Задачи по ТСП

№1

1.1.

1. Пусть $w(t),\ t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс, $0 < t_1 < t_2$ – некоторые фиксированные моменты времени. Найти плотность распределения случайной величины $X = max(w(t_1),\ w(t_2))$.

Задача 1

$$X = max(w(t_1), w(t_2)) = \begin{cases} w(t_1), & w(t_2) - w(t_1) < 0 \\ w(t_2), & w(t_2) - w(t_1) \geq 0 \end{cases}$$

из свойств винеровского процесса:

$$P\{w(t_2) - w(t_1) < 0\} = P\{w(t_2) - w(t_1) \geq 0\} = \frac{1}{2}$$

Винеровский процесс-гассусовский с мат. ожиданием 0.

$w(t_1) \sim N(0, t_1)$ $w(t_2) \sim N(0, t_2)$

По формуле:

Ответ: $f_X(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{x^2}{2t_1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi t_2}} e^{-\frac{x^2}{2t_2}}$

1.2.

1. Пусть $w(t),\ t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс, $0 < t_1 < t_2$ – некоторые фиксированные моменты времени. Найти плотность распределения случайной величины $X = min(w(t_1),\ w(t_2))$.

1.3.

1. Пусть $w(t),\ t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс, $0 < t_1 < t_2$ – известны моменты времени. Известно, что распределение $w(at_1)$ совпадает с распределением $bw(t_2)$. При этом известно, что $P\{\ w(at_1) > c\} = d$, где $c > 0$ и $0 < d < 0.5$ – известные величины. Найти неизвестные величины a и b.

Из файла 301 группы:

$P\{w(at_1) > c\} = d \Leftrightarrow P\{w(at_1) < c\} = 1 - d \Leftrightarrow F_w(c, at_1) = 1 - d$;

По условию $F_w(c, at_1) = F_w(c/b,\ t_2)$, следовательно $P\{w(at_1) < c\} = P\{w(t_2) < c/b\} = 1 - d$;

Процесс $w(t)$ имеет нормальное распределение;

$\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{t_1 2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c} exp\{-t^2/(2at_1)\}dt = 1 - d$ и $\Phi(c/b) = \frac{1}{b\sqrt{t_2 2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c} exp\{-t^2/(2b^2 t_2)\}dt = 1 - d$;

Сделаем замены переменных:

- $\hat{t} = t/\sqrt{at_1}$ - для 1-го интеграла;
- $\hat{t} = t/(b\sqrt{t_2})$ - для 2-го интеграла;

Тогда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c/\sqrt{at_1}} exp\{-t^2/2\}dt = 1 - d$ и $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{c/(b\sqrt{t_2})} exp\{-t^2/2\}dt = 1 - d$;

Откуда получаем, что $\Phi(c/\sqrt{at_1}) = 1 - d$ и $\Phi(c/(b\sqrt{t_2}) = 1 - d$;

Выражая a, b получим, $a = c^2/(t_1(\Phi^{-1}(1-d))^2),\ b = \sqrt{c/(\Phi^{-1}(1-d)\sqrt{t_2})}$.

1.4.

1. Пусть $w(t),\ t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс, $a>0$ – некоторая неслучайная константа. Известно, что для известных порогов $s,\ b > 0$ выполнено равенство $P\{w(as) < b\}=d$. Для произвольного известного значения $e > 0$ найти вероятность $P\left\{\sup\limits_{t\in[0,s]} w(at)\right\} < e$.

Решение от Георгия Туманова:

$w(at) \sim N(0, at)$

Найдем a: $P(w(as) < b) = \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{as}}\right) = d$

$$\frac{b}{\sqrt{as}} = \Phi^{-1}(d)$$

$$\sqrt{a} = \frac{b}{\Phi^{-1}(d)\sqrt{s}}$$

$$a = \frac{b^2}{s\left(\Phi^{-1}(d)\right)^2}$$

τ_e - случайный момент пересечения $w(at)$ уровня e.

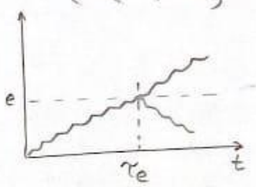
$$\tau_e = \inf\{t \geq 0 : w(at) \geq e\}$$

Тогда $P\{\sup\limits_{t\in[0,s]} w(at) < e\} = P\{\tau_e > s\}$

Найдем эту вероятность. Рассмотрим вероятность $P(w(at) > e)$. Так как $w(at)$ - непрерывная, то значит траектория пересекла уровень e в момент $t' \in [0;t]$.

