2547

Сворачивается по формуле суммы геометрической прогрессии

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

2549

Слагаемые взаимоуничтожаются

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

解 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

2551

2. а) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots$;
б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots$; $|q|<1$.

◀ Пусть (u_n) и (v_n) — последовательности частичных сумм рядов б) и а) соответственно, u и v — их суммы. Тогда, использовав формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, можем написать

$$u_n+iv_n=qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+\ldots+q^ne^{in\alpha}=\frac{qe^{i\alpha}-q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}.$$

Принимая во внимание условие $|q|<1$, имеем $|qe^{i\alpha}|<1$; отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}\right)=0.$$

А тогда из предыдущей формулы находим

$$u+iv=\lim_{n\to\infty}(u_n+iv_n)=\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}=q\left(\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2}+i\frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}\right).$$

Поэтому

$$u=q\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2},\quad v=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. ▶$$

2559

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

используем предельный признак

$\frac{1}{n}$ – расх.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1}:\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2n-1} \text{ тоже расх.}$$

2561

№ 2561

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$$ необ. признак сходимости не вып.

$\Rightarrow$ расх.

2562

№ 2562

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$$ исп. пред. признак

$\frac{1}{n^2}$ – сх. (ряд Дирихле при $p>1$)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-4n+1}=\frac{1}{4}\neq 0 \Rightarrow \text{ тоже сх.}$$

2563

1) 2563

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots$$

предельный признак

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ – сходится

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n+1}} : n^{\frac{3}{2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{1} = 1 \Rightarrow \text{сходится}$$

2575.1

15. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$.

◀ Найдем число n_0 такое, что $\forall n > n_0$ и произвольном $p > 0$ будет выполняться неравенство $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$. Имеем

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Следовательно, положив $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, по критерию Коши, получим, что данный ряд сходится. ▶

2576

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Положим $m = n$, тогда для каждого натурального n справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

По критерию Коши гармонический ряд расходится. □

2577

17. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots .$

◄ Поскольку

$$S_{6n}-S_{3n}=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n},$$

где (S_{6n}), (S_{3n}) — подпоследовательности последовательности частичных сумм данного ряда, то

$$S_{6n}-S_{3n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\ldots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6}.$$

Поэтому, согласно критерию Коши, ряд расходится. ►

2578

2578.

$$\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$$

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=q$

$q<1$ - сх-ся

$q>1$ - расход

$q=1$ - ?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{1000^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0$$

$\Rightarrow$ сх-ся.

2579

2579

$$\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow \text{сх-ся}$$

2580

2580

$$\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots+$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{n\cdot(-1)(n+1)\cdot\frac{-1}{n+1}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}<1\Rightarrow \text{сх-ся}$$

2581

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{2^n n!}{n^n}\right)=\frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=2e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=\frac{2}{e}<1\ \text{— сх.}$$

2583

По Даламберу ряд сходится

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots.$

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

2584

20. $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \ldots$.

◀ Замечаем, что общий член ряда a_n имеет вид

$$a_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \ldots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-2)}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, согласно признаку д'Аламбера, ряд сходится. ▶

2587

N 2587

$$\sum \frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n}$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1} \sqrt[n+1]{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\lim\left(-\frac{(n+1)}{n+1}\right)}}{e^{-1}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \sqrt[n]{n} = \lim e^{\lim\left(\frac{1}{n}\cdot(-n)\right)} = \frac{1}{e}$$

Не выполн. необх. признак

2590 (сходится)

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法，可证得通项为

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

2595

по признаку сравнения, а потом по Даламберу. ряд сходится

25975.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

По признаку сравнение

$$0 < \frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{сх-ся}$$

<u>2597</u>

по признаку сравнения, а потом по Даламберу. ряд сходится

2597. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

解 $0<\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

<u>2597.1</u>

Обобщенный признак Коши, берем верхний предел от функции сх-ся

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9} < 1 \text{ сх-ся}$$

2616

Необходимый признак сходимости ряда не выполняется, соответственно ряд расходится.

Исследовать сходимость

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2619

Верхний интеграл сходится при p > 1, а нижний расходится (лучше расписать интегралы)

2619. $a_n = \frac{1}{n\ln^p n}$.

解 由于不论 p 为何数，当 x 充分大时，函数$\frac{1}{x\ln^p x}$都是非负递减的，并且

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x} = \begin{cases} \left.\frac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq 1; \\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1 \end{cases}$$

仅当 $p>1$ 时收敛，故级数仅当 $p>1$ 时收敛．

2620

Аналогично 2619, просто сложнее функция (скорее всего не будет ее)

2620. $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$(不论 p,q 为何实数)的导函数当 x 充分大时是负的，故当 x 充分大时，$f(x)$是非负递减函数。

若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$$

$$=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由哥西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散 .

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 发散，从而原级数发散 .

综上所述，可知原级数仅当 $p=1,q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛 .

2620.3

Предел равен $\frac{1}{4}$

$$\operatorname{tg} x = x$$

$$x = (1+2n)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) \text{ - const} \qquad x = \lambda_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = \frac{1}{(1+2n)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} : \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \text{ - сход}$$

2621

Следовательно ряд расходится

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$\ln(n!) = \ln(n) + \ln(n-1) + \ldots + \ln(1).$$

$$n\ln(n) = \underbrace{\ln(n) + \ln(n) \ldots \ln(n)}_{n \text{ раз}}$$

$$\ln(n!) < n\ln(n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln(n)}$$

$\frac{1}{n\ln(n)}$ - расход. (см. пункт 2б(9)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(n!)}.$$

2626

№2626 Исследовать сходимость:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})} = \frac{4}{n^{\alpha}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \left(\frac{4}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}_{2}\right)}\right) = \lim \frac{2}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

ряд сходится при $\alpha+\frac{1}{2}>1$, $\underline{\alpha>\frac{1}{2}}$

(ряд Дирихле

2629

Составляем двойное неравенство

2629. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

解 当 $x\neq 0$ 及 $-1<x<+\infty$ 时，有

$$\ln(1+x)<x.$$

利用上式，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

(Смотри ↓)Преобразуем неравенство умножив на -1 и взяв корень. Далее выражаем правую часть как квадрат разности деленную на сумму, что меньше следующей дроби (в знаменателе вместо двух, можно поставить 1, ответ не изменится), а далее по признаку сравнения ряд сходится. (Смотри ↓)

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$$

于是，

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

2631

№2631.

По Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{e^{-\sqrt[3]{n+1}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} - 1\right) \,(=)$$

т.к. $\lim \frac{e^t - 1}{t} = 1 \Rightarrow$ следует из II замеч. предела.

$$(=)\ \lim_{n\to\infty} n \underbrace{\left(\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} - 1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\right)}_{=1} \cdot \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) =$$

$= $ домножаем на сопр. $= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2}} = +\infty$

т.к. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^1}{n^{2/3}(\ldots)}$

Сходится

2638

2638. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n*)},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{e^n} n^{n-\sqrt{n}} = b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e} n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to +\infty$（当 $n \to \infty$ 时），因此级数

当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时 $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$，且当 n 充分大时，级数的项不变号，故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right)$ 发散.

当 $a = \sqrt{bc}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$. 由于当 $n \to \infty$ 时，有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{8}(\ln b - \ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$ 收敛，即当 $a = \sqrt{bc}$ 时，原级数收敛.

∞

2642

2642. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}\right)=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}-1\right)\right)$$

1) Если $\alpha<0$ то $\ln\frac{1}{n^\alpha}\to+\infty$ при $n\to\infty$

$\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)<0$, т.к. $\sin\frac{1}{n^\alpha}<1$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)=+\infty$

и не выполняется необходимый признак сходимост

2) $\alpha=0$ $\quad \ln 1-\ln\sin 1=-\ln\sin 1\neq 0\Rightarrow$ расходится

3) $\alpha>0$ т.к. $\frac{1}{n^\alpha}>\sin\frac{1}{n^\alpha}$ то ряд - положительный

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}-1\right)=0$ (первый замечательный предел)

Более того, $\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}-1=\frac{\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{6n^{3\alpha}}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right)}{1/n^\alpha}-1=$

$$=-\frac{1}{6n^{2\alpha}}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)$$

Таким образом, $\ln\left(1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}-1\right)\right)\sim\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{1/n^\alpha}-1\sim\frac{1}{6n^{2\alpha}}$

но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^{2\alpha}}$ сходится, если $2\alpha>1$, тогда и исходный ряд сходится при $\alpha>\frac{1}{2}$

<u>Ответ</u>: сходится при $\alpha>\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha\leq\frac{1}{2}$

2639

2639. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\ln n^{\frac{\ln n}{n}}}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}\ln n}}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\overset{\to 0}{\frac{\ln^2 n}{n}}}}{\underset{\to\infty}{\ln n}} = 0<1$

ряд сходится

2645

2645.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!}$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{((n+2)!)^{n+1}}{2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n+2)!}\cdot\frac{2!\,4!\ldots(2n)!}{((n+1)!)^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(2n+2)!}\cdot\left(\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(2n+2)!}(n+2)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{n+2}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+2}{2n+1}\cdot\frac{n+2}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{2n+2}\right)$$

последний предел существует, так. как это предел убывающей последовательности, ограниченной снизу нулём

$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{2n+2}\right) \le \left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n$, но

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\left(-\frac{1}{n+3}\right)\right)^{(n+3)}}_{\to\frac{1}{e}}\right)^{\frac{n}{n+3}\to 1} = \frac{1}{e} < 1$$

но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ т.е. ряд сходится по признаку D'Alembert

2647

(2647) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где

$$u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$$

$$\sqrt[4]{1+x^4} > x \Rightarrow \int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx > \int\limits_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2}$$

$$u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx} < \frac{1}{n^2/2} = \frac{2}{n^2}$$

но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ - сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится.

2679

Ряд сходится условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

По Лейбницу:

1) $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ $+$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$ $+$

Ряд из модулей расход.

2669

2669 $\sum(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

Решим неравенство $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} < \frac{\sqrt{n}}{n+100} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{n+1}{n}} < \frac{n+101}{n+100} \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{n+100} \Leftrightarrow$$

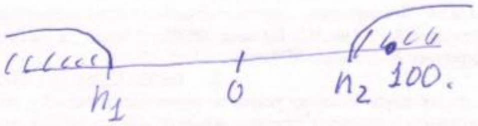
$$\Leftrightarrow \cancel{1}+\frac{1}{n} < \cancel{1}+\frac{2}{n+100}+\frac{1}{(n+100)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{2(n+100)+1}{(n+100)^2} \Leftrightarrow (n+100)^2 < 2n^2+201n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+200n+10000 < 2n^2+201n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-10000>0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{40001}}{2}$$



Таким образом, при $n \geq 100$

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} < \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

Тогда, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+100} = 0$, то выполняются условия признака Лейбница (для „хвоста" ряда, начиная с сотого члена) и ряд сходится условно.

