№1

Махмудов Орхан
М80-305Б-18
вариант

$$f(x) = (x_1-10)^2 + 2(x_2-5)^2 + 3(x_3+5)^2$$

а) 1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 - 20 = 0$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 4x_2 - 20 = 0$

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 6x_3 + 30 = 0$

$x_1 = 10$, $x_2 = 5$, $x_3 = -5$, стацион. точка $x^* = (10, 5, -5)^T$

2. 1 способ.

Матрица Гессе имеет вид $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Т.к. $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 8$, $\Delta_3 = 48 > 0$

Значит, по критерию проверки достаточных условий экстремума, точка x^* является точкой локального максимума.

2 способ.

Найдём собственные зн-я м-цы Гессе

$$\det(H - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48$$

$\lambda = 2 > 0$, $\lambda_2 = 6 > 0$, $\lambda_3 = 4 > 0$

Т.к. все знач. м-цы положит., то в точке x^* - лок. максимум

3. $f(x^*) = 0$

б) $f(x) = (x_1 - 10)^2 + 2(x_2 - 5)^2 + 3(x_3 + 5)^2$

1) Зададим

$x^0 = (9, 2, -4)^T$

$\varepsilon_1 = 0,1$

$\varepsilon_2 = 0,15$

$M = 3$

Градиент ф-ции

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 20 \\ 6x_3 + 30 \end{pmatrix}$$

2) Положим $k = 0$

3) $\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

4) $\| \nabla f(x^0) \| = \sqrt{(-2)^2 + (-12)^2 + (6)^2} = 2\sqrt{46} > 0,1 \Rightarrow$

5) $k \geq M$? – нет, $k < M \Rightarrow$

6) Зададим $t_0 = 0,5$

7) $x^1 = x^0 - t_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

8) $f(x^0) = (9-10)^2 + 2(2-5)^2 + 3(-4+5)^2 = 22$

$f(x^1) = (10-10)^2 + 2(8-5)^2 + 3(-7+5)^2 = 30$

$f(x^1) > f(x^0) \Rightarrow$ шаг неудачный $\Rightarrow t_1 = 0,25$

7.1) $x^1 = x^0 - t_1 \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 0,25 \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,5 \\ 5 \\ -5,5 \end{pmatrix}$

8.1) $f(x^1) = (9,5 - 10)^2 + 2(5-5)^2 + 3(-5,5+5)^2 = 1$

$f(x^1) < f(x_0) \Rightarrow$ шаг удачный $\Rightarrow$

9) $\|x^1 - x^0\| = \sqrt{(9,5-9)^2 + (5-2)^2 + (-5,5+4)^2} = \sqrt{11,5} \approx 3,4 > 0,15$

$|f(x^1) - f(x^0)| = |1 - 22| = 21 > 0,15$

Вывод: $k = 1$

$3^1)\ \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9{,}5-20 \\ 4\cdot 5-20 \\ 6\cdot(-5{,}5)+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$4^1)\ \|\nabla f(x^1)\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}2 > 0{,}1 \Rightarrow$

$5^1)\ k \geq M$? – нет $k < M \Rightarrow$

$6^1)$ Зададим $t_1 = 0{,}25$

$7^1)\ x^2 = x^1 - t_1 \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 9{,}5 \\ 5 \\ -5{,}5 \end{pmatrix} - 0{,}25 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}75 \\ 5 \\ -4{,}75 \end{pmatrix}$

$8^1)\ f(x^2) = (9{,}75-10)^2 + 2(5-5)^2 + 3(-4{,}75+5)^2 = 0{,}25$

$f(x^1) = 1$

$f(x^2) < f(x^1) \Rightarrow$ шаг удачный $\Rightarrow$

$9^1)\ \|x^2 - x^1\| = \sqrt{(9{,}75-9{,}5)^2 + (5-5)^2 + (-4{,}75+5{,}5)^2} = \sqrt{0{,}625} \approx 0{,}79 > 0{,}15$

$|f(x^2) - f(x^1)| = |0{,}125 - 1| = 0{,}875 > 0{,}15$

Вывод: $k=2$

$3^2)\ \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9{,}75-20 \\ 4\cdot 5-20 \\ 6\cdot(-4{,}75)+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

$4^2)\ \|\nabla f(x^2)\| = \sqrt{(-0{,}5)^2+0^2+(1{,}5)^2} = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}6 > 0{,}1 \Rightarrow$

$5^2)\ k \geq M$? – нет $k < M \Rightarrow$

$6^2)\ t_2 = 0{,}25$

$7^2)\ x^3 = x^2 - t_2 \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 9{,}75 \\ 5 \\ -4{,}75 \end{pmatrix} - 0{,}25 \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}875 \\ 5 \\ -5{,}125 \end{pmatrix}$

$8^2)\ f(x^3) = (9{,}875-10)^2 + 2(5-5)^2 + 3(-5{,}125+5)^2 = 0{,}0625$

$f(x^3) < f(x^2) \Rightarrow$ шаг удачный $\Rightarrow$

$9^2)\ \|x^3 - x^2\| = \sqrt{(9{,}875-9{,}75)^2 + (5-5)^2 + (-5{,}125+4{,}75)^2} \approx 0{,}39 > 0{,}15$

$|f(x^3) - f(x^2)| = |0{,}0625 - 0{,}25| > 0{,}15$

Вывод: $k=3$

$3^3)$ $\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9{,}875 - 20 \\ 4 \cdot 5 - 20 \\ 6 \cdot (-5{,}125) + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 0 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$4^3)$ $\|\nabla f(x^3)\| = \sqrt{(-0{,}25)^2 + 0^2 + (-0{,}75)^2} \approx 0{,}79 > 0{,}1 \Rightarrow$

$5^3)$ $k \geq M$ - да, $k = M = 3 \Rightarrow$ конец

Найдена точка: $x^3 = \begin{pmatrix} 9{,}875 \\ 5 \\ -5{,}125 \end{pmatrix}$

$f(x^3) = 0{,}0625$

в) $f(x) = (x_1-10)^2 + 2(x_2-5)^2 + 3(x_3+5)^2$

1) Зададим $x^0 = (9, 2, -4)^T$

$\varepsilon_1 = 0{,}1$

$\varepsilon_2 = 0{,}15$

$M = 2$

Градиент ф-ции

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 20 \\ 6x_3 + 30 \end{pmatrix}$$

2) Положим $k = 0$

3) $\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

4) $\|\nabla f(x^0)\| = 2\sqrt{46} > 0{,}1 \Rightarrow$

5) $k \geq M$? – нет $k < M \Rightarrow$

6) $x^1 = x^0 - t_0 \nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - t_0 \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 2t_0 \\ 2 + 12t_0 \\ -4 - 6t_0 \end{pmatrix}$

Подставим в $f(x)$

$\varphi(t_0) = (9 + 2t_0 - 10)^2 + 2(2 + 12t_0 - 5)^2 + 3(-4 - 6t_0 + 5)^2$

Найдём минимум ф-ции $\varphi(t_0)$:

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt_0} = \frac{d(200t_0^2 - 92t_0 + 11)}{dt^0} = 400t_0 - 92 = 0 \Rightarrow t_0^* = 0{,}23$$

$$\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2} = 800 > 0 \Rightarrow$$ выполняется дост. усл. минимума $\Rightarrow$ найденное значение t_0^* обеспечивает минимум ф-ции $\varphi(t_0)$

7) $x^1 = x^0 - t_0^* \nabla f(x^0)$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 0{,}23 \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}46 \\ 4{,}76 \\ -5{,}38 \end{pmatrix}$$

8) $\|x^1 - x^0\| = \sqrt{(9{,}46 - 9)^2 + (4{,}76 - 2)^2 + (-5{,}38 + 4)^2} \approx 3.12 > 0{,}15$

$f(x^0) = 22$

$f(x^1) = (9{,}46 - 10)^2 + 2(4{,}76 - 5)^2 + 3(-5{,}38 + 5)^2 = 0{,}84$

$|f(x^1) - f(x^0)| = |0{,}84 - 22| = 21{,}16 > 0{,}15$

Вывод: $k = 1$

$3^1)\ \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9{,}46 - 20 \\ 4\cdot 4{,}76 - 20 \\ 6\cdot(-5{,}38)+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}08 \\ -0{,}96 \\ -2{,}28 \end{pmatrix}$

$4^1)\ \|\nabla f(x^1)\| = \sqrt{(-1{,}08)^2 + (-0{,}96)^2 + (-2{,}28)^2} \approx 2{,}69 > 0{,}1 \Rightarrow$

$5^1)\ k \geq M$? – нет $k < M$

$6^1)\ x^2 = x^1 - t_1 \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 9{,}46 \\ 4{,}76 \\ -5{,}38 \end{pmatrix} - t_1 \begin{pmatrix} -1{,}08 \\ -0{,}96 \\ -2{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}46 + 1{,}08t_1 \\ 4{,}76 + 0{,}96t_1 \\ -5{,}38 + 2{,}28t_1 \end{pmatrix}$

Подставим в $f(x)$

$\varphi(t_1) = (9{,}46 + 1{,}08t_1 - 10)^2 + 2(4{,}76 + 0{,}96t_1 - 5)^2 + 3(-5{,}38 + 2{,}28t_1 + 5)^2$

Найдём минимум ф-ции $\varphi(t_1)$:

$\frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{d(18{,}6048t_1^2 - 4{,}2264t_1 + 0{,}88)}{dt_1} = 37{,}2096t_1 - 4{,}2264 = 0 \Rightarrow t_1^* = 0{,}11$

$\frac{d^2\varphi(t_1)}{dt_1^2} = 37{,}2096 > 0 \Rightarrow$ выполн. дост. усл. минимума $\Rightarrow$ найденное знач. t_1 обеспечивает минимум ф-ции $\varphi(t_1)$

$7^1)\ x^2 = x^1 - t_1^* \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 9{,}46 \\ 4{,}76 \\ -5{,}38 \end{pmatrix} - 0{,}16 \begin{pmatrix} -1{,}08 \\ -0{,}96 \\ -2{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}6328 \\ 4{,}9136 \\ -5{,}0152 \end{pmatrix}$

$8^1)\ \|x^2 - x^1\| = \sqrt{(0{,}1728)^2 + (0{,}1536)^2 + (0{,}228)^2} = 0{,}32 > 0{,}15$

$f(x^2) = (9{,}6328 - 10)^2 + 2(4{,}9136 - 5)^2 + 3(-5{,}0152 + 5)^2 \approx 0{,}12$

$|f(x^2) - f(x^1)| = |0{,}12 - 0{,}84| = 0{,}72 > 0{,}15$

Вывод: $k = 2$

$3^2)\ \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9{,}6328 - 20 \\ 4\cdot 4{,}9136 - 20 \\ 6\cdot(-5{,}0152)+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}7344 \\ -0{,}3456 \\ -0{,}0912 \end{pmatrix}$

$4^2)\ \|\nabla f(x^2)\| = \sqrt{(-0{,}7344)^2 + (-0{,}3456)^2 + (-0{,}0912)^2} \approx 0{,}82 > 0{,}1 \Rightarrow$

$5^2)\ k \geq M$? – да, $k = M = 2 \Rightarrow$ конец

Найдена точка: $x^2 = \begin{pmatrix} 9{,}6328 \\ 4{,}9136 \\ -5{,}0152 \end{pmatrix}$ $\quad f(x^2) = 0{,}12$

2) $f(x) = (x_1-10)^2 + 2(x_2-5)^2 + 3(x_3+5)^2$

1) Зададим $x^{00} = (9, 2, -4)^T$

Градиент ф-ции:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 20 \\ 6x_3 + 30 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 = 0{,}1$

$\varepsilon_2 = 0{,}15$

$M = 10$

2) Зададим $j = 0$

3) $j \geq M$? - нет, $j = 0 < M \Rightarrow$

4) $k = 0$

5) $k \leq n-1$? - да $k = 0 < 2 = n-1 \Rightarrow$

6) $\nabla f(x^{00}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

7) $\|\nabla f(x^{00})\| = 2\sqrt{46} > 0{,}1 \Rightarrow$

8) Опред. велич. шага t_0^* из усл.

$$\varphi(t_0) = f\left(x^{j0} - t_0 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{x = x^{00}} \cdot e_1\right) \to \min_{t_0}$$

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{x = x^{00}} = 2x_1 - 20 = -2, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^{01} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - t_0(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + 2t_0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t_0) = (9 + 2t_0 - 10)^2 + 2(2-5)^2 + 3(-4+5)^2$$

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt_0} = 8t_0 - 4 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2\varphi(t_0)}{dt_0^2} = 8 > 0 \Rightarrow$$ найденное знач. t_0 обесп. минимум ф-ции $\varphi(t_0)$

9) $$x^{01} = x^{00} - t_0^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right)_{x = x^{00}} \cdot e_1$$

$$x^{01} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 0{,}5\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$10^0)$ $\|x^{01}-x^{00}\| = \sqrt{(10-9)^2+(2-2)^2+(4+4)^2} = 1 > 0,15$

$|f(x^{01})-f(x^{00})| = |21-22| = 1 > 0,15$

$k=1 \Rightarrow$

$5^1)$ $k \le n-1?$ – да

$6^1)$ $\nabla f(x^{01}) = \begin{pmatrix} 2\cdot 10-20 \\ 4\cdot 2-20 \\ 6\cdot(-4)+30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

$7^1)$ $\|\nabla f(x^{01})\| = \sqrt{144+36} \approx 13,4 > 0,1$

$8^1)$ $\varphi(t_1) = f(x^{j1} - t_1 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{j1}} \cdot e_2) \to \min\limits_{t_1}$

$k=1,\ j=0$

$x^{02} = x^{01} - t_1 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} \cdot e_2$

$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} = 4x_2 - 20\Big|_{x=x^{01}} = 4\cdot 2 - 20 = -12,\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$x^{02} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - t_1(-12)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2+12t_1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\varphi(t_1) = (10-10)^2 + 2(2+12t_1-5)^2 + 3(-4+5)^2$

$\frac{\partial \varphi(t_1)}{\partial t_1} = 4(12t_1-3)\cdot 12 = 576t_1 - 144 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,25$

$\frac{\partial^2 \varphi(t_1)}{\partial t} = 576 > 0 \Rightarrow$ найденное знач. t_1^*, обеспечивае мин. ф-ции $\varphi(t_1)$

$9^1)$ $x^{02} = x^{01} - t_1^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\right)_{x=x^{01}} \cdot e_2$

$x^{02} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - 0,25(-12)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

$10^1)$ $\|x^{02}-x^{01}\| = 3 > 0,15$

$|f(x^{02})-f(x^{01})| = |3-21| = 18 > 0,15$

$K=2 \Rightarrow$

$5^2)$ $k \le n-1?$ – да, $k=n-1=2$

$6^2)$ Вычислим $\nabla f(x^{02}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$7^2)$ $\|\nabla f(x^{02})\| = \sqrt{36} = 6 > 0{,}1$

$8^2)$ $\varphi(t_2) = f\left(x^{j2} - t_2 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}\right)_{x=x^{j2}} \cdot e_3\right) \to \min\limits_{t_2}$

$k=2,\ j=0$

$$x^{03} = x^{02} - t_2 \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}\right)_{x=x^{02}} \cdot e_3$$

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}\right)_{x=x^{02}} = 6x_3 + 30\Big|_{x=x^{02}} = 6\cdot(-4)+30 = 6,\quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x^{03} = \begin{pmatrix}10\\5\\-4\end{pmatrix} - t_2(6)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\-4-6t_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(t_2) = 3(-4-6t_2+5)^2$$

$$\frac{d\varphi(t_2)}{dt_2} = 216t_2 - 36 = 0 \Rightarrow t_2^* = \frac{1}{6}$$

$\frac{d^2\varphi(t_2)}{dt_2^2} = 216 > 0 \Rightarrow$ найденное зн-е t_2^* обеспечивает мин. ф-ции $\varphi(t_2)$

$9^2)$ $x^{03} = x^{02} - t_2^* \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_3}\right)_{x=x^{02}} \cdot e_3$

$$x^{03} = \begin{pmatrix}10\\5\\-4\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\,6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}$$

$10^2)$ $\|x^{03} - x^{02}\| = \sqrt{1} = 1 > 0{,}15$

$|f(x^{03}) - f(x^{02})| = |0-3| = 3 > 0{,}15$

$k=3$

$5^3)$ $k \le n-1$ – нет $k=3 > n-1=2 \Rightarrow$ расчёт окончен

Найдена точка: $x^3 = \begin{pmatrix}10\\5\\-5\end{pmatrix}$ $f(x^3) = 0$

9) $f(x) = (x_1 - 10)^2 + 2(x_2 - 5)^2 + 3(x_3 + 5)^2$

1) Зададим: $x^0 = (9, 2, -4)^T$

$\varepsilon_1 = 0{,}1$

$\varepsilon_2 = 0{,}15$

$M = 10$

Градиент ф-ции

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 20 \\ 6x_3 + 30 \end{pmatrix}$$

2) Положим $k = 0$

3) Вычислим $\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

4) $\| \nabla f(x^0) \| = 2\sqrt{46} > 0{,}1 \Rightarrow$

5) $k \geq M$ - ?, нет $k < M$

6) $d^0 = -\nabla f(x^0)$: $d^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

7) Опред. t_0^* из условия $f(x_0 + t_0 d^0) \to \min\limits_{t_0}$:

$$x^1 = x^0 + t_0^* d^0 = \begin{pmatrix} 9 + 2t_0^* \\ 2 + 12t_0^* \\ -4 - 6t_0^* \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_0(t) = (2t_0^* - 1)^2 + 2(12t_0^* - 3)^2 + 3(-6t_0^* + 1)^2$$

$$\frac{d\varphi_0(t_0)}{dt_0} = 800t_0 - 184 = 0$$

$$t_0^* = 0{,}23$$

8) $x^1 = x^0 + t_0^* d^0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0{,}23 \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9{,}46 \\ 4{,}76 \\ -5{,}38 \end{pmatrix}$

9) $\|x^1 - x^0\| = \sqrt{(9{,}46 - 9)^2 + (4{,}76 - 2)^2 + (-5{,}38 + 4)^2} \approx 3{,}12 > 0{,}15$

$f(x^0) = 22$

$f(x^1) = 0{,}84$

$|f(x^1) - f(x^0)| = |0{,}84 - 22| = 21{,}16 > 0{,}15$

$k = 1$

3') $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1{,}08 \\ -2{,}16 \\ -2{,}28 \end{pmatrix}$

4') $\|\nabla f(x^1)\| = 3{,}32 > 0{,}1 \Rightarrow$

5') $k \geq M$! - нет $k = 1 < M = 10 \Rightarrow$

$7^1)\ \beta_0 = \dfrac{\|\nabla f(x^1)\|^2}{\|\nabla f(x^0)\|^2} = \dfrac{(3,32)^2}{(2\sqrt{46})^2} = 0,0599$

$8^1)$ Опред. $d^1 = -\nabla f(x^1) + \beta_0 d^0 = \begin{pmatrix} 1,08 \\ 2,16 \\ 2,28 \end{pmatrix} + 0,0599 \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1998 \\ 2,8788 \\ 1,9206 \end{pmatrix}$

$9^1)$ Опред. t_1^*

$x^2 = x^1 + t_1 d^1 = \begin{pmatrix} 9,46 \\ 4,76 \\ -5,38 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1,1998 \\ 2,8788 \\ 1,9206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,46 + t_1 \cdot 1,1998 \\ 4,76 + t_1 \cdot 2,8788 \\ -5,38 + t_1 \cdot 1,9206 \end{pmatrix}$

$\varphi(t_1) = (9,46 + t_1 \cdot 1,1998 - 10)^2 + 2(4,76 + t_1 \cdot 2,8788 - 5)^2 + 3(-5,38 + t_1 \cdot 1,9206 + 5)^2$

$\dfrac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = 58,15 t_1 - 8,435 = 0 \Rightarrow t_1 = 0,145$

$\dfrac{d^2\varphi(t_1)}{dt_1^2} = 58,15 > 0 \Rightarrow$ найденное зн-е обеспечивает мин. ф-ции $\varphi(t_1)$

$10^1)\ x^2 = x^1 + t_1^* d^1 = \begin{pmatrix} 9,46 \\ 4,76 \\ -5,38 \end{pmatrix} + 0,145 \begin{pmatrix} 1,1988 \\ 2,8788 \\ 1,9206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,6 \\ 5,17 \\ -5,1 \end{pmatrix}$

$11^1)\ \|x^2 - x^1\| = \sqrt{(9,6 - 9,46)^2 + (5,17 - 4,76)^2 + (-5,1 + 5,38)^2} = 0,52 > 0,15$

$|f(x^2) - f(x^1)| = |0,247 - 0,84| = 0,593 > 0,15$

$f(x^2) = (9,6 - 10)^2 + 2(5,17 - 5)^2 + 3(-5,1 + 5)^2 = 0,247$

$k = 2$

$3^2)\ \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9,6 - 20 \\ 4 \cdot 5,17 - 20 \\ 6 \cdot (-5,1) + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,68 \\ -0,6 \end{pmatrix}$

$4^2)\ \|\nabla f(x^2)\| = \sqrt{(-0,8)^2 + 0,68^2 + (-0,6)^2} = 1,2 > 0,1 \Rightarrow$

$5^2)\ k \geq M$? – нет $k = 2 < M = 10 \Rightarrow$

$6^2)\ \beta_1 = \dfrac{\|\nabla f(x^2)\|^2}{\|\nabla f(\ \ )\|^2} = \dfrac{(1,2)^2}{(3,32)^2} = 0,13$

$7^2)$ Определим $d^2 = -\nabla f(x_2) + \beta_1 d^1 = \begin{pmatrix} -0,8 \\ 0,68 \\ -0,6 \end{pmatrix} + 0,13 \begin{pmatrix} 1,1998 \\ 2,8788 \\ 1,9206 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,956 \\ -0,305 \\ 0,849 \end{pmatrix}$

8^2) Определим t_2^*

$$x^3 = x^2 + t_2 d^2 = \begin{pmatrix} 9,6 \\ 5,17 \\ -5,1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0,956 \\ -0,305 \\ 0,849 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,6 + 0,956 t_2 \\ 5,17 - 0,305 t_2 \\ -5,1 + 0,849 t_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t_2) = (9,6 + 0,956 t_2 - 10)^2 + 2(5,17 - 0,305 t_2 - 5)^2 + 3(-5,1 + 0,849 t_2 + 5)^2$$

$$\frac{d\varphi(t_2)}{dt_2} = 6,524 t_2 - 1,481 = 0 \Rightarrow t_2^* = 0,227$$

$$\frac{d^2\varphi(t_2)}{dt_2^2} = 6,524 > 0 \Rightarrow \text{найденное зн-е обеспеч. мин. ф-ции } \varphi(t_2)$$

9^2) $$x^3 = x^2 + t_2^* d_2 = \begin{pmatrix} 9,6 \\ 5,17 \\ -5,1 \end{pmatrix} + 0,227 \begin{pmatrix} 0,956 \\ -0,305 \\ 0,849 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,8 \\ 5,1 \\ -4,9 \end{pmatrix}$$

10^2) $$\|x^3 - x^2\| = \sqrt{(9,8-9,6)^2 + (5,1-5,17)^2 + (-4,9+5,1)^2} = 0,29 > 0,15$$

$$|f(x^3) - f(x^2)| = |0,06 - 0,247| = 0,187 > 0,15$$

$$f(x^3) = (9,8-10)^2 + 2(5,1-5)^2 + 3(-4,9+5)^2 = 0,06$$

$k=3$

3^3) $$\nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} 2\cdot 9,8 - 20 \\ 4\cdot 5,1 - 20 \\ 6\cdot(-4,9) + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

4^3) $$\|\nabla f(x^3)\| = \sqrt{(-0,4) + (0,4)^2 + (0,6)^2} = 0,82 > 0,1 \Rightarrow$$

5^3) $k \geq M$ - ? нет, $k = 3 \leq M = 10 \Rightarrow$

6^3) $$\beta_2 = \frac{\|\nabla f(x^3)\|^2}{\|\nabla f(x^2)\|^2} = \frac{(0,82)^2}{(1,2)^2} = 0,467$$

7^3) Опред. $$d^3 = -\nabla f(x^3) + \beta_2 d^2 = \begin{pmatrix} -0,4 \\ 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} + 0,467 \begin{pmatrix} 0,956 \\ -0,305 \\ 0,849 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,846 \\ -0,542 \\ -0,204 \end{pmatrix}$$

8^3) Опред. t_3^*

$$x^4 = x^3 + t_3 d^3 = \begin{pmatrix} 9,8 \\ 5,1 \\ -4,9 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0,846 \\ -0,542 \\ -0,204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,8 + 0,846 t_3 \\ 5,1 - 0,542 t_3 \\ -4,9 - 0,204 t_3 \end{pmatrix}$$

$\varphi(t_3) = (9,8 + 0,846 t_3 - 10)^2 + 2(5,1 - 0,542 t_3 - 5)^2 + 3(-4,9 - 0,204 t_3 + 5)^2$

$\frac{d\varphi(t_3)}{dt_3} = 2,855 t_3 - 0,6776 = 0 \Rightarrow t_3^* = 0,237$

$\frac{d^2\varphi(t_3)}{dt_3^2} = 2,855 > 0 \Rightarrow$ найденное зн-е обесп. мин. ф-ции $\varphi(t_3)$

$9^3)$ $x^4 = x^3 + t_3 d^3 = \begin{pmatrix} 9,8 \\ 5,1 \\ -4,9 \end{pmatrix} + 0,237 \begin{pmatrix} 0,846 \\ -0,542 \\ -0,204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,97 \\ -4,95 \end{pmatrix}$

$10^3)$ $\|x^4 - x^3\| = \sqrt{(10-9,8)^2 + (4,97-5,1)^2 + (-4,95+4,9)} = 0,24 > 0,15$

$|f(x^4) - f(x^3)| = |0,0093 - 0,06| = 0,0507 < 0,15$

$f(x^4) = (10-10)^2 + 2(4,97-5)^2 + 3(-4,9575)^2 = 0,0093$

$k=4$

$3^4)$ $\nabla f(x^4) = \begin{pmatrix} 2\cdot 10 - 20 \\ 4\cdot 4,97 - 20 \\ 6\cdot(-4,95) + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,12 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

$4^4)$ $\|\nabla f(x^4)\| = \sqrt{0^2 + (-0,12)^2 + (0,3)^2} = 0,32 > 0,1 \Rightarrow$

$5^4)$ $k \geq M$?- нет $k = 4 < M = 10 \Rightarrow$

$6^4)$ $\beta_3 = \frac{\|\nabla f(x^4)\|^2}{\|\nabla f(x^3)\|^2} = \frac{(0,32)^2}{(0,82)^2} = 0,152$

$7^4)$ Определим $d^4 = -\nabla f(x^4) + \beta_3 d^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,12 \\ -0,3 \end{pmatrix} + 0,152 \begin{pmatrix} 0,846 \\ -0,542 \\ -0,204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1285 \\ 0,0376 \\ -0,331 \end{pmatrix}$

$8^4)$ Опред. t_4^*

$x^5 = x^4 + t_4 d^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,97 \\ -4,95 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0,1285 \\ 0,0376 \\ -0,331 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 0,1285 t_4 \\ 4,97 + 0,0376 t_4 \\ -4,95 - 0,331 t_4 \end{pmatrix}$

$\varphi(t_4) = (10 + 0,1285 t_4 - 10)^2 + 2(4,97 + 0,0376 t_4 - 5)^2 + 3(-4,95\ 0,331 + 5)^2$

$\frac{d\varphi(t_4)}{dt_4} = 0,9196 t_4 - 0,1030 = 0 \Rightarrow t_4^* = 0,1128$

$\frac{d^2\varphi(t_4)}{dt_4^2} = 0,9196 > 0 \Rightarrow$ найденное знач. обесп. мин. ф-ции $\varphi(t_4)$

$9^4)$ $x^5 = x^4 + t_4 d^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,97 \\ -4,95 \end{pmatrix} + 0,1128 \begin{pmatrix} 0,1285 \\ 0,0376 \\ -0,331 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,01 \\ 4,98 \\ -4,99 \end{pmatrix}$

$10^4)$ $\|x^5 - x^4\| = \sqrt{(10,1-10)^2 + (4,98-4,97)^2 + (-4,99+4,95)^2} = 0,042 < 0,15$

$|f(x^5) - f(x^4)| = |0,0012 - 0,0053| = 0,0081 < 0,15$

$f(x^5) = (10,1-10)^2 + 2(4,98-5)^2 + 3(-4,99+5)^2 = 0,0012$

$K = 5$

$3^5)$ $\nabla f(x^5) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10,1 - 20 \\ 4 \cdot 4,98 - 20 \\ 6 \cdot (-4,99) + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ -0,08 \\ 0,06 \end{pmatrix}$

$4^5)$ $\|\nabla f(x^5)\| = \sqrt{(0,02)^2 + (-0,08)^2 + (0,06)^2} = 0,1 = 0,1 \Rightarrow$

$5^5)$ $K \geq M$? - нет, $K = 5 < M = 10 \Rightarrow$

$6^5)$ $\beta_4 = \dfrac{\|\nabla f(x^5)\|}{\|\nabla f(x^4)\|} = \dfrac{(0,1)^2}{(0,32)^2} = 0,0976$

$7^5)$ Опр. $d^5 = -\nabla f(x^4) + \beta_4 d^4 = \begin{pmatrix} -0,02 \\ 0,08 \\ -0,06 \end{pmatrix} + 0,0976 \begin{pmatrix} 0,1285 \\ 0,0376 \\ -0,331 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0074 \\ 0,0837 \\ -0,0923 \end{pmatrix}$

$8^5)$ Опред. t_5^*

$x^6 = x^5 + t_5 d^5 = \begin{pmatrix} 10,01 \\ 4,98 \\ -4,99 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -0,0074 \\ 0,0837 \\ -0,0923 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,01 - 0,0074 t_5 \\ 4,98 + 0,0837 t_5 \\ -4,99 - 0,0923 t_5 \end{pmatrix}$

$\varphi(t_5) = (10,01 - 0,0074 t_5 - 10)^2 + 2(4,98 + 0,0837 t_5 - 5)^2 + 3(-4,99 - 0,0923 t_5 + 5)^2$

$\dfrac{d\varphi(t_5)}{dt_5} = 0,0791 t_5 - 0,013714 = 0 \Rightarrow t_5^* = 0,1734$

$\dfrac{d^2\varphi(t_5)}{dt_5^2} = 0,0791 > 0 \Rightarrow$ найденное зн-е обесп. мин. ф-ции $\varphi(t_5)$

$9^5)$ $x^6 = x^5 + t_5 d^5 = \begin{pmatrix} 10,01 \\ 4,98 \\ -4,99 \end{pmatrix} + 0,1734 \begin{pmatrix} -0,0074 \\ 0,0837 \\ -0,0923 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4,995 \\ -5 \end{pmatrix}$

$10^{5})$ $\|x^6 - x^5\| = \sqrt{(10-10{,}01)^2 + (4{,}995-4{,}98)^2 + (-5+4{,}99)^2} = 0{,}047 < 0{,}15$

$|f(x^6) - f(x^5)| = |0{,}00005 - 0{,}0012| = 0{,}00115 < 0{,}15$

$f(x^6) = (10-10)^2 + 2(4{,}995-5)^2 + 3(-5+5)^2 = 0{,}00005$

Условия $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_2$ и $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$ выполняются в двух послед. итерациях с номерами 4 и 5 $\Rightarrow$ найдена точка:

$$x^6 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4{,}995 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad f(x^6) = 0{,}00005$$

e) $f(x) = (x_1-10)^2 + 2(x_2-5)^2 + 3(x_3+5)^2$

1) Зададим $x^0 = (9;2;-4)^T$

$\varepsilon_1 = 0{,}1$

$\varepsilon_2 = 0{,}15$

$M = 10$

Градиент ф-ции

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1-20 \\ 4x_2-20 \\ 6x_3+30 \end{pmatrix}$$

Матрица Гессе: $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Положим $k=0$

3) Вычислим $\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

4) $\|\nabla f(x_0)\| = 2\sqrt{46} > 0{,}1 \Rightarrow$

5) $k \geq M$? - нет, $k=0 < M=10 \Rightarrow$

6) Вычислим $H(x^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

7) Вычислим $H^{-1}(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

8) $H^{-1}(x^0) > 0$? $\Delta_1 = \frac{1}{2} > 0$

$\Delta_2 = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow$ по критерию Сильвестра $H^{-1}(x^0) > 0$

$\Delta_3 = \frac{1}{48} > 0$

9) Опред. $d^0 = -H^{-1}(x^0)\nabla f(x^0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

10) Вычислим $x^1 = x^0 + d^0 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

11) Проверим: $\|x^1 - x^0\| = \sqrt{(10-9)^2 + (5-2)^2 + (-5+4)^2} \approx 3{,}32 > 0{,}15$

$|f(x^1) - f(x^0)| = |0 - 22| = 22 > 0{,}15$

$k = 1$

3') $\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4') $\|\nabla f(x^1)\| = 0 < 0{,}1 \Rightarrow$ расчёт окончен

Получили точку:

$x^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $f(x^1) = 0$

№2 Найти экстремум

a)
$$f(x) = x^2 - x + 0{,}25 \to \min$$

1) Зададим нач. интервал неопред. $L_0 = [\overset{a_0}{0}; \overset{b_0}{10}]$

Положим $\varepsilon = 0{,}2$, $l = 1$

2) Положим $k = 0$

3) Вычислим: $y_0 = \dfrac{a_0 + b_0 - \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 10 - 0{,}2}{2} = 4{,}9$; $f(y_0) = 19{,}36$

$z_0 = \dfrac{a_0 + b_0 + \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 10 + 0{,}2}{2} = 5{,}1$; $f(z_0) = 21{,}16$

4) Поскольку $f(y_0) = 19{,}36 < f(z_0) = 21{,}16$, то $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 5{,}1$

5) Получим $L = [0; 5{,}1]$

$|L| = |5{,}1 - 0] = 5{,}1 > l = 1$

$k = 1$

3¹) Вычислим $y_1 = \dfrac{a_1 + b_1 - \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 5{,}1 - 0{,}2}{2} = 2{,}45$; $f(y_0) = 3{,}8025$

$z_1 = \dfrac{a_1 + b_1 + \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 5{,}1 + 0{,}2}{2} = 2{,}65$; $f(z_0) = 4{,}6225$

4¹) Поскольку $f(y_1) = 3{,}8025 < f(z_1) = 4{,}6225$, то $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = z_1 = 2{,}65$

5¹) Получим $L_4 = [0; 2{,}65)$

$|L_4| = |2{,}65 - 0| = 2{,}65 > l = 1$

$k = 2$

3²) Вычислим $y_2 = \dfrac{a_2 + b_2 - \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 2{,}65 - 0{,}2}{2} = 1{,}225$; $f(y_2) = 0{,}5256$

$z_2 = \dfrac{a_2 + b_2 + \varepsilon}{2} = \dfrac{0 + 2{,}65 + 0{,}2}{2} = 1{,}425$; $f(z_2) = 0{,}8556$

4²) Поскольку $f(y_2) = 0{,}5256 < f(z_2) = 0{,}8556$, то $a_3 = a_2 = 0$, $b_3 = z_2 = 1{,}425$

5²) Получим $L_6 = [0; 1{,}425]$

$|L_6| = 1{,}425 > b = 1$

$k = 3$

$3^3)$ Вычислим: $y_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0 + 1,425 - 0,2}{2} = 0,6125$; $f(y_3) = 0,012$

$z_3 = \frac{a_3 + b_3 + \varepsilon}{2} = \frac{0 + 1,425 + 0,2}{2} = 0,8125$; $f(z_3) = 0,097$

$4^3)$ Поскольку $f(y_3) = 0,012 < f(z_3) = 0,097$, то $a_4 = a_3 = 0$; $b_4 = z_3 = 0,8125$

$5^3)$ Получим $L_8 = [0; 0,8125]$

$|L_8| = 0,8125 < l = 1 \Rightarrow$

$x^* \in [0, 8125]$

$x^* \approx \frac{0 + 0,8125}{2} = 0,406$

б) $f(x) = x^2 - x + 0{,}25$

1) Зададим начальный интервал неопред.: $L_0 = [0; 10]$
Положим $l = 1$

2) Положим $k = 0$

3) Вычислим: $y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = 0 + 0{,}382(10-0) = 3{,}82$

$z_0 = a_0 + b_0 - y_0 = 10 - 3{,}82 = 6{,}18$

4) Вычислим: $f(y_0) = 11{,}022$

$f(z_0) = 32{,}262$

5) Так как $f(y_0) = 11{,}022 < f(z_0) 32{,}262$, то $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = z_0 = 6{,}18$

$y_1 = a_1 + b_1 - y_0 = 0 + 6{,}18 - 3{,}82 = 2{,}36$

$z_1 = y_0 = 3{,}82$

6) Получим $L_2 = [0, 6{,}18]$

$|L_2 = 6{,}18 > l = 1 \Rightarrow$

$k = 1$

4¹) Вычислим: $f(y_1) = 3{,}4596$

$f(z_1) = 11{,}0224$

5¹) Так как $f(y_1) = 3{,}4596 < f(z_1) = 11{,}0224$, то $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = z_1 = 3{,}82$

$y_2 = a_2 + b_2 - y_1 = 0 + 3{,}82 - 2{,}36 = 1{,}46$

$z_2 = y_1 = 2{,}36$

6¹) Получим $L_3 = [0; 3{,}82]$

$|L_3| = 3{,}82 > l = 1 \Rightarrow$

$k = 2$

4²) Вычислим: $f(y_2) = 0{,}9216$

$f(z_2) = 3{,}4596$

5²) Так как $f(y_2) = 0{,}9216 < f(z_2) = 3{,}4596$, то $a_3 = a_2 = 0$, $b_3 = z_2 = 2{,}36$

$y_3 = a_3 + b_3 - y_2 = 0 + 2{,}36 - 1{,}46 = 0{,}9$

$z_3 = 1{,}46$

6^2) Получим $L_4 = [0; 2,36]$

$|L_4| = 2,36 > l = 1 \Rightarrow$

$k = 3$

4^3) Вычислим: $f(y_3) = 0,16$

$f(z_3) = 0,9216$

5^3) Так как $f(y_3) = 0,16 < f(z_3) = 0,9216$, то $a_4 = a_3 = 0$, $b_4 = z_3 = 1,46$

$y_4 = a_3 + b_3 - y_3 = 0 + 1,46 - 0,9 = 0,56$

$z_4 = y_3 = 0,9$

6^3) Получим $L_5 = [0; 1,46]$

$|L_5| = 1,46 > 1 \Rightarrow$

$k = 4$

4^4) Вычислим: $f(y_4) = 0,0036$

$f(z_4) = 0,16$

5^4) Так как $f(y_4) = 0,0036 < f(z_4) = 0,16$, то $a_5 = a_4 = 0$, $b_5 = z_4 = 0,9$

$y_5 = a_4 + b_4 - y_4 = 0,34$

$z_5 = y_4 = 0,56$

6^4) Получим $L_6 = [0; 0,9]$

$|L_6| = 0,9 < 1 \Rightarrow$

$x^* \in [0; 0,9]$

$x^* \approx \dfrac{0 + 0,9}{2} = 0,45$

№3

A) $f(x)=x_1^2-10x_1+4x_2^2-5x_2+3\to\min,$

$g(x)=10x_1+5x_2=50$

а) 1) $\nabla g(x)=\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}\neq 0\to$ лин. н/з. $\Rightarrow$ сост. классич. ф-ю Лагранжа

$L(\lambda,x)=x_1^2-10x_1+4x_2^2-5x_2+3+\lambda_1(10x_1+5x_2-50)=0$

2,3) а) $\begin{cases}\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1}=2x_1-10+10\lambda_1=0\to x_1=\dfrac{10-10\lambda_1}{2}=5(1-\lambda_1)\\ \dfrac{\partial L(x,\lambda_1)}{\partial x_2}=8x_2-5+5\lambda_1=0\to x_2=\dfrac{5}{8}(1-\lambda_1)\\ \text{б) } g(x)=10x_1+5x_2-50=0\to 10\cdot5(1-\lambda_1)+5\cdot\frac{5}{8}(1-\lambda_1)-50=0\end{cases}$

$-50\lambda_1+\frac{25}{8}-\frac{25}{8}\lambda_1=0$

$-53{,}125\lambda_1=-3{,}125$

$\lambda_1^*=0{,}06\Rightarrow x_1^*=4{,}7$

$x_2^*=0{,}59$

$x^*=\begin{pmatrix}4{,}7\\0{,}59\end{pmatrix}$ – усл. стац. точка

4) а) $\dfrac{\partial^2L(x,\lambda)}{\partial x_1^2}=2\quad\dfrac{\partial^2L(x,\lambda)}{\partial x_2^2}=8\quad\dfrac{\partial^2L(x,\lambda)}{\partial x_1\partial x_2}=0$

$d^2L(x,\lambda)=2dx_1^2+8dx_2^2$

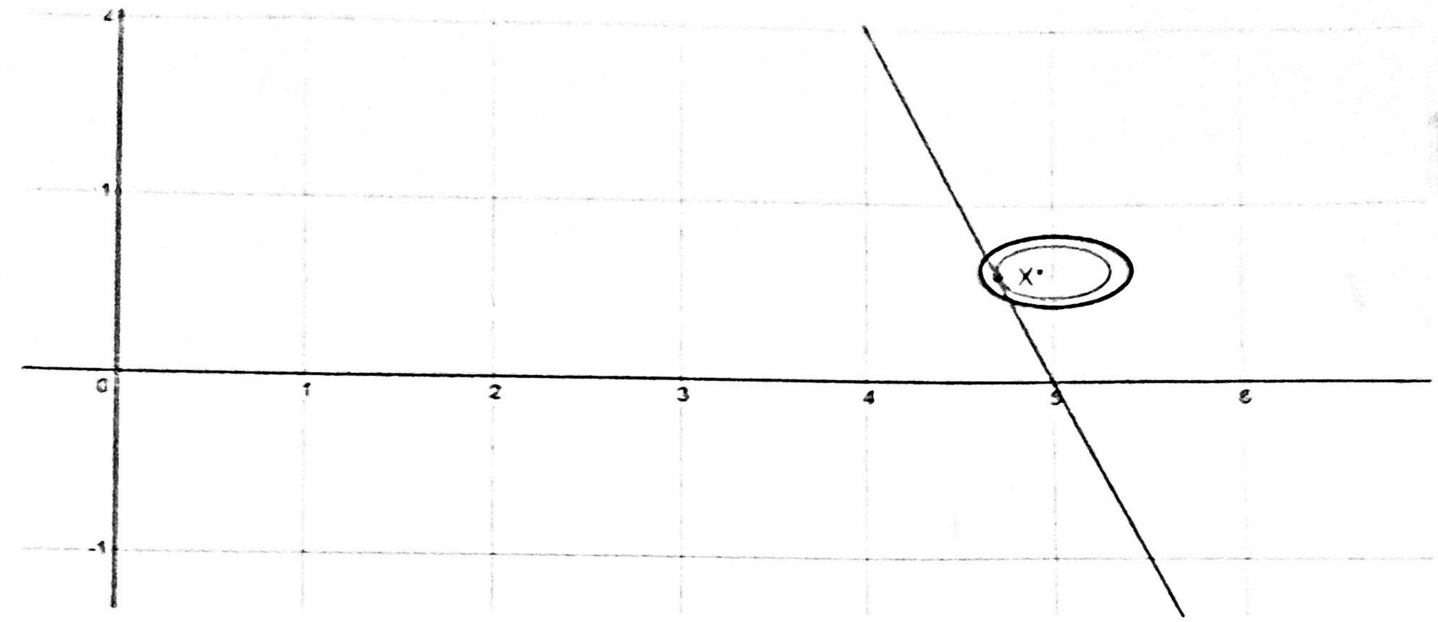
б) $\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_1}=10\quad\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_2}=5$

$dg(x)=10dx_1+5dx_2=0$

в) $dx_1=-\frac{1}{2}dx_2$

г) $d^2L(x,\lambda)=2(-\frac{1}{2}dx_2)^2+8dx_2^2=9dx_2^2>0$ при $dx_2\neq0$

$\Downarrow$ т. $x^*=\begin{pmatrix}4{,}7\\0{,}59\end{pmatrix}$ – лок. усл. min б)



Б) $f(x) = x_1 + 2x_2^2 - 10x_2 + 10 \to extr,$

$g(x) = 10x_1 + 5x_2 = 50$

а) 1) $\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \neq 0 \to$ лин. нез. $\Rightarrow$ сост. класс. ф-ю Лагранжа

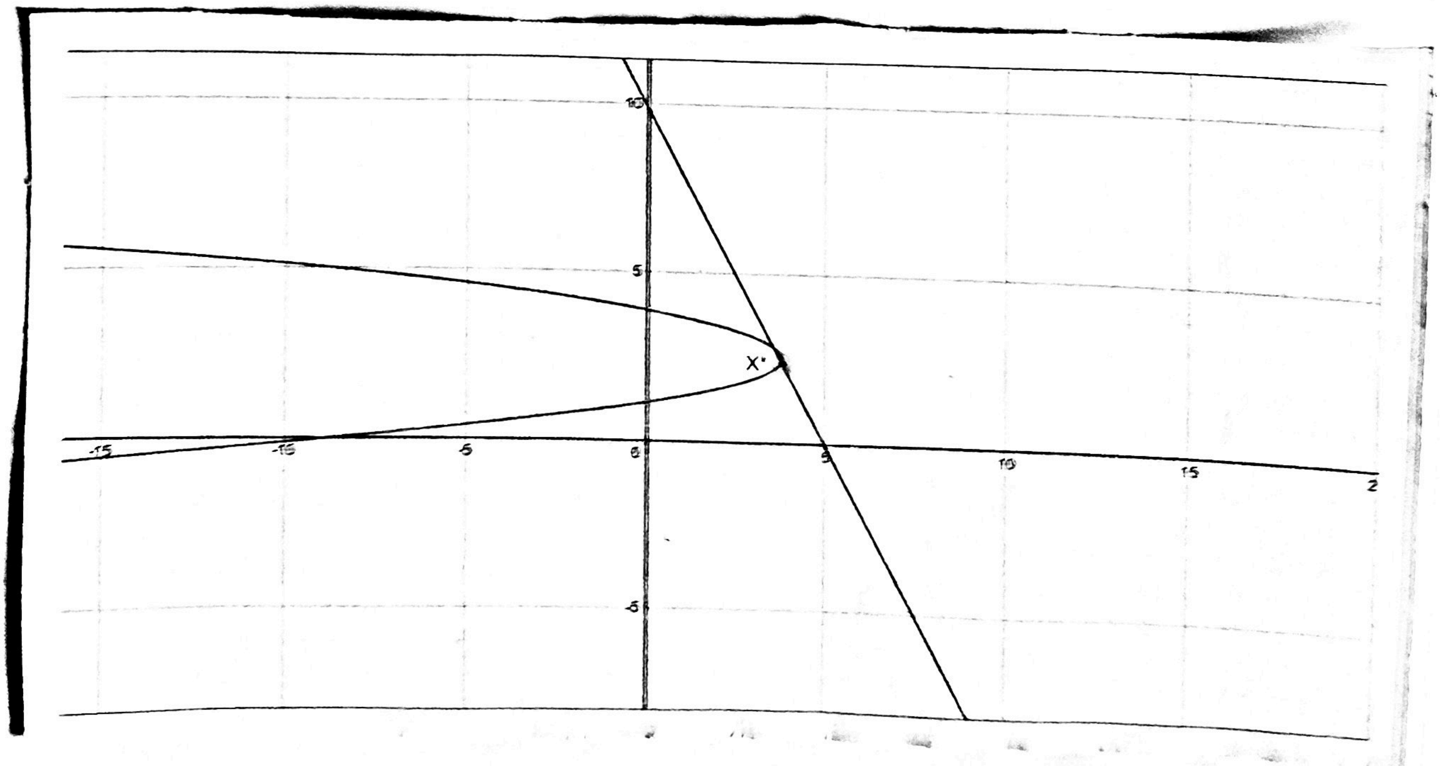
$L(x, \lambda) = x_1 + 2x_2^2 - 10x_2 + 10 + \lambda_1(10x_1 + 5x - 50) = 0$

2,3) а) $\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 1 + 10\lambda_1 = 0 \to \lambda_1 = -0,1 \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 4x^2 - 10 + 5\lambda_1 = 0 \to x_2 = \dfrac{5(\lambda_1 - 2)}{4} = 2,375 \\ x_1 + x_2 - \quad = 0 \to x_1 = 3,8125 \end{cases}$ б) $\Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 3,8125 \\ 2,375 \end{pmatrix}$

4. $\dfrac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2} = 4 \qquad \dfrac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$

$\partial^2 L(x,\lambda) = 4 dx_2^2$ о при $dx_2 \neq 0 \Rightarrow$ в т. x^* - лок. усл. min

б)



№3 A)

В)

$$f(x) = x_1^2 - 10x_1 + 4x^2 - 5x_2 + 3 \to min$$

$$10x_1 + 5x_2 = 50$$

1) $m = 1$ (огранич. типа-неравенства отсутствуют. Решим аналитически

2) $F(x, r^k) = x_1^2 - 10x_1 + 4x_2^2 - 5x_2 + 3 + \frac{r^k}{2}(10x_1 + 5x_2 - 50)^2$

3) $$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 + 10r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0$$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_2} = 8x_2 - 5 + 5r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 50 + 50r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0 \\ 80x_2 - 50 + 50r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 8x_2$$

$$16x_2 - 10 + 10r^k\, 85x_2 - 500r^k = 0$$

$$x_2 = \frac{500r^k + 10}{850r^k + 16} \qquad x_1 = \frac{4000r^k + 80}{850r^k + 16}$$

Т.к. м-ца Гессе $H(x^*(r^k), r^k) = \begin{pmatrix} 2 + 100r^k & 50r^k \\ 50r^k & 8 + 25r^k \end{pmatrix} > 0$ при $r^k > 0$, то выполн. достат. ус-ие безусл. мин. ф-ции

$$x_1^* = \lim_{r^k \to \infty} \frac{4000r^k + 80}{850r^k + 16} = \frac{4000}{850} \approx 4{,}7$$

$$x_2^* = \lim_{r^k \to \infty} \frac{500 + 10}{850r^k + 16} = \frac{500}{850} \approx 0{,}59$$

$$x^* \approx \begin{pmatrix} 4{,}7 \\ 0{,}59 \end{pmatrix} \text{ - усл. лок min}$$

$$f(x^*) = -23{,}468$$

Б

в) $$f(x) = x_1 + 2x_2^2 - 10x_2 + 10 \to extr$$

$$10x_1 + 5x_2 = 50$$

1) $m=1$ (огранич. типа-неравенств отсутствуют). Решим её аналит.

2) $$F(x, r^k) = x_1 + 2x_2^2 - 10x_2 + 10 + \frac{r^k}{2}(10x_1 + 5x_2 - 50)^2$$

3) $$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_1} = 1 + 10r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0$$

$$\frac{\partial F(x, r^k)}{\partial x_1} = 4x_2 - 10 + 5r^k(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0$$

$$r^k = \frac{1}{10(10x_1 + 5x_2 - 50)}$$

$$4x_2 - 10 + \frac{5}{10} \Rightarrow x_2 = 2,375$$

$$1 + 10r^k(10x_1 + 5 \cdot 2,375 - 50)$$

$$1 + 10r^k(10x_1 - 38,125)$$

$$x_1 = \frac{381,25r^k - 1}{100r^k}$$

Т.к. м-ца Гессе $H(x^*(r^k), r^k) = \begin{pmatrix} 100r^k & 50r^k \\ 50r^k & 25r^k + 4 \end{pmatrix} > 0$, при $r^k > 0$, то выпол... дост. усл. безусл. экстремума $F(x, r^k)$

$$x_1^* = \lim_{r^k \to \infty} \frac{381,25r^k - 1}{100r^k} = \frac{381,25}{100} = 3,8125$$

$$x^* = \begin{pmatrix} 3,8125 \\ 2,375 \end{pmatrix}$$ — лок. усл. min

$$f(x^*) = 1,34375$$

№4

$$f(x) = (x_1-10)^2 + (x_2+5)^2 \to extr$$

$$10x_1 + 5x_2 \le 50$$

$$x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0$$

а) 1) Сост. обобщ. ф-цию Лагранжа:

$$L(x,\lambda_0,\lambda) = \lambda_0((x_1-10)^2+(x_2+5)^2) + \lambda_1(10x_1+5x_2-50) + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(-x_2)$$

2) а) $$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1\lambda_0 - 20\lambda_0 + 10\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2\lambda_0 + 10\lambda_0 + 5\lambda_1 - \lambda_3 = 0$$

б) $10x_1+5x_2-50 \le 0$, $-x_1 \le 0$, $-x_2 \le 0$

с) $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \ge 0$ (для min)

$\lambda_1 \le 0$, $\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$ (для max)

d) $\lambda_1(10x_1+5x_2-50)=0$, $\lambda_2(-x_1)=0$, $\lambda_3(-x_2)=0$

3) Решим сист. для двух случаев

1) $\lambda_0 = 0$

$$\begin{cases} 10\lambda_1 = \lambda_2 \\ 5\lambda_1 = \lambda_3 \end{cases}$$

Если $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_2=0$ – противоречие с необх. усл. 1-ого порядка. Если $\lambda_1 \ne 0$, то $\lambda_2 \ne 0$, $\lambda_3 \ne 0$. Тогда $x_1=0$, $x_2=0$, $10x_1+5x_2-50=0$ образуют несовм. сист.

2) $\lambda_0 \ne 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 + 10\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 10 + 5\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 8 вариантов:

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 = 0 \\ 2x_2 + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

$100 - 25 - 50 \leq 0$ – противоречие

2) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 + 10\lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + 10 + 5\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -6 \\ \lambda_1 = 0{,}4 \end{cases}$$

$x_2 \leq 0$ – противоречие

3) $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 10 = 0 \\ \lambda_2(-x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -5 \\ \lambda_2 = -20 \end{cases}$$

$x_2 \leq 0$ – противоречие

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 = 0 \\ 2x_2 + 10 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3(-x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_3 = 10 \end{cases}$$

$100 - 50 \leq 0$ – противоречие

5) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 + 10\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 10 + 5\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0 \\ \lambda_2(-x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 10 \\ \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = -80 \end{cases}$$

$50 - 50 \leq 0$ – выполн. $x^*\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} =$ – усл. стац. т. (max)

6) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 + 10\lambda_1 = 0 \\ 2x_2 + 10 + 5\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1(10x_1 + 5x_2 - 50) = 0 \\ \lambda_3(-x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_3 = 15 \end{cases}$$

$50 - 50 \leq$ выполн $x^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = B$ - усл. стац. т. (min)

7) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 20 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + 10 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2(-x_1) = 0 \\ \lambda_3(-x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_2 = -20 \\ \lambda_3 = 10 \end{cases}$$

$\lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \geq 0$ - противоречие

8) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 - 50 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ - несовместная система

4) Проверим выполн. дост. усл. экстремума:

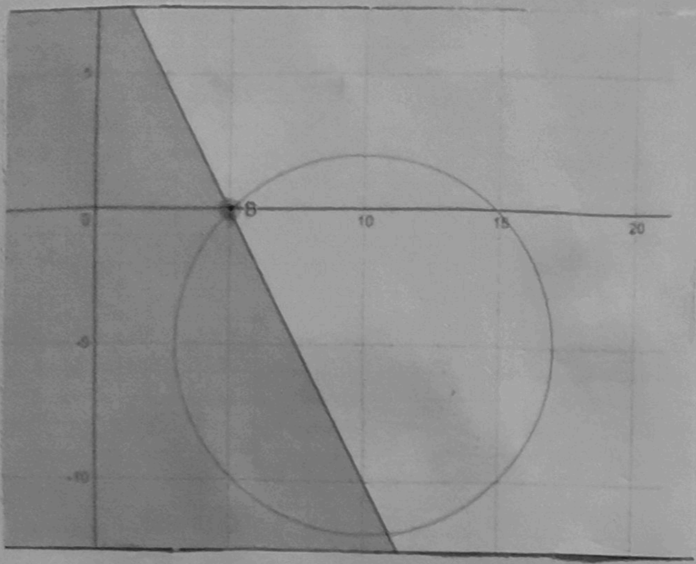
1) Для $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, Кол-во активн. огран. $l = 2 = n = 2$, $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -80$ - усл. лок. max

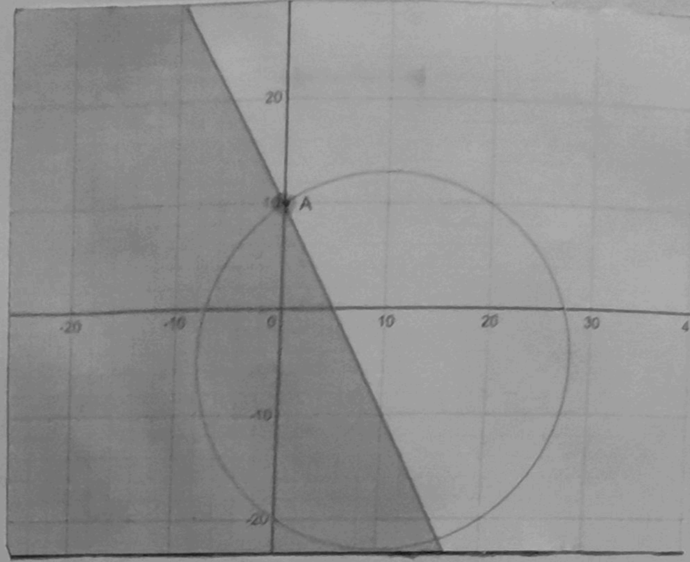
2) Для $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, Кол-во активн. огран. $l = 2 = n = 2$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 15$ - усл. лок. min

5) Найдём значения ф-ций в т.

$f(A) = 325$ $f(B) = 50$

б) графически





№5

$$f(x) = (x_1-5)^2 + (x_2-1)^2$$

$$g_1(x) = x_1 - 10 = 0$$

$$g_2(x) = x_2 \leq 0$$

а) с помощью необх. и дост. усл.

1) Сост. обобщ. ф-ю Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 (x_1-5)^2 + \lambda_0 (x_2-1)^2 + \lambda_1 (x_1 - 10) + \lambda_2 (x_2)$$

2)

а) $$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_1 - 10\lambda_0 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} = 2\lambda_0 x_2 - 2\lambda_0 + \lambda_2 = 0$$

б) $x_1 - 10 = 0$, $x_2 \leq 0$

с) $\lambda_2 \geq 0$ (для мин.) $\lambda_2 \leq 0$ (для макс.)

д) $\lambda_2 (x_2) = 0$

3) Решим сист. для двух случаев

Первый случай. $\lambda_0 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ - противоречие

Второй случай $\lambda_0 \neq 0$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - 10 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 + \lambda_2 = 0$$

Рассмотрим 2 случая

1) $\lambda_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

$1 \le 0$ – противоречие

2) $\lambda_2 \ne 0$

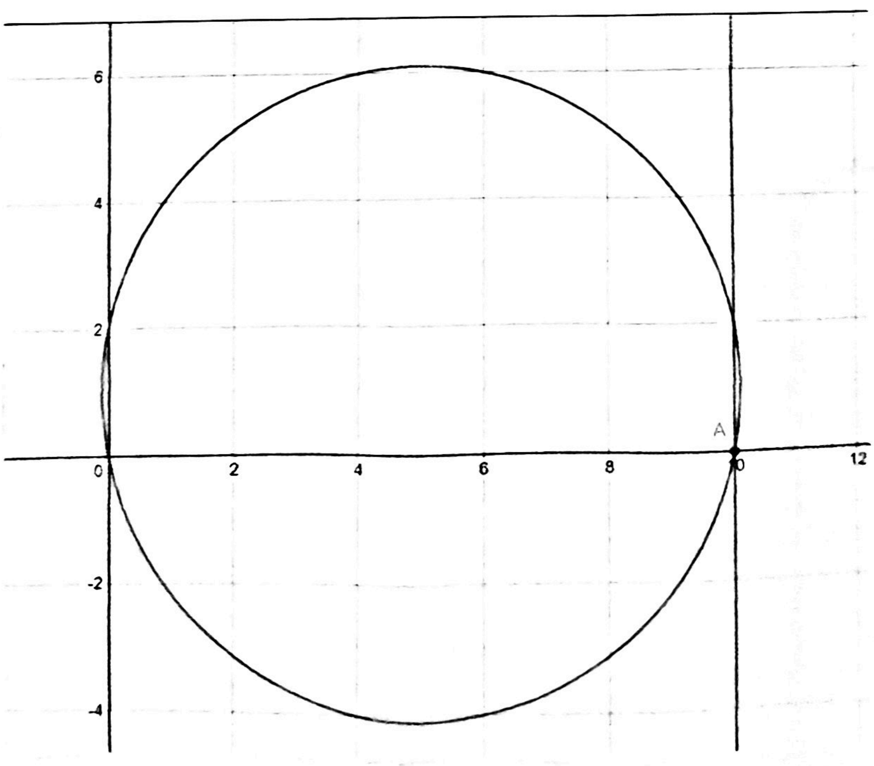
$$\begin{cases} 2x_2 - 2 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$\lambda_2 > 0 \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = A$ – усл. стац. т. (min)

4) $l = 2 = n$, $\lambda_2 = 2 > 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ – усл. лок. минимум

5) $f(A) = 26$

б) графически



в) методом штрафов

1) В сост. задаче $m=1$, $p=2$. Решим аналит.

2) Сост. вспомог. ф-ю

$$F(x,r^k)=(x_1-5)^2+(x_2-1)^2+\frac{r^k}{2}\left((x_1-10)^2+(max(0,(x_2)))^2\right)$$

3)
$$\frac{\partial F(x,r^k)}{\partial x_1}=\begin{cases}2x_1-10+r^k(x_1-10)=0 & x_2>0\\ 2x_1-10+r^k(x_1-10)=0 & x_2\le 0\end{cases}$$

$$\frac{\partial F(x,r^k)}{\partial x_1}=\begin{cases}2x_2-2-r^k(x_2)=0 & x_2>0\\ 2x_2-2=0 & x_2\le 0\end{cases}$$

Рассмотрим два случая

Первый случай: Пусть $x_2\le 0$, но $2x_2-2=0 \Rightarrow x_2=1$ - противоречие

Второй случай: Тогда $x_2>0$

$$2x_1-10+x_1r^k-10r^k=0 \qquad 2x_2-2-x_2r^k=0$$

$$x_1=\frac{10r^k+10}{2+r^k} \qquad x_2=\frac{2}{2-r^k}$$

Т.к. м-ца Гессе $H(x^*(r^k),r^k)=\begin{pmatrix}2+r^k & 0\\ 0 & 2-r^k\end{pmatrix}>0$, при $r^k>0$, то выполн. дост. усл. безусл. мин. ф-ции

$$x_1^*=\lim_{r^k\to\infty}\frac{10r^k+10}{2+r^k}=10$$

$$x_2^*\ \lim_{r^k\to\infty}\frac{2}{2-r^k}=0$$

$$x^*=\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}\text{ - усл. лок. мин.}$$

$$f(x^*)=26$$

№6

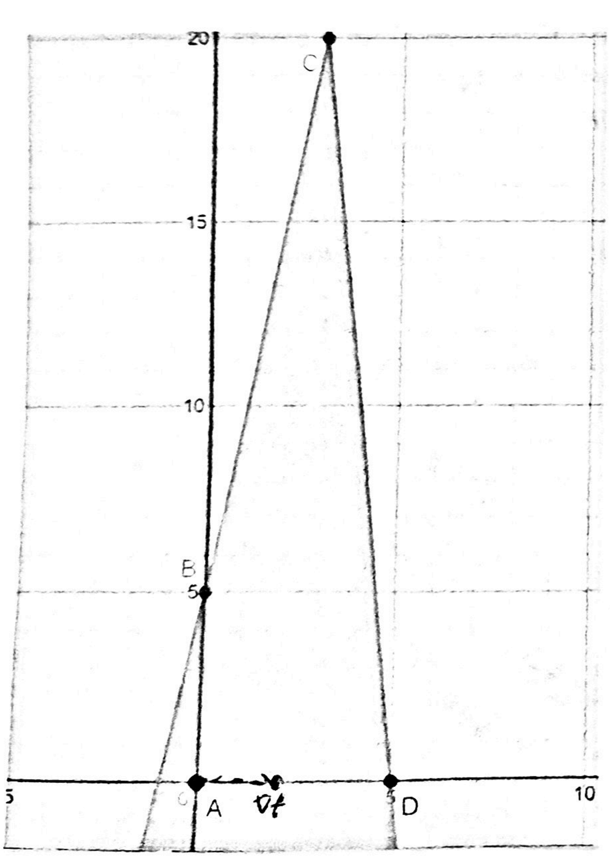
$$f(x) = 5x_1 \to extr$$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 \le 60 \\ -10x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + x_2 + \underline{x_3} = 50 \\ -10x_1 + 2x_2 + \underline{x_4} = 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

б) графически

$$\begin{cases} x_3 = 50 - 10x_1 - x_2 \\ x_4 = 10 + 10x_1 - 2x_2 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\nabla f(x) = (2;0)^T$$



т.к. градиент направлен в сторону наискорейшего возрастания ф-ции в данной точке, то в т. $D = (5;0)^T$ достигается максимум

$x_1 = 5$
$x_2 = 0$
$x_3 = 0$
$x_4 = 60$

$\Rightarrow x^*_{max} = (5;0;0;60)^T$

Минимум достигается в ~~∀~~ т. на отр. AB, т.е. сущ. мн-во точек min

$A = \{(0;0)^T, (0;5)^T\}$ - мн-во т. min а) симплекс-методом

1) а) $f(x) = 5x_1 \to extr$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ -10x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

б) x_3, x_4 - базисное переменные

в) x_1, x_2 - свободные переменные

г) начальное базисное решение

$x_1 = x_2 = 0$, тогда $x_3 = 50$, $x_4 = 10$

$x = (0; 0; 50; 10)$. Ей соотв. т. A на рис. в пункте б)

2) Найдём т. максимума

			5	0	0	0	c_j
c_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	$\frac{БР}{a_{ij}}$
0	x_3	50	$\boxed{10}$	1	1	0	5
0	x_4	10	−10	2	0	1	–
			0	0	0	0	z_j
			5	0	0	0	Δ_j

3) $\Delta_1 = 5 - 0 = 5$ $\quad z_1 = 0$

$\Delta_2 = 0 - 0 = 0$ $\quad z_2 = 0$

$\Delta_3 = 0$ $\quad z_3 = 0$

$\Delta_4 = 0$ $\quad z_4 = 0$

4) $\Delta_1 = 5 > 0$ - наиб. положит., $r = 1$

5) наим. из неотр. $\frac{БР}{a_{ij}} = 5$, $s = 1$

6) Новое базисное решение

			5	0	0	0	c_j
c_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	$\frac{БР}{a_{ij}}$
5	x_1	5	1	0,1	0,1	0	
0	x_4	60	0	3	1	1	
			5	0,5	0,5	0	z_j
			0	−0,5	−0,5	0	Δ_j

По правилу прямоуг

$10 - \frac{(50)\cdot(-10)}{10} = 60$ $\qquad$ $0 - \frac{(-10)\cdot 1}{10} = 1$

$-10 - \frac{10\cdot(-10)}{10} = 0$ $\qquad$ $1 - 0 = 1$

$2 - \frac{(-10)\cdot 1}{10} = 3$

3²) $z_1 = 5$ $\qquad$ $\Delta_1 = 5 - 5 = 0$

$z_2 = 0,5$ $\qquad$ $\Delta_2 = 0 - 0,5 = -0,5$

$z_3 = 0,5$ $\qquad$ $\Delta_3 = 0 - 0,5 = -0,5$

$z_4 = 0$ $\qquad$ $\Delta_4 = 0 - 0 = 0$

4²) Т.к. $\Delta_i \le 0$, на тек. базисном решении достиг. максимум. Решение единств. т.к. число ненулевых оценок равно числу базисных решений и ему соотв. т. D на графике

$x_1 = 5$ $\quad x_2 = 0$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_4 = 60$

$x^*_{max} = (5; 0; 0; 60)^T$

3³) Т.к. в табл. 1 выполн. усл окончания для минимума, то одной из точек мн-ва соотв. т.A на рис.

$x^*_{min} = (0\ 0\ 50\ 10)^T$

4³) Возьмем $\Delta_2 = 0$, $r = 2$

5³) наим. из неотр. $\frac{БР}{a_{is}} = 5$, $s = 2$

6³) Новое базисное решение

			5	0	0	0	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	$\frac{БР}{a_{ij}}$
0	x_3	45	15	0	1	-0,5	
0	x_2	5	-5	1	0	0,5	
			0	0	0	0	Z_j
			5	0	0	0	Δ_j

$50 - \frac{10}{2} = 45$ $\qquad$ $1 - \frac{0}{2} = 1$

$10 - \frac{(-10)}{2} = 15$ $\qquad$ $0 - \frac{1}{2} = -0,5$

$1 - \frac{2}{2} = 1$

$3^4)$ $z_1 = 0$ $\qquad$ $\Delta_1 = 5$

$z_2 = 0$ $\qquad$ $\Delta_2 = 0$

$z_3 = 0$ $\qquad$ $\Delta_3 = 0$

$z_4 = 0$ $\qquad$ $\Delta_4 = 0$

$4^4)$ Т.к. $\Delta_i \geq 0$, есть min

$$x^*_{min} = (0, 5, 45, 0)^T$$

Получается беск. число решений, то есть мн-во min т.

$A = \{(0,0)^T, (0,5)^T\}$ - мн-во т. min

№7

$$f(x) = -9x_1 + 4x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 \geq 50 \\ 20x_1 + 15x_2 \leq 300 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нахождение максимума

$$f(x) = -9x_1 + 4x_2 \to ext$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 = 50 \\ 20x_1 + 15x_2 + \underline{x_4} = 300 \end{cases} \quad x_1, \ldots, x_4 \geq 0$$

Перейдём к М-задаче:

$$f(x) = -9x_1 + 4x_2 - Mx_5 \to max$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + \underline{x_5} = 50 \\ 20x_1 + 15x_2 + \underline{x_4} = 300 \\ x_1, \ldots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 300$; $x_5 = 50$

Нач. баз. решение: $(0;0;0;300;50)^T$

2)

			-9	4	0	0	-M	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
-M	x_5	50	-10	$\boxed{5}$	-1	0	1	10
0	x_4	300	20	15	0	1	0	20
			10M	-5M	M	0	-M	z_j
			-9-10M	4+5M	-M	0	0	Δ_j

3) $z_1 = 10M$ $\quad \Delta_1 = -9 + 10M$

$z_2 = -5M$ $\quad \Delta_2 = 4 - 5M$

$z_3 = M$ $\quad \Delta_3 = -M$

$z_4 = 0$ $\quad \Delta_4 = 0$

$z_5 = -M$ $\quad \Delta_5 = 0$

4) $\Delta_1 = 4 + 5M > 0$ – наиб. полож., $r = 2$

5) наим. из неотр. $\frac{БР}{a_{ij}} = 10$, $s = 1$.

6) Новое базисное решение

			-9	4	0	0	-M	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
4	x_2	10	-2	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	-2
0	x_4	150	50	0	$\boxed{3}$	1	-3	50
			-8	4	-0,8	0	0,8	z_j
			-1	0	0,8	0	-M-0,8	Δ_j

$300 - \frac{50 \cdot 15}{5} = 150$

$20 + \frac{10 \cdot 15}{5} = 50$

$15 - \frac{15 \cdot 5}{5} = 0$

$0 + \frac{15}{5} = 3$

$1 - \frac{0}{5} = 1$

$0 - \frac{15}{5} = -3$

$3^2)$ $z_1 = -8$ $\qquad \Delta_1 = -9-(-8) = -1$

$z_2 = 4$ $\qquad \Delta_2 = 4-4 = 0$

$z = -0,8$ $\qquad \Delta_3 = 0,8$

$z_4 = 0$ $\qquad \Delta_4 = 0$

$z_5 = 0,8$ $\qquad \Delta_5 = -M-0,8$

$4^2)$ $\Delta_3 > 0 \Rightarrow$ решение не оптимально

$5^2)$ Опред. перем. вывод. из базиса $\frac{БР}{a_{ij}} = 50$ – наим. неотр., $s = 2$

Делаем замену x_4 на x_3

6^2) Новое базисное решение

			-9	4	0	0	$-M$	c_j
c_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
4	x_2	20	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{1}{15}$	0	
0	x_3	50	$\frac{50}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	
			$\frac{16}{3}$	4	0	$\frac{4}{15}$	0	z_j
			$-3\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{4}{15}$	$-M$	Δ_j

$$10 - \frac{150\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = 20$$

$$-2 - \frac{50\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = \frac{4}{3}$$

$$1 - \frac{0}{3} = 1$$

$$-\frac{1}{5} - \frac{3\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = 0$$

$$0 - \frac{1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{(-3)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)}{3} = 0$$

3^3)

$z_1 = \frac{16}{3}$ $\quad \Delta_1 = -3\frac{2}{3}$

$z_2 = 4$ $\quad \Delta_2 = 0$

$z_3 = 0$ $\quad \Delta_3 = 0$

$z_4 = \frac{4}{15}$ $\quad \Delta_4 = -\frac{4}{15}$

$z_5 = 0$ $\quad \Delta_5 = -M$

4^3) Все оценки $\Delta j \leq 0 \Rightarrow$ решение $x_2 = 20$, $x_3 = 50$ $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ яв. оптимальным

$$x^*_{max} = (0; 20; 50; 0; 0)^T$$

Нахождение минимума:

Переход к M-задаче:

$$f(x) = -9x_1 + 4x_2 + Mx_5 \to max$$

$$\begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 50 \\ 20x_1 + 15x_2 + x_4 = 300 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 300$ $x_5 = 50$

2)

			-9	4	0	0	M	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
M	x_5	50	-10	$\boxed{5}$	-1	0	1	10
0	x_4	300	20	15	0	1	0	20
			-10M	5M	-M	0	M	Z_j
			-9+10M	4-5M	M	0	0	Δ_j

3) $z_1 = -10M$ $\Delta_1 = -9+10M$

$z_2 = 5M$ $\Delta_2 = 4-5M$

$z_3 = -M$ $\Delta_3 = M$

$z_4 = 0$ $\Delta_4 = 0$

$z_5 = M$ $\Delta_5 = 0$

4) $4-5M$ – наим. отриц., $n=2$

5) наим. из неотр. $\frac{БР}{a_{ij}} = 10$, $s=1$

6) Новое базисное решение

			-9	4	0	0	M	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
4	x_2	10	-2	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	-5
0	x_4	150	$\boxed{50}$	0	3	1	-3	3
			-8	4	-0,8	0	0,8	Z_j
			-1	0	0,8	0	M-0,8	Δ_j

3^2) $z_1 = -8$ $\Delta_1 = -1$

$z_2 = 4$ $\Delta_2 = 0$

$z_3 = -0,8$ $\Delta_3 = 0,8$

$z_4 = 0$ $\Delta_4 = 0$

$z_5 = 0,8$ $\Delta_5 = M-0,8$

4^2) $\Delta_1 < 0 \Rightarrow$ решение не оптимально

5^2) Опред. перем. вывод. из базиса

$\frac{БР}{a_{ij}} = 3$ – наим. неотр., $s=2$

Делаем замену x_4 на x_1

2^3) Новое базисное решение

			-9	4	0	0	M	c_j
C_{iB}	БП	БР	X1	X2	X3	X4	X5	$\frac{БР}{a_{ij}}$
4	x_2	16	0	1	-0,08	0,04	0,08	
-9	x_1	3	1	0	0,06	0,02	-0,06	
			-9	4	-0,86	-0,02	-0,22	z_j
			0	0	0,86	0,02	M+0,22	Δ_j

$$10 - \frac{150(-2)}{50} = 16$$

$$-2 - \frac{50(-2)}{50} = 0$$

$$1 - \frac{0}{50} = 1$$

$$-\frac{1}{5} - \frac{(-2)\,3}{50} = -0{,}08$$

$$0 - \frac{(-2)}{50} = 0{,}04$$

$$\frac{1}{5} - \frac{(-2)(-3)}{50} = 0{,}08$$

3^3) $z_1 = -9$ $\Delta_1 = 0$

$z_2 = 4$ $\Delta_2 = 0$

$z_3 = -0{,}86$ $\Delta_3 = 0{,}86$

$z_3 = -0{,}02$ $\Delta_4 = 0{,}02$

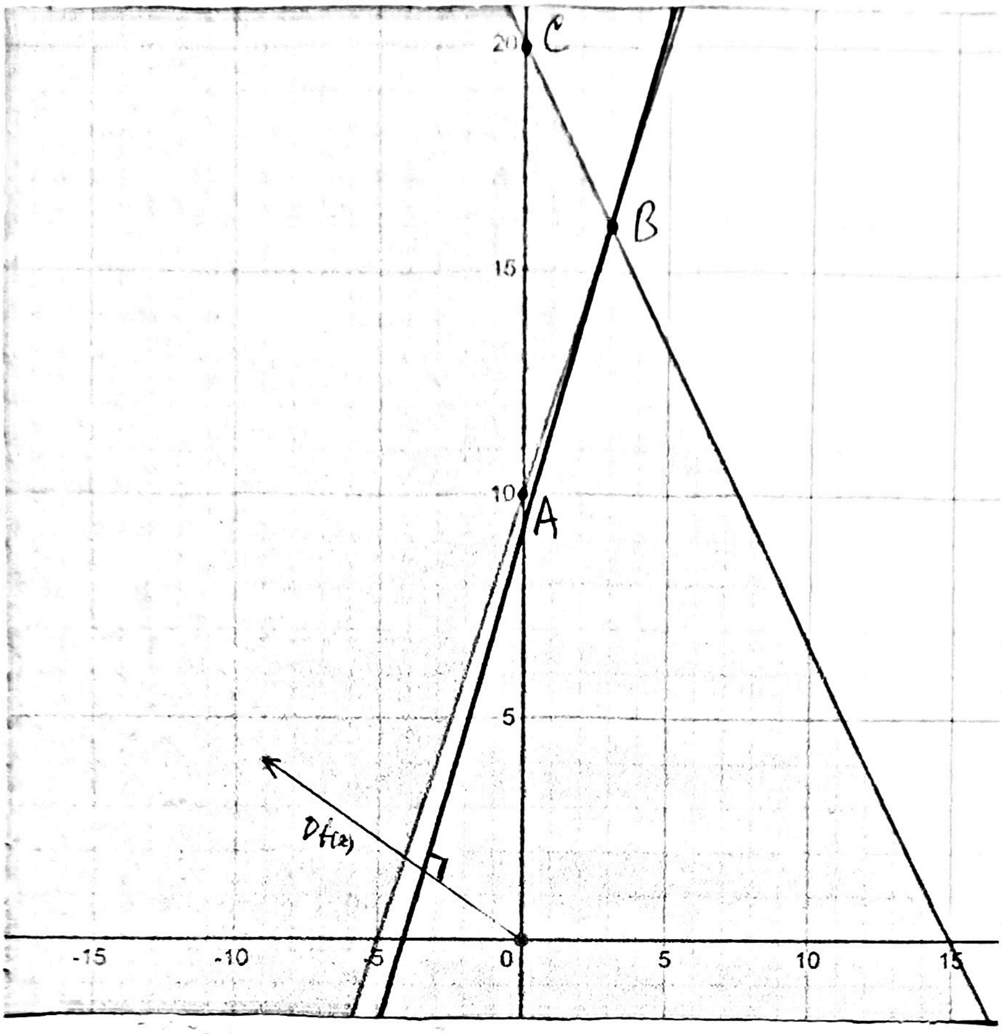
$z_4 = -0{,}22$ $\Delta_5 = M + 0{,}22$

4^3) Все оценки $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ решение $x_1 = 3$ $x_2 = 16$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ явл. оптимальным

$$x^*_{min} = (3;16;0;0;0)^T$$

Ответ: $x^*_{max} = (0;20;50;0;0)^T$, $x^*_{min} = (3;16;0;0;0)^T$

б) графически



$\nabla f(x)\,(-9,4)^T$

т. $B=(3,16)^T$ – min

т. $C=(0;20)$ – max

№8

$f(x) = 10x_1 + 8x_2 \to max$

$x_1 + x_2 \leq 10,9$

$8x_1 + 12x_2 \leq 112$

$22,5x_1 + 10x_2 \leq 185$

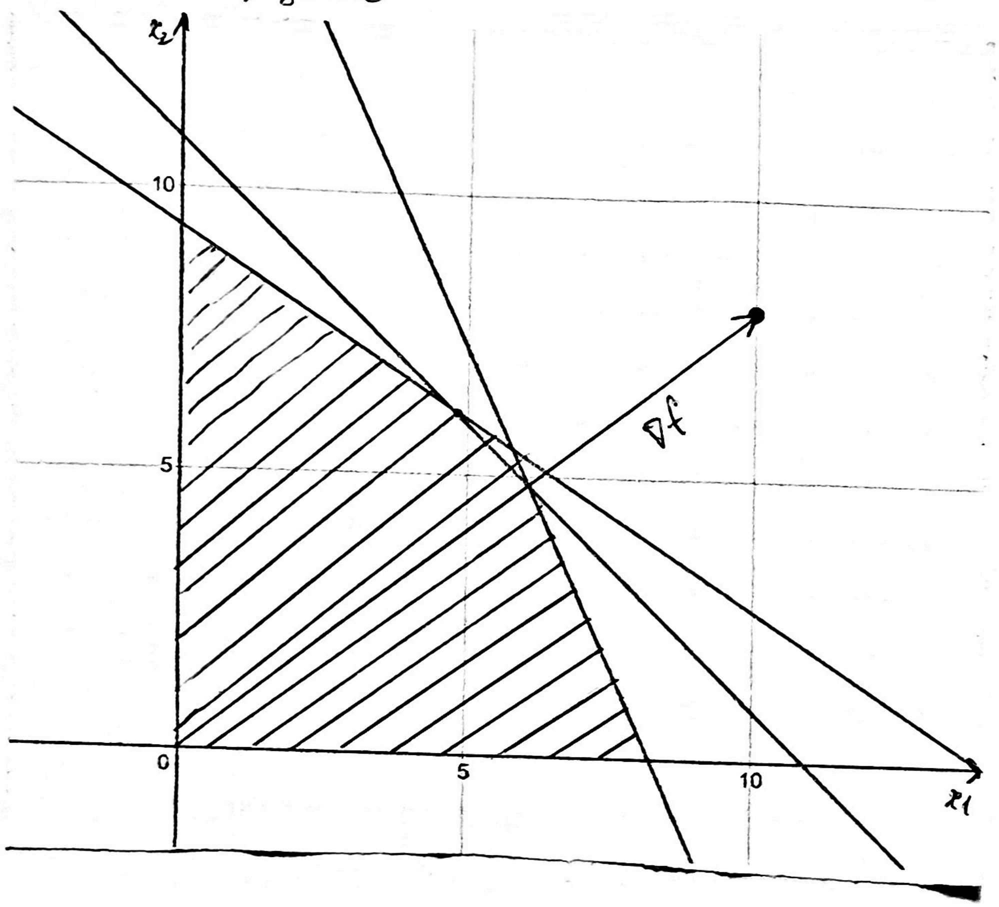
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, целые

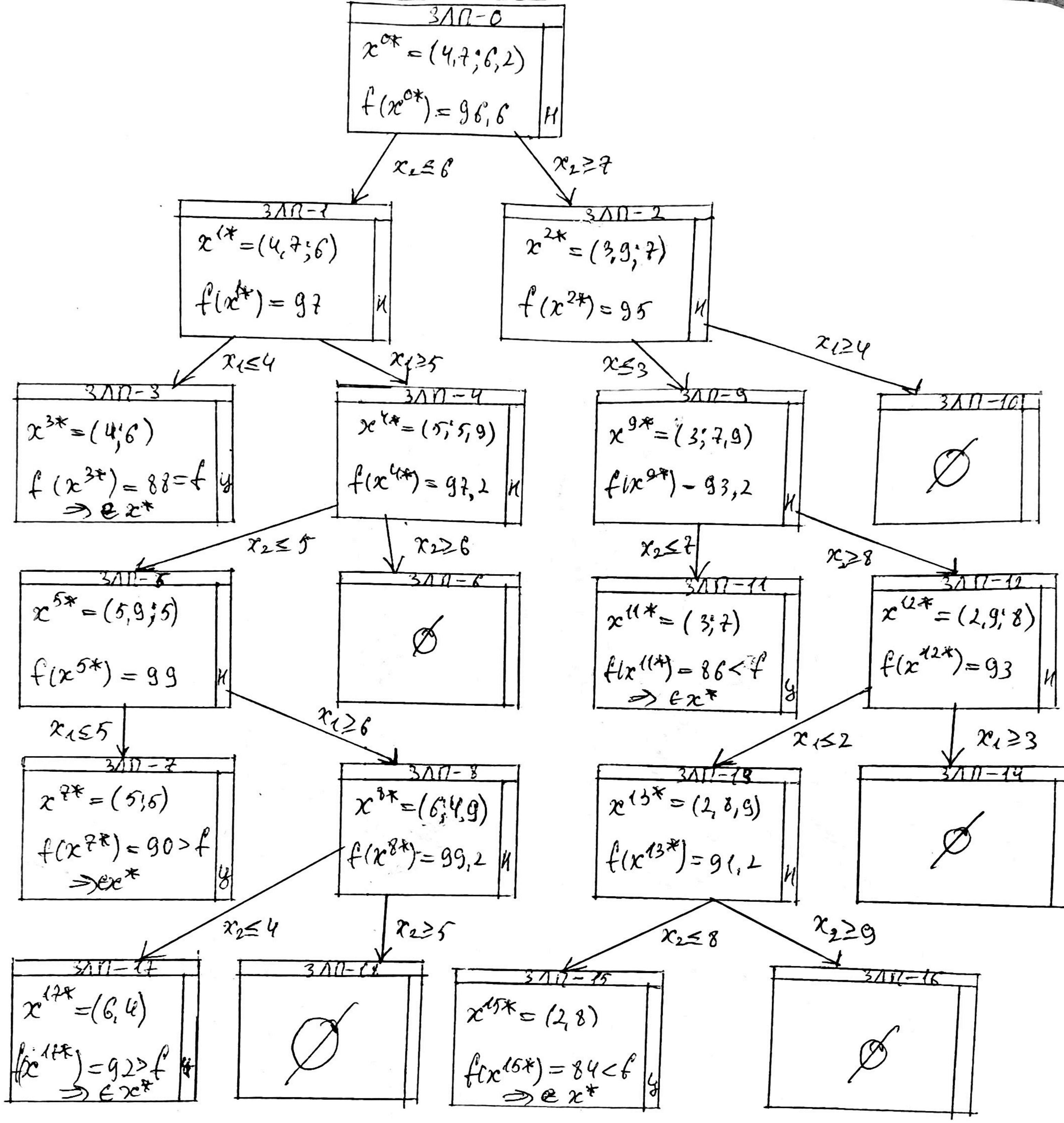
$x_2 = 10,9 - x_1$

$8x_1 + 12(10,9 - x_1) = 112$

$-4x_1 = -18,8$

$$\begin{cases} x_1 = 4,7 \\ x_2 = 6,2 \end{cases}$$





Т.о. мн-ву x^* принадлежит:

$x^{3*} = (4;6)$; $f(x^{3*}) = 88$ $\qquad$ $x^{17*} = (6,4)$; $f(x^{17*}) = 92$

$x^{7*} = (5;5)$; $f(x^{7*}) = 90$

$x^{11*} = (3;7)$; $f(x^{11*}) = 86$

$x^{15*} = (2;8)$; $f(x^{15*}) = 84$

$\Rightarrow$ решением задачи явл. $x^{17*} = (6,4)$, т.к. ему соотв. наиб. значение целевой ф-ции

№9

A)
$$I = \int_0^1 (x'^2 + 100x^2)\,dt$$
$$x(0) = 0, \quad x(1) = 10$$

1) $F = x'^2 + 100x^2$, $\quad F_x = 200x$, $\quad F_{x'} = 2x'$, $\quad \frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x'' \Rightarrow$

$\Rightarrow 200x - 2x'' = 0$

$100x - x'' = 0$

$x'' - 100x = 0$

2) $\lambda^2 - 100 = 0$

$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = -10$

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-10t}$

3) $x(0) = C_1 + C_2 = 0$

$x(1) = C_1 e^{10} + \frac{C_2}{e^{10}} = 10$ $\Rightarrow$

$C_1 = -C_2$

$-C_2 e^{10} + \frac{C_2}{e^{10}} = 10$

$C_2 \left(\frac{1}{e^{10}} - e^{10}\right) = 10$

$C_2 = \frac{10e^{10}}{1 - e^{20}}$

$C_1 = \frac{10e^{10}}{e^{20} - 1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^*(t) = \frac{10e^{10}}{e^{20} - 1}\left(e^{10t} - e^{-10t}\right)$

б)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{20}} \left(-x'^2 + 100x^2\right) dt$$

$$x(0) = 0 \qquad x\left(\frac{\pi}{20}\right) = 10$$

1) $F = -x'^2 + 100x^2$, $F_x = 200x$, $F_{x'} = -2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = -2x'' \Rightarrow$

$\Rightarrow 200x + 2x'' = 0$

2) $\lambda^2 + 81 = 0$

$\lambda_1 = 10i$, $\lambda_2 = -10i$

$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$, $\alpha = 0$, $\beta = 10$

$x(t) = C_1 \cos(10t) + C_2 \sin(10t)$

3) $x(0) = C_1 \overset{1}{\cancel{\cos(0)}} + C_2 \overset{0}{\cancel{\sin(0)}} = C_1 = 0$

$x\left(\frac{\pi}{20}\right) = C_1 \cos\left(10\frac{\pi}{20}\right) + C_2 \sin\left(10 \cdot \frac{\pi}{20}\right) = C_1 \overset{0}{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}} + C_2 \overset{1}{\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}} = C_2 =$

$x^*(t) = 10 \sin(10t)$

19

A) 2: Проверим д. у. сильного экстр.

а) ур-ие Якоби:

$F = x'^2 + 100x^2$, $F_{xx} = 200$, $F_{x'x'} = 2$, $F_{xx'} = 0$

$$\left[F_{xx} - \frac{d}{dt} F_{xx'}\right] u(t) - \frac{d}{dt}\left[F_{x'x'} u'(t)\right] = 0$$

$200u - 2u'' = 0$

$u'' - 100u = 0$

$u(t) = C_1 e^{10t} + C_2 e^{-10t}$ – общее решение

Из усл. $u(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$, $u(t) = C_1(e^{10t} - e^{-10t})$

Т.к. нетривиальное решение ур-я Якоби $u(t) = C_1(e^{10} - e^{-10t}) \neq 0$.

при $t \in [0;1]$, то усл. Якоби выполняется

б) т.к. ф-я $F(t, x, x') = x'^2 + 100$ приведи дифф-ма по x', то применимо ус-ие Лежандра. Поскольку $F_{x'x'} = 2 > 0$ при $\forall x'$, то на кривой $x^*(t)$ достигается сильный минимум $\Rightarrow$ достигается слабый минимум

№9

б) 2. Проверим д.у. сильного экстремума

а) $F = -x'^2 + 100x^2$, $F_{xx} = 200$, $F_{xx'} = 0$, $F_{x'x'} = -2$

$200u + 2u'' = 0$

$u'' + 100 = 0$

$u(t) = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t$

Из усл. $u(0) = C_1 = 0$ получаем $u(t) = C_2 \sin 10t$

Т.к. нетривиальное решение $(C_2 \neq 0)$ $u(t) = C_2 \sin 10t \neq 0$ при $t \in [0; \frac{\pi}{20}]$, то усл-ие Якоби выполн.

б) т.к. ф-я $F(t, x, x') = -x'^2 + 100x^2$ трижды дифф. по x', то применимо ус-ие Лежандра

Т.к. $F_{x'x'} = -2 < 0$ при всех x', то на экстремали $x^*(t)$ достигает сильной максимум $\Rightarrow$ достигается слабый максимум

110

$$I = \int_0^T (x'^2 + 2x - 63tx)\,dt$$

$x(0) = 0$, правый конец скользит по прямой $T=10$

1) Ур-ие Эйлера

$F = x'^2 + 2x - 63tx$, $F_x = 2 - 63t$, $F_{x'} = 2x'$, $\frac{d}{dt}\{F_{x'}\} = 2x'' \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 63t - 2x'' = 0$

$x'' = -\frac{63}{2}t + 1$

2) $x'(t) = -\frac{63}{4}t^2 + t + C_1$

$x(t) = -\frac{63}{12}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

3) Усл. трансверсальности и граничные условия

$x(0) = 0$

$F_{x'}|_{T=10} = 2x'|_{T=10} = 2x'(10) = 0$

4) Ур-е экстремали x^*t

$x(0) = C_2 = 0$

$x'(10) = -\frac{63}{4}\cdot 100 + 10 + C_1 = -1565 + C_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $C_1 = 1565$

$C_2 = 0$

$x^*(t) = -\frac{63}{12}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 1565t$