Значит $\{\tau_e \leq t\} \subset \{w(at) > e\}$.

$P(w(at) > e) = P(w(at) > e,\ \tau_e \leq t) = P(w(at) > e \mid \tau_e \leq t) \cdot P(\tau_e \leq t)$



По св-ву симметричности:

$P(w(at) > e \mid \tau_e \leq t) = P(w(at) < e \mid \tau_e \leq t) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(w(at) > e) = \frac{1}{2} P(\tau_e \leq t) \Rightarrow P(\tau_e \leq t) = 2P(w(at) > e)$

Тогда искомая вероятность равна:

$P(\tau_e > s) = 1 - P(\tau_e \leq s) = 1 - 2(1 - P(w(as) \leq e)) = 1 - 2 + 2P(w(as) \leq e) =$

$= 2\Phi\left(\frac{e}{\sqrt{as}}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(d)\sqrt{s}}{b\sqrt{s}}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(d)}{b}\right) - 1$

1.5.

1. Пусть $w(t),\ t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс, $b(t) = w(t) - tw(1)$ – броуновский мост. В какой момент времени ковариация $b(t)$ и $w(t)$ максимальна?

Способ 1

$w(t)$, $t \in [0,1]$ – винер. проц.

$b(t) = w(t) - t\,w(1)$

$cov(b(t), w(t))$ – макс. ?

$cov(w(t) - t\,w(1), w(t)) = cov(w(t), w(t)) - t \cdot cov(w(1), w(t)) =$

$= Dw(t) - t\,cov(w(1), w(t)) = \sigma^2 t - \sigma^2 t \cdot \min(1, t)$

при $t \geq 1$ $\quad cov(b(t), w(t)) = 0$

при $0 \leq t < 1$ $\quad cov(b(t), w(t)) = \sigma^2 t - \sigma^2 t^2$

берем производную: $\sigma^2 - 2\sigma^2 t = 0$

$\sigma^2(1 - 2t) = 0$

$t = \frac{1}{2}$

2 произв.: $-2\sigma^2 < 0$ $\quad$ т.к. $\sigma^2 > 0$

$\Rightarrow t = \frac{1}{2}$ – максимум

Ответ: $t = \frac{1}{2}$

Способ 2(почти аналогично)

$w(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс

$b(t) = w(t) - t\,w(1)$

Распишем ковариацию $b(t)$ и $w(t)$

$cov(b(t), w(t)) = cov(w(t) - t\,w(1), w(t)) = cov(w(t), w(t) - t(cov(w(1), w(t))) =$

$= K_w(t,t) - t \cdot K_w(1,t)$

K_w для стандартного винеровского процесса:

$K_w(t,s) = min(t,s) \Rightarrow$

$\Rightarrow K_w(t,t) - t \cdot K_w(1,t) = min(t,t) - t \cdot min(1,t) = t - t \cdot min(1,t)$

•) Если $t = 1$, то $t - t \cdot min(1,t) = 1 - 1 \cdot min(1,1) = 1 - 1 \cdot 1 = 0 = cov(b(t), w(t))$

• Если $t = 0$, то $t - t \cdot min(1,t) = 0 - 0 \cdot min(1,0) = 0 = cov(b(t), w(t))$

• Если $0 < t < 1$, то $t - t \cdot min(1,t) = t - t \cdot t = t - t^2 = cov(b(t), w(t))$

Найдём максимум $t - t^2 = f(t)$:

$f'(t) = 1 - 2t = 0;\ t = 0.5 \Rightarrow$ $\overset{+}{\nearrow}\ 0.5\ \overset{-}{\searrow}$

$\Rightarrow t = 0.5$ максимум $f(t)$

Ответ: при $t = 0.5$ достигается максимум ковариации

1.6.

1. Пусть $w(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс, $b(t) = tw(t) - t^2w(1)$. В какой момент времени ковариация $b(t)$ и $w(t)$ максимальна?

Способ 1

$w(t)$, $t \in [0,1]$ – винер. проц.

$b(t) = t\,w(t) - t^2 w(1)$

$cov(b(t), w(t))$ – макс.?

$cov(t\,w(t) - t^2 w(1), w(t)) = t \cdot Dw(t) - t^2 cov(w(1), w(t))$

$= \sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2 \min(1, t)$

при $t \geq 1$ $\quad cov(b(t), w(t)) = 0$

$0 \leq t < 1$ $\quad cov(b(t), w(t)) = \sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^3$

1 произв.: $2\sigma^2 t - 3\sigma^2 t^2 = 0$

$\sigma^2 t(2 - 3t) = 0$ $\qquad \sigma^2$ – const

$t = 0 \qquad t = \frac{2}{3}$

2 произв.: $2\sigma^2 - 6\sigma^2 t$ при $t = \frac{2}{3}$ < 0 $\Rightarrow$ $t = \frac{2}{3}$ – т. макс.

Способ 2(почти аналогично вышло)

$w(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс

$b(t) = t w(t) - t^2 w(1)$

Распишем ковариацию $b(t)$ и $w(t)$

$cov(b(t), w(t)) = cov(t w(t) - t^2 w(1), w(t)) = cov(w(t), t w(t) - t^2 w(1)) =$

$= K_w(t,t) \cdot t - t^2 \cdot K_w(1,t)$

K_w для стандартного винеровского процесса:

$K_w(t,s) = \min(t,s) \Rightarrow$

$\Rightarrow K_w(t,t) \cdot t - t^2 \cdot K_w(1,t) = \min(t,t) \cdot t - t^2 \cdot K_w(1,t) = t^2 - t^2(\min(1,t))$

•) Если $t = 1$, то $t^2 - t^2(\min(1,t)) = 1 - 1 \cdot 1 = 0 = cov(b(t), w(t))$

•) Если $t = 0$, то $t^2 - t^2 \min(1,t) = 0 - 0 = 0 = cov(b(t), w(t))$

•) Если $0 < t < 1$, то $t^2 - t^2 \min(1,t) = t^2 - t^3$

Найдём максимум $t^2 - t^3 = f(t)$

$f'(t) = 2t - 3t^2 = t(2 - 3t) = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{2}{3}$

$-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \frac{2}{3} \quad$ $-$

$\Rightarrow t = \frac{2}{3}$ максимум $f(t)$

Ответ: при $t = \frac{2}{3}$ достигается максимум ковариации

1.7.

1. Пусть $w(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный винеровский процесс, $b(t) = \min(w(t), w(1))$. Найти математическое ожидание процесса $b(t)$?

№2

2.1.

2. Пусть $p(t),\ t \geq 0$ – стандартный пуассоновский процесс. Является ли $r(t) = p(t) - p(1)$ стохастически непрерывным? Ответ обосновать.

$p(t),\ t \geq 0$ – пуас. проц.

$r(t) = p(t) - p(1)$ – стох. непр. ?

С.К. непр. $\Rightarrow$ стох. непр.

$$M[r(t)] = M[p(t)] - M[p(1)] = \lambda t - \lambda = \lambda(t-1)$$

непр. при $\forall t$

$$R_r(t,s) = cov(r(t), r(s)) = cov(p(t)-p(1), p(s)-p(1)) =$$
$$= cov(p(t), p(s)) - cov(p(t), p(1)) - cov(p(1), p(s)) +$$
$$+ cov(p(1), p(1)) = \lambda \min(t,s) - \lambda \min(t,1) - \lambda \underbrace{(1,s)}_{\min} + \lambda$$

непр. при $\forall t, s$

$\Rightarrow r(t)$ СК непр. $\Rightarrow$ стох. непр.

2.2.

2. Пусть $p(t),\ t \in [0,1]$ – стандартный пуассоновский процесс, $q(t) = tp(t) - p(1)$. Является ли $q(t)$ СК-непрерывным?

$p(t)$, $t \in [0,1]$ - пуас. проц.

$q(t) = t\,p(t) - p(1)$ - С.к. непр.?

$M[q(t)] = M[t\,p(t)] - M[p(1)] = \lambda t^2 - \lambda$

непр. при $\forall t$

$R_q(t,s) = cov(q(t), q(s)) = cov(t\,p(t) - p(1), s\,p(s) - p(1)) =$

$= cov(t\,p(t), s\,p(s)) - cov(t\,p(t), p(1)) - cov(p(1), s\,p(s)) +$

$cov(p(1), p(1)) = \lambda t s \min(t,s) - \lambda t^2 - \lambda s^2 + \lambda$

непр. при $\forall t, s$

$\Rightarrow q(t)$ с.к. непр.

2.3.

2. Пусть $p(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный пуассоновский процесс, $q(t) = p(t) - tp(1)$ – пуассоновский мост. Является ли $q(t)$ СК-непрерывным?

$p(t)$, $t \in [0,1]$ - пуас. проц.

$q(t) = p(t) - t\,p(1)$ - С.к. непр.?

$M[q(t)] = M[p(t)] - t\,M[p(1)] = \lambda t - \lambda t = 0$

непр.

$R_q(t,s) = cov(q(t), q(s)) = cov(p(t) - t\,p(1), p(s) - s\,p(1)) =$

$= cov(p(t), p(s)) - cov(p(t), s\,p(1)) - cov(t\,p(1), p(s)) +$

$+ cov(t\,p(1), s\,p(1)) = \lambda \min(t,s) - \lambda s t - \lambda t s + \lambda t s =$

$= \lambda \min(t,s) - \lambda t s$

непр. при $\forall t, s$

$\Rightarrow q(t)$ с.к. непр.

2.4.

2. Пусть $p(t)$, $t \geq 0$ – стандартный пуассоновский процесс. Является ли процесс $min(p(t),p(1))$ стохастически непрерывным? Ответ обосновать.

$p(t)$, $t \geq 0$ – пуас. проц.

$x(t) = \min(p(t), p(1))$ – стох. непр.?

$$M[x(t)] = \begin{cases} M[p(t)], & t \leq 1 \\ M[p(1)], & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda t, & t \leq 1 \\ \lambda, & t > 1 \end{cases}$$

$M[x(t)] = \lambda \min(1, t)$ непр. при $\forall t$

$$R_x(t, s) = \begin{cases} cov(p(t), p(s)), & t \leq 1 \\ cov(p(1), p(1)), & t > 1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda \min(t, s), & t \leq 1 \\ \lambda, & t > 1 \end{cases}$$

$R_x(t, s) = \lambda \min(1, t, s)$

непр. при $\forall t, s$

$\Rightarrow x(t)$ с.к. непр. $\Rightarrow$ стох. непр.

2.5.

2. Пусть $p(t)$, $t \geq 0$ – стандартный пуассоновский процесс. Является ли процесс $p^2(t)$ процессом с ортогональными приращениями? Ответ обосновать.

$p(t),\ t \geq 0$ – пуас. проц.

$p^2(t)$ – проц. с ортог. приращ.?

$$cov\left(p^2(t_2) - p^2(t_1),\ p^2(t_4) - p^2(t_3)\right) = 0 \quad \text{при } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$$

проверим это

$$\ldots = R(t_2, t_4) - R(t_2, t_3) - R(t_1, t_4) + R(t_1, t_3)$$

$$R(t_2, t_4) = cov\left(p^2(t_2), p^2(t_4)\right) = M\left[\left(p^2(t_2) - m[p^2(t_2)]\right)\left(p^2(t_4) - m[p^2(t_4)]\right)\right]$$

$$= M\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\cdot \overset{\circ}{p}{}^2(t_4)\right) = M\left[\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_4) - \overset{\circ}{p}{}^2(t_2) + \overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right)\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\cdot\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_4) - \overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right)\right] + M\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right)^2 =$$

$$= \underbrace{M\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right)}_{=0}\cdot \underbrace{M\left[\overset{\circ}{p}{}^2(t_4) - \overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right]}_{=0} + D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right) = D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right)$$

с ост. R аналогично

и получаем $cov\left(p^2(t_2) - p^2(t_1),\ p^2(t_4) - p^2(t_3)\right) =$

$$= D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right) - D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_2)\right) - D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_1)\right) + D\left(\overset{\circ}{p}{}^2(t_1)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ да

2.6.

2. Пусть $p(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный пуассоновский процесс, $q(t) = tp(t) - p(1)$. Имеет ли $q(t)$ непрерывную модификацию? Доказать свое утверждение.

Пусть $p(t)$, $t \in [0;1]$ - стандартный пуассоновский процесс;

$$q(t) = tp(t) - p(1)$$

Имеет ли $q(t)$ непрерывную модификацию?

Решение:

1. Теорема Колмогорова

Пусть $\xi(t)$ - случайная функция, принимающая числовые значения и заданная на отрезке $T = [a;b]$. Если существуют положительные константы k, α и β, такие, что для $\forall t, \tau \in T$

$$M[|\xi(t) - \xi(\tau)|^{\alpha} \leq k|t-\tau|^{1+\beta}$$

то найдется непрерывная функция $\tilde{\xi}(t)$, стохастически эквивалентная $\xi(t)$ (модификация)

2. В нашем случае:

рассмотрим моменты времени s и t $(s > t)$

$$M[|q(t) - q(s)|^{\alpha}] \leq k|t-s|^{1+\beta}$$

пусть $\alpha = 1$ $\beta = 1$ $k = \lambda$

$$M[|q(t) - q(s)|] \leq \lambda|t-s|^2$$

$$M[|tp(t) - \cancel{p(1)} - sp(s) + \cancel{p(1)}|] \leq \lambda|t-s|^2$$

$$M[|tp(t) - sp(s)|] \leq \lambda|t-s|^2$$

$$M[tp(t)] - M[sp(s)] \leq \lambda|t-s|^2$$

$$tMp(t) - sMp(s) \leq \lambda|t-s|^2$$

$p(t)$ и $p(s)$ - пуассоновские (по опр.) процессы

$\Rightarrow$ $Mp(t) = \lambda t$

$Mp(s) = \lambda s$

$t \cdot \lambda t - s \cdot \lambda s \leq \lambda |t-s|^2$

$\lambda(t^2 - s^2) \leq \lambda(t-s)^2$

$(t^2 - s^2) \leq (t-s)^2$

$\cancel{t^2} - s^2 \leq \cancel{t^2} - 2st + s^2$

$st \leq s^2 \quad |: s > t > 0$

$t \leq s$ (по построению)

$\Rightarrow$ существует $\tilde{q}(t)$, являющаяся непрерывной модификацией $q(t)$, ч.т.д.

стр. 152 Панков

2.7.

2. Пусть $p(t)$, $t \in [0,1]$ – стандартный пуассоновский процесс, $q(t) = p(t) - tp(1)$ – пуассоновский мост. Имеет ли $q(t)$ непрерывную модификацию? Доказать свое утверждение.

Решение:

1. Теорема Колмогорова

> Пусть $\xi(t)$ - случайная функция, принимающая числовые значения и заданная на отрезке $T = [a;b]$. Если существуют положительные константы k, α и β, такие, что для $\forall t, \tau \in T$
>
> $$M[|\xi(t) - \xi(\tau)|^\alpha \leq k|t-\tau|^{1+\beta}$$
>
> то найдется непрерывная функция $\tilde{\xi}(t)$, стохастически эквивалентная $\xi(t)$ (модификация)

2. В нашем случае:

рассмотрим моменты времени s и t $(s > t)$

$$M[|q(t) - q(s)|^\alpha] \leq k|t-s|^{1+\beta}$$

пусть $\alpha = 1$ $\beta = 1$ $k = \lambda$

$$M[|q(t) - q(s)|] \leq \lambda|t-s|^2$$

$$M[|p(t) - tp(1) - p(s) + sp(1)|] \leq \lambda |t-s|^2$$

$$M[p(t)] - M[t(p(1))] - M[p(s)] + M[sp(1)] \leq \lambda |t-s|^2$$

$$M[p(t)] - t[M[p(1)]] - M[p(s)] + s[M[p(1)]] \leq \lambda |t-s|^2$$

$p(t)$ и $p(s)$ - пуассоновские (по определению) процессы

$\Rightarrow Mp(t) = \lambda t \Rightarrow Mp(1) = \lambda \cdot 1 = \lambda$

$Mp(s) = \lambda s \Rightarrow Mp(1) = \lambda$

$\Rightarrow \lambda t - t\lambda - \lambda s + s\lambda \leq \lambda |t-s|^2$

$0 \leq \lambda |t-s|^2$ - верно, т.к. λ - положительная константа (см. теор. Колмогорова), а модуль очевидно ≥ 0

$\Rightarrow$ существует $\tilde{q}(t)$, являющаяся непрерывной модификацией $q(t)$.

ч.т.д.

2.8

2. