Задачи, на которые Иванов обратил внимание на консультации

ГАУССОВСКИЙ СЛУЧАЙНЫЙ ВЕКТОР

6. Получены два наблюдения $Y_k = 2X + \varepsilon_k$, $k = 1, 2$ случайной величины $X \sim \mathcal{N}(1; 4)$. Ошибки наблюдения ε_1 и ε_2 не зависят друг от друга и от X и имеют распределение $\mathcal{N}(0; 1)$. Найти с.к.-оптимальную оценку $\widehat{X}$ для X по наблюдениям $Y = \{Y_1, Y_2\}^\top$.

Ответ. $\widehat{X} = \dfrac{8(Y_1 + Y_2) + 1}{33}$.

Центральная предельная теорема

4. Случайная величина X_n имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, т.е. $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$, где $\xi_k \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $k = 1, \ldots, n$ и независимы в совокупности. Доказать, что $X_n \sim \mathcal{N}(n; 2n)$, если $n \gg 1$.

Указание. Показать, что $\left\{\dfrac{X_n - n}{\sqrt{2n}}\right\}$ асимптотически нормальна.

1. Вероятность рождения мальчика равна 0,52, девочки — 0,48. Какова вероятность того, что среди 10000 новорожденных детей девочек будет не меньше, чем мальчиков?

Ответ. $3 \cdot 10^{-5}$.

2. Длина шага человека имеет равномерное распределение на промежутке [0,9; 1,1] (в метрах). Какова вероятность того, что, сделав 100 шагов, он пройдет не менее 105 метров? В каких пределах с вероятностью 0,95 может лежать пройденный путь L?

Ответ. $\mathbf{P}(L > 105) \simeq 0$; $\mathbf{P}(98{,}86 \leqslant L \leqslant 101{,}14) \simeq 0{,}95$.

3. В результате 100 подбрасываний монеты “герб” выпал 70 раз. Насколько правдоподобным является предположение о симметричности монеты?

Указание. Вычислить $\mathbf{P}(X_n \geqslant 70)$ в предположении, что $p = 0{,}5$.

Ответ. Предположение симметричности неправдоподобно.

4. Случайная величина X_n имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы, т.е. $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2$, где $\xi_k \sim \mathcal{N}(0; 1)$, $k = 1, \ldots, n$ и независимы в совокупности. Доказать, что $X_n \sim \mathcal{N}(n; 2n)$, если $n \gg 1$.

Указание. Показать, что $\left\{\dfrac{X_n - n}{\sqrt{2n}}\right\}$ асимптотически нормальна.

5. Производственный процесс состоит из 100 независимых операций, выполняемых одна за другой. Длительность каждой операции τ_k (сек) имеет экспоненциальное распределение. Известно, что $\mathbf{P}(\tau_k \leqslant 1) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Какова вероятность того, что длительность T процесса превысит одну минуту?

Ответ. $1 - \Phi(2) \simeq 0{,}023$.

6. Случайная величина X_n имеет распределение Пуассона с параметром n ($X_k \sim \Pi(n)$). Доказать, что последовательность $Y_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ асимптотически нормальна.

Указание. Показать, что $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, где $\xi_k \sim \Pi(1)$.

7. Случайные величины ξ_k независимы в совокупности и распределены по закону $R[0; 1]$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} \xi_k \leqslant e^{-n}\right)$.

Ответ. 0,5.

Выборка и ее основные характеристики

4. Выборка объема $n \gg 1$ соответствует распределению $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$. Найти асимптотическое распределение выборочного момента $\overline{\nu}_2(n)$.

Ответ. $\mathcal{N}\left(\sigma^2; \dfrac{2\sigma^4}{n}\right)$.

2. Выборка соответствует распределению $R[0;1]$. Вычислить $\mathbf{M}\left\{X_{(n)}\right\}$ и $\mathbf{D}\left\{X_{(n)}\right\}$.

Ответ. $\mathbf{M}\left\{X_{(n)}\right\} = \dfrac{n}{n+1}$; $\mathbf{D}\left\{X_{(n)}\right\} = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

9. Пусть $Z_n^{(1)} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ и $Z_n^{(2)} = \{Y_1, \ldots, Y_n\}$ — две независимые выборки, причем $Z_n^{(1)}$ соответствует распределению $\mathcal{N}(\theta_1;\sigma_1^2)$, а $Z_n^{(2)}$ — $\mathcal{N}(\theta_2;\sigma_2^2)$ (σ_1 и σ_2 — известны). Требуется построить доверительный интервал надежности q для параметра $\theta = \theta_1 - \theta_2$.

Указание. Использовать $G(Z_n^{(1)}; Z_n^{(2)}; \theta) = \dfrac{\overline{X}_n - \overline{Y}_n - \theta}{\sigma}$, где $\sigma^2 = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$.

Ответ. $[\overline{X}_n - \overline{Y}_n - u_\alpha\sigma;\ \overline{X}_n - \overline{Y}_n + u_\alpha\sigma]$, $\alpha = \dfrac{1+q}{2}$.

ПРОВЕРКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

3. Пусть $\{X_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ и $\{Y_m,\ m = 1, \ldots, n\}$ — независимые выборки, порожденные СВ $X \sim \mathcal{N}(\theta_1;\sigma_1^2)$ и $Y \sim \mathcal{N}(\theta_2;\sigma_2^2)$, σ_1 и σ_2 — известны. На уровне значимости p проверить гипотезу $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ против $H_1 : \theta_1 \neq \theta_2$.

Указание. Смотри задачу 9 из раздела 9.3.

Ответ. H_0 принимается, если $|\overline{x}_n - \overline{y}_n| \leqslant u_\alpha \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}$, u_α — квантиль

Гипотезы

Вероятность рождения мальчика 52%, из 5000 людей доживших до 18 лет: 2500 -- мальчики, 1500 -- девочки. Можно ли на основании этих данных считать, что смертность среди мужчин выше?

1 номера

1.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathcal{R}(-1;1)$, $n = 600$. Используя асимптотические свойства выборочного второго начального момента, определите вероятность того, что он будет лежать в пределах от 190 до 230.

① $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $R(-1;1)$ $n = 600$

используя ассимптотические св-ва 2-го начального момента, опр. вероятность того, что он $\in [190; 230]$

$$R(-1;1) \Rightarrow M\xi_i = \frac{a+b}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$D\xi_i = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{1}{3}$$

найдем $M\xi_i^2$ и $M\xi_i^4$

для формулы:

$$D\xi_i^2 = M\xi_i^4 - (M\xi_i^2)^2 \quad (1)$$

$$M\xi_i^2 = D\xi_i + (M\xi_i)^2 = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad // \; Dx = Mx^2 - (Mx)^2$$

$$M\xi_i^4 = \int_{-1}^{1} x^4 p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^4 \frac{1}{1-(-1)}\,dx = 2 \cdot 1/2 \int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

подставим полученные значения в (1)

$$D\xi_i^2 = 1/5 - 1/9 = 4/45$$

$$MZ = n \cdot M\xi_i^2 = 600 \cdot 1/3 = 200 = m$$

$$DZ = n \cdot D\xi_i^2 = 600 \cdot 4/45 = 160/3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{DZ} = \sqrt{\frac{160}{3}}$$

$$P(190 \leq x \leq 230) = \Phi_0\left(\frac{230-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{190-m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{230-200}{\sqrt{\frac{160}{3}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{190-200}{\sqrt{\frac{160}{3}}}\right) = \Phi_0(4{,}1) + \Phi(1{,}37) =$$

$= 0{,}5 + 0{,}4146 = \underline{0{,}9146}$ Ответ

Пусть $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - выборка, соотв. равномерному распр. $R(-1;1)$, $n=600$. Используя асимптотические св-ва ~~вероя~~ выборочного второго начального момента, опр. вероятность того, что он будет лежать в пределах от 190 до 230.

$P\{190 \le \bar{\nu}_2 \le 230\}$ - ? $p(x) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

$$\nu_2 = M[\xi_k^2] = \int_{-1}^{1} x^2 p(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{2\times 3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2x^3}{2\times 3}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}$$

Т.к. $n=600 \gg 1$, то $\bar{\nu}_2(600) \sim N\left(\nu_2, \frac{\nu_4 - \nu_2^2}{n}\right)$ (Паньков стр. 23)

$$\Rightarrow \bar{\nu}_2(600) \sim N\left(\frac{1}{3}, \frac{\nu_4 - \frac{1}{9}}{600}\right)$$

$$\nu_4 = M[\xi_k^4] = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x^5}{5\times 2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\cancel{2}x^5}{5\times \cancel{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{5}$$

$$\bar{\nu}_2(600) \sim N\left(\frac{1}{3}, \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{9}}{600}\right) = N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6750}\right) \text{ — } \sigma^2$$

$$P\{\overset{a}{190} \le \bar{\nu}_2 \le \overset{b}{230}\} \approx \Phi\left(\frac{b-\nu_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\nu_2}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{230 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{6750}}}\right) - \Phi\left(\frac{190 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{6750}}}\right) \approx \overset{0,5}{\Phi(18869)} - \overset{0,5}{\Phi(15582,7)} =$$

$$\cancel{= 0,4974 - 0,4898 = 0,0076}$$

2.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая нормальному распределению $\mathcal{N}(0; 4)$, $n = 500$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $760 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant 800$.

$$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad N(0;4) \quad n = 500$$
используем ЦПТ
$$P\left(760 \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leq 800\right) - ?$$

$$M[|\xi|^2] = M[\xi^2] = D[\xi] + (M[\xi])^2$$

$$D[\xi] = 4 \quad (M[\xi])^2 = 0^2 = 0 \quad // \text{ из условия } N(0;4)$$

$$\Downarrow$$

$$M[|\xi_k|^2] = 4$$

$$M[|\xi_k|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi_k| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} \exp\left[-\frac{\xi_k^2}{2 \cdot 4}\right] d\xi = 2\int_{0}^{+\infty} \xi_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2} \exp\left[-\frac{\xi_k^2}{8}\right] d\xi_k =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\xi_k^2}{8}\right] d\xi_k = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} -d\exp\left[-\frac{\xi}{8}\right] =$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{8}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

$$D[|\xi_k|] = M[|\xi_k^2|] - (M[|\xi|])^2 = 4 - \frac{16}{2\pi}$$

Из этого следует:

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \sim N\left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot 500;\ \left(4 - \frac{16}{2\pi}\right) \cdot 500\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \sim N(797{,}88;\ 726{,}76)$$

$$P\left(760 \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leq 800\right) = \Phi_0\left(\frac{800 - 797{,}88}{\sqrt{726{,}76}}\right) -$$

$$- \Phi_0\left(\frac{760 - 797{,}88}{\sqrt{726{,}76}}\right) = \Phi_0(0{,}07) + \Phi_0(1{,}40) =$$

$$= 0{,}0279 + 0{,}4192 = 0{,}4471$$ Ответ

3.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(10; 0,4)$, $n = 100$. Используя асимптотические свойства выборочного второго начального момента, определите вероятность того, что он будет лежать в пределах от 18 до 19.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соотв. биномиальному распр. $Bi(10, 0{,}4)$, $n=100$. Используя асимпт. св-ва выборочного второго момента, опр. вер-ть того, что он будет лежать в пределах от 18 до 19.

$P\{18 \le \bar{\nu}_2(100) \le 19\}$ -? $\qquad Bi(\overset{n}{10}, \overset{p}{0.4})$, $m=100$

$\nu_2 = M[\xi^2] = np(q - np) = 10 \times 0{,}4(1 - 0{,}4 - 10 \times 0{,}4) = 18{,}4$

$$\nu_k = \underbrace{\sum_x x^k p(x)}_{\text{википедия, вычисление моментов}} = \sum_x x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{m} x^k \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu_4 = \sum_{x=1}^{100} x^4 \frac{10!}{(10-x)!\,x!} 0{,}4^x\, 0{,}6^{10-x} = 510{,}3 \text{ (вольфрам)}$$

Т.к. $m = 100 >> 1$, то $\bar{\nu}_2(100) \sim N\left(\nu_2, \frac{\nu_4 - \nu_2^2}{n}\right)$ (Панков стр. 28)

$$\Rightarrow \bar{\nu}_2(100) \sim N\left(18.4, \frac{510.3 - 18.4^2}{100}\right) = N\left(18.4, \underset{\sigma^2}{1{,}72}\right)$$

$$P\{\overset{a}{18} \le \bar{\nu}_2(100) \le \overset{b}{19}\} \cong \Phi\left(\frac{b - \nu_2}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \nu_2}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{19 - 18{,}4}{\sqrt{1{,}72}}\right) - \Phi\left(\frac{18 - 18.4}{\sqrt{1{,}72}}\right) = \Phi(0{,}46) - \Phi(-0{,}3) =$$

$$= \Phi(0{,}46) + \Phi(0{,}3) = 0{,}1772 + 0{,}1179 = \underline{0{,}2951}$$

$M = (q+pe^t)^n$ – порождающая ф-ия момент.

$\nu_4 = M^{IV}$

$M' = np(pe^t+q)^{n-1}e^t$

$M'' = (n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$M''' = (n-2)(n-1)np^3e^{3t}(pe^t+q)^{n-3} + 3(n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} +$

$+ npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$M^{IV} = (n-3)(n-2)(n-1)np^4e^{4t}(pe^t+q)^{n-4} + 6(n-2)(n-1)np^3\cdot$

$\cdot e^{3t}(pe^t+q)^{n-3} + 7(n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$t=0$

$\nu_4 = M^{IV} = (n-3)(n-2)(n-1)np^4 + 6(n-2)(n-1)np^3 +$

$+ 7(n-1)np^2 + np = (10-3)(10-2)(10-1)10\,0{,}4^4 +$

$+ 6(10-2)(10-1)10\,0{,}4^3 + 7(10-1)10\,0{,}4^2 + 10\times0{,}4$

$= \underline{\underline{510{,}3}}$

$\Psi = (q + pe^{it})^n$ - хар-ая ф-ция

$M' = inpe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M'' = (n-1)np^2(-e^{2it})(q+pe^{it})^{n-2} - npe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M''' = -i(n-2)(n-1)np^3e^{3it}(q+pe^{it})^{n-3} - 3i(n-1)np^2e^{2it} \times$

$\times (q+pe^{it})^{n-2} - inpe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M^{IV} = (n-3)(n-2)(n-1)np^4e^{4it}(q+pe^{it})^{n-4} + 6(n-2)(n-1) \times$

$\times np^3e^{3it}(q+pe^{it})^{n-3} + 7(n-1)np^2e^{2it}(q+pe^{it})^{n-2} +$

$+ npe^{it}(q+pe^{it})^{n-1} = \nu_4$

$t = 0$

$\nu_4 = (10-3)(10-2)(10-1)10 \times 0{,}4^4 + 6(10-2)(10-1) \times$

$\times 10 \times 0{,}4^3 + 7(10-1)10 \times 0{,}4^2 + 10 \times 0{,}4 = 510{,}3$

4.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathcal{R}(-\theta;\theta)$, $n = 1000$, $\mathbf{D}\xi_1 = 3$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что выборочный третий начальный момент меньше $1/5$.

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\quad R(-\Theta; \Theta)$ $\quad n = 1000$ $\quad D\xi_1 = 3$

Найдем $P\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^3}_{\nu_2} < 1/5\Big)$

$M\xi_k^3 = \int_{-\Theta}^{\Theta} \frac{\xi^3}{2\Theta}\, d\xi = \frac{x^4}{8\Theta}\Big|_{-\Theta}^{\Theta} = 0$

найдем Θ: $\quad D\xi_1 = \frac{(\Theta+\Theta)^2}{12} = 3 \qquad 4\Theta^2 = 3\cdot 12 \Rightarrow \Theta = 3$

$M\xi_k^6 = \int_{-3}^{3} \frac{\xi^6}{2\Theta}\, d\xi = \frac{\Theta^7}{14\Theta} + \frac{\Theta^7}{14\Theta} = \frac{\Theta^6}{7} = \frac{729}{7} = 104{,}14$

$D\xi_k^3 = M\xi_k^6 - (M\xi_k^3)^2 = 104.14 - 0 = 104.14$

Получили:

$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \sim N(n\cdot 0, n\cdot 104.14) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \sim N(0, 104.14)$

$P(\nu_3 < 1/5) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{1/5 - 0}{\sqrt{104.14}}\right) = \frac{1}{2} + 0{,}0039 = \underline{0{,}5039}$ Ответ

да, тут $\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\sqrt{1000}}{5*\sqrt{104}}\right) = \frac{1}{2} + 0{,}23 = 0{,}73$

5.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathcal{R}(0;1)$, $n = 300$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $65 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \leqslant 80$.

$\boxed{\text{Пусть } Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad R(0;1) \quad n = 300. \text{ Используя ЦПТ, определить } 65 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \leqslant 80}$

$$R(0;1) \Rightarrow M\xi_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} \qquad D\xi_1 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$M\xi_1^3 = \int_0^1 \xi_1^3 \cdot \frac{1}{1-0}\, d\xi = \frac{\xi^4}{4}\Big|_0^1 = 1/4$$

$$M\xi_1^6 = \int_0^1 \xi_1^6 \cdot \frac{1}{1-0}\, d\xi = 1/7$$

$$\Downarrow$$

$$D\xi_1^3 = M\xi_1^6 - (M\xi_1^3)^2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{16} = \frac{9}{112}$$

Следовательно $\sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \sim N\left(300 \cdot 1/4;\ 300 \cdot \frac{9}{112}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \sim N\left(75;\ 24\frac{3}{28}\right)$$

$$\underline{P}\left(65 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \leqslant 80\right) = \Phi_0\left(\frac{80-75}{\sqrt{24\frac{3}{28}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{65-75}{\sqrt{24\frac{3}{28}}}\right) =$$

$$= \Phi_0(1{,}018) + \Phi_0(2{,}03) = 0{,}3437 + 0{,}4788 = \underline{0{,}82} \text{ Ответ}$$

Богданова А.
М80-304Б-18

#1 Пусть $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – выборка, соответствующая равномерному распределению $R(0;1)$, $n = 300$.
Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $65 \le \sum_{k=1}^{n} \xi_k^3 \le 80$.

$\xi \sim R(0,1) \Rightarrow f_{\xi}(x) = 1, \quad x \in (0,1)$

$M\xi^3 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad M\xi^6 = \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}$

$D\xi^3 = M\xi^6 - (M\xi^3)^2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{16} = \frac{9}{112} \quad n = 300$

Тогда можно считать, что $\sum_{k=1}^{300} \xi_k^3 \sim N\left(a = \frac{300}{4}, \sigma^2 = \frac{300 \cdot 9}{112}\right) = N\left(a = 75, \sigma = \frac{15\sqrt{21}}{14}\right)$

$P\left\{65 \le \sum_{k=1}^{300} \xi_k^3 \le 80\right\} = P\left\{\frac{65-75}{15\sqrt{21}/14} \le \frac{\sum_{k=1}^{300} - a}{\sigma} \le \frac{80-75}{15\sqrt{21}/14}\right\} = \cancel{P\left\{-2{,}04 \le \frac{\sum_{k=1}^{300}\xi_k^3}{\sigma} \le 2{,}04\right\}} =$

$= \cancel{2\Phi(2{,}04) = 2 \cdot 0{,}4793 = 0{,}9586}$

$= P\left\{-2{,}04 \le \frac{\sum_{k=1}^{300} \xi_k^3}{\sigma} \le 1{,}02\right\} = \Phi(2{,}04) + \Phi(1{,}02) =$

$= 0{,}4793 + 0{,}3461 = 0{,}8254$

6.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – выборка, соответствующая нормальному распределению $\mathcal{N}(2;1)$, $n = 300$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2 \geqslant 1400$.

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\quad N(2;1)$ $\quad n = 300$

используя ЦПТ опр. вероятность того, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^2 \geqslant 1400$

$$M\xi_k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-2)^2}{2}\right] dx = 5$$

$$M\xi_k^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-2)^2}{2}\right] dx = 43$$

$$D\xi_k^2 = M\xi_k^4 - (M\xi_k^2)^2 = 43 - 25 = 18$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \sim N(300 \cdot 5;\ 18 \cdot 300)$$

$$\underline{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \geqslant 1400\right) = 1 - \underline{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 < 1400\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{1400-1500}{\sqrt{18 \cdot 300}}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{100}{\sqrt{18 \cdot 300}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0(1{,}36) = \frac{1}{2} + 0{,}413 = 0{,}913$$

Ответ

7.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая экспоненциальному распределению $\mathcal{E}(1)$, $n = 400$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $180 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\xi_k} \leqslant 210$.

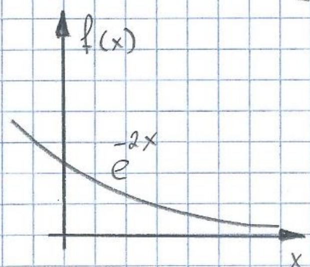
$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\quad \mathcal{E}(1)$ $\quad n = 400$

используя ЦПТ, определить вероятности

$$180 \leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{-\xi_k} \leqslant 210$$

$$M[e^{-\xi_k}] = \int_0^{+\infty} e^{-\xi_k} e^{-\xi_k}\, d\xi_k = \int_0^{+\infty} e^{-2\xi_k}\, d\xi_k = -\frac{1}{2} e^{-2\xi}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2} \overset{0}{\cancel{e^{-2\cdot\infty}}} + \frac{1}{2} \overset{1}{e^{-2\cdot 0}} = \frac{1}{2}$$



$$M[e^{-2\xi_k}] = \int_0^{+\infty} e^{-2\xi_k} e^{-\xi_k}\, d\xi_k = \int_0^{+\infty} e^{-3\xi_k}\, d\xi_k = \frac{1}{3}$$

$$D[e^{-\xi_k}] = M[e^{-2\xi_k}] - (M[e^{-\xi_k}])^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$$

$$P\left(180 \leqslant \sum_{k=1}^{n} e^{-\xi_k} \leqslant 210\right) = \qquad \sum_{k=1}^{n} e^{-\xi_k} \sim N(400 \cdot 1/2;\ 400 \cdot 1/12)$$

$$= \Phi_0\left(\frac{210-200}{\sqrt{400 \cdot \frac{1}{12}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{180-200}{\sqrt{400 \cdot \frac{1}{12}}}\right) = \Phi_0(1{,}73) + \Phi_0(3{,}46) =$$

$= 0{,}4581 + 0{,}5 = \underline{0{,}95}$ Ответ

8.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathcal{R}(0;1)$, $n = 300$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^4 \geqslant 59$.

$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad R(0;1) \quad n = 300$

используя ЦПТ, опр. вероятность того, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k^4 \geqslant 59$$

$$M\xi_k^4 = \int_0^1 \xi_k^4 \frac{1}{1-0} d\xi_k = \int_0^1 \xi_k^4 d\xi_k = \frac{1}{5}$$

$$M\xi_k^8 = \int_0^1 \xi_k^8 d\xi_k = \frac{1}{9}$$

$$D\xi_k^4 = M\xi_k^8 - (M\xi_k^4)^2 = 1/9 - 1/25 = \frac{16}{225}$$

$$\Downarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^4 \sim N(300 \cdot 1/5;\ 300 \cdot 16/225)$$

$$\sum \xi_k^4 \sim N\left(60, \frac{64}{3}\right)$$

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^4 \geqslant 59\right) = 1 - P\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^4 < 59\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{59-60}{\sqrt{\frac{64}{3}}}\right)\right) \ominus$$

$$\ominus \ 1/2 + \Phi_0(0{,}22) = 0{,}5 + 0{,}087 = \underline{0{,}587} \text{ Ответ}$$

9.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая экспоненциальному распределению $\mathcal{E}(2)$, $n = 2000$. Используя асимптотические свойства выборочного второго начального момента, определите вероятность того, что он будет лежать в пределах от 1000 до 1100.

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\quad \mathcal{E}(2) \quad n = 2000$

$P(1000 \le \tilde{\nu}_2 \le 1100)$ - ?

$\nu_2 = M(x^2) = Dx + (Mx)^2 = \frac{1}{2}$

$\nu_4 = M(x^4) = 2\int_0^{+\infty} x^4 e^{-2x}\,dx = \frac{3}{2}$ (по частям)

Т.к. $n = 2000 >> 1$, то по асимп. св-вам

$$\tilde{\nu}_2 \sim N\left(\nu_2, \frac{\nu_4 - \nu_2^2}{n}\right) = N\Big(\underbrace{\frac{1}{2}}_{m}, \underbrace{\frac{5}{8000}}_{=\sigma^2}\Big)$$

$$P(\underbrace{1000}_{a} \le \tilde{\nu}_2 \le \underbrace{1100}_{b}) = \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi_0\Big(\overset{43980}{\overset{\parallel}{\frac{1100-0,5}{\frac{1}{40}}}}\Big) - \Phi_0\Big(\overset{39980}{\overset{\parallel}{\frac{1000-0,5}{\frac{1}{40}}}}\Big) =$$

$= 0,5 - 0,5 = 0$ $\quad$ по таблице любое число ≥ 5 значение будет 0,5

№1

Рогова Екатерина,
М8О-309Б-18.

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. $\xi_i \sim \mathcal{E}(2)$, $n = 2000$.

$\nu_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2$ – выборочный второй начальный момент

Найти $P\left(1000 \le \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2}_{\overline{\nu}_2(n)} \le 1100\right)$.

Решение: $M\xi_i = \lambda^{-1} = \frac{1}{2}$. $D\xi_i = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$

$M\xi_i^2 = D\xi_i + M\xi_i^2 = \frac{1}{2}$

$\nu^4 = M\xi_i^4 = 2\int_0^\infty x^4 e^{-2x} dx = \frac{1}{16}\int_0^\infty y^4 e^{-y} dy =$

$\overline{\nu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$

$= \frac{1}{16}\Gamma(5) = \frac{4!}{16} = \frac{3}{2}$.

$\sqrt{n}\left(\overline{\nu}_n(n) - \nu_r\right) \xrightarrow{d} \xi \sim \mathcal{N}(0, \nu_{2r} - \nu_r^2)$.

Аппроксимируем $\xi = \sqrt{n}\left(\overline{\nu}_2(n) - \overset{= 1/2}{\nu_2}\right) \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{\nu_4 - \nu_2^2}_{\frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}})$

$P\left(1000 \le \overline{\nu}_2(n) \le 1100\right) =$

$= P\left(\left(1000 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \le \left(\overline{\nu}_2(n) - \frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \le \left(1100 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}\right) =$

$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 2}{\sqrt{5}}\left(1100 - \frac{1}{2}\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 2}{\sqrt{5}}\left(1000 - \frac{1}{2}\right)\right) =$

$= \Phi\left(\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}}\left(1100 - \frac{1}{2}\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}}\left(1000 - \frac{1}{2}\right)\right) =$

$= \Phi(43980) - \Phi(39980) \approx 0$.

Ответ: $P\left(1000 \le \overline{\nu}_2(n) \le 1100\right) \approx 0$.

10.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathcal{R}(-\theta; \theta)$, $n = 1000$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$. Используя центральную предельную теорему, определите вероятность того, что $850 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant 900$.

$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\quad R(-\Theta; \Theta)$ $\quad n = 1000$ $\quad D\xi_1 = 1$

используя ЦПТ, вероятность $850 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant 900$

Найдем Θ.

Знаем, что $D\xi_1 = \dfrac{(\Theta + \Theta)^2}{12} = 1$

$$(2\Theta)^2 = 12 \Rightarrow \Theta^2 = 3 \Rightarrow \Theta = \sqrt{3}$$

$$M[|\xi_k|] = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\xi_k| \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} d\xi_k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} |\xi_k| d\xi_k =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \xi_k d\xi_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\xi_k^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M[|\xi_k|^2] = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \xi_k^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} d\xi_k = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} = 1$$

$$D[|\xi_k|] = M[\xi^2] - (M[\xi])^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k| \sim N\left(n\frac{\sqrt{3}}{2}; 1/4 \cdot n\right)$

$$\sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \sim N(500\sqrt{3}; 250)$$

$$P\left(850 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqslant 900\right) = \Phi_0\left(\frac{900 - 500\sqrt{3}}{\sqrt{250}}\right) + \Phi_0\left(\frac{850 - 500\sqrt{3}}{\sqrt{250}}\right) =$$

$$= \Phi_0(2{,}14) + \Phi_0(1{,}01) = 0{,}4838 + 0{,}3437 = 0{,}8275$$ Ответ

11.

Пусть $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - выборка, соответствующая биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(10; 0,3)$, $n = 100$. Используя асимптотические свойства выборочного второго начального момента, определите вероятность того, что он будет лежать в пределах от 10 до 12.

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $Bi(10, 0.3)$ $n = 100$
асимптотические свойства выборочного нач. момента. Вероятность: в пределах от 10 до 12

1) Найдем $\nu_2 = M\xi^2$

Возьмем хар. функцию распределения $Bi(10, 0.3)$

$$g(\lambda) = (q + pe^{i\lambda})^n$$

$$\nu_k \xi = \frac{g_\xi^{(k)}(0)}{i^k}$$

$$g''(\lambda) = (n-1)np^2(-e^{2i\lambda})(q+pe^{i\lambda})^{n-2} - npe^{i\lambda}(q+pe^{i\lambda})^{n-1}$$

$$g''(\lambda)\big|_{\lambda=0} = (n-1)np^2(-1)(q+p)^{n-2} - np(q+p)^{n-1} =$$

$$= -(10-1)10 \cdot 0{,}3^2 - 10 \cdot 0{,}3 = -11{,}1$$

$$\Rightarrow \nu_2 \xi = \frac{-11{,}1}{i^2} = 11{,}1$$

2) Аналогично найдем ν_4

$$\nu_4 = \frac{g_\xi^4(0)}{i^4} = 217{,}64$$

Следовательно, согласно асимптотическим св-вам

$$\bar{\nu}_2 \sim N\left(\nu_2, \frac{\nu_4 - \nu_2^2}{n}\right) \Rightarrow \bar{\nu}_2 \sim N\left(11{,}1; \frac{93{,}954}{100}\right)$$

3) Найдем вероятность

$$P(10 \leq \bar{\nu}_2 \leq 12) = \Phi_0\left(\frac{(12-11{,}1)\sqrt{100}}{\sqrt{93{,}954}}\right) - \Phi_0\left(\frac{(10-11{,}1)\sqrt{100}}{\sqrt{93{,}954}}\right) =$$

$$= \Phi_0(0{,}92) + \Phi_0(1{,}13) = 0{,}3212 + 0{,}3707 = 0{,}69$$ Ответ

$M = (q+pe^t)^n$ – порождающая ф-ия момент.

$\nu_4 = M^{IV}$

$M' = np(pe^t+q)^{n-1}e^t$

$M'' = (n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$M''' = (n-2)(n-1)np^3e^{3t}(pe^t+q)^{n-3} + 3(n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} +$

$+ npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$M^{IV} = (n-3)(n-2)(n-1)np^4e^{4t}(pe^t+q)^{n-4} + 6(n-2)(n-1)np^3\cdot$

$\cdot e^{3t}(pe^t+q)^{n-3} + 7(n-1)np^2e^{2t}(pe^t+q)^{n-2} + npe^t(pe^t+q)^{n-1}$

$t=0$

$\psi = (q+pe^{it})^n$ – хар-ая ф-ция

$M' = inpe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M'' = (n-1)np^2(-e^{2it})(q+pe^{it})^{n-2} - npe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M''' = -i(n-2)(n-1)np^3e^{3it}(q+pe^{it})^{n-3} - 3i(n-1)np^2e^{2it}\cdot$

$\cdot(q+pe^{it})^{n-2} - inpe^{it}(q+pe^{it})^{n-1}$

$M^{IV} = (n-3)(n-2)(n-1)np^4e^{4it}(q+pe^{it})^{n-4} + 6(n-2)(n-1)\cdot$

$\times np^3e^{3it}(q+pe^{it})^{n-3} + 7(n-1)np^2e^{2it}(q+pe^{it})^{n-2} +$

$+ npe^{it}(q+pe^{it})^{n-1} = \nu_4$

$t=0$

2 номера

Типаж 1

1.

Получено наблюдение $Y = X + \varepsilon$, случайной величины $X \sim \mathcal{N}(2,4)$. Случайные величины X, ε образуют гауссовский случайный вектор, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. Коэффициент корреляции случайных величин X и ε равен $1/2$. Найдите с.к.-оптимальную оценку X по наблюдениям Y.

$Y = X + \varepsilon$ $\quad X \sim N(2,4)$

$\varepsilon \sim N(0,1)$

$r_{X\varepsilon} = \frac{1}{2}$

С.к.-оптимальная оценка X по Y?

$r_{X\varepsilon} = \dfrac{cov(X,\varepsilon)}{\sigma_X \sigma_\varepsilon} = \dfrac{1}{2}$ $\quad \sigma_X = \sqrt{DX} = \sqrt{4} = 2$, $\quad \sigma_\varepsilon = \sqrt{D\varepsilon} = 1$ $\quad cov(X,\varepsilon) = r_{X\varepsilon}\sigma_X\sigma_\varepsilon$, $\quad cov(X,\varepsilon) = 1.$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right)$$

$DY = D[X+\varepsilon] = DX + D\varepsilon + 2cov(X,\varepsilon) = 4 + 1 + 2 = 7$

$cov(X,Y) = cov(X, X+\varepsilon) = cov(X,X) + cov(X,\varepsilon) = DX + 1 = 5$

$\hat{X}(Y) = M[X|Y] = M_X + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - M_Y) =$

$= 2 + 5 \cdot \frac{1}{7}(Y-2) = 2 + \frac{5}{7}Y - \frac{10}{7} = \frac{4+5Y}{7}$

2.

Получено наблюдение $Y = X + \varepsilon$, случайной величины $X \sim \mathcal{N}(-2,1)$. Случайные величины X, ε образуют гауссовский случайный вектор, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,9)$. Коэффициент корреляции случайных величин X и ε равен $1/2$. Найдите с.к.-оптимальную оценку X по наблюдениям Y.

Наблюдение: $Y = X + \varepsilon$, $X \sim N(-2, 1)$, $\varepsilon \sim N(0, 9)$

коэф. корр. между x и $\varepsilon = \frac{1}{2}$. ск. оптим. оценка X по набл. Y –? ($\hat{x}$ –?)

$$r_{x\varepsilon} = \frac{cov(x, \varepsilon)}{\sigma_x \, \sigma_\varepsilon} = \frac{1}{2} \quad \Bigg| \quad X \sim N(-2, 1), \; D_x = \sigma_x^2, \; D_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2, \; \varepsilon \sim N(0, 9) \quad \Bigg\| \quad \frac{cov(x, \varepsilon)}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2}, \quad cov(x, \varepsilon) = \frac{3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + \varepsilon \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x}_{\sim N} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}}_{\sim N} \sim N\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \overset{K_{xy}}{\frac{5}{2}} \\ \frac{5}{2} & \underset{K_y}{13} \end{pmatrix} \right)$$

K:
- $D_x = 1$, $(X \sim N(-2, 1))$
- $D_y = D[x + \varepsilon] = D_x + D_\varepsilon + 2cov(x, \varepsilon) = 1 + 9 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 13$

$cov(x, y) = cov(x, x + \varepsilon) = cov(x, x) + cov(x, \varepsilon) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

$$\hat{x}(y) = M[x | y] = M_x + K_{xy} K_y^{-1} (y - M_y) =$$

$$= -2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{13} (y - (-2)) = -2 + \frac{5}{2 \cdot 13} (y + 2) = \boxed{\frac{5y - 42}{26} = \hat{x}(y)}$$

3.

Получено наблюдение $Y = X + \varepsilon$, случайной величины $X \sim \mathcal{N}(1, 1)$. Случайные величины X, ε образуют гауссовский случайный вектор, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 4)$. Коэффициент корреляции случайных величин X и ε равен $-1/3$. Найдите с.к.-оптимальную оценку X по наблюдениям Y.

$Y = X + \varepsilon \qquad X \sim N(1,1)$

$\varepsilon \sim N(0,4)$

$r_{x\varepsilon} = -\frac{1}{3}$

С.к оптимальная оценка X по Y?

$r_{X\varepsilon} = \dfrac{cov(X,\varepsilon)}{\sigma_x \sigma_\varepsilon} = -\dfrac{1}{3}$; $\sigma_x = 1$, $\sigma_\varepsilon = 2$; $cov(X,\varepsilon) = r_{x\varepsilon}\sigma_x\sigma_\varepsilon$

$cov(X,\varepsilon) = -\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 = -$

$cov(X,\varepsilon) = -\frac{2}{3}$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X+\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}\right)$$

$DX = 1$

$DY = D[X+\varepsilon] = DX + D\varepsilon + 2cov(X,\varepsilon) = 1 + 4 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$

$cov(X,Y) = cov(X, X+\varepsilon) = cov(X,X) + cov(X,\varepsilon) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$\hat{X}(Y) = M[X|Y] = MX + K_{XY}K_Y^{-1}(Y - MY) =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{11}(Y-1) = 1 + \frac{Y}{11} - \frac{1}{11} = \frac{10+Y}{11}$$

Типаж 2

4.

Получены два наблюдения $Y_k = X + \varepsilon_k$, $k = 1, 2$, случайной величины $X \sim \mathcal{N}(-1, 16)$.
Случайные величины $X, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ независимы, $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Найдите с.к.-оптимальную оценку X по наблюдениям Y_1, Y_2.

Наблюдения: $y_k = X + \varepsilon_k$, $k=1,2$. $X \sim N(-1, 16)$, $\varepsilon_k \sim N(0,1)$

X и ε_k – независимы $\Rightarrow cov(x, \varepsilon_k) = 0$ всегда?

С.к. оптим. оценка X по наблюд. y_1, y_2 – ? ($\hat{x}$ – ?)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X+\varepsilon_1 \\ X+\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 17 & 16 \\ 16 & 16 & 17 \end{pmatrix} \right)$$

K_{xy}, K_y

Главная диагональ матрицы K.

K: • $\mathcal{D}x = 16$ $\quad (X \sim N(-1, \overset{\mathcal{D}x = \sigma_x^2}{16}))$

• $\mathcal{D}y_1 = \mathcal{D}[X + \varepsilon_1] = \mathcal{D}x + \mathcal{D}\varepsilon_1 = 16 + 1 = 17$

$\varepsilon_1 \sim N(0,1)$, $\mathcal{D}\varepsilon_1 = \sigma_{\varepsilon_1}^2$

• $\mathcal{D}y_2 = \mathcal{D}[X + \varepsilon_2] = \mathcal{D}x + \mathcal{D}\varepsilon_2 = 16 + 1 = 17$.

• $cov(x, y_1) = cov(x, x+\varepsilon_1) = cov(x,x) + \cancel{cov(x, \varepsilon_1)} = cov(x,x) = \mathcal{D}x = 16$.

0, x и ε_k – независ.

• $cov(x, y_2) = cov(x, x+\varepsilon_2) = cov(x,x) + \cancel{cov(x, \varepsilon_2)} = cov(x,x) = \mathcal{D}x = 16$.

• $cov(y_1, y_2) = cov(x+\varepsilon_1, x+\varepsilon_2) = cov(x,x) + \cancel{cov(x, \varepsilon_2)} + \cancel{cov(x, \varepsilon_1)} + \cancel{cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} =$

$= \mathcal{D}x = 16$.

$$\hat{x}(y) = M[x/y] \overset{\text{теор. о норм. корреляции}}{=} M_x + K_{xy} K_y^{-1}(y - M_y) =$$

$$= \underbrace{-1}_{X \sim N(-1,16)} + (16 \;\; 16) \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & 16 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -16 & 17 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} = -1 + \underbrace{(16 \;\; 16) \cdot \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ -16 & 17 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{33}(16 \;\; 16)} \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 + \frac{1}{33}(16 \;\; 16) \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 + 1 \end{pmatrix} = -1 + \frac{1}{33}\left(16(y_1 + y_2) + 32\right) =$$

$$= \boxed{\frac{16(y_1 + y_2) - 1}{33} = \hat{x}(y)}.$$

5.

Получены два наблюдения $Y_k = X + \varepsilon_k$, $k = 1,2$, случайной величины $X \sim \mathcal{N}(-3,9)$. Случайные величины $X, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ независимы, $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0,4)$. Найдите с.к.-оптимальную оценку X по наблюдениям Y_1, Y_2.

Наблюдения: $y_k = X + \varepsilon_k$, $k = 1, 2$. $X \sim N(-3, 9)$, $\varepsilon_k \sim N(0, 4)$.

X и ε_k – независимые.

ск. оптим оценка X по наблюд. $y_1 y_2$ – ? ($\hat{x}$ – ?)

$$\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + \varepsilon_1 \\ x + \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 13 & 9 \\ 9 & 9 & 13 \end{pmatrix} \right)$$

K_{xy}

K_y

K: • $D_x = 9$ $(X \sim N(-3, 9))$

• $D_{y_1} = D[x + \varepsilon_1] = Dx + D\varepsilon_1 = 9 + 4 = 13$

• $D_{y_2} = D[x + \varepsilon_2] = Dx + D\varepsilon_2 = 9 + 4 = 13$.

$cov(X, y_1) = cov(x, x + \varepsilon_1) = cov(x, x) + \underbrace{cov(x, \varepsilon_1)}_{0} = Dx = 9$

$cov(x, y_2) = cov(x, x + \varepsilon_2) = cov(x, x) + \underbrace{cov(x, \varepsilon_2)}_{0} = Dx = 9$

$cov(y_1, y_2) = cov(x + \varepsilon_1, x + \varepsilon_2) = cov(x, x) + \underbrace{cov(x, \varepsilon_1)}_{0} + \underbrace{cov(x, \varepsilon_2)}_{0} + \underbrace{cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}_{0} =$

$= Dx = 9$

$$\hat{x}(y) = M[x \mid y] = M_x + K_{xy} K_y^{-1} (y - M_y) =$$

$$= -3 + (9 \;\; 9) \underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{88}\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_1 - (-3) \\ y_2 - (-3) \end{pmatrix} = -3 + \frac{1}{88} \underbrace{(9 \;\; 9) \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 13 \end{pmatrix}}_{(36 \;\; 36)} \begin{pmatrix} y_1 + 3 \\ y_2 + 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 + \frac{1}{88} (36 \;\; 36) \begin{pmatrix} y_1 + 3 \\ y_2 + 3 \end{pmatrix} = -3 + \frac{1}{88} (36(y_1 + y_2) + 216) =$$

$$= \frac{36(y_1 + y_2) + 216 - 264}{88} = \frac{36(y_1 + y_2) - 48}{88} = \frac{9(y_1 + y_2) - 12}{22}$$

Типаж 3

6.

Случайные величины X, Y, Z образуют гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите с.к.-оптимальную оценку для Z по наблюдениям $X-Y$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

с.к оптимальная оценка для Z по $X-Y$?

$$M[Z \mid X-Y] = MZ + \frac{\operatorname{cov}(Z, X-Y)}{D[X-Y]}(X-Y-M[X-Y]) =$$

$$= MZ + \frac{\operatorname{cov}(Z,X) - \operatorname{cov}(Z,Y)}{DX + DY - 2\operatorname{cov}(X,Y)}(X-Y-M[X]+M[Y]) =$$

$$= 1 + \frac{0-1}{9+4-2\cdot 1}(X-Y-0-2) = 1 - \frac{1}{11}(X-Y-2) =$$

$$= \frac{13}{11} - \frac{X}{11} + \frac{Y}{11}$$

7.

Случайные величины X, Y, Z образуют гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите с.к.-оптимальную оценку для X по наблюдениям $Y+Z$.

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

С.К.-оптимальная оценка для X по $Y+Z$ -?

$$M[X|Y+Z] = MX + \frac{cov(X,Y+Z)}{D[Y+Z]}(Y+Z-M[Y+Z]) =$$

$$= MX + \frac{cov(X,Y)+cov(X,Z)}{D[Y]+D[Z]+2cov(Y,Z)}(Y+Z-M[Y]-M[Z]) =$$

$$= 0 + \frac{\cancelto{0}{1+(-1)}}{4+4+2\cdot 1}(Y+Z-(-2)-1) = 0$$

8.

Случайные величины X, Y, Z образуют гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите с.к.-оптимальную оценку для $2X+Y$ по наблюдениям Z.

$$\begin{array}{c} X \quad Y \quad Z \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

С.К. оптимальная оценка для $2X+Y$ по Z ?

$$M[2X+Y|Z] = M[2X+Y] + \frac{cov(2X+Y,Z)}{DZ}(Z-MZ) =$$

$$= 2MX + MY + \frac{2cov(X,Z)+cov(Y,Z)}{DZ}(Z-MZ) =$$

$$= 2\cdot 0 + (-2) + \frac{2\cdot(-1)+1}{4}(Z-1) = -2 - \frac{1}{4}Z + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{7}{4} - \frac{1}{4}Z$$

9.

Случайные величины X, Y, Z образуют гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите с.к.-оптимальную оценку для $X-Y$ по наблюдениям Z.

$M = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\quad Cov = \begin{pmatrix}9&1&-1\\1&4&0\\-1&0&9\end{pmatrix}$.

Найти с.к. - оптимальную оценку для $X-Y$ по наблюдениям Z.

$$M[X-Y|Z] = M[X-Y] + \frac{cov(X-Y,Z)}{D[Z]}\cdot(Z - M[Z]) =$$

$$= M[X] - M[Y] + \frac{M[(X-Y-M[X]+M[Y])(Z-M[Z])]}{D[Z]}\cdot$$

$$\cdot(Z-M[Z]) = 0 - 2 + \frac{cov(X,Z) - cov(Y,Z)}{cov(Z,Z)}\cdot(Z-3) =$$

$$= 0 - 2 + \frac{-1-0}{9}\cdot(Z-3) = -2 + \left(\frac{3-Z}{9}\right) = -\frac{5}{3} - \frac{Z}{9}$$

Типаж 4

cov(x или y, число) = 0
cov(число, число) = 0
10.

Случайные величины X, Y образуют гауссовский случайный вектор, $\mathbf{M}X = 1, \mathbf{M}Y = 3, \mathbf{D}X = 1, \mathbf{D}Y = 9$. Коэффициент корреляции X, Y равен $1/3$. Найдите ковариацию случайных величин $X - Y$ и $\mathbf{M}[X \mid Y]$.

$MX = 1 \qquad MY = 3$

$DX = 1 \qquad DY = 9$

$r_{xy} = \frac{1}{3}$

$\operatorname{cov}(X - Y,\ M(X|Y)) - ?$

$M[X|Y] = MX + K_{xy} K_y^{-1} (Y - MY)$

$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}; \quad \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3 = 1$

$M[X|Y] = 1 + 1 \cdot \frac{1}{9}(Y - 3) = 1 - \frac{3}{9} + \frac{Y}{9} = \frac{2}{3} + \frac{Y}{9}$

$\operatorname{cov}\left(X - Y, \frac{2}{3} + \frac{Y}{9}\right) = \cancel{\operatorname{cov}\left(X - Y, \frac{Y}{9}\right)} =$

$= \operatorname{cov}\left(X, \frac{2}{3}\right)^{=0} - \operatorname{cov}\left(Y, \frac{2}{3}\right)^{=0} + \operatorname{cov}\left(X, \frac{Y}{9}\right) -$

$- \operatorname{cov}\left(Y, \frac{Y}{9}\right) = \frac{1}{9}\operatorname{cov}(X,Y) - \frac{1}{9}\operatorname{cov}(Y,Y) =$

$= \frac{1}{9} \cdot 1 - \frac{1}{9} \cdot 9 = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$

11.

Случайные величины X, Y образуют гауссовский случайный вектор, $\mathbf{M}X = 0, \mathbf{M}Y = 3, \mathbf{D}X = 4, \mathbf{D}Y = 1$. Коэффициент корреляции X, Y равен $1/2$. Найдите ковариацию случайных величин $\mathbf{M}[Y \mid X]$ и $\mathbf{M}[X \mid Y]$.

Случайные величины X, Y образуют гауссовский случайный вектор,
$\mathbf{M}X = 0, \mathbf{M}Y = 3, \mathbf{D}X = 4, \mathbf{D}Y = 1$. Коэффициент корреляции X, Y равен $1/2$.
Найдите ковариацию случайных величин $\mathbf{M}[Y \mid X]$ и $\mathbf{M}[X \mid Y]$.

$$M[X/Y] = MX + K_{xy} K_y^{-1} (Y - MY]$$

$$M[Y/X] = MY + K_{yx} K_x^{-1} (X - MX)$$

$$r_{xy} = \frac{1}{2} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$cov(x,y) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(Y/x) = 3 + \frac{x}{4}$$

$$M(X/Y) = y - 3$$

$$cov\left(3 + \frac{x}{4}, y - 3\right) = cov\left(\frac{x}{4}, y\right) =$$

$$= \frac{1}{4} cov(x,y) = \frac{1}{4}$$

3 номера

1.

Пусть выборка $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ соответствует биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(5, \theta)$.
Является ли статистика $\frac{\xi_1+\xi_n}{5}$ эффективной оценкой параметра θ.
Является ли эта оценка несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (x_1, \dots, x_n) \sim Bi(5, \theta)$. Явл-ся ли $\hat{\theta}_1 = \frac{x_1 + x_n}{5}$ эфф-й оценкой пар-ра θ? Явл. ли несмещённой, состоятельной?

$P(k) = C_{5}^{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $p = \theta$ – вер. имеет кол-во успехов $= k$.

$L_n(Z_n, \theta) = p(k_1) \cdot \ldots \cdot p(k_n)$ (т.к. независимые) $=$

$= C_5^{k_1} p^{k_1} (1-p)^{5-k_1} \cdot \ldots \cdot C_5^{k_n} p^{k_n} (1-p)^{5-k_n} =$

$= \underbrace{C_5^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_5^{k_n}}_{const} \cdot p^{\sum_{i=1}^{n} k_i} (1-p)^{n5 - (\sum_{i=1}^{n} k_i)} = C_5^{k_1} \cdots C_5^{k_n} \cdot p^{n\bar{k}_n} (1-p)^{5n - n\bar{k}_n}$

$\bar{L}_n = \ln L_n(Z_n, \theta) = \ln(const) + n\bar{k}_n \ln\theta + n(5 - \bar{k}_n)\ln(1-\theta)$

$$\frac{\partial \bar{L}_n}{\partial \theta} = \frac{n\bar{k}_n}{\theta} + \frac{n(5-\bar{k}_n)(-1)}{1-\theta} = \frac{n\bar{k}_n}{\theta} - \frac{n(5-\bar{k}_n)}{1-\theta} = U(Z_n, \theta)$$

$$i(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L_n(x_1, \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = M\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln C_5^{k_1} + k\ln p + (5-k)\ln(1-p)\right) =$$

$$= M\left[\frac{k}{\theta} - \frac{5-k}{1-\theta}\right] = \frac{1}{\theta}\underbrace{Mk}_{=5\cdot\theta} - \frac{5}{1-\theta} + \frac{Mk}{1-\theta} =$$

$$= 5 - \frac{5}{1-\theta} + \frac{5\theta}{1-\theta} = \frac{5 - 5\theta - 5 + 5\theta}{1-\theta} = 0 \not> 0$$

$\Rightarrow$ не вып. усл. регулярности

Найдём ММП: $\frac{n\bar{k}_n(1-\theta) - \theta n(5-\bar{k}_n)}{\theta(1-\theta)} = 0$

$\Rightarrow n\bar{k}_n - n\bar{k}_n\theta - \theta n(5 - \bar{k}_n) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{-\bar{k}_n}{(-\bar{k}_n - 5 + \bar{k}_n)} = \frac{\bar{k}_n}{5} = \hat{\theta}_2$

$$D\hat{\theta}_2 = \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i\right)}{5^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Dk_i}{(5n)^2} = \frac{\cancel{n}\, n\theta(1-\theta)}{5^2 n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{25}$$

$$D\hat{\theta}_1 = \frac{Dx_1 + Dx_n}{25} = \frac{2n\theta(1-\theta)}{25} > \frac{\theta(1-\theta)}{25} \Rightarrow \text{не эффективная}$$

$$\frac{Mx_1 + Mx_n}{5} = \frac{2\theta}{5} \neq \theta \Rightarrow \text{смещённая}$$

$\hat{\theta}_1 \xrightarrow{P} \theta$ -? $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty}\left(P(|\hat{\theta}_1 - \theta| > \varepsilon)\right) = 0$

$\Uparrow$ $\qquad \lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_1 - \theta| \leq \varepsilon) = 1$

$\lim_{n \to \infty} M(|\hat{\theta} - \theta|^2) = 0$

несмещ.

$$\hat{\Theta}_n = \frac{\xi_1 + \xi_n}{5}$$

$$\Delta\hat{\Theta}_n = \frac{\xi_1 + \xi_n}{5} - \Theta$$ – ошибка оценки Θ

$$M[\Delta\hat{\Theta}_n] = M\left[\frac{\xi_1 + \xi_n}{5}\right] - M[\Theta] = \frac{1}{5}M[\xi_1] + \frac{1}{5}M[\xi_n] - M[\Theta] =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot 5\Theta + \frac{1}{5}\cdot 5\Theta - \Theta = \Theta$$ => не является несмещенной

=> не эффективная

2.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответствующей равномерному распределению $\mathcal{R}(\theta, 10)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ. Является ли эта оценка асимптотически несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\quad R(\Theta; 10)$

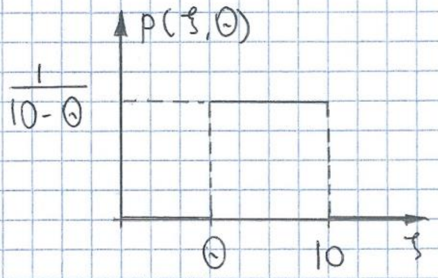
метод максимального правдоподобия

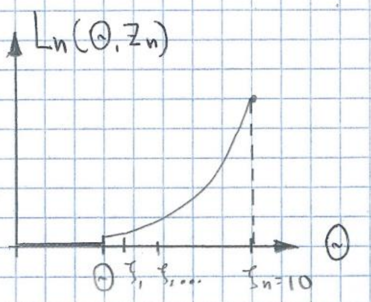
1) Найдем $p(\xi, \Theta)$

распределение непрерывное $\Rightarrow$ $p(\xi, \Theta)$ - плотность вероятности

$$p(\xi, \Theta) = \begin{cases} \frac{1}{10-\Theta}, & \xi \in [\Theta; 10) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

построим график





2) составим ф-ю правдоподобия (не логарифмическую)

$$L_n(Z_n, \Theta) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k, \Theta) \longrightarrow \max_{\Theta}$$

$$L_n(\Theta, Z_n) = \begin{cases} \frac{1}{(10-\Theta)^n}, & \forall \xi \in [\Theta; 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\hat{\Theta}^{МП} = \xi_n$

несмещенность $\quad M\hat{\Theta}_{МП} = M\xi_n = \frac{\Theta + 10}{2} \neq \Theta$

$\Rightarrow$ не явл. асимптотически несмещенной

оценки МП состоятельные

№3

Рогова Екатерина, М80-309Б-18

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. $\xi_i \sim R(\theta, 10)$.

Найти Θ. Является ли Θ асимптотически несмещенной и состоятельной.

Решение:

$$R(\theta,10) \sim P(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-\theta}, & x \in [0,10] \\ 0, & x \notin [0,10] \end{cases}$$

$$L(\Theta, Z_n) = \prod_i P(\xi_i) = \begin{cases} \frac{1}{(10-\theta)^n}, & \xi_i \in [\theta, 10]\ \forall i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \xrightarrow[\theta]{} \max$$

$$\Rightarrow \hat{\Theta} = \min_i \xi_i$$

$\xi_i \sim R(\theta; 10)$

$$\min \xi_i \sim F(x) = P(\min_i \xi_i < x) = 1 - P(\min_i \xi_i \geqslant x) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \geqslant x) = 1 - \left(\frac{10-x}{10-\theta}\right)^n \quad x \in [\theta; 10]$$

$$P_{\min} = \begin{cases} n\frac{(10-x)^{n-1}}{(10-\theta)^n}, & x \in [\theta, 10] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$M\hat{\Theta} = M[\min_i \xi_i] = \int_0^{10} n\overset{(-10+10)}{x} \frac{(10-x)^{n-1}}{(10-\theta)^n} dx =$$

$$= \int_0^{10} n(x-10)\frac{(10-x)^{n-1}}{(10-\theta)^n} dx + \int_0^{10} 10n \frac{(10-x)^{n-1}}{(10-\theta)^n} dx =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(10-x)^{n+1}}{(10-\theta)^n} \Bigg|_\theta^{10} - 10 \left(\frac{10-x}{10-\Theta}\right)\Bigg|_\theta^{10} = \frac{n}{n+1}(\theta - 10) + 10 =$$

$$= \frac{n}{n+1}\Theta + 10 \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \Theta \Rightarrow$$ оценка асимптотически несмещенная

$$P(|\hat{\Theta} - \Theta| \geqslant \varepsilon) = P(\min_i \xi_i - \Theta > \varepsilon) = P(\min_i \xi_i > \Theta + \varepsilon) =$$

$$\underset{\substack{\varepsilon \ll 1, \\ \varepsilon > 0}}{=} 1 - F_{\min}(\Theta + \varepsilon) = \left(\frac{10 - \Theta - \varepsilon}{10 - \Theta}\right)^n = \underset{q<1}{q^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$ оценка состоятельная.

Ответ: $\hat{\Theta} = \min_i \xi_i$. $\hat{\Theta}$ - асимптотически несмещенная и состоятельная.

3.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующей распределению $\mathcal{E}(\theta)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ. Является ли эта оценка состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\quad \mathcal{E}(\theta)$

метод максимального правдоподобия

1) Составляем $p(\xi, \theta)$

Т.к. распределение непрерывное $\Rightarrow p(\xi, \theta)$ - плотность вероятности.

$$p(\xi, \theta) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ \theta e^{-\theta \xi}, & \xi \geq 0 \end{cases}$$

2) Логарифмируем

$$\ln p(\xi, \theta) = \ln(\theta e^{-\theta \xi}) = \ln\theta - \theta\xi$$

3) Составляем ф-ю правдоподобия:

$$L_n(\theta, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\theta - \sum_{k=1}^{n} \theta \xi_k = n\ln\theta - \theta \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

4) $$\frac{\partial L_n(\theta, Z_n)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0 \Rightarrow \hat{\theta}^{\text{мп}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k} = \frac{1}{\bar{\xi}_n}$$

получили $\hat{\theta}^{\text{мп}} = 1/\bar{\xi}_n$

проверим состоятельность

$$\hat{\theta}^{\text{мп}} = \frac{1}{\bar{\xi}_n} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{M\xi_k} = \frac{1}{1/\theta} = \theta \Rightarrow \text{оценка состоятельная}$$

Панков стр. 28
следствие 5.1

4.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующей равномерному распределению $\mathcal{R}(1-\theta_1, 1+\theta_2)$, с помощью метода моментов найти оценки параметров θ_1, θ_2. Являются ли эти оценки состоятельными (сильно состоятельными)?

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad R(1-\tilde{\theta}_1; 1+\tilde{\theta}_2) \\ \text{метод моментов} \end{array}}$$

Имеем 2 неизвестные $\Rightarrow$ система состоит из двух уравнений:

$$\begin{cases} M[\xi] = \dfrac{1-\tilde{\theta}_1+1+\tilde{\theta}_2}{2} = \dfrac{2-\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_2}{2} = \bar{\xi}_n \quad (1) \\ D[\xi] = \dfrac{(1+\tilde{\theta}_1-1+\tilde{\theta}_2)^2}{12} = \dfrac{(\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_2)^2}{12} = \hat{\sigma}_n^2 \quad (2) \end{cases}$$

Решим систему, найдем $\tilde{\theta}_1$ и $\tilde{\theta}_2$

$$\tilde{\theta}_2 = -2 + \tilde{\theta}_1 + 2\bar{\xi}_n$$

подставим $\tilde{\theta}_2$ в (2):

$$\frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_1 - 2 + 2\bar{\xi}_n)^2}{12} = \hat{\sigma}_n^2 \Rightarrow \frac{(\bar{\xi}_n + \tilde{\theta}_1 - 1)^2}{3} = \hat{\sigma}_n^2$$

$$\frac{\bar{\xi}_n^2 + 2\bar{\xi}_n(\tilde{\theta}_1 - 1) + (\tilde{\theta}_1 - 1)^2}{3} = \frac{3\hat{\sigma}_n^2}{3}$$

$$\bar{\xi}_n^2 + 2\bar{\xi}_n\tilde{\theta}_1 - 2\bar{\xi}_n + \tilde{\theta}_1^2 - 2\tilde{\theta}_1 + 1 - 3\hat{\sigma}_n^2 = 0$$

$$\tilde{\theta}_1^2 + \tilde{\theta}_1(2\bar{\xi}_n - 2) + \bar{\xi}_n^2 - 2\bar{\xi}_n + 1 - 3\hat{\sigma}_n^2 = 0$$

пусть $a = 1$

$b = (2\bar{\xi}_n - 2)$

$c = \bar{\xi}_n^2 - 2\bar{\xi}_n + 1 - 3\hat{\sigma}_n^2$

$$D = b^2 - 4ac \Rightarrow \tilde{\theta}_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} =$$

$$= \frac{-\cancel{2}\bar{\xi}_n + \cancel{2} \pm \sqrt{(\cancel{2}\bar{\xi}_n - \cancel{2})^2 - \cancel{4}(\bar{\xi}_n^2 - 2\bar{\xi}_n + 1 - 3\hat{\sigma}^2)}}{\cancel{2}} =$$

$$= 1 - \bar{\xi}_n \pm \sqrt{(\bar{\xi}_n - 1)^2 - \bar{\xi}_n^2 + 2\bar{\xi}_n - 1 + 3\hat{\sigma}^2} =$$

$$= 1 - \bar{\xi}_n \pm \sqrt{\cancel{\bar{\xi}_n^2} - \cancel{2\bar{\xi}_n} + \cancel{1} - \cancel{\bar{\xi}_n^2} + \cancel{2\bar{\xi}_n} - \cancel{1} + 3\hat{\sigma}^2} =$$

$$= 1 - \bar{\xi}_n \pm \sqrt{3\hat{\sigma}^2} \Rightarrow \tilde{\theta}_{1;2} = 1 - \bar{\xi}_n \pm \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\tilde{\theta}_{1_{1,2}} = 1 - \bar{\xi}_n \pm \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\tilde{\theta}_2 = -2 + \tilde{\theta}_1 + 2\bar{\xi}_n$$

$$\Longrightarrow \tilde{\theta}_{2_1} = -2 + 1 - \bar{\xi}_n + \sqrt{3\hat{\sigma}^2} + 2\bar{\xi}_n = \bar{\xi}_n - 1 + \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\tilde{\theta}_{2_2} = -2 + 1 - \bar{\xi}_n - \sqrt{3\hat{\sigma}^2} + 2\bar{\xi}_n = \bar{\xi}_n - 1 - \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

<u>Ответ</u>

$$\hat{\tilde{\theta}}_1^{MM} = 1 - \bar{\xi}_n + \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{\tilde{\theta}}_2^{MM} = \bar{\xi}_n - 1 + \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

или

$$\hat{\tilde{\theta}}_1^{MM} = 1 - \bar{\xi}_n - \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{\tilde{\theta}}_2^{MM} = \bar{\xi}_n - 1 - \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$\mathbf{1 - \theta_1 \le 1 + \theta_2 => \theta_1 + \theta_2 \ge 0}$ => последние два значения уходят

Проверим на состоятельность

$$\hat{\tilde{\theta}}_1^{MM} = 1 - \bar{\xi}_n + \sqrt{3\hat{\sigma}^2}$$

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{п.н}} M\xi_1 = \frac{1 - \tilde{\theta}_1 + 1 + \tilde{\theta}_2}{2} = \frac{2 - \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2}{2}$$

$$\hat{\sigma}^2 \longrightarrow D\xi_1 = \frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)^2}{12} \Longrightarrow \sqrt{3\hat{\sigma}^2} = \sqrt{\frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)^2}{4}} = \frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)}{2}$$

получили: $\hat{\tilde{\theta}}_1^{MM} \xrightarrow{\text{п.н.}} 1 - \frac{2 - \tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2}{2} + \frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)}{2} =$

$$= \frac{\cancel{2} - \cancel{2} + \tilde{\theta}_1 - \tilde{\theta}_2}{2} + \frac{(\tilde{\theta}_1 + \tilde{\theta}_2)}{2} = \frac{\cancel{2}\tilde{\theta}_1}{\cancel{2}} = \tilde{\theta}_1$$

$\Longrightarrow \hat{\tilde{\theta}}_1^{MM} \xrightarrow{\text{п.н}} \tilde{\theta}_1 \Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

$$\hat{\tilde{\theta}}_2^{MM} = \bar{\xi}_n - 1 + \sqrt{3\hat{\sigma}^2} \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{\cancel{2} - \cancel{\tilde{\theta}_1} + \tilde{\theta}_2}{2} - \frac{\cancel{2}}{2} + \frac{\cancel{\tilde{\theta}_1} + \tilde{\theta}_2}{2} = \tilde{\theta}_2$$

$\Longrightarrow \hat{\tilde{\theta}}_2^{MM} \xrightarrow{\text{п.н}} \tilde{\theta}_2 \Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

5.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответствующей распределению $\mathcal{N}(2, \theta)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметраθ. Является ли эта оценка несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad N(2; \Theta)$

метод максимального правдоподобия

1) составим $p(\xi, \Theta)$

т.к. распределение непрерывное $\Rightarrow p(\xi, \Theta)$ - плотность вероятности

$$p(\xi, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Theta}} \exp\left[\frac{-(x-2)^2}{2\Theta}\right]$$

2) логарифмируем

$$\ln p(\xi, \Theta) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\Theta) - \frac{(x-2)^2}{2\Theta}$$

3) Составляем функцию правдоподобия

$$L_n(\Theta, Z_n) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \ln\Theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-2)^2}{\Theta}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\Theta - \frac{1}{2\Theta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2}$$

$$\frac{\partial L(\Theta, Z_n)}{\partial\Theta} = -\frac{n}{2\Theta} + \frac{1}{2\Theta^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\Theta^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2 = \frac{n}{\cancel{2}\Theta} \qquad \frac{1}{\Theta}\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2 = n$$

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2 = \Theta n \Longrightarrow \boxed{\hat{\Theta}^{МП} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-2)^2}{n} = \hat{\sigma}_n^2}$$

несмещенность

$M\hat{\Theta}^{МП} = M\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n-1}{n}\Theta \neq \Theta \Rightarrow$ несмещенность $\ominus$

но $\frac{n-1}{n}\Theta \xrightarrow{n\to\infty} \Theta \Rightarrow$ асимптотическая несмещ. $\oplus$

состоятельность

$\hat{\Theta}^{МП} \xrightarrow{п.н.} DX = \Theta \Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

6.

Пусть выборка $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответствует распределению $\mathcal{N}(-1, \theta)$. Является ли статистика $\frac{1}{2}\left((\xi_1+1)^2 + (\xi_n+1)^2\right)$ эффективной оценкой θ? Является ли эта оценка несмещённой?

6 семинар (10:20)

+ он это говорил на лекции

Пусть выборка $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответствует распределению $\mathcal{N}(-1, \theta)$. Является ли статистика $\frac{1}{2}\left((\xi_1+1)^2 + (\xi_n+1)^2\right)$ эффективной оценкой θ? Является ли эта оценка несмещённой?

Оценка нерегулярная!

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2}\left((x_1+1)^2 + (x_n+1)^2\right)$$

Если эфф. оценка сущ. => она совпадает с оценкой макс. правдоподобия

$$p(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2\theta}}$$

$$\ln p(x,\theta) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\theta - \frac{-(x+1)^2}{2\theta}$$

$$\bar{L}_n(\theta, Z_m) = -\frac{1}{2}n\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\theta - \sum_{k=1}^{n} \frac{-(x+1)^2}{2\theta}$$

$$\frac{\partial \bar{L}_n(\theta, Z_m)}{\partial\theta} = -\frac{n}{2\theta} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+1)^2}{2\theta^2} = 0$$

$$-\frac{n}{2\theta} - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k+1)^2 = 0 \quad \Big| \cdot 2\theta^2$$

$$-n\theta - \sum_{k=1}^{n}(x_k+1)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{Mn} = \frac{-\sum_{k=1}^{n}(x_k+1)^2}{n} = \cancel{D[\bar{X}_n]}$$

$$\cancel{\hat{\theta} = \hat{G}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2}$$

при $N(0,1)$

$D = 1$

$$i(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = M\left[\left(-\frac{1}{2\theta} - \frac{(x+1)^2}{2\theta^2}\right)^2\right] = -\frac{1}{4\theta^2} - \frac{1}{4\theta^2} M\left[\left(\frac{x+1}{\theta}\right)^2\right] = -\frac{1}{4\theta^2} - \frac{1}{4\theta^2} = -\frac{1}{2\theta^2}$$

$$\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2\theta} - \frac{(x+1)^2}{2\theta^2}$$

$$D_{min} = \frac{1}{n\,i(\theta)} = -\frac{2\theta^2}{n}$$

=> т.к. они не равны, то эфф оценки не сущ.

7.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующей распределению $\mathcal{E}(\frac{1}{\theta})$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ. Является ли эта оценка несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad \mathcal{E}(\frac{1}{\Theta})$

метод максимального правдоподобия

1) Найдем функцию $p(\xi, \Theta)$

т.к. распределение непрерывное $\Rightarrow p(\xi, \Theta)$ - плотность вероятности

$$p(\xi, \Theta) = \begin{cases} 0, & \xi < 0 \\ 1/\Theta \, e^{-\frac{1}{\Theta}\xi}, & \xi \geq 0 \end{cases}$$

2) Логарифмируем

$$\ln p(\xi, \Theta) = \ln \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \xi$$

3) Составляем ф-ю правдоподобия

$$\bar{L}_n(\Theta, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{\Theta} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\Theta} \xi_k = n \ln \frac{1}{\Theta} - \frac{1}{\Theta} \sum_{k=1}^{n} \xi_i$$

4) $$\frac{\partial \bar{L}_n(\Theta, Z_n)}{\partial \Theta} = \frac{-n}{\Theta} + \frac{1}{\Theta^2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k = 0$$

$$n\Theta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \hat{\Theta}^{МП} = \bar{\xi}_k$$

5) проверим несмещенность и состоятельность

$$M[\hat{\Theta}^{МП}] = M[\bar{\xi}_k] = \frac{1}{\frac{1}{\Theta}} = \Theta \Rightarrow \text{несмещенная}$$

$$\hat{\Theta}^{МП} = \bar{\xi}_k \xrightarrow{п.н.} M[\bar{\xi}_n] = \Theta \Rightarrow \text{состоятельная} \quad \underline{\text{Ответ}}$$

8.

Пусть выборка $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответствует распределению Пуассона $\Pi(\theta)$, n - чётное число. Является ли статистика $\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2}\xi_k$ эффективной оценкой θ?

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\Pi(\theta)$ n-четное число

является ли статистика $\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2}\xi_k$ - эффект. оценкой?

1) построим функцию $p(\xi, \theta)$. Т.к. $\Pi(\theta)$ - дискретное распределение $\Rightarrow$ $p(\xi,\theta)$ - функция вероятности

$$p(\xi,\theta) = \frac{\theta^{\xi}}{\xi!}e^{-\theta}$$

проверим регулярность функции

$$\sqrt{p(\xi,\theta)} = \frac{\theta^{\xi/2}}{\sqrt{\xi!}}e^{-\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{p(\xi,\theta)}}{\partial\theta} = \frac{e^{-\frac{\theta}{2}}\theta^{\frac{\xi}{2}-1}(\xi-\theta)}{2\sqrt{\xi!}}$$ - данная ф-я непрерывна по θ $\Rightarrow$ регулярная

построим информацию Фишера $i(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p(\xi,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$

для этого найдем $\ln p(\xi,\theta) = \xi\ln\theta - \ln\xi! - \theta$

$$\frac{\partial \ln p(\xi,\theta)}{\partial\theta} = \frac{\xi}{\theta} - 1$$

$$i(\theta) = M\left[\left(\frac{\xi}{\theta}-1\right)^2\right] = M\left[\left(\frac{\xi-\theta}{\theta}\right)^2\right] = \frac{1}{\theta^2}\underbrace{M[(\xi-\theta)^2]}_{D\xi} \ominus$$

$$\ominus\ \frac{\theta}{\theta^2} = \boxed{\frac{1}{\theta}} \Rightarrow \Delta^{min} = \frac{1}{n\,i(\theta)} = \boxed{\frac{\theta}{n}}$$

$$D\left[\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n/2}\xi_k\right] \Rightarrow D[\ \ \ _n] = \frac{1}{n}D\xi = \boxed{\frac{\theta}{n}}$$

$\ominus \Rightarrow$ оценка эффективная

Ответ

9.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующей распределению Пуассона $\Pi(\theta)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ.
Является ли эта оценка несмещённой, состоятельной и асимптотически нормальной?

$Z_n = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ $\Pi(\theta)$
метод максимального правдоподобия

1) Найдем функцию $p(\xi, \theta)$

$$p(\xi, \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{\xi}}{\xi!}$$ – функция вероятности

т.к. распределение дискретное

2) Логарифмируем

$$\ln p(\xi, \theta) = \ln \frac{e^{-\theta}\theta^{\xi}}{\xi!} = \ln e^{-\theta} + \ln \frac{\theta^{\xi}}{\xi!} = -\theta + \xi \ln\theta - \ln \xi!$$

3) Строим функцию правдоподобия

$$\bar{L}(Z_n, \theta) = -\sum_{k=1}^{n}\theta + \sum_{k=1}^{n}\xi_k \ln\theta - \sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k! = -n\theta + \ln\theta\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \sum_{k=1}^{n}\ln\xi_k!$$

4) дифференцируем по θ

$$\frac{\partial \bar{L}_n(Z_n, \theta)}{\partial\theta} = -n + \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = 0 \Rightarrow \hat{\theta}^{МП} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{n} = \bar{\xi}_n$$

несмещенность

$M[\hat{\theta}^{МП}] = M[\bar{\xi}_n] = \theta \Rightarrow$ несмещенность $\oplus$

состоятельность

$\hat{\theta}^{МП} = \bar{\xi}_n \xrightarrow{п.н} M[\xi_k] = \theta \Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

оценка асимптотически нормальна по свойствам выборочного начального момента)))

10. По выборке $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответствующей биномиальному распределению $\mathrm{Bi}(5, \theta)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ. Является ли эта оценка несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\quad Bi(5, \Theta)$

метод максимального правдоподобия

1) Составим ф-ю $p(\xi, \Theta)$

т.к. распределение дискретное $\Rightarrow$ $p(\ , \Theta)$ - функция вероятности

$$p(\xi, \Theta) = C_n^{\xi}\, \Theta^{\xi} (1-\Theta)^{5-\xi}$$

2) Прологарифмируем $p(\xi, \Theta)$

$$\ln p(\Theta, \xi) = \ln C_n^{\xi} + \xi \ln \Theta + (5-\xi)\ln(1-\Theta)$$

3) Построим функцию правдоподобия

$$L_n(Z_n, \Theta) = \sum_{k=1}^{n} \ln C_n^{\xi} + \sum_{k=1}^{n} \xi_k \ln \Theta + \ln(1-\Theta)\sum_{k=1}^{n}(5-\xi_k)$$

$$\frac{\partial L_n(Z_n, \Theta)}{\partial \Theta} = 0 \Rightarrow 0 + \frac{1}{\Theta}\sum_{k=1}^{n} \xi_k + \frac{-1}{1-\Theta}\sum_{k=1}^{n}(5-\xi_k) = 0$$

$$(1-\Theta)\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \Theta\left(5n - \sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \Theta 5n = 0 \Rightarrow \hat{\Theta}_n^{\text{мп}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_n}{5n} = \frac{1}{5}\bar{\xi}_n$$

$$M\hat{\Theta}_n^{\text{мп}} = M\left[\frac{1}{5}\bar{\xi}_n\right] = \frac{1}{5}\cdot 5\Theta = \Theta \Rightarrow \text{несмещенная } (+)$$

$$\hat{\Theta}_n^{\text{мп}} = \frac{1}{5}\bar{\xi}_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \frac{1}{5}\cdot 5\Theta = \Theta \Rightarrow \text{состоятельная } (+)$$

Ответ

11.

По выборке $Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответствующей распределению $\mathcal{N}(\theta, 9)$, с помощью метода максимального правдоподобия найти оценку параметра θ. Является ли эта оценка несмещённой и состоятельной?

$Z_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \quad N(\theta; 9)$

метод максимального правдоподобия

1) Найдем функцию $p(\xi, \theta)$

т.к. распределение непрерывное $\Rightarrow p(\xi, \theta)$ – плотность вероятности

$$p(\xi, \theta) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(\xi - \theta)^2}{2 \cdot 9}\right]$$

2) Логарифмируем

$$\ln p(\xi, \theta) = -\ln 3\sqrt{2\pi} - \frac{(\xi - \theta)^2}{18}$$

3) Составим ф-ю правдоподобия

$$L_n(Z_n; \xi) = -n \ln 3\sqrt{2\pi} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\xi_k - \theta)^2}{18}$$

$$\frac{\partial L_n(Z_n; \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{18} \cdot 2 \sum_{k=1}^{n} (\theta - \xi_k) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} \theta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \theta n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \Rightarrow \hat{\theta}^{мп} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n}$$

Получили: $\hat{\theta}^{мп} = \bar{\xi}_n$

$M\hat{\theta}^{мп} = M\bar{\xi}_n = M\xi = \theta \Rightarrow$ несмещенность $\oplus$

$\hat{\theta}^{мп} = \bar{\xi}_n \xrightarrow{п.н.} M\xi = \theta \Rightarrow$ состоятельность $\oplus$

4 номера

Типаж 1 — роста

1

Рост пяти человек: 170, 175, 180, 185, 190 см. Предполагается, что рост распределён нормально, а его с.к.-отклонение равно 6 см. Проверить на уровне значимости 0,05 гипотезу о том, что средний рост равен 185 см, против альтернативы – средний рост равен 180 см. Найдите мощность построенного критерия.

$\xi_n = (170,\ 175,\ 180,\ 185,\ 190)$. $\quad \xi_n \sim (\theta, 6^2)$. $\quad \alpha = 0{,}05$

$H_0 : \theta = 185$

$H_1 : \theta = 180$

$\beta - ?$

$$\frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\delta}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$P\left\{-U_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\delta}\sqrt{n} \le U_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha.$$

$$P\left\{\bar{\xi}_n - \frac{\delta U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \theta \le \bar{\xi}_n + \frac{\delta U_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha.$$

$$\Phi_0(U_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi_0(U_{0{,}975}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}475, \qquad 1{,}96 = U_{0{,}975}$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum \xi_i = \frac{900}{5} = 180$$

G_α

$$\left[180 - \frac{6\cdot 1{,}96}{\sqrt{5}},\ 180 + \frac{6\cdot 1{,}96}{\sqrt{5}}\right], \qquad [174{,}7,\ 185{,}26].$$

β будет весомым

$H_0 : \theta = 185 \in G_\alpha$. Даже $H_1 : \theta = 180 \in G_\alpha$ тоже...

$$P\{T_n(\xi_n) \in G_\alpha \mid H_1\} = 1-\beta, \qquad \beta = 1 - P\{T_n(\xi_n) \in G_\alpha \mid H_1\}$$

$$M(T_n(\xi_n)) = \frac{\sqrt{n}}{\delta} M(\bar{\xi}_n - 185) = \frac{\sqrt{n}}{\delta}(\theta - 185)$$

$$D(T_n(\xi_n)) = D\left(\frac{\bar{\xi}_n - 185}{\delta}\sqrt{n}\right) = \frac{n}{\delta^2} D(\bar{\xi}_n - 185) = 1.$$

$$\beta(\theta) = 1 - P\{-U_{1-\frac{\alpha}{2}} \le T_n(\xi_n) \le U_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid H_1\} =$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{2} + \Phi_0\left(U_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{\delta}(\bar{\xi} - 185)\right) - \frac{1}{2} - \Phi_0\left(-U_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sqrt{n}}{\delta}(\bar{\xi} - 185)\right)\right] =$$

$$= 1 - 0{,}499 - 0{,}0358$$

1 - 0,499 + 0,0358 = поссчччитааайте внимательноооооооо

2

Есть две группы людей: из первой группы выбрали трёх человек, а из второй группы – четырёх человека.
Рост людей в первой группе: 171, 175, 180 см.
Во второй группе: 178, 180, 185, 190.
Предполагается, что рост распределён нормально, а дисперсии роста в обеих группах равны.
Можно ли на уровне значимости 0,05 принять гипотезу о том, что средний рост в двух группах одинаков?

$n = 3 \quad m = 4$

введем гипотезы

$H_0 : M(X) = M(Y) \qquad H_1 : M(x) \neq M(y)$

рассчитаем критерий:

$$T_{наб} = \frac{x_{выб} - y_{выб}}{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2} \sqrt{\frac{nm(n+m+2)}{n+m}}$$

$$x_{выб} = \frac{(171 + 175 + 180)}{3} = 175,33$$

$$y_{выб} = \frac{(178 + 180 + 185 + 190)}{4} = 183,25$$

$S_x = 20,33 \qquad S_y = 28,91$

тогда $T = \dfrac{(175,33 - 183,25)}{2 \cdot 20,33^2 + 3 \cdot 28,91^2} \sqrt{\dfrac{3 \cdot 4\,(3+4-2)}{3+3}} = -0,007$

критическая точка

$t(0,05;\ 3+4-2) = t(0,05;\ 5) = 4,03$

т.к. $|T| < t(0,05;5) \Rightarrow H_0$ отвергнуть не имеем оснований $\Rightarrow$

можно считать средний рост одинаковым.

$\xi_n = (171,\ 175,\ 180)$, $\xi_n \sim N(\theta_1, \sigma^2)$ $n=3$

$\eta_m = (178,\ 180,\ 185,\ 190)$, $\eta_m \sim N(\theta_2, \sigma^2)$ $m=4$

$H_0: \theta_1 = \theta_2$

$H_1: \theta_1 \neq \theta_2$

$$T_n\big|_{H_0} \sim \tau(n+m-2) \qquad T_n = \frac{\bar{\xi}_n - \bar{\eta}_m}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\ \sigma_{n,m}} \qquad (*)$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum \xi_i = \frac{1}{3}(171+175+180) = 175.3$$

$$\bar{\eta}_m = \frac{1}{m}\sum \eta_i = \frac{1}{4}(178+180+185+190) = 183.25$$

$$\sigma^2_{n,m} = \frac{\sum (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 + \sum (\eta_k - \bar{\eta}_m)^2}{n+m-2}, \qquad \sum (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 = 40.67, \quad \sum (\eta_k - \bar{\eta}_m)^2 = 86.75$$

$$\sigma^2_{n,m} = \frac{40.67 + 86.75}{3+4-2} = 25.484 \Rightarrow \sigma_{n,m} = 5{,}048$$

Все числа в $(*)$:

$$T_n = \frac{175.3 - 183.25}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\cdot 5{,}048} = -2.065.$$

$$\underbrace{\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) \le T_n \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]}_{}, \qquad \overbrace{\left[-2.571 \le T_n \le 2.571\right]}^{G_\alpha}.$$

$\alpha = 0.05$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{0.975}(5) = 2.571$

$\frac{a+1}{2} = 0.975,\ a = 0.95$

$T_n = -2.065 \in G_\alpha$, т.о.

принимаем гипотезу $H_0: \theta_1 = \theta_2$.

3

Рост пяти человек: 170, 175, 180, 185, 190 см. Предполагается, что рост распределён нормально, а его дисперсия равна 25 $см^2$. Проверить на уровне значимости 0,1 гипотезу о том, что средний рост равен 175 см, против альтернативы – средний рост равен 180 см. Найдите мощность построенного критерия.

$Z_n = (170, 175, 180, 185, 190)$, $Z_n \sim N(\theta, 5^2)$. $n = 5$. $\alpha = 0.1$

$H_0: \theta = 175$

$H_1: \theta = 180$

β - ?

$$T_n(Z_n) = \frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$P\left\{-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\sigma}\sqrt{n} \le u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{\xi}_n - \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \theta \le \bar{\xi}_n + \frac{\sigma u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha.$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_1 \xi_i = \frac{1}{5}(170 + 175 + 180 + 185 + 190) = 180 = \bar{\xi}_n$$

$$\Phi_0(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi_0(u_{0.95}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0.45 = \Phi_0(u_{0.95}) \Rightarrow u_{0.95} = 1.645 \quad G_\alpha \checkmark$$

$$\left[180 - \frac{5\cdot 1.645}{\sqrt{5}} \le \theta \le 180 + \frac{5 \cdot 1.645}{\sqrt{5}}\right], \quad [176.32 \le \theta \le 183.68].$$

$H_0: \theta = 175 \notin G_\alpha \Rightarrow H_0$ отвергается в пользу $H_1: \theta = 180$

$\theta = 180 \in G_\alpha$

или $\bar{G}_\alpha$?

$\beta = 1 - P\{T_n(Z_n) \in G_\alpha \mid H_0\}$ неверная, ее и ищем

$$M(T_n(Z_n)) = M\left[\frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} M[\bar{\xi}_n - 175].$$

$$D(T_n(Z_n)) = D\left[\frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right] = 1$$

$$\beta = 1 - P\{-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \le T_n(Z_n) \le u_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid H_1\} =$$

$$= 1 - \left[\cancel{\tfrac{1}{2}} + \Phi_0\left(u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \cancel{\tfrac{1}{2}} - \Phi_0\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] =$$

* $\boxed{u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645, \quad \bar{\xi}_n = 180, \quad n = 5, \quad \sigma = 5}$ см. ранее

$$= 1 - \left[\Phi_0\left(1.645 - \frac{180-175}{5}\sqrt{5}\right) - \Phi_0\left(-1.645 - \frac{180-175}{5}\sqrt{5}\right)\right] =$$

$$= 1 - [\Phi_0(-0.591) - \Phi_0(-3.88)] = 1 - \Phi_0(-0.591) + \Phi_0(-3.88) =$$

$$= 1 + \Phi_0(0.591 - \Phi_0(-3.88) = 1 + 0.2224 - 0.498 = 0.7244 = \beta.$$

4

Рост четырёх человек: 175, 175, 180, 185 см. Предполагается, что рост распределён нормально, а его дисперсия равна $36\,\text{см}^2$. Проверить на уровне значимости 0,05 гипотезу о том, что средний рост равен 175 см, против альтернативы – средний рост равен 185 см. Найдите мощность построенного критерия.

$Z_n = (175, 175, 180, 185)$. $Z_n \sim N(\theta, 6^2)$ $n = 4$. $\alpha = 0{,}05$

$H_0: \theta = 175$

$H_1: \theta = 185.$

$\beta - ?$

$$\frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \qquad M\bar{\xi}_n = \theta \quad D\bar{\xi}_n = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$P\left\{-U_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{\xi}_n - \theta}{\sigma}\sqrt{n} \le U_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\bar{\xi}_n - \frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}} \le \theta \le \bar{\xi}_n + \frac{U_{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\alpha$$

$$\Phi_0(U_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi_0(U_{0.975}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}475. \qquad 1{,}96 = U_{0.975}$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_i \xi_i = \frac{715}{4} = 178.75$$

$$\left[178.75 - \frac{1{,}96\cdot 6}{\sqrt{4}},\ 178{,}75 + \frac{1{,}96\cdot 6}{\sqrt{4}}\right], \quad \overset{G_\alpha}{[172{,}87;\ 184{,}63]}$$

$H_0: \theta = 175$, $175 \in [172.87, 184.63] = G_\alpha$, т.е. принимаем гипотезу $H_0: \theta = 175$

$(H_1: \theta = 185 \notin G_\alpha)$

$$P\{T_n(Z_n) \in \overset{\bar{G}_\alpha ?}{G_\alpha} \mid H_1\} = 1 - \beta(\theta), \quad \beta(\theta) = 1 - P\{T_n(Z_n) \in G_\alpha \mid H_1\}$$

$$M[T_n(Z_n)] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}M[\bar{\xi}_n - 175] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M[\bar{\xi}_n] - 175) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - 175)$$

$$D[T_n(Z_n)] = D\left(\frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \frac{n}{\sigma^2}D(\bar{\xi}_n - 175) = \frac{n}{\sigma^2}D\bar{\xi}_n = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2 n = 1$$

$$\beta = 1 - P\{-U_{1-\frac{\alpha}{2}} \le T_n(Z_n) \le U_{1-\frac{\alpha}{2}} \mid H_1\} =$$

$$= 1 - \left[\cancel{\tfrac{1}{2}} + \Phi_0\left(U_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \cancel{\tfrac{1}{2}} - \Phi_0\left(-U_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{\bar{\xi}_n - 175}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right] =$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} n = 4 & \bar{\xi}_4 = 178.75 \\ U_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 & \sigma = 6 \end{array}}$$

$$= 1 - [\Phi_0(0{,}876) - \Phi_0(-3.04)] =$$

$$= 1 - \Phi_0(0.876) - \Phi_0(3.04) = 1 - 0{,}3078 - 0{,}4386 = 0.1936$$

5

Рост пяти человек: 170, 175, 180, 185, 190 см. Предполагается, что рост распределён нормально. Проверить на уровне значимости 0,1 гипотезу о том, что с.к.-отклонение роста равно 5 см, против альтернативы – с.к.-отклонение роста равно 7 см.

$\vec{\xi}_n = (170, 175, 180, 185, 190)$. $\xi_n \sim N(\theta, \delta^2)$. $\alpha = 0.1$

$H_0: \delta = 5$ δ – с.к. отклонение.

$H_1: \delta = 7$.

$$T_n(\vec{x}_n) = \frac{\hat{\delta}^2}{\delta^2}(n-1), \Rightarrow \boxed{\left[\frac{(n-1)\hat{\delta}^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \geq \delta^2 \geq \frac{(n-1)\hat{\delta}^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right]} \quad (\star)$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 \quad (1)$$

$$(1) \to (\star): \left[\frac{\sum_1^n (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} \geq \delta^2 \geq \frac{\sum_1^n (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}\right] \quad (\star\star)$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_1^n \xi_i = \frac{1}{5}(170+175+180+185+190) = 180 = \bar{\xi}_n$$

$$\sum_1^n (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 = 250.$$

$$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{4,\frac{0.1}{2}} = \chi^2_{4,0.05} = 0.71$$

$$\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{4,1-\frac{0.1}{2}} = \chi^2_{4,0.95} = 9.49$$

пихаем значения ↑ в $(\star\star)$:

$$\delta^2 \in \left[\frac{250}{9.49}, \frac{250}{0.71}\right], \quad \delta^2 \in [26,3;\ 352] \Rightarrow \boxed{\delta \in [5,12;\ 18,76]}. \quad G_\alpha$$

$H_0: \delta = 5 \notin G_\alpha$, но отвергается в пользу $H_1: \delta = 7$

$\delta = 7 \in G_\alpha$

6

Ниже приведены данные об урожайности (в центнерах с гектара) на 18 земельных участках, при этом на некоторых из них семена обрабатывались перед посевом, а на некоторых – нет. Можно ли на уровне значимости 0,05 считать, что предпосевная обработка увеличивает урожайность?

Необработанные семена 20,0 17,9 20,6 22,0 21,4 23,8 21,4 19,8 18,4

Обработанные семена 22,1 18,5 19,4 22,1 21,7 24,9 21,6 20,3 18,3

$N=18 \qquad \alpha=0,05$

необработ.: 20 17.9 20.6 22 21.4 23.8 21.4 19.8 18.4 – $\xi_n \sim N(m_1, \Theta_1)$

обработ: 22.1 18.5 19.4 22.1 21.7 24.9 21.6 20.3 18.3 – $\eta_n \sim N(m_2, \Theta_2)$

$H_0: \quad m_1 = m_2$

$H_1: \quad m_2 > m_1$

$$T_n(Z_n) = \frac{\bar{\eta}_n - \bar{\xi}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}\,\hat{\sigma}_{n,n}}$$

$$\bar{\eta}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k = \frac{1}{9}(22.1+18.5+19.4+22.1+21.7+24.9+21.6+20.3+18.3) = 20,98$$

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \frac{1}{9}(20+17.9+20.6+22+21.4+23.8+21.4+19.8+18.4) = 20,58$$

$$\tilde{\sigma}^2_{nn} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi}_n)^2 + \sum_{k=1}^{n}(\eta_k-\bar{\eta}_n)^2}{n+m-2}$$

$$\tilde{\sigma}^2_{nn} = \frac{26,6096 + 35,0696}{16} = 3,85495$$

$$\hat{\sigma}_{nn} = 1,96$$

$$T_n(Z_n)\Big|_{H_0} \sim \tau(n+m-2)$$

Д.О $1-\alpha$ | К.О α

$$t_{1-\alpha}(n+n-2) = t_{0,95}(16) = 2,12$$

$$T_n(Z_n) = \frac{20,98-20,58}{\sqrt{\frac{2}{9}}\cdot 1,96} = 0,43 < t_{0,95}(16)$$

=> Нет оснований отвергать гипотезу H_0.

H_0 принимаем

Типаж 2 — выборки

7.

Пусть $(\xi_1, \dots \xi_n)$ - выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_3)$,

а $(\eta_1, \dots \eta_{2n})$ - выборка большего объёма из распределения $\mathcal{N}(\theta_2, \theta_3)$.

Выборки независимы. Значения θ_1 и θ_2 неизвестны.

Используя обе выборки, постройте правосторонний доверительный интервал надёжности $0{,}9$ для θ_3.

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$ - выборка нормального распр. $N(\Theta_1, \Theta_3)$

$(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ - выборка большего объема $N(\Theta_2, \Theta_3)$

выборки независимы Θ_1 и Θ_2 неизвестны

построить правосторонний доверительный интервал надежности 0,9 для Θ_3

$$T_n(Z_n) = \frac{\bar{\sigma}^2_{n,m}(n+m-2)}{D x_n \, D y_n} \sim \chi^2_{0,9}(n+2n-2)$$

$$\bar{\sigma}^2_{nm} = \frac{3 D\bar{x}_n}{2n} = \frac{3\Theta_3}{2n}$$

$$\bar{\sigma}^2_{nm} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y}_n)^2}{2n}$$

$$\frac{\frac{3\Theta_3}{2n}(3n-2)}{\Theta_3^2} = \frac{3(3n-2)}{2n\Theta_3}$$

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha} \geqslant \frac{3(3n-2)}{2n\Theta_3}\right\} = 0{,}9$$

$$P\left\{\Theta_3 \geqslant \frac{3(3n-2)}{2n\,\chi_{0,9}(3n-2)}\right\} = 0{,}9 \quad \underline{\text{Ответ}}$$

8.

Пусть $(\xi_1, \dots \xi_n)$ - выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, 4)$, а $(\eta_1, \dots \eta_{2n})$ - выборка большего объёма из распределения $\mathcal{N}(\theta_2, 1)$. Выборки независимы. Постройте правосторонний доверительный интервал надёжности $0{,}98$ для разности $\theta_1 - \theta_2$.

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$ - выборка из нормального распределения $N(\Theta_1, 4)$

$(\eta_1, \dots, \eta_{2n})$ - выборка большего объема из распред. $N(\Theta_2, 1)$

Выборки независимые

Построение правостороннего доверительного интервала $1-\alpha = 0{,}98$ для разности $\Theta_1 - \Theta_2 = \Theta$

$$D[\bar{x}_n - \bar{y}_n] = \frac{\sigma_n^2}{n} + \frac{\sigma_m^2}{m} = \frac{4}{n} + \frac{1}{2n} = \frac{9}{2n} \qquad \Theta = \Theta_1 - \Theta_2$$

$$\frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \Theta}{\sqrt{\frac{9}{2n}}} \sqrt{3n-2} \sim N(0,1)$$

$$P\left\{ \frac{\bar{x}_n - \bar{y}_m - \Theta}{\sqrt{\frac{9}{2n}}} \sqrt{3n-2} \leqslant u_{1-\alpha} \right\}$$

$$P\left\{ \Theta \geqslant u_{0,98} \sqrt{\frac{9}{2n(3n-2)}} - \bar{x}_n + \bar{y}_m \right\} = 0{,}98 \quad \text{Ответ}$$

Типаж 3 — кости и болезни и ДТП

9.

При подбрасывании игральной кости 1200 раз шестёрка выпала 170 раз. Можно ли на уровне значимости 0,95 считать, что вероятность шестёрки равна $1/6$?

Подбрасываем игральную кость 1200 раз. Шестерка выпала 170 раз. Уровень значимости 0,95 (//скорее всего 0,05)
Можно ли считать, что вероятность шестерок $1/6$

Рассмотрим СВ ξ

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{шестерка} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

гипотеза H_0: $P(\text{шестерка}) = 1/6 \Rightarrow \xi \sim Be(1/6)$

$\bar{H}_0$ – альтернативная

$\Delta = \{0; 1\} = \delta_1 \cup \delta_2 \quad n_1 = 170 \quad n_2 = 1200 - 170 = 1030$

частота попадания в промежутки:

$\hat{p}_1 = \frac{170}{1200} = 0{,}1417 \qquad \hat{p}_2 = \frac{1030}{1200} = 0{,}8583$

построим доверительный интервал

$\chi^2_{1-0,05}(1) = \chi^2_{0,95}(1) = 3{,}84 \Rightarrow G_{0,05} = [0; 3{,}84]$

Составим статистику Пирсона

$$T_n(Z_n) = n\sum_{k=1}^{n} \frac{(\hat{p}_k - p_k)^2}{p_k} = 1200\left(\frac{(0{,}1417 - 1/6)^2}{1/6} + \frac{(0{,}8583 - 5/6)^2}{5/6}\right)$$

$\approx 5{,}38 \notin [0; 3{,}84] \Rightarrow$ отвергаем гипотезу H_0 в пользу альтернативы $\bar{H}_0$ <u>Ответ</u>

10.

Из тысячи человек, заболевших коронавирусом, 450 женщин. Можно ли на основании этих данных считать на уровне значимости 0,1, что женщины реже мужчин болеют коронавирусом? Предполагается, доли мужчин и женщин равны.

$n = 1000$ заболевших

450 - женщины

$\alpha = 0{,}1$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{женщина} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\xi_n \sim Be(\Theta)$$

$H_0: \ \Theta = 0{,}5$ - т.е женщины болеют также часто как и мужчины

$H_1: \ \Theta < 0{,}5$

$$T_n(Z_n) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \Theta n}{\sqrt{n \cdot \Theta(\Theta - 1)}}$$

$$T_n(Z_n)\Big|_{H_0} \sim N(0;1)$$

К.О α | Д.О $1-\alpha$

$$u_\alpha = -u_{1-\alpha} = -u_{0,9} = -1{,}282$$

$$T_n(Z_n) = \frac{450 - 500}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -\frac{50}{5\sqrt{10}} = -\sqrt{10} = -3{,}162 \quad < -1{,}282$$

$\Rightarrow$ Гипотезу H_0 отвергаем в пользу H_1

11.

Из тысячи ДТП по вине женщин произошли 350. Доля женщин за рулём составляет 40%. Можно ли на уровне значимости 0,95 считать, что женщины водят аккуратнее мужчин?

ДТП: $N=1000$

350 - по вине женщин

40% - доля женщин-водительниц

$\alpha = 0{,}95$

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & \text{вина женщины} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\xi_n \sim Be(\Theta)$$

$H_0: \ \Theta = 0{,}4$

$H_1: \ \Theta < 0{,}4$

$$T_n(Z_n) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \xi_k - \Theta n}{\sqrt{n\Theta(1-\Theta)}}$$

$$T_n(Z_n) = \frac{350 - 0{,}4 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = -\frac{50}{\sqrt{240}} \approx -3{,}225$$

К.О	Д.О
α	$1-\alpha$

$$u_\alpha = u_{0{,}95} = 1{,}645$$

$-3{,}225 < 1{,}645 \Rightarrow T_n(Z_n)$ лежит в К.О

Отвергаем гипотезу H_0 в пользу H_1