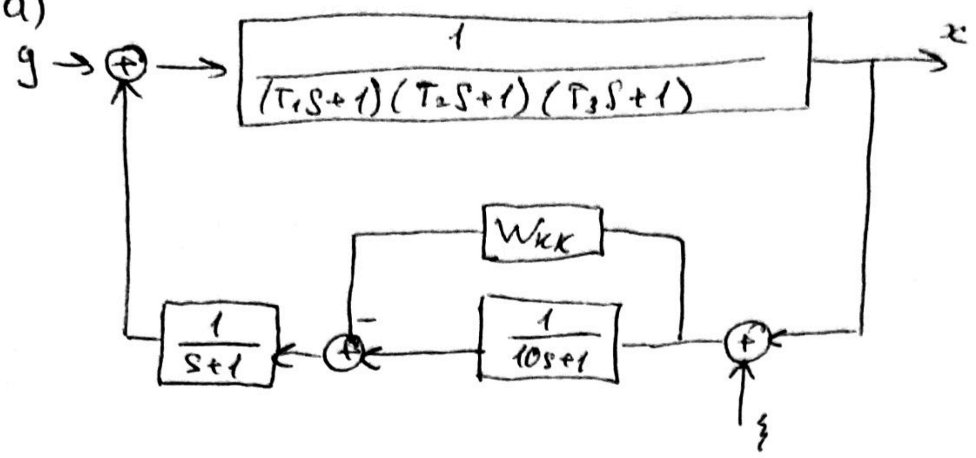
$$K_0(t, \tau) = \frac{t}{\tau^2}$$

$$K(t, \tau) = K_0(t, \tau)\, b_0(\tau) = t \cos \tau$$

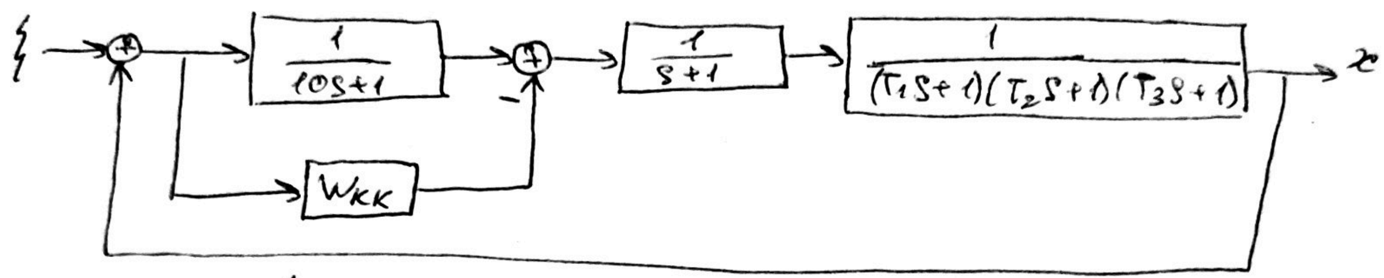
$$x(t) = \int\limits_{0}^{t} t \cos\tau \sin^{10}\tau\, d\tau = t \int\limits_{0}^{t} \cos\tau \sin^{10}\tau\, d\tau = t\, \frac{\sin^{11} t}{11} \Big|_0^t = \frac{t}{11} \sin^{11} t$$

15

a)



при $g(t)=0$

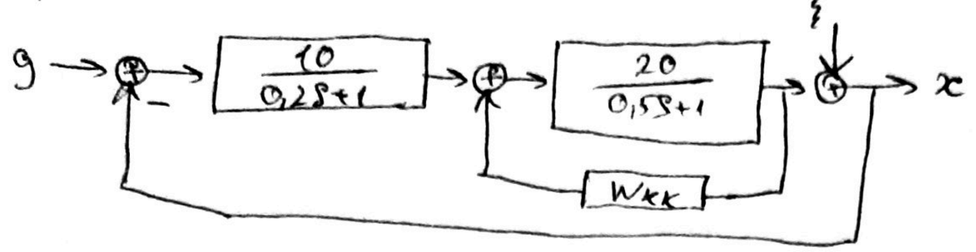


$$W_\xi(s)=\frac{\left(\frac{1}{10s+1}-W_{kk}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}\right)}{1-\left(\frac{1}{10s+1}-W_{kk}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}\right)}=0$$

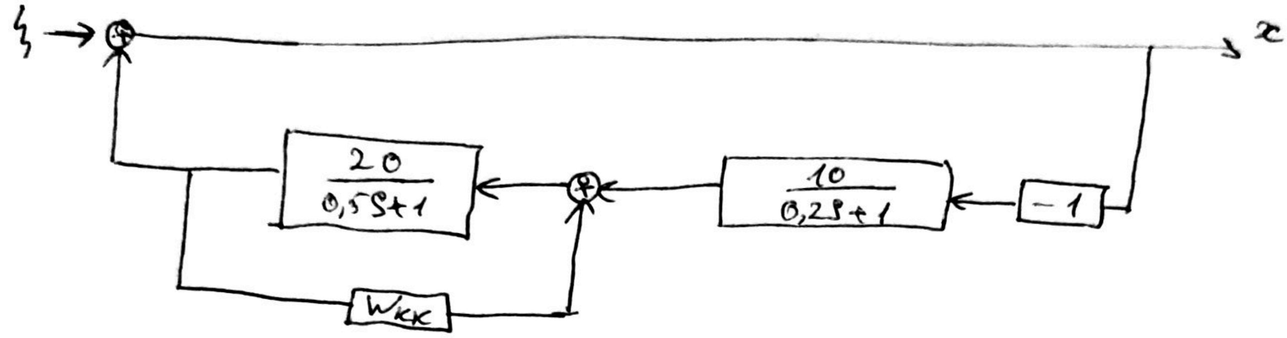
$$\Rightarrow \frac{1}{10s+1}-W_{kk}=0 \Rightarrow W_{kk}=\frac{1}{10s+1}$$

$$W_{kk}(s)=\frac{1}{10s+1}$$

б)



при $g(t)=0$



$$W_\xi(s)=\frac{1}{1+\left(\frac{10}{0,2s+1}\right)\left(\frac{\frac{20}{0,5s+1}}{1-\frac{20W_{кк}}{0,5s+1}}\right)}=\frac{1}{1+\left(\frac{10}{0,2s+1}\right)\left(\frac{\frac{20}{\cancel{0,5s+1}}}{\frac{0,5s+1-20W_{кк}}{\cancel{0,5s+1}}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{10}{0,2s+1}\right)\left(\frac{20}{0,5s+1-20W_{кк}}\right)}=\frac{(0,2s+1)(0,5s+1-20W_{кк})}{200(0,2s+1)(0,5s+1}=0$$

$$\Rightarrow 0,5s+1-20W_{кк}=0\Rightarrow W_{кк}=\frac{0,5s+1}{20}$$

$$W_{кк}(s)=\frac{0,5s+1}{20}$$

№5

Построить амплитудно-фазовую частотную характ. $W_{kk}(i\omega)$

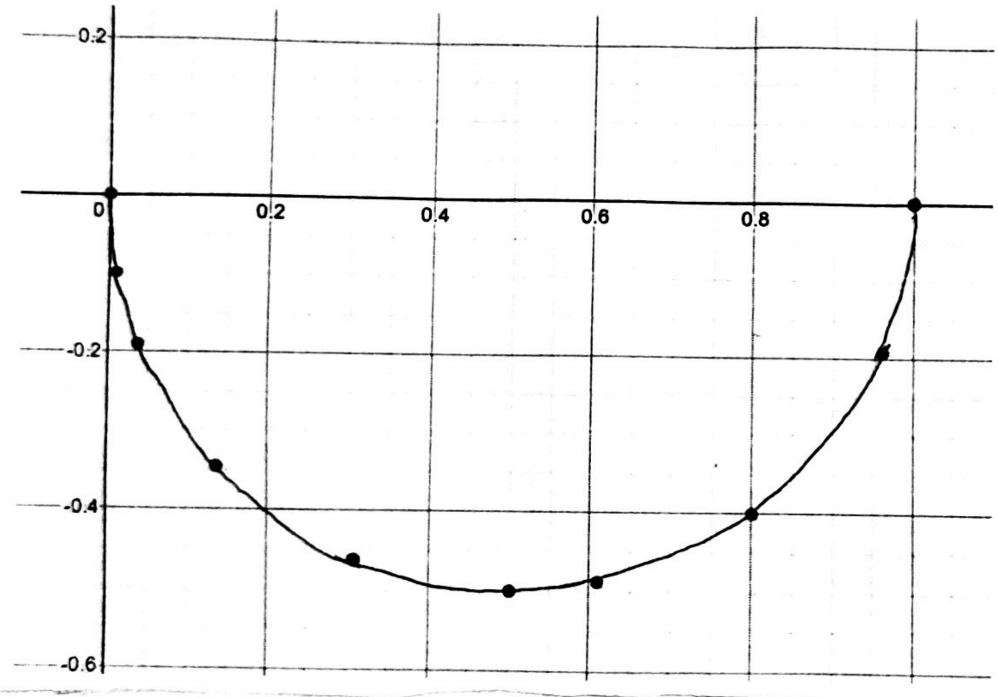
а) 1) $W_{kk}(s) = \frac{1}{10s+1}$

2) $W(i\omega) = \frac{1}{10i\omega+1} = \frac{1-10i\omega}{(1+10i\omega)(1-10i\omega)} = \underbrace{\frac{1}{1+100\omega^2}}_{U(\omega)} - i\underbrace{\frac{\omega}{1+100\omega^2}}_{V(\omega)}$

3) $U(\omega) = \frac{1}{1+100\omega^2} \qquad V(\omega) = -\frac{10\omega}{1+100\omega^2}$

$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)} = \sqrt{\frac{\cancel{1+100\omega^2}}{(1+100\omega^2)^{\cancel{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+100\omega^2}}$

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\operatorname{arctg} 10\omega$



ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	1	0
0,02	0,962	-0,192
0,05	0,8	-0,4
0,08	0,61	-0,488
0,1	0,5	-0,5
0,15	0,308	-0,462
0,25	0,138	-0,345
0,5	0,038	-0,19
1	0,009	-0,099
$+\infty$	0	0

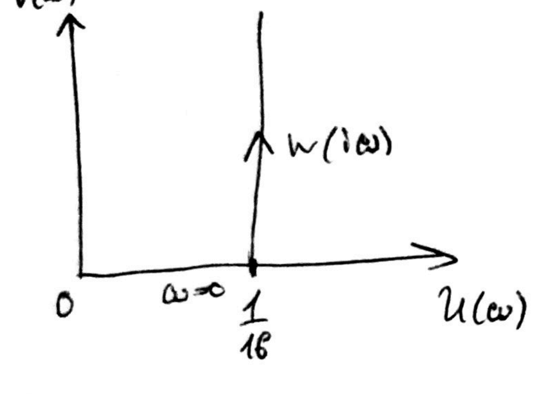
б) 1) $W_{кк}(S) = \dfrac{0{,}5S+1}{20}$

2) $W(i\omega) = \dfrac{0{,}5i\omega+1}{20} = \dfrac{1}{20} + i\,\dfrac{0{,}5\omega}{20} = \dfrac{1}{20} + i\,\dfrac{1}{40}\omega$

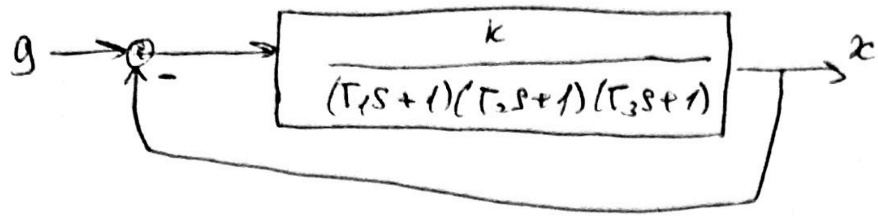
3) $U(\omega) = \dfrac{1}{20}$ $\quad V(\omega) = \dfrac{1}{40}\omega$

$A(\omega) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{20}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{40}\omega\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{20^2} + \dfrac{\omega^2}{40^2}} = \dfrac{\sqrt{1+0{,}25\omega^2}}{20}$

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{1}{40}\omega}{\frac{1}{20}} = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{2}$



№6



$T_1 = 1$

$T_2 = 0,1$

$T_3 = 0,01$

1) $$W(s) = \frac{\dfrac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}}{1+\dfrac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}} = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)+k} = \frac{M(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = \underbrace{T_1T_2T_3}_{a_3}s^3 + \underbrace{(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)}_{a_2}s^2 + \underbrace{(T_1+T_2+T_3)}_{a_1}s + \underbrace{k+1}_{a_0}$$

$n=3$

Применим критерий Гауса-Гурвица:

$$\begin{vmatrix} T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3 & k+1 & 0 \\ T_1T_2T_3 & T_1+T_2+T_3 & 0 \\ 0 & T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3 & k+1 \end{vmatrix}$$

$\Delta_1 = T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3>0$

$\Delta_2 = (T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)(T_1+T_2+T_3) - (k+1)(T_1T_2T_3)>0$

$\Delta_3 = \Delta_2\cdot(k+1)>0 \qquad k>0$

$$\Rightarrow 0<k+1<\frac{(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)(T_1+T_2+T_3)}{T_1T_2T_3}$$

$$-1<k<\frac{(0,1+0,01+0,001)\cdot(1+0,1+0,01)}{0,1\cdot 0,01}-1$$

$-1<k<122,21$

$\Rightarrow$ при $0<k<122,21$ сист. явл. асимптотически уст-вой

2) $W(s) = \dfrac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)+K}$

$$D(s) = T_1 T_2 T_3 s^2 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K + 1$$

Тогда

$$D(i\omega) = T_1 T_2 T_3 (i\omega)^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(i\omega) + (T_1 + T_2 + T_3) i\omega + K + 1$$

Построим годограф исп. знач.

$$D(i\omega) = \underbrace{K+1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2}_{P(\omega)} + i\underbrace{\omega(T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2)}_{Q(\omega)}$$

при нек. характ. частотах ω

Найдём корни действ. и мнимой частей характ. многочлена

$$P(\omega) = K+1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K+1}{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}},\ \omega \geq 0$$

$$Q(\omega) = \omega(T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T_3 \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$$

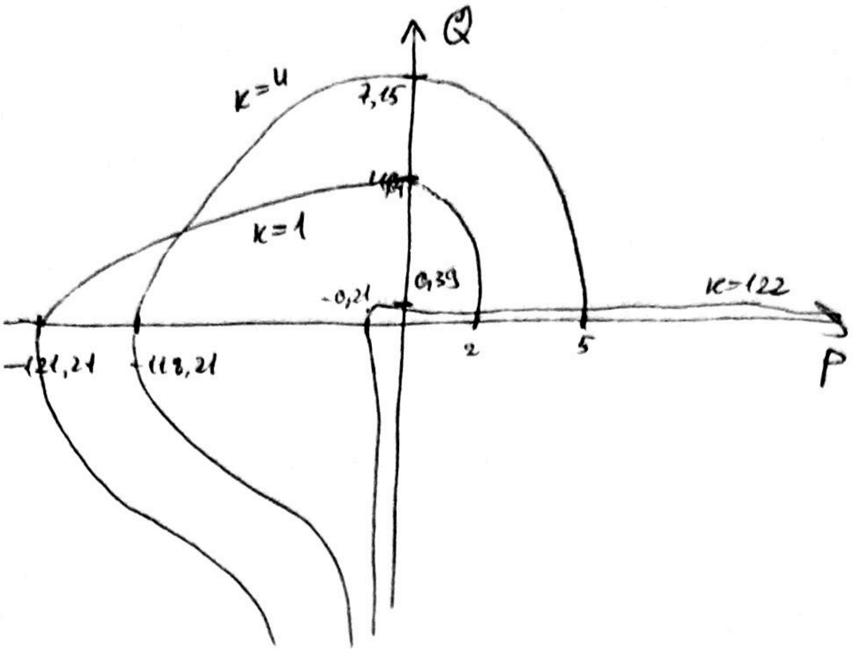
$$0 < \sqrt{\frac{K+1}{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}} < \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}},\ K > 0$$

$$0 < \sqrt{\frac{(K+1)\cdot 1000}{111}} < \sqrt{\frac{1{,}11}{0{,}001}}$$

$$0 < K+1 < \frac{1{,}11 \cdot 111}{0{,}001 \cdot 1000}$$

$$-1 < K < \frac{1{,}11 \cdot 111}{\cancel{0{,}001 \cdot 1000}} - 1 \Rightarrow 0 < K < 122.21$$

ω	P	Q
0	$K+1$	0
$\sqrt{\frac{K+1}{0{,}111}}$	0	$\sqrt{\frac{K+1}{0{,}111}}\left(1{,}11 - 0{,}009(K+1)\right)$
$\sqrt{\frac{1{,}11}{0{,}001}}$	$K - 122{,}21$	0
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$



При $0<K<122,21$ годограф проходит последовательно через I, II, III квадранты, охватывая т. $z=0$ на угол $\varphi=\frac{3\pi}{2}$

Таким образом, при всех $0<K<122.21$ сист. будет устойчива

3) $$W_{раз}(S)=\frac{k}{(T_1S+1)(T_2S+1)(T_3S+1)}$$

$$D(S)=(T_1S+1)(T_2S+1)(T_3S+1)=0$$

$$S_1=-\frac{1}{T_1},\quad S_2=-\frac{1}{T_2},\quad S_3=-\frac{1}{T_3}$$

$$И=0,\ П=0 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{2}(2П+И)=0$$

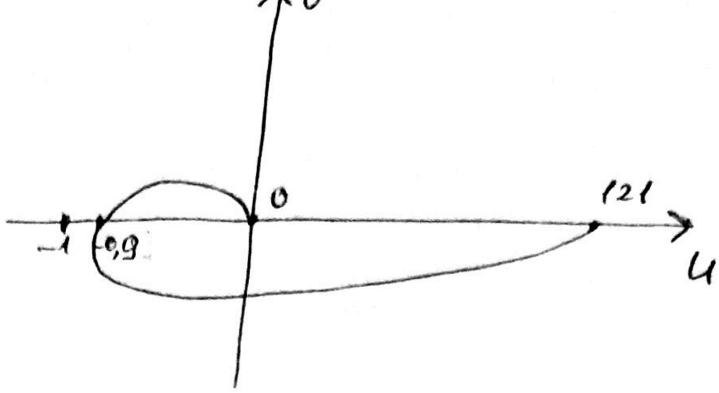
$$W_{раз}(i\omega)=\frac{k}{T_1T_2T_3(i\omega)^3+(T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)(i\omega)^2+(T_1+T_2+T_3)i\omega+1}=$$

$$=\frac{k[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2-i\omega(T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2)]}{[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2+i\omega(T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2)][1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2-i\omega(T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2)]}=$$

$$=\underbrace{\frac{k[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2]}{[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{U(\omega)}+i\underbrace{\frac{k\omega(T_1T_2T_3\omega^2-T_1-T_2-T_3)}{[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{V(\omega)}$$

$K = 121$

ω	U	V
0	121	0
33,33	−0,9	0
∞	0	0

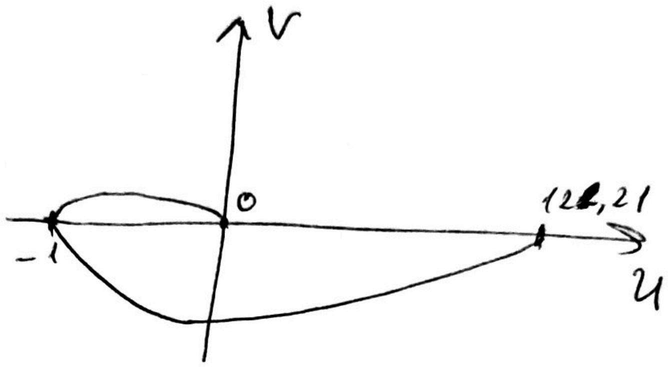


Годограф не охватывает критическую точку $-1+i0$, т.е $\varphi = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ замкнутая сист. асимпт. уст-ва

$K = 122{,}21$

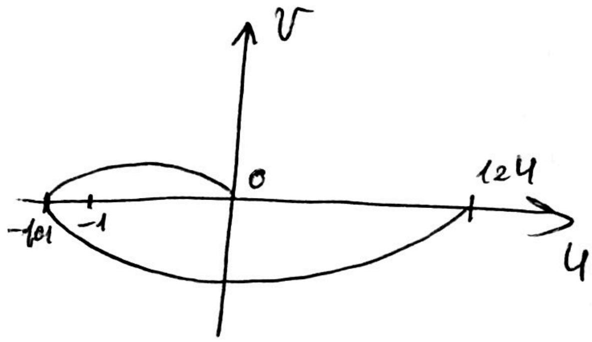
ω	U	V
0	122,21	0
33,33	−1	0
∞	0	0



Годограф проходит через крит. т. $-1+i0 \Rightarrow$ замкнут. сист. асимпт. неустойчива (на грани уст-ти)

$K = 124$

ω	U	V
0	124	0
33,33	−1,01	0
∞	0	0



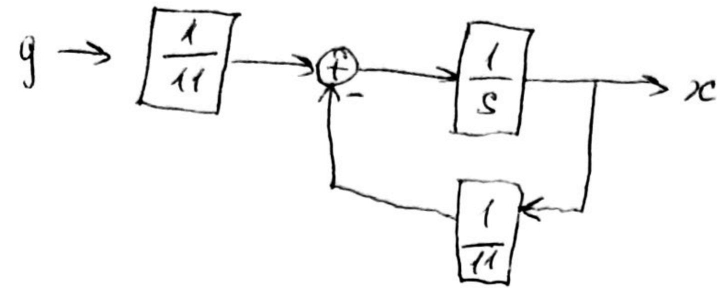
Годограф охватывает крит. точку $-1+i0$ на угол $\varphi = 2\pi \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ замкнутая система асимпт. неустойчива. Таким образом при $0 < K < 122{,}21$ сист. будет устойчивой

№7

Решить задачу анализа выходных процессов в спектр. форме опис

а) сист., заданная структурной схемой



б) входной сигнал $g(\theta) = I(\theta)$

в) нулевые нач. усл.

г) текущее время $\theta \in [0, t]$, где $t = 3$

Найти выходной сигнал $X(\theta)$, $\theta \in [0, t]$ и сравнить его с точным реш.

(масштаб усечения $N=2$)

1) $$\underset{\hat{P}}{G}(0,t) = \int_0^t 1 \cdot \hat{p}(0,t,\theta)\,d\theta = \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,d\theta = \sqrt{t} = \sqrt{3}$$

$$\underset{\hat{P}}{G}(1,t) = \int_0^t 1 \cdot \hat{p}(1,t,\theta)\,d\theta = \int_0^t 1 \cdot \sqrt{\frac{3}{t}}\left(\frac{2\theta}{t} - 1\right)d\theta = 0$$

$$\underset{\hat{P}}{G}(2,t) = \int_0^t 1 \cdot \hat{p}(2,t,\theta)\,d\theta = \int_0^t 1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{t}\left(\frac{6\theta^2}{t^2} - \frac{6\theta}{t} + 1\right) = 0$$

$$\underset{\hat{P}}{G}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) $$W(t,t) = W_2(t,t)\left[E + W_3(t,t)W_2(t,t)\right]^{-1} W_1(t,t)$$

$$W_1(t,t) = \frac{1}{11}E \qquad W_2(t,t) = P^{-1}(t,t) \qquad W_3(t,t) = \frac{1}{11}E$$

$$W(t,t) = P^{-1}(t,t)\left[E + \frac{1}{11}E + P^{-1}(t,t)\right]^{-1} \cdot \frac{1}{11}E$$

$$W(t,t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{15}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{15}} & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2\sqrt3} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt3} & 0 & -\frac{3}{2\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{15}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{25}{22} & \frac{-\sqrt3}{22} & 0 \\ \frac{\sqrt3}{22} & 1 & \frac{-\sqrt{15}}{110} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{110} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2\sqrt3} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt3} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{15}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{53308}{60905} & \frac{1184\sqrt3}{12181} & \frac{66\sqrt5}{60905} \\ \frac{-484\sqrt3}{12181} & \frac{12100}{12181} & \frac{110\sqrt{15}}{12181} \\ \frac{66\sqrt5}{60905} & \frac{-110\sqrt{15}}{12181} & \frac{12166}{12181} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{83539}{60905} & \frac{-5324\sqrt3}{12181} & \frac{-726\sqrt5}{60905} \\ \frac{5324\sqrt3}{12181} & \frac{891}{12181} & \frac{-1210\sqrt{15}}{12181} \\ \frac{-726\sqrt5}{60905} & \frac{1210\sqrt{15}}{12181} & \frac{165}{12181} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{60905}\begin{pmatrix} 7599 & -2420\sqrt3 & -66\sqrt5 \\ 2420\sqrt3 & 405 & -550\sqrt{15} \\ -66\sqrt5 & 550\sqrt{15} & 75 \end{pmatrix}$$

3) Найдем спектр. хар-ку выходного сигнала

$$\underset{P}{X}(t)=\frac{1}{60905}\begin{pmatrix} 7599 & -2420\sqrt3 & -66\sqrt5 \\ 2420\sqrt5 & 405 & -550\sqrt{15} \\ -66\sqrt5 & 550\sqrt{15} & 75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{60905}\begin{pmatrix} 7599\sqrt3 \\ 7260 \\ -66\sqrt{15} \end{pmatrix}$$

4) Выходной сигнал по ф-ле обращения

$$X(\theta)=\sum_i \underset{P}{X}(i,t)\,p(i,t,\theta)=x(\theta)=\left(7599\sqrt3\cdot\frac{1}{\sqrt3}+7260\cdot\left(\frac{2}{3}\theta-1\right)-\frac{66\sqrt{15}\sqrt5}{\sqrt3}\left(\frac{2}{3}\theta^2-\right.\right.$$

$$\left.-2\theta+1\right)\cdot\frac{1}{60905}=(7599+4840\theta-7260-220\theta^2+660\theta-330)\cdot\frac{1}{60905}=$$

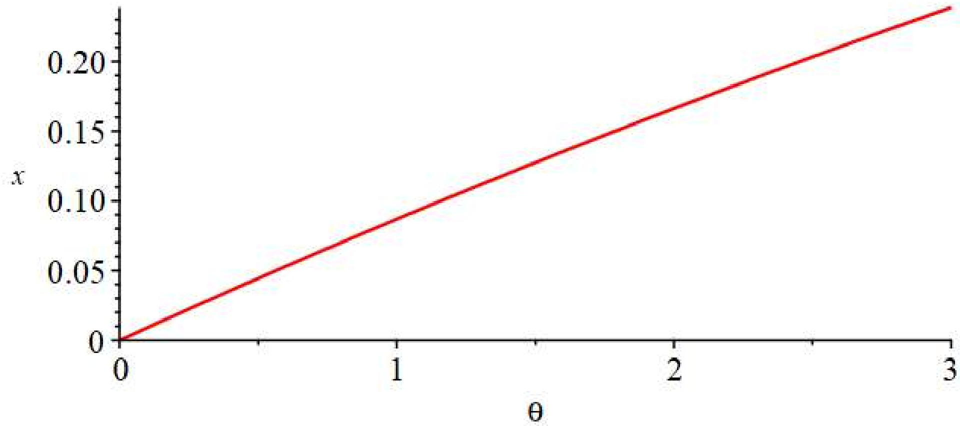
$$=-\frac{220\theta^2}{60905}+\frac{5500\theta}{60905}+\frac{9}{60905}$$

> *#Точное решение*

> $f(\text{theta}) := -\exp(-a\cdot\text{theta}) + 1$

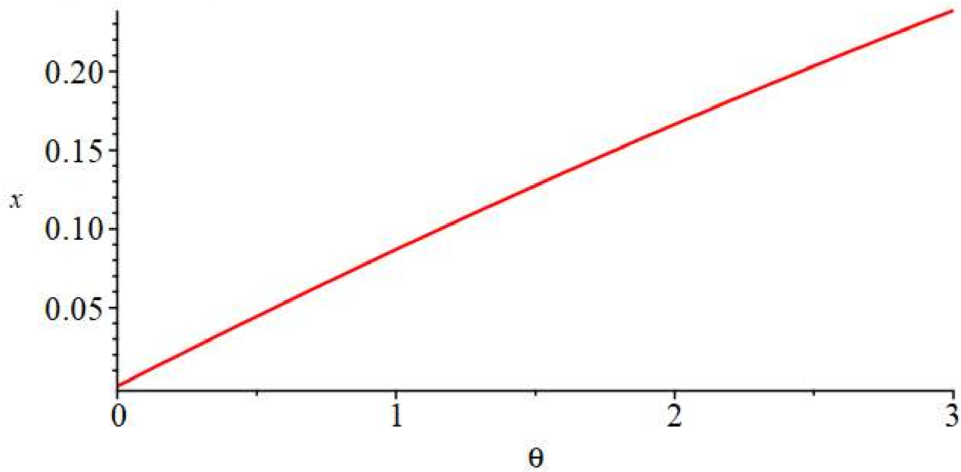
$$f := \theta \mapsto -e^{-a\cdot\theta} + 1$$

> *plot*([f(theta)], theta = 0 ..3, *labels* = [theta,'x'], *color* = *red*);



> *#Наше решение*

> *plot*([x], theta = 0 ..3, *labels* = [theta,'x'], *color* = *red*);



#Вычисление погрешности

delta := [0.000147771142, 0.000092394885, 0.00004667226, 9.86210×10^{-6}, 0.00001877003, 0.00003995193, 0.00005440478, 0.00006284328, 0.00006597564, 0.00006450366, 0.00005912274, 0.00005052218, 0.0000393848, 0.0000263873, 0.0000122004, 2.5115×10^{-6}, 0.0000170898, 0.0000308817, 0.0000432409, 0.0000535263, 0.0000611030, 0.0000653417, 0.0000613166, 0.0000518224, 0.0000365296, 0.0000148369, 0.0000138517, 0.0000501265, 0.0000945726]

:= [0.000147771142, 0.000092394885, 0.00004667226, $9.862100000 \times 10^{-6}$, 0.00001877003, 0.00003995193, 0.00005440478, 0.00006284328, 0.00006597564, 0.00006450366, 0.00005912274, 0.00005052218, 0.0000393848, 0.0000263873, 0.0000122004, $2.511500000 \times 10^{-6}$, 0.0000170898, 0.0000308817, 0.0000432409, 0.0000535263, 0.0000611030, 0.0000653417, 0.0000613166, 0.0000518224, 0.0000365296, 0.0000148369, 0.0000138517, 0.0000501265, 0.0000945726] **(22)**

max(delta)

0.000147771142 **(23)**

№8

Исследовать устойчивость, найти свободное движение, вынужденное движение и выходной сигнал дискретной сист. двумя способами
– классическим

а) $x(k+1)+12x(k)=g(k)$ $\quad x(0)=10$, $g(k)=10k$

1) а) Хар-е ур-е:

$\lambda+12=0$

$\lambda_1=-12$

б) Т.к. корень действ., то общее решение ур-я

$x(k+1)+12x(k)=0$ имеет вид:

$x(k)=C_1\cdot(-12)^k$

в) $x(0)=C_1=10 \Rightarrow x_{св}(k)=10\cdot(-12)^k$

2) $x(k+1)+12x(k)=10k$ $\quad x(0)=0$

а) $x(k)=C_1\cdot(-12)^k$

б) Частное реш-е неодн. ур-я

$g(k)=10k$, $\varphi=0$, $R_q(k)=10k$, $q=1$, $r=1$, $S=0$ (т.к. $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=1$ не совп. с корнем $\lambda_1=-10$), поэтому

$x_н(k)=1^k\cdot[ak+b]=ak+b$

Подставим

$a(k+1)+b+12ak+12b=10k \Leftrightarrow 13ak+13b+a=10k$

$13a=10$ и $13b+a=0$

$a=\frac{10}{13}$ $\qquad b=-\frac{10}{169}$

$x_н(k)=\frac{10}{13}k-\frac{10}{169}$

в) $x(k)=C_1\cdot(-12)^k+\frac{10}{13}k-\frac{10}{169}$

г) $x(0)=C_1\cdot(-12)^0+\frac{10}{13}\cdot0-\frac{10}{169}=C_1-\frac{10}{169}=0 \rightarrow C_1=\frac{10}{169}$

$x_{вын}(k)=\frac{10}{169}(-12)^k+\frac{10}{13}k-\frac{10}{169}$

3) Выходной сигнал

$$x(k) = x_{св}(k) + x_{вын}(k) = 10 \cdot (-12)^k + \frac{10}{169}(-12)^k + \frac{10}{13}k - \frac{10}{169} = \frac{1700}{169}(-12)^k + \frac{10}{13}k - \frac{10}{169}$$

б) $x(k+2) - 15x(k+1) + 44x(k) = g(k)$ $\quad x(0) = 2$, $x(1) = 3$, $g(k) = 2$

1) а) Хар-е ур-е

$$\lambda^2 - 15\lambda + 44 = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 11$$

б) т.к. корни действ. разные, то реш-е одн. ур-я $x(k+2) - 15x(k+1) + 44x(k) = 0$ имеет вид:

$$x(k) = C_1 \cdot 4^k + C_2 \cdot 11^k$$

в) найдём произв. пост. C_1 и C_2 из н. у.

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 = 2 \\ x(1) &= 4C_1 + 11C_2 = 3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{19}{7} \\ C_2 &= -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$x_{св}(k) = \frac{19}{7}4^k - \frac{5}{7}11^k$$

2) а) общее реш.: $C_1 4^k + C_2 11^k$

б) $g(k) = 2$: $r = 1$, $\varphi = 0$, $R_g(k) = 2$, $q = 0$, $s = 0$ (т.к. $r\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1$ не совп. с корнями 4 и 11 характ. ур-я, поэтому

$$x_н(k) = 1^k \cdot A = A$$

Подставим в неодн. ур-е

$$A - 15A + 44A = 2$$

$$30A = 2$$

$$A = \frac{1}{15}$$

в) общее решение неодн. ур-я

$$x(k) = C_1 \cdot 4^k + C_2 \cdot 11^k + \frac{1}{15}$$

г) опред. произв. пост. C_1 и C_2

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{15} = 0 \\ x(1) = 4C_1 + 11C_2 + \frac{1}{15} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= -\frac{2}{21} \\ C_2 &= \frac{1}{35} \end{aligned}$$

$$x_{вын}(k) = -\frac{2}{21}4^k + \frac{1}{35}11^k + \frac{1}{15}$$

3) Выходной сигнал

$$x(k) = \frac{19}{7}4^k - \frac{5}{7}11^k - \frac{2}{21}4^k + \frac{1}{35}11^k + \frac{1}{15} = \frac{55}{21}4^k - \frac{24}{35}11^k + \frac{1}{15}$$

– с помощью z - преобразования

а) $x(k+1) + 12\,x(k) = g(k)$, $x(0) = 10$, $g(k) = 10k$

1) Изобр. входного сигнала:

$$G(z) = Z[g(k)] = Z[10k] = \frac{10z}{(z-1)^2}$$

2) $a_1 = 1$, $a_0 = 12$, $b_0 = 1$, $n = 1$, $m = 0$

$$W(z) = \frac{1}{z+12}$$

$$D_H(z) = 10z \qquad D_g(z) = 0 \qquad D(z) = z+10$$

3) z - преобразование вых. сигнала

$$x(z) = \frac{10z}{z+12} + \frac{10z}{(z+12)(z-1)^2} \ominus$$

$$\frac{10z}{(z+12)(z-1)^2} = \frac{Az}{z+12} + \frac{Bz}{z-1} + \frac{Cz}{(z-1)^2}$$

$$A(z-1)^2 + B(z+12)(z-1) + C(z+12) = 10$$

$z = 1$: $C = \frac{10}{13}$

$z = -12$: $A = \frac{10}{169}$

$z = 2$: $A + 14B + 14C = 10$

$$\frac{10}{169} + 14B + \frac{140}{13} = 10 \Rightarrow B = -\frac{10}{169}$$

$$\ominus \frac{z}{z+12} + \frac{10}{169}\cdot\frac{z}{z+12} - \frac{10}{169}\frac{z}{z-1} + \frac{10}{13}\cdot\frac{z}{(z-1)^2}$$

4) Выходной сигнал

$$x(k) = 10(-12)^k + \frac{10}{169}(-12)^k - \frac{10}{169} + \frac{10}{13}k = \frac{1700}{169}(-12)^k + \frac{10}{13}k - \frac{10}{169}$$

б) $x(k+2)-15x(k+1)+44x(k)=g(k)$, $x(0)=2$, $x(1)=3$, $g(k)=2$

1) Изобр. входного сигнала

$$G(z)=Z[2]=\frac{2z}{z-1}$$

2) $a_2=1,\ a_1=-15,\ a_0=44,\ b_0=1,\ n=2,\ m=0$

$$W(z)=\frac{1}{z^2-15z+44}$$

$$D(z)=(z-4)(z-11)$$

$$D_H(z)=x_0(a_2z^2+a_1z)+x_1a_2z=2(z^2-15z)+3z=2z^2-27z$$

$$D_g(z)=0$$

3) z-преобраз. выходного сигнала

$$x(z)=\frac{2z^2}{(z-4)(z-11)}-\frac{27z}{(z-4)(z-11)}+\frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)}=$$

$$\frac{z^2}{(z-4)(z-11)}=\frac{Az}{z-4}+\frac{Bz}{z-11}=-\frac{8}{7}\frac{z}{z-4}+\frac{22}{7}\frac{z}{z-11}$$

$$A(z-11)+B(z-4)=2z$$

$z=4$: $\quad A=-\frac{8}{7}$

$z=11$: $\quad B=\frac{22}{7}$

$$\frac{27z}{(z-4)(z-11)}=\frac{Az}{z-4}+\frac{Bz}{z-11}=-\frac{27}{7}\frac{z}{z-4}+\frac{27}{7}\frac{z}{z-11}$$

$$A(z-11)+B(z-4)=27$$

$z=4$ $\quad A=-\frac{27}{7}$

$z=11$ $\quad B=\frac{27}{7}$

$$\frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)}=\frac{Az}{z-1}+\frac{Bz}{z-4}+\frac{Cz}{z-11}=\frac{1}{15}\frac{z}{z-1}-\frac{2}{21}\frac{z}{z-4}+\frac{1}{35}\frac{z}{z-11}$$

$$A(z-4)(z-11)+B(z-1)(z-11)+C(z-1)(z-4)=2$$

$z=1$: $\quad A=\frac{1}{15}$

$z=4$: $\quad B=-\frac{2}{21}$

$z=11$: $\quad C=\frac{1}{35}$

4) Выходной сигнал: $x(k)=\frac{55}{21}4^k-\frac{24}{35}11^k+\frac{1}{15}$

29

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -44x_1(k) + 15x_2(k) + g(k)$$

$$y(k) = x_1(k) - x_2(k)$$

$$x_1(0) = 2 \qquad x_2(0) = 3 \qquad g(k) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -44 & 15 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Изображение входного сигнала:

$$G(z) = Z[g(k)] = Z[2] = \frac{2z}{z-1}$$

2) Передаточные ф-ции

$$zE - A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -44 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -1 \\ 44 & z-15 \end{pmatrix}$$

$$(zE-A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - 15z + 44} \begin{pmatrix} z-15 & 1 \\ -44 & z \end{pmatrix}$$

$$C(zE-A)^{-1} = \frac{1}{z^2-15z+44} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-15 & 1 \\ -44 & z \end{pmatrix} = \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} z+29 & 1-z \end{pmatrix}$$

$$W^x(z) = (zE-A)^{-1}B = \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} z-15 & 1 \\ -44 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$$

$$W^y(z) = C(zE-A)^{-1}B = \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1-z}{(z-4)(z-11)}$$

3) Изображение законов изменения векторов состояния и выхода:

$$X(z) = (zE-A)^{-1} \cdot z \cdot x_0 + W^x(z) \cdot G(z) = \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} z-15 & 1 \\ -44 & z \end{pmatrix} z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{2z}{z-1} =$$

$$= \frac{z}{(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} 2z-27 \\ 3z-88 \end{pmatrix} + \frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z(2z-27)}{(z-4)(z-11)} \;① \\ \frac{z(3z-88)}{(z-4)(z-11)} \;② \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)} \;③ \\ \frac{2z^2}{(z-1)(z-4)(z-11)} \;④ \end{pmatrix}$$

$$Y(z) = C(zE-A)^{-1} z \cdot X_0 + W^{y}(z)\cdot G(z) =$$

$$= \frac{1}{(z-4)(z-11)}(z+29 \quad 1-z)\, z \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{1-z}{(z-4)(z-11)} \cdot \frac{27}{z-1} =$$

$$= \frac{z}{(z-4)(z-11)}(-z+61) - \frac{27}{(z-4)(z-11)} = \frac{-z^2+61z}{(z-4)(z-11)}^{⑤} - \frac{2z}{(z-4)(z-11)}^{⑥}$$

4. Законы изменения векторов состояния и выхода:

① $\frac{z(2z-27)}{(z-4)(z-11)} = \frac{2z^2}{(z-4)(z-11)} - \frac{27z}{(z-4)(z-11)} = -\frac{8}{7}\cdot\frac{z}{z-4} + \frac{22}{7}\frac{z}{z-11} + \frac{27}{7}\frac{z}{z-4} - \frac{27}{7}\frac{z}{z-11} =$

$= \frac{19}{7}\frac{z}{z-4} - \frac{5}{7}\frac{z}{z-11}$

$$\frac{2z^2}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$A(z-11) + B(z-4) = 2z$

$A = -\frac{8}{7}$; $B = \frac{22}{7}$

$$\frac{27z}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$A(z-11) + B(z-4) = 27$

$A = -\frac{27}{7}$; $B = \frac{27}{7}$

② $\frac{z(3z-88)}{(z-4)(z-11)} = \frac{3z^2}{(z-4)(z-11)} - \frac{88z}{(z-4)(z-11)} = -\frac{12}{7}\frac{z}{z-4} + \frac{33}{7}\cdot\frac{z}{z-11} + \frac{88}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{88}{7}\cdot\frac{z}{z-11} =$

$= \frac{76}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{55}{7}\cdot\frac{z}{z-11}$

$$\frac{3z^2}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$A(z-11) + B(z-4) = 3z$

$A = -\frac{12}{7}$; $B = \frac{33}{7}$

$$\frac{88z}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$A(z-11) + B(z-4) = 88$

$A = -\frac{88}{7}$; $B = \frac{88}{7}$

(3)
$$\frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)} = \frac{1}{15}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{27}\frac{z}{z-4} + \frac{1}{35}\frac{z}{z-11}$$

$$\frac{2z}{(z-1)(z-4)(z-11)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-4)} + \frac{C}{(z-11)}$$

$$A(z-4)(z-11) + B(z-1)(z-11) + C(z-1)(z-4) = 2$$

$$A = \frac{1}{15} \; ; \; B = -\frac{2}{27} \; ; \; C = \frac{1}{35}$$

(4)
$$\frac{2z^2}{(z-1)(z-4)(z-11)} = \frac{1}{15}\frac{z}{z-1} - \frac{8}{27}\frac{z}{z-4} + \frac{11}{35}\frac{z}{z-11}$$

$$\frac{2z^2}{(z-1)(z-4)(z-11)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-4)} + \frac{C}{(z-11)}$$

$$A(z-4)(z-11) + B(z-1)(z-11) + C(z-1)(z-4) = 2z$$

$$A = \frac{1}{15} \; ; \; B = -\frac{8}{27} \; ; \; C = \frac{11}{35}$$

$$X(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{19}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{5}{7}\frac{z}{z-11} \\ \frac{76}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{55}{7}\cdot\frac{z}{z-11} \end{pmatrix}}_{X_{\text{св}}(z)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{15}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{27}\frac{z}{z-4} + \frac{1}{35}\frac{z}{z-11} \\ \frac{1}{15}\frac{z}{z-1} - \frac{8}{27}\frac{z}{z-4} + \frac{11}{35}\frac{z}{z-11} \end{pmatrix}}_{X_{\text{вын}}(z)}$$

$$X(k) = Z^{-1}[X(z)] = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{19}{7}4^k - \frac{5}{7}11^k \\ \frac{76}{7}\cdot 4^k - \frac{55}{7}\cdot 11^k \end{pmatrix}}_{X_{\text{св}}(k)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{15} - \frac{2}{27}4^k + \frac{1}{35}11^k \\ \frac{1}{15} - \frac{8}{27}4^k + \frac{11}{35}11^k \end{pmatrix}}_{X_{\text{вын}}(k)}$$

⑤ $$\frac{-z^2+61z}{(z-4)(z-11)} = \frac{-z^2}{(z-4)(z-11)} + \frac{61z}{(z-4)(z-11)} = \frac{4}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{11}{7}\frac{z}{z-11} - \frac{61}{7}\frac{z}{z-4} + \frac{61}{7}\frac{z}{z-11} =$$

$$= -\frac{57}{7}\frac{z}{z-4} + \frac{50}{7}\frac{z}{z-11}$$

$$-\frac{z^2}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$$A(z-11) + B(z-4) = -z$$

$$A = \frac{4}{7}\ ;\ B = -\frac{11}{7}$$

$$\frac{61z}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$$A(z-11) + B(z-4) = 61$$

$$A = -\frac{61}{7}\ ;\ B = \frac{61}{7}$$

⑥ $$-\frac{2z}{(z-4)(z-11)} = \frac{2}{7}\frac{z}{z-4} - \frac{2}{7}\frac{z}{z-11}$$

$$-\frac{2z}{(z-4)(z-11)} = \frac{Az}{(z-4)} + \frac{Bz}{(z-11)}$$

$$A(z-11) + B(z-4) = -2$$

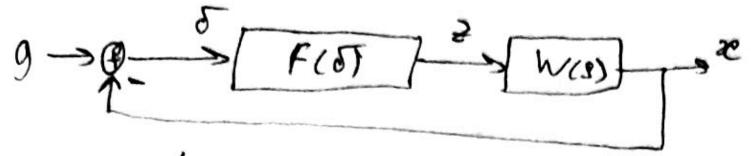
$$A = \frac{2}{7}\ ;\ B = -\frac{2}{7}$$

$$Y(z) = \underbrace{-\frac{57}{7}\frac{z}{z-4} + \frac{50}{7}\frac{z}{z-11}}_{Y_{\text{св}}(z)} + \underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{z}{z-4} - \frac{2}{7}\frac{z}{z-11}}_{Y_{\text{вын}}(z)}$$

$$Y(k) = Z^{-1}[Y(z)] = \underbrace{-\frac{57}{7}4^k + \frac{50}{7}11^k}_{Y_{\text{св}}(k)} + \underbrace{\frac{2}{7}4^k - \frac{2}{7}11^k}_{Y_{\text{вын}}(k)}$$

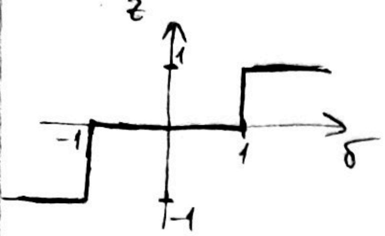
1.10

Для системы



$$W(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}, \quad T = \frac{1}{11}$$

Нелинейный элемент задаётся ф-цией



$$F(\delta) = \begin{cases} 1, & \delta > 1 \\ 0, & -1 \le \delta \le 1 \\ -1, & \delta < 1 \end{cases}$$

построить фазовый портрет методом изоклин

1) Ур-е своб. движ. сис-мы:

$$W(s) = \frac{1}{\frac{1}{11}s^2 + s} = \left.\frac{M(p)}{D(p)}\right|_{p=s} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{11}p^2 + p\right)}_{D(p)} x = \underset{M(p)}{1} \cdot z \Leftrightarrow \frac{1}{11}\ddot{x} + \dot{x} = z$$

$z = F(\delta)$

$\delta = g - x \quad \Rightarrow \frac{1}{11}\ddot{x} + \dot{x} = -F(x)$, т.к. F-нечётная ф-а

$g = 0$

Нормальная форма Коши:

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -11(F(x) + y)$

2) Ур-е фаз. траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-11F(x) - 11y}{y} = -\frac{11F(x)}{y} - 11$$

3) Ур-е изоклин

$$-11 - \frac{11F(x)}{y} = C$$

Поскольку сист. управления содержит релейный элемент F с зоной нечувствительности, то разобьём фазовую пл-ть на три области:

А, Б, В в которых ф-я $F(x)$ принимает, соотв., пост. значение $-1, 0, 1$.

Ур-я изоклин примут вид:

для области А: $y = \dfrac{1}{\frac{c}{11}+1}$

для области В: $y = \dfrac{1}{\frac{c}{11}+1}$

В области Б ур-е изоклин имеет вид: $C=-11$, что свидетельствует о том, что все фаз. траектории в этой полосе явл. прямыми линиями с наклоном $\frac{dy}{dx} = -11$

Построим сем-во изоклин в области А, выбирая знач. парам. С.

В области В картина фаз. траекторий будет симметричной построенной в области А

Для А: $y = \dfrac{1}{\frac{c}{11}+1}$

$C=0 \to y=1$

$C=11 \to y=\frac{1}{2}$

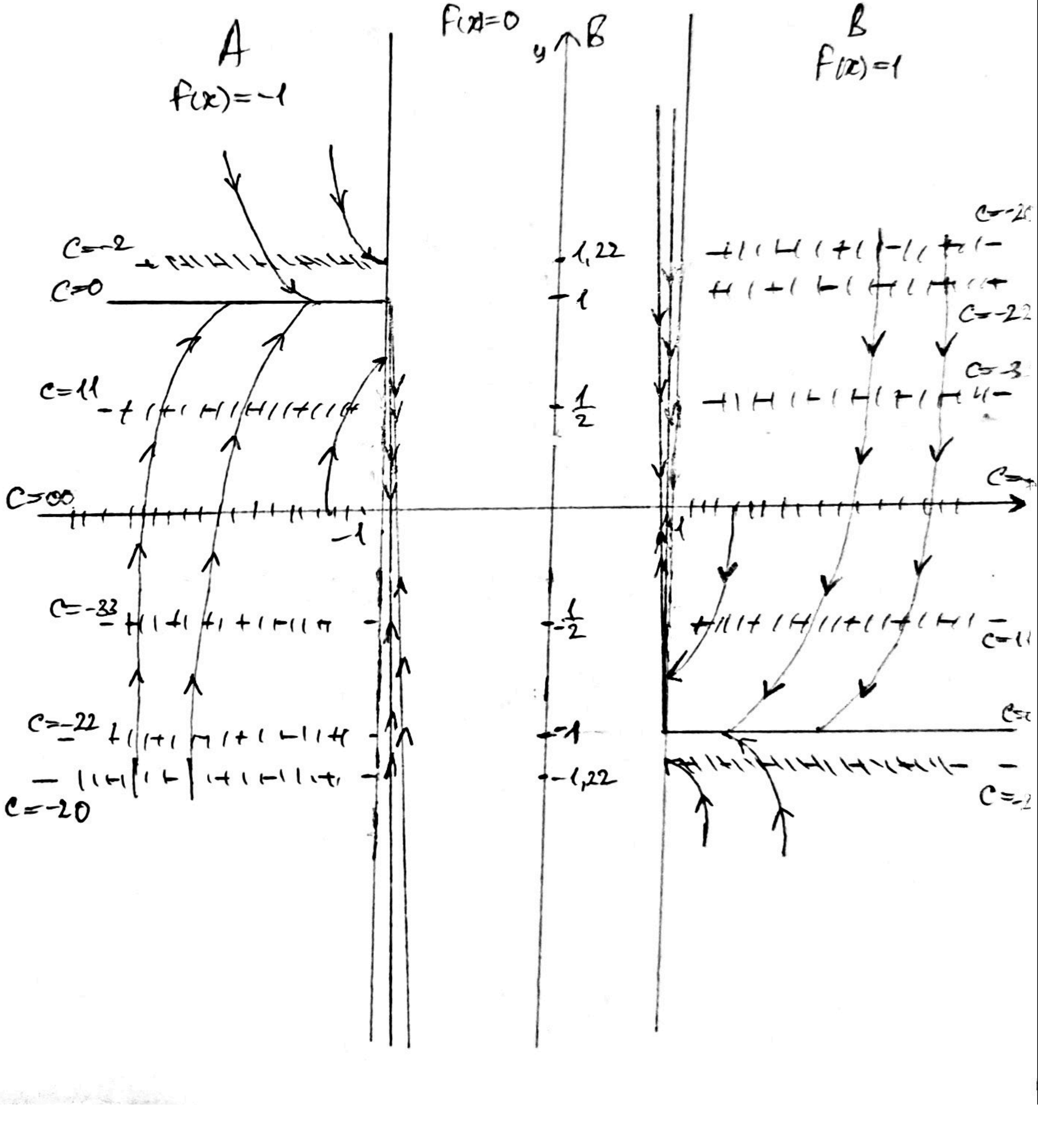
$C=-33 \to y=-\frac{1}{2}$

$C=-22 \to y=-1$

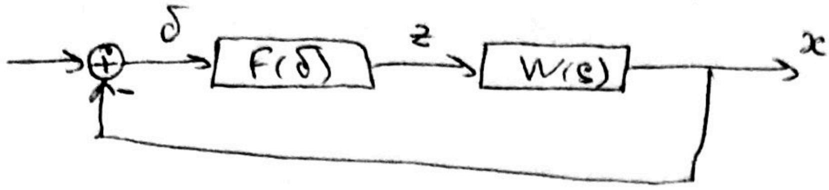
$C=-2 \to y=1{,}22$

$C=-20 \to y=-1{,}22$

$C=\infty \to y=0$

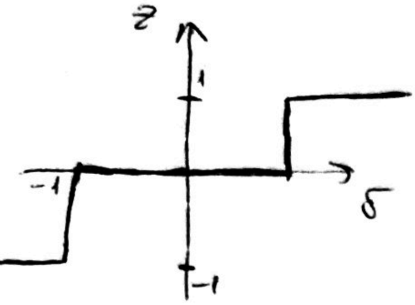


№11



$$W(s)=\frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \qquad T_1=1 \qquad T_2=0{,}1 \qquad T_3=0{,}01$$

Нелин. эл.:



$$F(\delta)=\begin{cases}1, & \delta>1\\ 0, & -1\le\delta\le 1\\ -1, & \delta<1\end{cases}$$

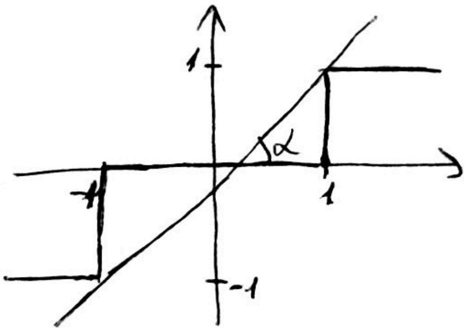
При каких знач. коэфф. усил. k сист. абсолютно уст.

1) Полюса

$(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)=0 \Rightarrow s_1=-\frac{1}{T_1}\ ;\ s_2=-\frac{1}{T_2}\ ;\ s_3=-\frac{1}{T_3}$

$s_1=-1\ ,\ s_2=-10\ ,\ s_3=-100 \qquad s_1, s_2, s_3<0$

Линейная часть сист. устойчива, т.к. корни знаменателя - отриц действит. числа



2) Найдём параметр k

$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{c}{b}=\frac{1}{1}=1$

3) $\tilde{W}(i\omega)=\mathrm{Re}\,W(i\omega)+i\omega\,\mathrm{Im}\,W(i\omega)$

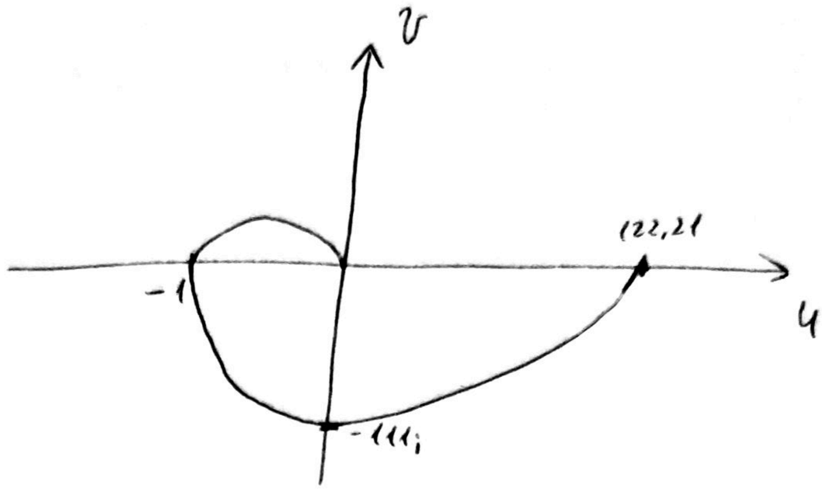
$$\tilde{W}(i\omega)=\underbrace{\frac{k[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2]}{[1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{u}+$$

$$+i\underbrace{\frac{k\omega^2(T_1T_2T_3\omega^2-T_1-T_2-T_3)}{[1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{v}$$

4) Луч: $(-\infty; -\frac{1}{k}] \Rightarrow (-\infty; -1]$

$-\frac{1}{k} = -1 \qquad -\frac{100k}{12221} = -1 \Rightarrow k = 122,21$

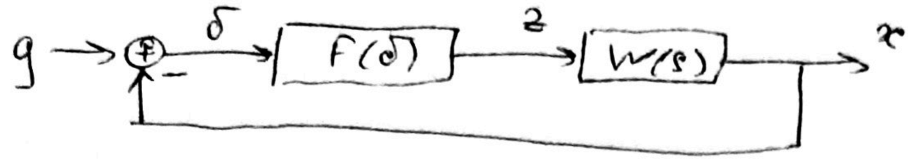
ω	$\tilde{W}(i\omega)$
0	122.21
33.32	-1
3,001	$-111i$
∞	0



Система абсолютно устойчива при $k < 122,21$

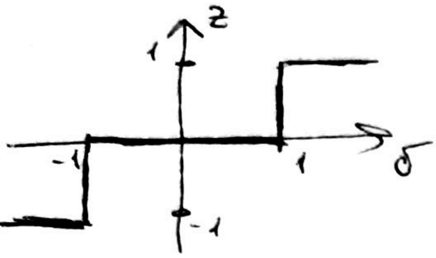
№12

При каких знач. коэфф. усиления k в сист. управления возможн. автоколебания?



$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \qquad T_1 = 1, \; T_2 = 0{,}1, \; T_3 = 0{,}01$$

Нелин. эл.



$$F(\delta) = \begin{cases} 1, & \delta > 1 \\ 0, & -1 \le \delta \le 0{,}8 \\ -1 & \delta < -1 \end{cases}$$

1) Годограф частотной хар-ки лин. части разомкн. сист. при $\omega \in [0; +\infty)$

$$W(i\omega) = \underbrace{\frac{k[1-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^2]}{[1-\omega^2(T_1T_2+T\,T+T_2T_3)]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{u} +$$

$$+ i \underbrace{\frac{k\omega^2(T_1T_2T_3\omega^2-T_1-T_2-T_3)}{[1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)]^2+\omega^2[T_1+T_2+T_3-T_1T_2T_3\omega^2]^2}}_{v}$$

2) Находим комплексный коэфф. усиления

$$W_н(a) = q(a) + i q_1(a) = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} + i\cdot 0 = \frac{4c}{\pi a}\sqrt{a^2-b^2}$$

обратная х-ка:

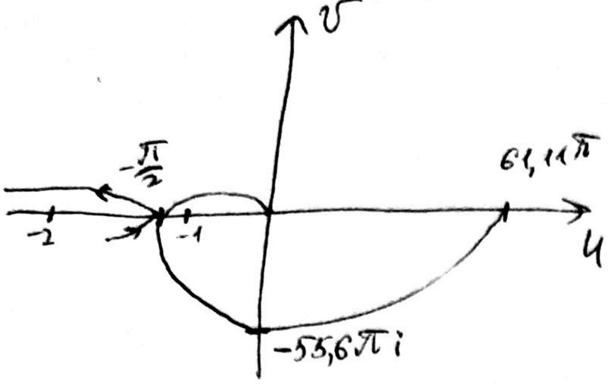
$$M_н(a) = -\frac{1}{W_н(a)} = -\frac{\pi a^2}{4c\sqrt{a^2-b^2}}$$

Определим значение a, обесп. макс. величину $M_н(a)$:

$$a^* = \sqrt{2}\,b \Rightarrow M_н(a^*) = -\frac{\pi b}{2c}$$

Для $b=1$, $c=1$: $a^* = \sqrt{2}$, $M_н(a^*) = -\frac{\pi}{2}$

Построим годограф $M_н(a) = -\frac{\pi a^2}{4\sqrt{a^2-1}}$



a	$M_н(a)$
1,01	-5,65
1,2	-1,71
$\sqrt{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
1,6	-1,61

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	k	0
3,001	0	$-55,6\pi$
33,32	$-\frac{\pi}{2}$	0
∞	0	0

Подберём коэфф. усил., чтобы годограф проходил через крайнюю точку:

$U(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$V(\omega) = 0$ $\Rightarrow -\frac{100}{12221} k = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 61,11\pi$

3) Точка пересечения имеет коорд. $U = -\frac{\pi}{2}$, $V = 0$

Тогда частота автоколебаний $\omega_п = 33,32$

Амплитуда:

$M_н(a) = -\frac{\pi a^2}{4\sqrt{a^2-1}} = -\frac{\pi}{2}$

$a_1 = \sqrt{2}$

4) При $a = a_1$ точка не охватывается годографом $W(i\omega) \Rightarrow$ можем сделать вывод, что это пересечение опред. устойчивые автоколебания с парам. $\omega_п = 33,32$, $a_п = \sqrt{2}$

Ответ: $k \geq 61,11\pi \approx 191,88$