2716

№ 2716

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{x}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,x^n}{n\,x^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{xn} = \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} 1 = \frac{1}{x}$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Rightarrow |x| > 1$$

Сходится абсолютно при |x|>1

2721

2721 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$ – знакоперемен.

По Даламберу

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}\cdot \sin^{n+1} x}{(n+1)^2}\right| : \left|\frac{2^n \sin^n x}{n^2}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2|\sin x| \frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= 2|\sin x| \lim_{n\to\infty} \overset{\to 1}{\frac{n^2}{(n+1)^2}} < 1$$

условие сх-ти.

$2|\sin x| < 1, \Rightarrow |\sin x| < 1/2, \Rightarrow$

$|x \pm \pi k| < \pi/6, \; k = 0, 1, 2, \dots$

Пусть $|x \pm \pi k| = \pi/6, \Rightarrow |\sin \pi/6| = \frac{1}{2}$,

Подставим в исходный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Сходится.

Ряд из модулей сх-ся при:

$|x \pm \pi k| < \pi/6$ и $|x \pm \pi k| = \pi/6$,

$\Rightarrow$ исходный ряд абсолютно сх-ся

при $|x \pm \pi k| \le \pi/6$

#

2724

2724 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$.

При $|x|>1$ ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости

при $|x|=1$ ряд не существует.

При $|x|<1$ рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|$$ и применим к нему

формулу Коши - Адамара

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x|^n}}{\sqrt[n]{|1-x^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{|1-x^n|}} = |x| < 1$$

ряд сходится абсолютно.

т.е. ряд сходится абсолютно при $|x|<1$

Ответ сходится абсолютно при $|x|<1$

2727

2727. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$

1) При $x=-1$ ряд не существует.

2) при $|x|<1$ $\left|\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}\right| < |x|^n$ - сходится абсолютно

3) при $x=1$ получаем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ - сходится абсолютно

4) $|x|>1$ применим признак D'Alembert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x)^{n+1}}{|(1+x)\ldots(1+x^{n+1})|} \cdot \frac{|(1+x)\ldots(1+x^n)|}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = 0$$

ряд сходится абсолютно при $x \neq -1$

2638

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{1/2}}$$

Признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

при q < 1 - ряд сходится, q > 1 - ряд расходится, q = 1 - получаем неопределенность (дополнительные исследования).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}}}{\frac{n!}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}*\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}*(n+1)*n!}{\sqrt{n+1}*n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{1} = \infty$$

Поскольку q > 1, то ряд расходится.

2649

2649. $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}\,dx.$

64

解 由于

$$0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的*)，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*)事实上，$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}=0$，利用比较判别法即获证.

2663

71. Члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

◄ Рассмотрим, например, ряд

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\ldots=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{6n-5}}+\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Очевидно, этот ряд получается из данного ряда в результате такой перестановки: за тремя положительными членами следует один отрицательный. Покажем, что ряд расходится.

В силу неравенства $\frac{1}{\sqrt{6n-3}}+\frac{1}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{2}{\sqrt{6n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$, имеем оценку общего члена второго ряда: $a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6n-5}}$ по теореме 4, п.1.5, расходится, то по теореме 1, п.1.5, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится, что и требовалось. Заметим, что исходный ряд сходится по признаку Лейбница. ►

2671

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

解 $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = \sin\left[n\pi\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]$

$$=\sin n\pi\left[1+\frac{k^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$
$$=\sin\left[n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$=(-1)^n\sin\left[\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$
$$=(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛，故原级数收敛．

2675

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ — сход. абс.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2}\right| \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \begin{matrix} p \\ \parallel \\ 2>1 \end{matrix} \text{ — сх.}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

$$-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \frac{1}{10^2} - \dots - \frac{1}{(2n)^2} - \dots$$

2676

2676. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

且当 $p>1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

下面研究当 $0<p\leqslant 1$ 时原级数的收敛性，将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛，而叙列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的叙列，故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 收敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散，故当 $0<p\leqslant 1$ 时，原级数仅为条件收敛.

2682 (в билетах будет)

Определить только область абсолютной сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}.$$

◀ Очевидно, при $p \leqslant 0$ ряд расходится, поскольку при этом не выполняется необходимое условие сходимости. При $p > 0$, как и в предыдущем примере, представим общий член ряда в виде

$$\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p + \sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1} = n^{-p}\sin\frac{n\pi}{4}\left(1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1 - \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ сходится, по признаку Дирихле, при $p > 0$, поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| < \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}, \quad \frac{1}{n^p} \downarrow 0; \quad n \to \infty.$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ при $p > 0$ сходится также по признаку Дирихле, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

сходится по теореме 4, п.1.5, только при $p > \frac{1}{2}$. Поэтому полуразность этих рядов

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{12}}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

является сходящимся при $p > \frac{1}{2}$ рядом (при $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ расходится к $+\infty$, поэтому и последний ряд расходится к $+\infty$). Следовательно, исходный ряд сходится лишь при $p > \frac{1}{2}$.

Для установления области абсолютной сходимости воспользуемся оценками

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{\left|1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right|} \leqslant \frac{2\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}, \quad \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p} = \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p} \leqslant \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$$

и теоремами 1, 4, п.1.5. Из этих неравенств следует, что данный ряд сходится абсолютно лишь при $p > 1$. Поэтому при $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ ряд сходится условно. ▶

2690

2690. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

解 记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$. 显然$\{a_n\}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}[\cos n(n-1) - \cos n(n+1)]\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}[\cos 0 - \cos N(N+1)]\right| \leqslant 1,$$

有界$(N=1,2,\cdots)$，故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2698 (не будет в билетах, но очень может быть допом)

Абель. Что-то ограниченное на сходящиеся? при p=1 или p=½   (по дирихле сходится вроде как)

2717

2717. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|} = 1,$$

故仅当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1$即$(1-x)^2 < (1+x)^2$或$x > 0$时，级数绝对收敛.

当$x=0$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$，显见它为条件收敛. 当$x<0$时，原级数通项不趋于零，故发散.

x>0 сходится абсолютно

x=0 сходится условно (по Лейбницу) и расходится по модулю

x<0 расходится (по необходимому признаку)

2719

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$4x^2 < 1 + 2x^2 + x^4, (x^2-1)^2 > 0,$

即 $|x| \neq 1$. 于是，当 $|x| \neq 1$ 时，级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，由 2689 题的结果知它是条件收敛的.

当 $x = 1$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，仍由同题的结果知它是发散的.

2731

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

解 对于任意的 x，只要 n 足够大，该项就为正. 因此，它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

при x>1 сходится абсолютно
при x <= 1 расходится

2747

Это может быть решается на основе теоремы из 20 вопроса. Скорее всего её может не быть. Может быть допом.(нет)

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时，$f_n(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}=g(x).$$

由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，故若令 $g'(x)=0$，即求得 $x=\frac{n}{n+1}$. 显然，当 $0<x<\frac{n}{n+1}$ 时，$g'(x)>0$；当 $\frac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\frac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值. 于是，对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有

$$g(x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零.

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|$$
$$=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 x.

2769

(2769) Исследовать характер сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n \quad , \quad x\in[0;1]$$

Пусть S_n - частичная сумма этого ряда. Тогда

$$S_n = 1-\cancel{x}+\cancel{x}-\cancel{x^2}+\ldots+\cancel{x^n}-x^{n+1} = 1-x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in[0;1) \\ 0, & \text{если } x=1. \end{cases}$$

Так как в пределе получилась разрывная функция, то сходимость неравномерная.

2749

(2749) Исследовать последовательность на равномерную сходимость в указанном промежутке.

$$f_n(x)=\frac{1}{x+n} \quad , \quad x\in(0;+\infty)$$

Заметим, что $\quad 0<\dfrac{1}{x+n}<\dfrac{1}{n}$

Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, то $\quad f_n(x)\rightrightarrows 0$ при $x\in(0;+\infty)$

($\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость)

(2751) То же для

2751

сходимость)

(2751) То же для

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$$

а) $x\in[0;1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$

Заметим, что $\quad 0\le\dfrac{x^n}{1+x^n}<x^n\le(1-\varepsilon)^n$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n=0$, то $\quad f_n(x)\rightrightarrows 0$ при $x\in[0;1-\varepsilon)$

б) $1-\varepsilon \le x \le 1+\varepsilon$ (или $x \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [1-\varepsilon; 1) \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 \\ 1, & \text{если } x \in (1; 1+\varepsilon) \end{cases}$$

Так как в пределе получается разрывная функция, сходимость не может быть равномерной.

в) $x \in [1+\varepsilon; +\infty)$, $\varepsilon > 0$

Функция $f_n(x)$ является возрастающей на указанном промежутке (проверьте!) Тогда

$$\frac{(1+\varepsilon)^n}{1+(1+\varepsilon)^n} \le \frac{x^n}{1+x^n} < 1, \text{ но } \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)^n}{1+(1+\varepsilon)^n} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows 1, \text{ если } x \in [1+\varepsilon; +\infty)$$

2752

2752 То же для

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

а) $x \in [0; 1]$

$$\forall x \in [0;1] \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+x^2\right)} = 0$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{2nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon \Rightarrow (\varepsilon x^2)n^2 - (2x)n + \varepsilon > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon x}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon x}; +\infty\right)$$

Заметим, что при $x \to 0+$ величина $\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon x} \to +\infty$

то есть для выбранного ε нельзя найти независящее от x N, такое, что $\forall n > N$ $\frac{2nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$, таким образом, $\{f_n(x)\}$ сходится к 0, но неравномерно б) $x \in (1; +\infty)$

$\forall x \in [1; +\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0$

Заметим, что в этом случае $\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon x} < \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon}$

Поэтому, если взять $N = \left[\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right]$

(квадратные скобки обозначают целую часть), то

$\forall n > N$ будет выполнятся $\frac{2nx}{1+n^2x^2} < \varepsilon$.

Так как N выбирается независимым от x, то

$f_n(x) \rightrightarrows 0$ при $x \in (1; +\infty)$

2759

2759 То же для

$f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$, $x \in (0; 1)$

$\forall x \in (0; 1)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} = 0$, причём $\frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} < 0$

$f_n'(x) = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n} - \frac{1}{n} = \frac{\ln \frac{x}{n} - 1}{n} < 0$ $\forall x \in (0; 1)$

т.е. $f_n(x) \downarrow (0; 1)$, то есть

$0 > f_n(x) > f_n(1) = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}$

но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} = 0$ $\Rightarrow$ $f_n(x) \rightrightarrows 0$ при $x \in (0; 1)$

2771

(2771) Исследовать характер сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}, \quad x\in(0;+\infty)$$

$\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} \sim \frac{1}{n^2 x}$ (при $n\to\infty$), то есть ряд сходится при $\forall x\in(0;+\infty)$, как ряд Дирихле, однако „x" в знаменателе не даёт ему возможности сходиться равномерно

2774

(2774) Доказать равномерную сходимость рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, как ряд Дирихле т. е. исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $x\in[0;+\infty)$

Покажем, что $\frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{1}{2n^2}$ (*)

Действительно, $\frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{1}{2n^2} \Leftrightarrow 2n^2x \le 1+n^4x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^4x^2-2n^2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (n^2x-1)^2\ge 0$, т. е. (*) выполняется при $x>0$

Т. к. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ – сходится, то исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса.

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$

Рассмотрим функцию $y=f(x)=\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$

Нетрудно убедиться (проверьте!) что эта функция достигает наибольшего значения на отрезке $[-a;a]$ при $x=\pm a$

Тогда $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right) \le \ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right)$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right)$ (v) сходится.

$$\ln\left(1+\frac{a^2}{n\ln^2 n}\right) \sim \frac{a^2}{n\ln^2 n} \quad \text{при } n\to\infty$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ (*) изучим с помощью интегрального признака Коши.

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x} = \int\limits_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Bigg|_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

то есть ряд (*) сходится, следовательно сходится и ряд (v), по предельному признаку сравнения. Таким образом, исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $x \in R$

Заметим, что ф-ция $f(x) = \frac{2x}{x^2+n^3}$ - нечётная. Поэтому будем рассматривать только $x > 0$. Можно показать, что наибольшего значения эта функция достигает при $x = n^{3/2}$. Но тогда

$$\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3} \le \operatorname{arctg} \frac{2n^{3/2}}{2n^3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{3/2}} \text{ при } n \to \infty$$

но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится как ряд Дирихле. Тогда, по предельному признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}}$. Далее, так как для любого действительного x:

$$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}\right| \le \operatorname{arctg} \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ то}$$

и исходный ряд сходится равномерно.

2778

(2778) Исследовать на равномерную сходимость

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}, \quad x \in [0; 2\pi]$$

Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=2} (-1)^n$ и $\sum\limits_{n=2} \frac{1}{n+\sin x}$

Заметим, что частичные суммы первого ряда ограничены ($0 \le S_n \le 1$), в то время как последовательность $\frac{1}{n+\sin x}$ равномерно и монотонно стремится к 0. То есть исходный ряд сходится равномерно по признаку Дирихле.

2781

(2781) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$, $x\in[0;+\infty)$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin x \sin nx$ и его частичную сумму $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin x\sin nx = 2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\sin kx =$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2}\left(\cos\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)-\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)=$$

$$=\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cancel{\cos\frac{3x}{2}}+\cancel{\cos\frac{3x}{2}}-\cancel{\cos\frac{5x}{2}}+\ldots+\cancel{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=$$

$$=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2} \Rightarrow |S_n|\le 2$$

Заметим также, что последовательность $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ монотонно и равномерно стремится к 0 при $n\to\infty$

Тогда по признаку Дирихле исходный ряд сходится равномерно

2812

(2812) Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$$

По формуле Коши-Адамара радиус сходимости R определяется как

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}}=1$$

То есть ряд сходится по крайней мере при $x\in(-1;1)$

Если $x=1$ то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$

Если $x=-1$ то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится абсолютно при $p>1$
сходится условно при $0<p\le 1$
расходится при $p\le 0$

Ответ: при $p>1$ сходится абсолютно и равномерно на $[-1;1]$

при $p=1$ сходится абсолютно при $x\in(-1;1)$

сходится условно при $x=-1$

сходится равномерно на $[-1;1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$

при $0<p<1$ сходится абсолютно при $x\in(-1;1)$

сходится условно при $x=-1$

сходится равномерно на $[-1;1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$

при $p\le 0$ сходится абсолютно при $x\in(-1;1)$

сходится равномерно на $[-1+\alpha;1-\varepsilon]$, $\alpha>0$, $\varepsilon>0$

во всех остальных случаях расходится.

2814

2814 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

Для определения радиуса сходимости R используем формулу Даламбера:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

В нашем случае $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно по крайней мере на интервале $(-4;4)$

по критерию ...

Исследуем сходимость в граничных точках этого интервала

Если $x=4$ то ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$

и для него не выполняется необходимый признак сходимости, т.к. $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} > 1$.

Если $n=-4$ то ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 4^n (n!)^2}{(2n)!}$

Для этого ряда также не выполняется необходимый признак сходимости

Таким образом, ряд сходится на интервале $(-4; 4)$, причём абсолютно. При этом, если вспомнить теорему Абеля, ряд сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале.

2816

2816 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$

Для определения радиуса сходимости используем формулу Коши-Адамара

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

В нашем случае $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Тогда $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{1}{e}$

Таким образом, ряд сходится абсолютно по крайней мере на интервале $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$

Проверим сходимость ряда на границах этого интервала

Если $x=\frac{1}{e}$ то ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Заметим, что $\frac{1}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\frac{e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^n}=e^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=$

$=e^{n^2\left(\frac{1}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n}=e^{\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}\to 1$ при $n\to\infty$

Таким образом, на границе $x=\frac{1}{e}$ не выполняется необходимый признак сходимости.
Нетрудно проверить то же для $x=-\frac{1}{e}$.

Таким образом, ряд сходится на интервале $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$ и, в соответствии с теоремами Абеля, сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале.

Замечание На самом деле ряд будет сходится равномерно на любом подмножестве интервала сходимости, которое можно включить в отрезок, содержащийся в этом интервале.

2818

2818 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

Для нахождения радиуса сходимости этого ряда воспользуемся формулой Даламбера. В нашем случае $$a_n=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{2^n}$$

Тогда $$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\overset{\lim_{n\to\infty}}{=}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\left(\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right)^p\cdot2^{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^p=2$$

Таким образом, если $|x-1|<2$ то ряд сходится абсолютно, т.е. ряд сходится абсолютно по крайней мере на интервале $(-1;3)$

Проверим сходимость ряда на концах интервала

Если $x=3$ то ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n)}\right)^{p}$$

Для анализа сходимости этого ряда используем <u>признак Раабе:</u>

Для положительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q$ тогда

при $q>1$ ряд сходится, при $q<1$ ряд расходится

В нашем случае

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p}-1\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{p}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\cancel{1}+\frac{p}{2n+1}+\bar{o}\left(\frac{1}{n}\right)-\cancel{1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{p}{2n+1}=\frac{p}{2}$$

т. е. при $p>2$ ряд сходится, при $p<2$ расходится

Заметим, что справедливо неравенство:

$$\frac{1}{4n+1}\le\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^{2}<\frac{1}{2n+1}$$

(можно доказать по индукции)

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}$ расходится (можно сравнить с гармоническим рядом)

следовательно, при $p=2$ ряд расходится.

Итак, при $x=3$ ряд сходится абсолютно при $p>2$ и расходится при $p\le 2$

Если $x=-1$ то ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^p(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$

Очевидно, что при $p>2$ ряд сходится абсолютно (см. предыдущую страницу)

Заметим, что при $p>0$ ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница для знакочередующихся рядов, так как

$$b_{n+1}<b_n \quad \left(b_{n+1}=b_n\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p,\ \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1\right)$$

и $$\lim_{n\to\infty} b_n=0 \quad \left(\text{т.к. } b_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\right)$$

Таким образом, при $0<p\le 2$ ряд сходится условно. Если же $p\le 0$ то не выполняется необходимый признак сходимости ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n\ne 0$) и ряд расходится.

Итак, подытожим.

Ответ 1) $p\le 0$ исходный ряд сходится абсолютно на интервале $(-1;3)$ и равномерно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале.

2) $0<p\le 2$ исходный ряд сходится на промежутке $[-1;3)$, причем при $x=-1$ условно, а при $x\in(-1;3)$ – абсолютно. Ряд сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в $[-1;3)$, например, на отрезке $[-1;3-\varepsilon]$.

Обратите внимание, что точка, где ряд сходится условно, может входить в область равномерной сходимости!

3) $p>2$ исходный ряд сходится абсолютно и равномерно (см. теорему Абеля!) на $[-1;3]$

2820

2820) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

Обращаю внимание, что a_n может быть как положительным, так и отрицательным. Поэтому радиус сходимости будем искать по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)\cdot(n+1)!}{n!\cdot m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно по крайней мере в интервале $(-1; 1)$

Исследуем сходимость на границах этого интервала

Если $x=-1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}(-1)^n$

Применим к этому ряду

<u>Признак Гаусса</u> Если для положительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ возможно представление

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}, \text{ где}$$

$|\theta_n| < C$, $\varepsilon > 0$, то при $\lambda > 1$ ряд сходится, при $\lambda < 1$ ряд расходится, если $\lambda = 1$, $\mu > 1$ ряд сходится, если $\lambda = 1$, $\mu \le 1$ ряд расходится

В нашем случае $b_n = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\right|$

Тогда при $m \neq 0$

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \left|\frac{n+1}{-n+m}\right| = \frac{n+1}{n-m} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-m} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}+\underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

(при достаточно больших n)

$$= 1 + \frac{m+1}{n} + \underline{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Таким образом, в нашем случае $\lambda = 1$, $\mu = m+1$

т. е. при $\underset{\Updownarrow\atop m>0}{m+1>1}$ ряд сходится, при $\underset{\Updownarrow\atop m\le 0}{m+1\le 1}$ - расходится

Заметим, однако, что при $m=0$ ряд сходится, как состоящий из нулей!

Если $x=+1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$

этот ряд, как можно проверить, сходится условно при $-1<m<0$.

Таким образом, получаем

Ответ Если $m\ge 0$ ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-1;1]$

Если $-1<m<0$ ряд сходится на $(-1;1]$, причем абсолютно при $x\in(-1;1)$ и условно при $x=1$ при этом ряд сходится равномерно на $[-1+\varepsilon;1]$

Если $m\le -1$, ряд сходится абсолютно на интервале $(-1;1)$ и равномерно на любом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$

2822

2822 $\sum \frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,\ b>0)$

Радиус сходимости найдем по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}}}$$

Пусть, для определённости, $a \geq b$ тогда.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot \frac{1}{n}}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e^0} = \frac{1}{a}$$

т. е. $R = a$.

Таким образом, ряд сходится абсолютно по крайней мере на интервале $(-a;a)$

Проверим сходимость на концах интервала.

Пусть $x=a$. Тогда ряд имеет вид $\sum \frac{a^n}{a^n+b^n}$

но $\frac{a^n}{a^n+b^n} = \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} \to 1$ при $n\to\infty$, т. е

не выполняется необходимый признак сходимости

т. е ряд расходится.

При $x=-a$, очевидно, необходимый признак также не выполняется.

Ответ: Ряд сходится абсолютно на $(-a;a)$ и равномерно на любом отрезке $[-a+\varepsilon;\ a-\varepsilon]$

2813

146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

◀ По формуле Коши—Адамара имеем

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{9^k+4^k}{2k}} = 3,$$

поэтому при $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x = -\frac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} \cdot \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

сходится, так как равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x = -\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n3^n},$$

в силу признака сравнения, расходится $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n3^n} = \frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n} > \frac{1}{4n}\right)$. Следовательно, в точке $x = -\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, в точке $x = -\frac{2}{3}$ — расходится. ▶

2815

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} \cdot x^n \, (0 < a < 1)$.

解 记 $a_n = a^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{2n+1}} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$；收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.

2817

149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 1$.

◀ Находим радиус сходимости ряда по формуле (2), п.5.1. Имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

следовательно, данный степенной ряд сходится по всей числовой прямой. ▶

2819 (ее не будет)

2821

Радиусы 1 и 2 находим как обычно an/an+1

2821. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$.

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1=\frac{1}{a}$ 及 $R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径 $R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $x=-R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}, \qquad (1)$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\cdot\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛．因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛．当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \qquad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛 $(b<a)$ 或条件收敛 $(b=a)$，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛．

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数．

2825

Там двойные факториалы, скорее всего не будет

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

且$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，故级数(1)发散．

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{2}$$

由于

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 0$. 又由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1,2,\cdots),$$

故 $|a_n| > |a_{n+1}|$. 因此，级数(2)收敛．但由于级数(1)发散，故级数(2)条件收敛．

2828

2828. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

解 记 $a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛．因此，级数(1) 发散．

当 $x=-\frac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数．因此，它也是发散的．

надо доисследовать на концах

2829

2829. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^{n}}{\ln n}x^{n}$.

解 记 $a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^{n}}{\ln n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{3}$时，对于 $n=8k$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k+\ln 8} > \frac{1}{k+\ln 8} > 0,$$

且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明：当 $n = 8k + 1, 8k + 2, \cdots, 8k + 7$ $(k = 1,2,\cdots)$ 时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm \frac{1}{3}\right)^n \tag{1}$$

收敛．事实上，$\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零，且

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{m} \left|\left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n\right| \cdot \frac{1}{3^n} \\
&\leqslant \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n < \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n \\
&< \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{2}}{3}} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 5,
\end{aligned}$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛.

于是，当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时，原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的．因此，它是发散的.

2852

(2852) $\cos^2 x$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$$

2855

(28.55) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots\right)' =$$

$$= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

Область сходимости: $x \in (-1; 1)$, т.к. радус сходимости совпадает с радиусом сходимости разложения $(1-x)^{-1}$, можно проверить, что при $x = \pm 1$ ряд расходится.

2857

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right)\right) =$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}x + \frac{\cancel{2}x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^5}{5} + \ldots + \frac{\cancel{2}x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

{На ~~какую~~ теорему следует сослаться, доказывая законность таких операций над рядами?

Исследуем сходимость получившегося ряда.

D'Alembert: $R = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = 1$ (а что ещё могло получиться)

Исследуем сходимость при $x = \pm 1$

Если $x = 1$ то получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ – расходится

Если $x = -1$ то получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n-1}\right)$ – расходится

область сходимости: $(-1; 1)$

2860

2860 $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)} = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x+1+x-1}{(1-x)^2(1+x)} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{1-x^2}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\Big(\underbrace{1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots}_{\text{см. } 2855} - \left(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots\right)\Big) =$

$= x + 2x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + \ldots\ldots =$

$= \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n + \dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)x^n$ (некоторая „подгонка" под общую формулу)

Определим область сходимости (Должно быть $R=1$?)

Cauchy: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}\left(n+\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)} = 1$ (что же ещё?)

Проверим сходимость при $x=\pm 1$

$x=1$ $\quad \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\dfrac{1-(-1)^n}{2}\right)$ – да тут не выполняется необходимый признак сходимости!

при $x=-1$ – то же

Итак, ряд сходится (абсолютно) при $x\in(-1;1)$

2862.1

2862.1 $$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}+\right.$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)x^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)x^{2n+1}\right)$$

Чему равно $f^{(1000)}(0)$?

Так как $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ то $f^{(1000)}(0)=a_{1000}\cdot 1000!$

но $a_{1000}=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{500}\right)\cdot 1000!=1000!$

2864

2864 $\quad \dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \dfrac{x\sin\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} =$

$$= \frac{x\sin\alpha}{(x-\cos\alpha-i\sin\alpha)(x-\cos\alpha+i\sin\alpha)} = \frac{ix}{2}\left(\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right) = \frac{ix}{2}\left(\frac{1}{x-e^{-i\alpha}} - \frac{1}{x-e^{i\alpha}}\right) =$$

$\boxed{\text{Формула Эйлера } e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha}$

$$= \frac{ix}{2}\left(\frac{e^{i\alpha}}{xe^{i\alpha}-1} - \frac{e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}x-1}\right) =$$

$$= \frac{ix}{2}\left(\frac{e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}x} - \frac{e^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}}\right) = \frac{ix}{2}\left(e^{-i\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\alpha}x^n - \right.$$

$$\left. - e^{i\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\alpha}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}\left(e^{-i(n+1)\alpha} - e^{i(n+1)\alpha}\right)x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{2}\left(\cancel{\cos(n+1)\alpha} - i\sin(n+1)\alpha - \cancel{\cos(n+1)\alpha} - i\sin(n+1)\alpha\right)x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+1)\alpha \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha \cdot x^n$$

Область сходимости: $-1 < x < 1$ Почему?? (Cauchy !)

2872

2872 $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$

$$f'(x) = \frac{-2\cos\alpha + 2x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{2x - 2\cos\alpha}{x\sin\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha\cdot x^n =$$

(см. 2864)

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\cdot x^n - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha\, x^{n-1} =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\cdot x^n - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n+1)\alpha\, x^n =$$

$$= -2\cos\alpha + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\right)x^n =$$

$$= -2\cos\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin n\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\cos n\alpha - \cos^2\alpha\sin n\alpha\right)x^n =$$

$$= -2\cos\alpha + \frac{2}{\cancel{\sin\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin^2\alpha\sin n\alpha - \cos\alpha\cancel{\sin\alpha}\cos n\alpha\right)x^n =$$

$$= -2\cos\alpha - 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n+1)\alpha\, x^n = -2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n+1)\alpha\, x^n$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx + C = -2\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n+1)\alpha\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n+1)\alpha}{n+1}\cdot x^{n+1} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n$$

радиус сходимости конечно, 1 (Cauchy), но что будет на границах области сходимости? Если $x = \pm 1$, то стоит использовать признак Дирихле, чтобы убедиться в сходимости ряда. Итак, ряд сходится, если $x \in [-1; 1]$

2873

2873. а) $f(x) = (1+x)\ln(1+x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x) =$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \dots\right) =$$

$$= x + \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{2}\right) + \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \dots =$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \dots = x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n(-1)^n}{n(n-1)} \qquad -1 \le x \le 1$$

2873 б)

$$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x=(*)$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(*)=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(x+\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}+\ldots+x-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\underbrace{\left(1+(-1)^n\right)}_{\substack{=0 \text{ если } n- \\ -\text{нечётное.}}}x^{2n+1}=$$

пусть $n=2k$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4k+1}.$$

2873 в) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}=$

$$\left\{\begin{aligned}&\left(\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+4x)-(2-2x)\cdot 4}{(1+4x)^2}=\frac{-10}{(1+4x)^2+(2-2x)^2}=\\&=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\left(1-4x^2+(4x^2)^2-(4x^2)^3+\ldots\right)=\\&=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\cdot 2^{2n}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\cdot 2^{2n+1}\end{aligned}\right\}$$

$$=-\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\cdot 2^{2n+1}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n-1}}{2n-1}$$

$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$.

(2873 e) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$

$$f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+4x^2-4x^4}} =$$

$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} = 2\,\mathrm{signum}(x)\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\,\mathrm{signum}(x)\cdot\left(1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-x^2)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+\ldots+\right.$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n x^{2n}+\ldots =$$

$$= 2\,\mathrm{signum}(x)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+\ldots\right)$$

$f(0) = \arccos(1-2\cdot 0^2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = 2\,\mathrm{signum}(x)\cdot\left(x+\frac{x^3}{4}+\frac{1\cdot 3}{5\cdot 2^2 2!}x^5+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{signum}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n =$

$= 2^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n =$

$= 2^n\cdot n!$

Радиус сходимости найдем по формуле D'Alembert:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!\,(2n+2)!!\,(2n+3)}{(2n)!!\,(2n+1)\,(2n+1)!!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)} = 1$$

Что будет на границах промежутка сходимости??

$x=-1$ ряд: $2\,\mathrm{signum}(x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ → сходится по признаку Лейбница

но абсолютно ли??

$x=1$ ряд $2\,\mathrm{signum}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$

Применим признак Раабе

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{\cancel{4n^2}+10n+6-\cancel{4n^2}-4n-1}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+6)}{(2n+1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

(сходится)

Т.О. ряд сходится абсолютно на $[-1;1]$

2875

(2875) $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по положительным степеням бинома $x+1$.

$$f(x) = \ln \frac{1}{(x+1)^2+1} = -\ln\left(1+(x+1)^2\right) =$$

$$= -(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2} + \frac{(x+1)^6}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n}.$$

Радиус сходимости определим по Cauchy.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{n}} = 1$$

т.е. ряд сходится (абсолютно) по крайней мере при $-1 < x+1 < 1$, т.е. на интервале $x \in (-2;0)$

Проверим сходимость на концах этого интервала

При $x=0$ ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Сходится (Лейбниц)

При $x=-2$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (сходится (Лейбниц))

Таким образом, ряд сходится на отрезке $[-2;0]$, причем внутри – абсолютно, на границах – условно

2876

(2876) Функцию $f(x)=\frac{1}{1-x}$ разложить в степенной ряд по отрицательным степеням переменной x

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ldots+\frac{1}{x^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$$

Очевидно, этот ряд сходится, если $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ или

$$-1<\frac{1}{x}<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$$

Т. о., область сходимости состоит из двух открытых лучей

2878

(2878) Функцию $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x}{1+x}$

$$f(x)=\frac{x}{1+x}\cdot\sqrt{1+x}=y\sqrt{1+x}$$

Если $y=\frac{x}{1+x}$, то $\frac{1}{y}=\frac{1+x}{x}=\frac{1}{x}+1\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-1=\frac{1-y}{y}\Rightarrow$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow\sqrt{1+x}=\sqrt{1+\frac{y}{1-y}}=\sqrt{\frac{1-\cancel{y}+\cancel{y}}{1-y}}=(1-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x)=y(1-y)^{-\frac{1}{2}}=y\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-y)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-y)^2+\ldots\right.$$

$$\left.+\ldots\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-y)^n+\ldots\right)=$$

$$=y\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\,n!}y^n\right)=y+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^n=$$

$$=\frac{x}{x+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{n+1}$$

Промежуток сходимости (абсолютной) $|y|<1$

(срав. 2873 е))

т. е. $-1<\frac{x}{x+1}<1 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{x+1}+1>0\\ \frac{x}{x+1}-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{2x+1}{x+1}>0\\ -\frac{1}{x+1}<0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{2};+\infty)\\ x\in(-1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\frac{1}{2};+\infty)$.

2882

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$

$$f(x)=(1+x)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\dots\right)=$$

$$=1-\cancel{x}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2!}-x^2-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{2!}+\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!}+\dots=$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{1-n}{n!}x^n+\dots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1-n}{n!}x^n.$$

Сходится абсолютно $\forall x$

2851

2851. e^{-x^2}.

解 $$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$$

2856

2856. $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\cdots\right]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\qquad\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

2859

Разложить на дроби и использовать одну из базовых формул (1+x)^n

Указание. Разложить

2859. $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2863. $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=-1-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right)$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n\right.$$

$$\left.+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中$|x|<\min\left(\dfrac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\dfrac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1$.

2866

2866. $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$1+\frac{3x^2}{2}+\frac{15x^4}{8}+\frac{35x^6}{16}+O(x^7)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ (|x|<1).$$

2877

№ 2877.

$f(x)=\ln(x)$; $\dfrac{x-1}{x+1}=t$

$f\left(\dfrac{t+1}{1-t}\right)=\ln\left(\dfrac{t+1}{1-t}\right)$, т.к. $x>0$, то $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=|t|<1 \to$

$\ln\left(\dfrac{t+1}{1-t}\right)=\ln(1+t)-\ln(1-t)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{(2n-1)}}{2n-1}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n-1}$

Ответ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$; $(x>0)$

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$(|x|<1)$.

2886

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部,即得

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

Кароче, там типо мы говорим, шо это действительная часть от данного выражения. Далее с помощью формулы эйлера мы считаем эту херовину, ну а в ответ берём только то, шо нам нада, а именно действительная часть, вотъ)

178. $f:x\mapsto e^x\cos x$.

◀ Разлагая функцию $\bar{f}:x\mapsto e^{x(1+i)}$ в степенной ряд

$$\bar{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

и замечая, что $f(x)=\operatorname{Re}\bar{f}(x)$, получаем

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Поскольку $\left|\frac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{4}\right|\leqslant\frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}|x|)^n}{n!}$ сходится при $|x|<\infty$, то полученное разложение возможно также при $|x|<\infty$. ▶

-2889

2891

(2891) Выписать первые три отличные от 0 члена разложения функции в степенной ряд по степеням x.

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \dfrac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x} \qquad f'''(0) = 2$

$f^{IV}(x) = \dfrac{\sin x\,(16 + 8\sin^2 x)}{\cos^5 x} \qquad f^{IV}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{16 + 8\sin^2 x + 16\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x} \qquad f^{(5)}(0) = 16$

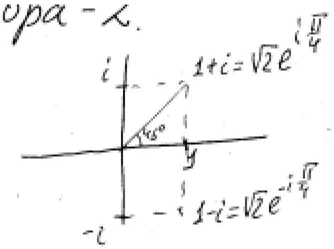
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \ldots = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

Область сходимости: $|x| < \frac{\pi}{2}$ (Почему?)

2892 не будет

еее рок

Разложение в ряд Тейлора-2.



2887. $f(x)=e^x\sin x$.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$f(x)=e^x\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{(1+i)x}}{2i}-\frac{e^{(1-i)x}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{2i}\Big(1+(1+i)x+\frac{(1+i)^2x^2}{2}+\ldots+\frac{(1+i)^nx^n}{n!}-$$
$$-1-(1-i)x-\frac{(1-i)^2}{2}x^2-\ldots-\frac{(1-i)^nx^n}{n!}-\ldots\Big)=$$

$$=\frac{1}{2i}\Big(1+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot x+\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}x^2}{2}+\ldots+\frac{(\sqrt{2})^ne^{in\frac{\pi}{4}}x^n}{n!}-\ldots-$$
$$-1-\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}x-\frac{2e^{-i\frac{\pi}{2}}x^2}{2}-\ldots-\frac{(\sqrt{2})^ne^{-in\frac{\pi}{4}}x^n}{n!}-\ldots\Big)=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}x+\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}x^2+\ldots+(\sqrt{2})^n\cdot\frac{1}{n!}\,\frac{e^{in\frac{\pi}{4}}-e^{-in\frac{\pi}{4}}}{2i}x^n+\ldots=$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot x+\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot x^2+\ldots+(\sqrt{2})^n\cdot\frac{1}{n!}\left(\sin\frac{\pi n}{4}\right)\cdot x^n+\ldots=$$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\ldots+(\sqrt{2})^n\cdot\frac{1}{n!}\left(\sin\frac{\pi n}{4}\right)x^n+\ldots$$

Область сходимости: $x\in R$.

2888

2888 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$; $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}x^m$

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\cdot\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}x^m=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+m+\cancel{2}}\dfrac{x^{n+m}}{n}=$

Пусть $k=n+m$. Тогда $n=1,2,\ldots,k$

$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{n}\right)(-1)^k\cdot x^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{k}\right)\cdot x^k$

2891

2891 Выписать первые три отличные от 0 члена разложения функции в степенной ряд по степеням x.

$f(x)=\operatorname{tg}x \qquad f(0)=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2x} \qquad f'(0)=1$

$f''(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3x} \qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=\dfrac{2+4\sin^2x}{\cos^4x} \qquad f'''(0)=2$

$f^{IV}(x)=\dfrac{\sin x\,(16+8\sin^2x)}{\cos^5x} \qquad f^{IV}(0)=0$

$f^{(5)}(x)=\dfrac{16+8\sin^2x+16\sin^2x\cos^2x}{\cos^6x} \qquad f^{(5)}(0)=16$

$\operatorname{tg}x=x+\dfrac{2}{3!}x^3+\dfrac{16}{5!}x^5+\ldots=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+\ldots$

Область сходимости: $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ (Почему?)

2896

2896 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Разложить в ряд $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot (1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots) =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n x^{n+m} = (*)$$

Пусть $n+m=k$ Тогда $k=0,1,2\ldots\ldots$,

$n=0,1,2\ldots k$

$$(*)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n\right)\cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(a_0+a_1+\ldots+a_k)x^k.$$

2895

2895 Разложить в степенной ряд по x:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$$

$$f(x) = 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \ldots$$

$$f'(x) = \frac{-2t+2x}{(1-2tx+x^2)^{3/2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{t-x}{(1-2tx+x^2)\sqrt{1-2tx+x^2}}$$

$$f'(x) = P_1(t) + 2P_2(t)x + 3P_3(t)x^2 + \ldots$$

$$f'(x) = \frac{t-x}{1-2tx+x^2}\cdot\left(1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \ldots\right)$$

$$(1-2tx+x^2)\left(P_1(t) + 2P_2(t)x + 3P_3(t)x^2 + \ldots + nP_n(t)x^{n-1} + \ldots\right)$$

$$= (t-x)\left(1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \ldots + P_n(t)x^n + \ldots\right)$$

x^0: $\quad P_1(t) = t$

x^1: $\quad -2tP_1(t) + 2P_2(t) = tP_1(t) - 1$

x^2: $\quad 3P_3(t) - 4tP_2(t) + P_1(t) = tP_2(t) - P_1(t)$

x^n: $\quad (n+1)P_{n+1}(t) - 2tnP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) = tP_n(t) - P_{n-1}(t)$

$P_1(t) = t$

$$P_2(t) = \frac{t P_1(t) - 1 + 2t P_1(t)}{2} = \frac{t^2 - 1 + 2t^2}{2} = \frac{3t^2-1}{2}$$

$$(n+1) P_{n+1}(t) = t(2n+1) P_n(t) - n P_{n-1}(t)$$

$$P_{n+1}(t) = t \, \frac{2n+1}{n+1} P_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t)$$

$$P_3(t) = \frac{5}{3} t \, \frac{3t^2-1}{2} - \frac{2}{3} t = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2} t^3 - \frac{3}{2} t$$

. . . . .

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \Big(t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} + \ldots \Big)$$

2902

2902 $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = (1-t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} t^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!} t^8 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right) \ldots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^{4n} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} t^8 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{4n} + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n x^{4n}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(4n+1) \cdot (2n)!!} x^{4n+1}$$

2904

2904 $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad (\operatorname{arctg} 0 = 0)$

$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$

$\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} = x - \frac{x^3}{9} + \dots$

область сходимости $|x| \le 1$

2906

2906 Вычислить сумму ряда

$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$

$f(x) = \int\limits_0^x \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| \Big|_0^x = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

область сходимости $|x| < 1$

2909

2909 $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} = f(x)$

$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \dots = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) =$

$= \frac{1}{x^2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots - x\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\ln(1-x) - x\right) =$

$= -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x} \qquad f(0) = 0$$

$$f(x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{z} - \frac{\ln(1-z)}{z^2}\right) dz =$$

$$= -\int_0^x \frac{\ln(1-z)}{z^2}\,dz - \ln|z|\Big|_0^x = \int_0^x \ln(1-z)\,d\left(\frac{1}{z}\right) - \ln|z|\Big|_0^x =$$

$$= \ln(1-z)\cdot\frac{1}{z}\Big|_0^x + \int_0^x \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}\,dz - \ln|z|\Big|_0^x =$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right) dz - \ln|z|\Big|_0^x =$$

$$= \frac{\ln(1-x)}{x} + 1 + \cancel{\ln|z|\Big|_0^x} - \ln|1-z|\Big|_0^x - \cancel{\ln|z|\Big|_0^x} =$$

$$= 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) = \frac{\ln(1-x)\cdot(1-x)}{x} + 1$$

(Область сходимости: $0 < |x| < 1$)

<u>Comment</u> (подстановка нижнего предела)

$$\lim_{z\to 0+}\left(-\ln(1-z)\cdot\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0+}\frac{-(-z)}{z} = 1.$$

2912

2912 $\quad x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \ldots = f(x)$

$$\int f(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \ldots + C =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \left(1+\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2+\frac{1}{4}\right)x^4 - \left(3+\frac{1}{5}\right)x^5 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \ldots -$$

$$-x^3(1-2x+3x^2-\dots) = x + \left(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\dots\right) -$$

$$-x^3(x-x^2+x^3-\dots)' = x-\ln(1+x) - x^3\left(\frac{x}{1+x}\right)' =$$

$$= x-\ln(1+x) - x^3\,\frac{1+\cancel{x}-\cancel{x}}{(1+x)^2} = x-\ln(1+x)-\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$f(x) = \left(\int f(x)dx\right)' = 1 + \frac{1}{1+x} - \frac{3x^2(1+x)^2-2x^3(1+x)}{(1+x)^4} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1+x} - \frac{3x^2(1+x)-2x^3}{(1+x)^3} = 1+\frac{1}{1+x} - \frac{x^3+3x^2}{(1+x)^3} =$$

$$= \frac{(1+x)^3-(1+x)^2-x^3-3x^2}{(1+x)^3} = \frac{\cancel{1}+3x+\cancel{3x^2}+\cancel{x^3}-\cancel{1}-2x-x^2-\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}}{(1+x)^3} =$$

$$= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$$

2932

2932 а) Вычислить с точностью до 0,001

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \qquad e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^{12}}{720}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{192}-\frac{x^{11}}{1200}\Big|_0^1 \approx$$

$$\approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{192}-\frac{1}{1200}\ ? =$$

$$= 0{,}748\ ?\ \ 7?$$

2885

2885. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x$.

解 $$f(x) = (1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad {}^{*)}$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$= x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$

$$(|x| \leqslant 1).$$

Кароче, это такая бредятина, шо пиздец

НО! **Мы выносим нулевой элемент(он равен x), затем перемножаем его с нашей скобкой(типа где 1+x квадрат), получаем (x + x^3) меняем основание у суммы с 0 на 1**

у (-1) в степени тоже. Ваще, дальше происходит несусветная хуёвина, мы берём этот x^3 и засовываем под сумму(т.к. наш x в степени(2к+1) как раз на 1 элементе будет равен x^3) , т.е нам надо вычесть из нашей суммы эту хрень оставшуюся, отсюда и получается разность дробей

Зачем, а главное нахуя, я сам не особо понимаю, но это вроде как подтверждённое объяснение этой залупы, воть

2892 (ее не будет)

2893 (скорее всего не будет, ибо похожа на 2892)

2893. $f(x)=\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}$.

解 与 2892 题的想法一样，可以考虑 $x\neq0$ 且 $|x|$ 很小的情形．于是有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left[1+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)^2+\cdots\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots \quad (0<|x|<\pi).$$

2897 (доп.вопрос)

a)R=min(R1,R2)

2903

2903 $\quad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right)\frac{1}{t}\,dt =$

$$= \int_0^x \left(\frac{1}{1!} - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots\right)dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$$

2905 (ее не будет)

2907

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$.

◀ Данный ряд, согласно формуле Коши—Адамара, имеет радиус сходимости, равный единице. Согласно , степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри интервала сходимости. Имеем $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2}$, $|x| < 1$. Отсюда интегрированием получаем $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x + C$. Полагая здесь $x = 0$, находим, что постоянная $C = 0$.

Окончательно имеем

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x.$$

Заметим, что в концевых точках интервала сходимости этот ряд сходится. Поэтому, согласно теореме Абеля, сумма ряда есть непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку функция $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ также непрерывна на этом отрезке, то последнее равенство справедливо при всех $x \in [-1, 1]$. ▶

2908

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$.

解 设 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$. 在收敛域 $|x| < +\infty$ 内逐项微分之，得

$$F'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

$$F(x) - F'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^{-x},$$

$$F(x) + F'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x.$$

将(1)式和(2)式相加，最后得

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^3 + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$(|x| < +\infty).$$

2911

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$.

解 设$F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \cdots$$

$$= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots)$$

$$= x(1 + x + x^2 + \cdots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1).$$

于是，

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)\right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

2913

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \ldots$.

◀ Общий член ряда имеет вид $a_n(x) = n(n+1)x^n$, поэтому

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)}} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд сходится к своей сумме при $|x| < 1$.

Почленно интегрируя рассматриваемый ряд в интервале $]-1, 1[$ дважды, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2}\left(\int S(x)\,dx\right) = x + x^2 + x^3 + \ldots - \frac{C_1}{x} + C_2 = \frac{x}{1-x} - \frac{C_1}{x} + C_2, \qquad (1)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, $x \neq 0$.

Дифференцируя равенство (1) дважды и учитывая, что $S(0) = 0$, окончательно находим $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x| < 1$. ▶

2936

№ 2936

Брысов А. М8О-209Б-18

$f(x) = \sin^4 x$ – чётная ф-ия

Пусть $x \in [-\pi; \pi]$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx =$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} ((1-\cos 2x)/2)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8} =$

$= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(\frac{3}{8} \cos nx -$

$- \frac{\cos 2x \cos nx}{2} + \frac{\cos 4x \cos nx}{8} \Big) dx =$

$= \frac{2}{\pi n} \cdot \frac{3}{8} \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+2)x + \cos(n-2)x}{4} dx +$

$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(4+n)x + \cos(4-n)x}{16} dx = \begin{cases} 0, & n \neq 2, n \neq 4 \\ -\frac{1}{2}, & n = 2 \\ \frac{1}{8}, & n = 4 \end{cases}$

$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

2940

f(x) = x, [-pi;pi]

Функция f(x) является не четной, поэтому a_0=0, a_n=0.

Рядом Фурье функции f(x) на интервале (0;T) по синусам кратных дуг называется ряд:

$$f(x)=\sum b_n\cdot sin(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{T})$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cdot sin(\frac{\pi\cdot n\cdot x}{T})dx$$

Для наших данных:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x*sin(\frac{\pi*n*x}{\pi})dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x*sin(n*x)dx =$$

$$\frac{2}{\pi}(-x*\frac{cos(n*x)}{n}+\frac{sin(n*x)}{n^2})\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}(-\pi*\frac{cos(\pi*n)}{n}+\frac{sin(\pi*n)}{n^2}-0) = -2*\frac{(-1)^n}{n}$$

Окончательно, получаем:

$$f(x)=\sum(-2\cdot\frac{(-1)^n}{n})\cdot sin(n\cdot x)$$

Примечание:

$\cos(\pi n) = (-1)^n$

$\cos(2\pi n) = 1$

$\sin(\pi n) = 0$

2942

интервалах следующие функции:

2942. $f(x)=|x|$, в интервале $(-\pi, \pi)$. $\left\{ \begin{matrix} l=\pi, \\ T=2\pi \end{matrix} \right\}$

$f(x)=|x|$ − чётная функция, $\Rightarrow b_n=0 \quad \forall n=1,2,\dots$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi$$

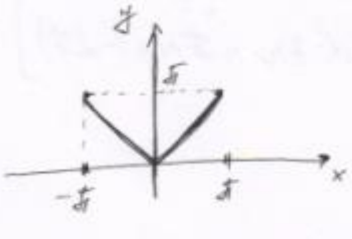
$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x\,d\sin nx=\frac{2}{\pi n}\cancelto{0}{x\sin nx\Big|_0^{\pi}}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos n\pi-1\right]=\left\{\begin{matrix}\cos\pi=-1\\ \cos 2\pi=1\\ \cos 3\pi=-1\\ \cos 4\pi=1\\ \dots\\ \cos(2k-1)\pi=-1\\ \cos(2k\pi)=1\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$



2944

2944. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开$f(x)=\pi^2-x^2$.

解 因为$f(x)=\pi^2-x^2$为偶函数,从而$b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2-x^2)dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^\pi=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi^2-x^2)\cos nx dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nx dx$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

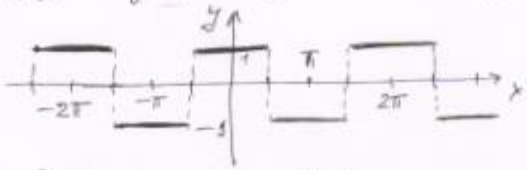
故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx=\pi^2-x^2\ (-\pi<x<\pi).$$

2952

2952. $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$ – чётная, $T = 2\pi$, $l = \pi$.

$b_n = 0, \ \forall n = 1, 2, \dots$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \in (0; \pi/2) \\ -1, & |x| \in (\pi/2; \pi) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx\,dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin nx \Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi n} \sin nx \Big|_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{2}{\pi n} \cancelto{0}{\sin n\pi} + \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}$$

$4 \sin \frac{\pi n}{2}$: $\quad n = 1 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \qquad n = 3 \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\qquad n = 2 \quad \sin \pi = 0 \qquad n = 4 \quad \sin 2\pi = 0$

$\dots$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \cos nx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \cos(2k-1)x$$

2957

№ 2957. Шиляева Н. М8О-204Б-18

$f(x) = |\sin x|$ – чётная функция $\Rightarrow$ $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$: Ответ.

2961

2961 Разложить в ряд Фурье

$y = f(x) = x^2$

а) в интервале $(-\pi; \pi)$ „по косинусам"

$$x^2 \to S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx =$$

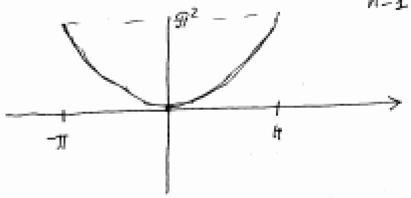
$$= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2\, d\sin(nx) = \frac{2}{\pi n}\underbrace{x^2 \sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{\pi n}\cdot 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\, d\cos nx = \frac{4}{\pi n^2}\, x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{4}{\cancel{\pi} n^2}\cdot\cancel{\pi}\cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}\underbrace{\sin(nx)\Big|_0^{\pi}}_{0} = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad S(x) \rightrightarrows f(x) = x^2$$



Следствие

$$\underset{\substack{\parallel \\ 0^2 = 0}}{S(0)} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot 1 \Rightarrow$$

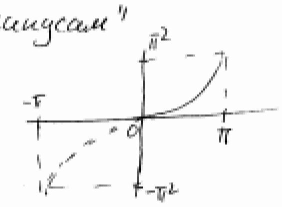
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \text{или}$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

б) $y = f(x) = x^2$ в интервале $(0;\pi)$

„по синусам"

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x^2\, d\cos nx = -\frac{2}{\pi n} x^2 \cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\pi^2\cos(n\pi) + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} x\, d\sin(nx) =$$

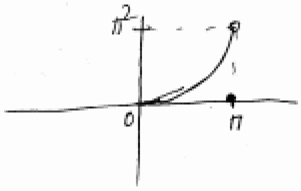
$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \cancel{\frac{4x}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}(-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} =$$

$$= 2\pi\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{\pi n^3}\underbrace{\left(1-(-1)^n\right)}_{\substack{0 \text{ если } n=2k \\ 2 \text{ если } n=2k-1}}$$

$$S(x) = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}$$

$S(x)$:



$S(\pi) = 0$

в) $f(x)=x^2$ в интервале $(0,2\pi)$, $T=2\pi$, $l=\pi$.
функция общего вида:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}x^2 d\sin nx=\cancel{\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}x^2\cancel{\sin nx}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}x\,d\cos nx=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}x\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{4}{n^2}\cancel{\cos 2\pi n}-\frac{2}{\pi n^3}\cancel{\sin nx}\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\int_{2\pi}^{0}x^2 d\cos nx=$$

$$=\frac{1}{\pi n}x^2\cos nx\Big|_{2\pi}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{-4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}x\,d\sin nx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^2}x\cancel{\sin nx}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^3}\cancel{\cos nx}\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n}$$

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

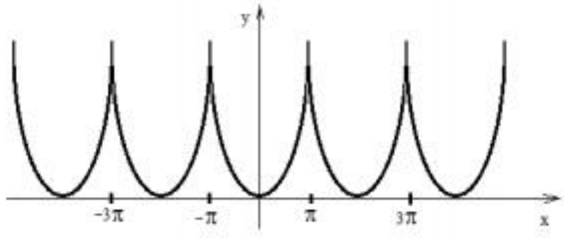


Рис 2961(а). Продолжение функции $f(x)=x^2$, $x\in(-\pi,\ \pi)$ на всю числовую ось по косинусам кратных дуг.

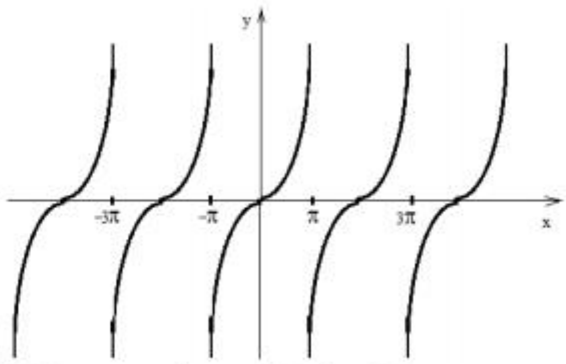


Рис 2961(б). Продолжение функции $f(x)=x^2$, $x\in(0,\ \pi)$ на всю числовую ось по синусам кратных дуг.

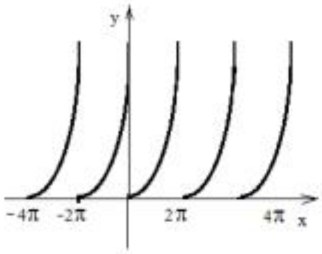


Рис 2961(в). Продолжение функции $f(x)=x^2$, $x\in(0,\ 2\pi)$ на всю числовую ось.

2962

(2962) $$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

$x^2 = ?$ $x^3 = ?$ $x^4 = ?$

д.з.

$$x^2 = 2\int_0^x \xi\, d\xi$$

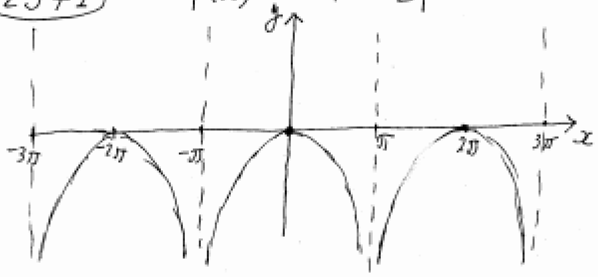
$$x^2 = 2\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}\int_0^x \sin(n\xi)\,d\xi =$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{\cos n\xi}{n}\right)\Bigg|_0^x = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left(1-\cos nx\right) =$$

$$= \underbrace{4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{+\frac{\pi^2}{12}} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx = +\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

2971

(2971) $$f(x) = \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$



чётная!!

$$f(x) \Rightarrow S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)d\sin(nx) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = ? \quad (*)$$

$$\sin(nx) = -\sin((n-1)x) + \sin(nx) + \sin((n-1)x) =$$

$$= -\sin(n-1)x + 2\cos\frac{x}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

$$\sin(nx)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\sin((n-1)x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\cancel{\cos\frac{x}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}} =$$

$$= -\sin((n-1)x)\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cos nx - \cos((n+1)x)$$

$$(*) = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin((n-1)x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx + \frac{1}{\pi n}\underbrace{\left(\cancel{\frac{\sin nx}{n} - \frac{\sin((n+1)x)}{n+1}}\right)\Big|_0^{\pi}}_{0}$$

$$\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = -\int_0^{\pi}\sin((n-1)x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx \ldots$$

$$n = 1 \qquad \int_0^{\pi}\sin x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cancel{\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}\,dx = 2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi}(1-\cos x)\,dx = (x - \sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\sin nx\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\,dx = (-1)^{n+1}\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\cancel{\pi} n}\cdot(-1)^{n+1}\cancel{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx = ?$$

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \left| \begin{array}{l} y=\frac{x}{2}\\ dy=\frac{dx}{2}\\ dx=2dy\end{array}\right| = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos y\,dy = 2I$$

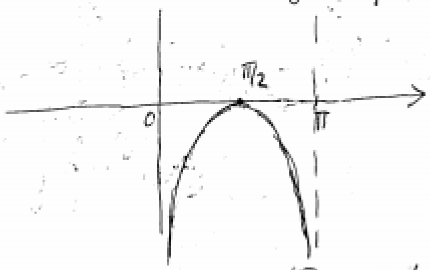
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos y)dy = \left|\begin{array}{l} z=\frac{\pi}{2}-y\\ dz=-dy\end{array}\right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln(\sin z)dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin y)dy$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos y)dy + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2y}{2}dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\,dy = \int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2y)dy - \frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2y)dy = \left|\begin{array}{l} z=2y\\ dz=2dy\\ dy=\frac{dz}{2}\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin z\,dz = \frac{1}{2}\cdot 2I = I$$



$$2I = I - \frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$I = -\frac{\pi\ln 2}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\cdot 2I = -2\ln 2$$

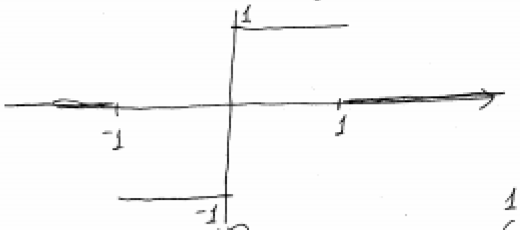
$$S(x) = -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx$$

$x=\pm\pi$? $\quad -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to$ расходится.!!

3882

3882 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(x), & \text{если } |x|<1\\ 0 & \text{если } |x|>1\end{cases}$

нечётная !!



$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\lambda z\,dz = -\frac{2}{\pi\lambda}\cos\lambda z\Big|_0^1 =$$

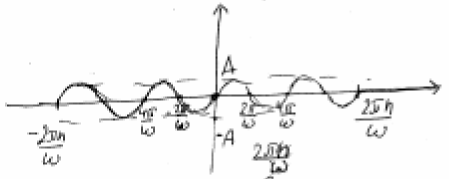
$$= -\frac{2}{\pi\lambda}(\cos\lambda-1) = \frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda} = \frac{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\pi\lambda}$$

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^2\frac{\lambda}{2}}{\pi\lambda}\sin\lambda x\,d\lambda = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}\cdot\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda$$

3889

3889

$$f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, & \text{если } |t|\le \frac{2\pi n}{\omega} \\ 0 & \text{если } |t|>\frac{2\pi n}{\omega}\end{cases} \quad n\in N$$



нечётная

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{2\pi n}{\omega}}^{\frac{2\pi n}{\omega}} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi=\frac{2A}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}\sin\omega\xi\sin\lambda\xi\, d\xi=$$

$$=\frac{A}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}\left(\cos(\lambda-\omega)\xi-\cos(\lambda+\omega)\xi\right)d\xi=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin(\lambda-\omega)\xi}{\lambda-\omega}-\frac{\sin(\lambda+\omega)\xi}{\lambda+\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{2\pi n}{\omega}}=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2\pi n(\lambda-\omega)}{\omega}}{\lambda-\omega}-\frac{\sin\frac{2\pi n(\lambda+\omega)}{\omega}}{\lambda+\omega}\right)=$$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{\lambda\left(\sin\frac{2\pi n(\lambda-\omega)}{\omega}-\sin\frac{2\pi n(\lambda+\omega)}{\omega}\right)+\omega\left(\sin\frac{2\pi n(\lambda-\omega)}{\omega}+\sin\frac{2\pi n(\lambda+\omega)}{\omega}\right)}{\lambda^2-\omega^2}=$$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{-2\lambda\,\overset{0}{\cancel{\sin 2\pi n}}\cos\frac{2\pi n\lambda}{\omega}+2\omega\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}\overset{1}{\cancel{\cos 2\pi n}}}{\lambda^2-\omega^2}=$$

$$=\frac{2A\omega}{\pi(\lambda^2-\omega^2)}\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}$$

$$f(t)=\frac{2A\omega}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2}\sin\lambda t\, d\lambda$$

2981

2981. 如果函数 $\varphi(-x)=\psi(x)$，问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n, b_n 与 $\alpha_n, \beta_n (n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系？

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx,$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\right\},$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入，即得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\,dx\right\}\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx=\alpha_n.\end{aligned}$$

同理，有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx\right\}\\&=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx\,dx\right\}\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx=-\beta_n.\end{aligned}$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=\alpha_n \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=-\beta_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x)=-\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的福里叶系数 a_n,b_n 与 $\alpha_n,\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x),\psi(x)$的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\right),$$

故在上式右端两个积分中作代换$-x=y$,并将

$$\varphi(-x)=-\psi(x)$$

代入,即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\,dx\right)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx=-\alpha_n.$$

同理,有

$$b_n=\beta_n.$$

因此,$\varphi(x)$、$\psi(x)$的福里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=-\alpha_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\beta_n\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

2983

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 a_n，$b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算"平移"了的函数 $f(x+h)$（h=常数）的福里叶系数 $\overline{a_n}$，$\overline{b_n}(n=0,1,2,\cdots)$.

解 在福里叶系数 $\overline{a_n}$ 的表达式中作代换 $x+h=y$，并注意到 $f(x)$ 的周期性，即有

$$\overline{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(y)[\cos nh\cos ny+\sin nh\sin ny]dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\cos nh dx+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\sin nh dx\right]$$

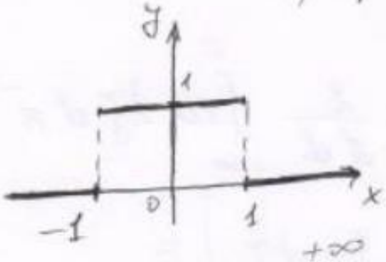
$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$$

同理，可求得

$$\overline{b_n}=b_n\cos nh-a_n\sin nh.$$

3881

3881. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{if } |x|<1;\\ 0, & \text{if } |x|>1.\end{cases}$ – четная функция, $b(\lambda)=0$



$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\lambda\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi\lambda}\sin\lambda\xi\Big|_0^1=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda,\qquad |x|\neq 1$$

-3888

3888. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{если } |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

3890

(3890) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ $\quad a>0$

Представить интегралом Фурье.

$f(x)$ - чётная, $\quad b(\lambda) = 0$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\xi|}\cos\lambda\xi\, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\cos\lambda\xi\, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\xi}\,\frac{e^{i\lambda\xi}+e^{-i\lambda\xi}}{2}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{(-\alpha+i\lambda)\xi} + e^{(-\alpha-i\lambda)\xi}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{(-\alpha+i\lambda)\xi}}{-\alpha+i\lambda} + \frac{e^{(-\alpha-i\lambda)\xi}}{-\alpha-i\lambda}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty} = \quad \Bigg[\; e^{-\alpha\xi}\to 0, \text{ если } \xi\to+\infty$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(0 + 0 - \frac{1}{-\alpha+i\lambda} - \frac{1}{-\alpha-i\lambda}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha-i\lambda} + \frac{1}{\alpha+i\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\alpha+i\lambda+\alpha-i\lambda}{\alpha^2+\lambda^2} = \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}$$

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}\cos(\lambda x)\, d\lambda = \frac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{\alpha^2+\lambda^2}$$

<u>**3894**</u>

(3894) $f(x) = xe^{-x^2}$ ← нечётная. $a(\lambda) = 0$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2}\sin\lambda\xi\,d\xi = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda\xi\,d\left(e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi}\sin\lambda\xi\cdot e^{-\xi^2}\Big|_{0}^{+\infty}}_{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\lambda\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cos\lambda\xi\,d\xi + \underbrace{\frac{\lambda}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\cdot i\sin\lambda\xi\,d\xi}_{0} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}e^{i\lambda\xi}\,d\xi = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2+i\lambda\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\xi-\frac{i\lambda}{2}\right)^2}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\,d\xi = \frac{\lambda}{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\xi-\frac{i\lambda}{2}\right)^2}\,d\left(\xi-\frac{i\lambda}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

$$xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\sin\lambda x\,dx$$

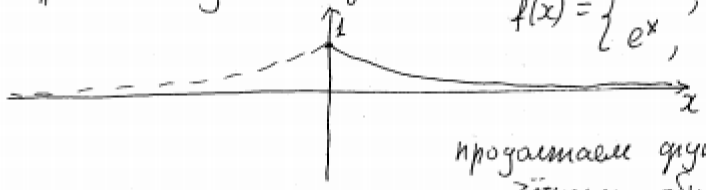
3895

3895 $\quad f(x) = e^{-x} \quad 0<x<+\infty$

представить интегралом Фурье, „по косинусам"
„по синусам"

а) „по косинусам"

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ e^{x}, & x<0 \end{cases}$$



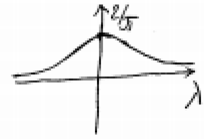
продолжаем функцию чётным образом.

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi)\cos\lambda\xi \, d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi}\cos(\lambda\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{e^{i\lambda\xi}+e^{-i\lambda\xi}}{2}\right) d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{\xi(-1+i\lambda)} + e^{\xi(-1-i\lambda)}\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{-\xi+i\xi\lambda}}{-1+i\lambda} + \frac{e^{-\xi-i\xi\lambda}}{-1-i\lambda}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\left(0+0-\frac{1}{-1+i\lambda}-\frac{1}{-1-i\lambda}\right) =$$

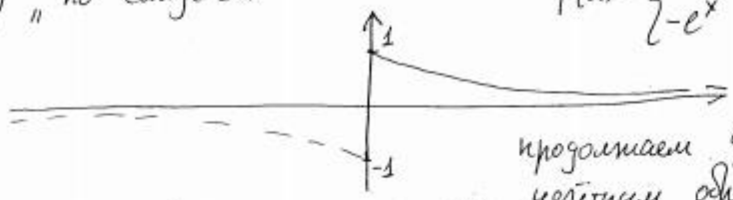
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-i\lambda}+\frac{1}{1+i\lambda}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1+\cancel{i\lambda}+1-\cancel{i\lambda}}{1+\lambda^2} = \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}$$



$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\, d\lambda \qquad (x>0)$$

8) „по синусам"

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ -e^{x} & x<0 \end{cases}$$



продолжаем функцию нечётным образом.

$$b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\xi}\sin(\lambda\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\xi}\,\frac{e^{i\lambda\xi}-e^{-i\lambda\xi}}{2i}\,d\xi=\frac{1}{i\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{\xi(-1+i\lambda)}-e^{\xi(-1-i\lambda)}\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\left(\frac{e^{\xi(-1+i\lambda)}}{-1+i\lambda}-\frac{e^{\xi(-1-i\lambda)}}{-1-i\lambda}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{i\pi}\left(0-0-\frac{1}{-1+i\lambda}+\frac{1}{-1-i\lambda}\right)=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\left(\frac{1}{1-i\lambda}-\frac{1}{1+i\lambda}\right)=\frac{1}{i\pi}\,\frac{\cancel{1}+i\lambda-\cancel{1}+i\lambda}{1+\lambda^2}=\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

3899

3899 $\quad f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos\alpha t\, e^{-itx}\,dt=$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\right)e^{-itx}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{t^2}{2}+i(\alpha t-tx)}+e^{-\frac{t^2}{2}+i(-\alpha t-tx)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{t^2}{2}+it(\alpha-x)}+e^{-\frac{t^2}{2}-it(\alpha+x)}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-\frac{(t-i(\alpha-x))^2}{2}}\cdot e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}+e^{-\frac{(t+i(\alpha+x))^2}{2}}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t-i(\alpha-x))^2}{2}}d(t-i(\alpha-x))+e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(t+i(\alpha+x))^2}{2}}d(t+i(\alpha+x))\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}}+e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{2}}\right)=\boxed{e^{-\frac{\alpha^2+x^2}{2}}\operatorname{ch}(\alpha x)}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\xi e^{-\xi^2} \sin\lambda\xi \, d\xi} = \frac{1}{i}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} \cdot i \sin\lambda\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} \cos$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{y}{1+y^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} e^{-iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x(1+iy)} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-x(1+iy)}}{1+iy} \right|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \left(\frac{e^{-A(1+iy)}}{1+iy} - \frac{e^{A(1+iy)}}{1+iy} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iy)} \lim_{A\to\infty} \left(e^{-A(1+iy)} - e^{A(1+iy)} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} \sin(xy)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty} e^{-x} \frac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{2} dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \quad e^{x(-1+iy)} - e^{x(-1-iy)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{x(-1+iy)}}{-1+iy} - \frac{e^{x(-1-iy)}}{-1-iy} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\psi(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \sin(xy)\, dx$$

3900

3900 б) Найти $\psi(y)$, если

$$\int_0^{+\infty} \psi(y)\sin(xy)\,dy = e^{-x}. \qquad x>0$$

$\psi(y) = ?$

1) продолжить e^{-x} как нечётную. $\left(f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ -e^{x} & x<0 \end{cases}\right.$

$$\psi(y) = b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(yx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\sin(yx)\,dx = (\text{см. } 3895\text{б}) = \frac{2y}{\pi(1+y^2)}$$

-3887

3891 (ее не будет)

3893

3893 $f(x) = e^{-x}$ $(0<x<+\infty)$ представить интегралом Фурье, продолжая ее:

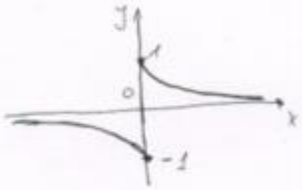
а) четным образом;

б) нечетным образом.

а) См. N 3890, при $\alpha=1$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

б)



продолжение нечётным образом, $a(\lambda)=0$

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_{+\infty}^{0}\sin\lambda\xi\,d e^{-\xi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[e^{-\xi}\sin\lambda\xi\,\Big|_{+\infty}^{0}\right] + \frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\cos\lambda\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi}\int_{+\infty}^{0}\cos\lambda\xi\,d e^{-\xi} = \frac{2\lambda}{\pi}\cos\lambda\xi\, e^{-\xi}\Big|_{+\infty}^{0} - \frac{2\lambda^2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\sin\lambda\xi\,d\xi$$

$$I = \lambda - \lambda^2 I, \rightarrow \quad I = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$$b(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\,d\lambda$$

-3897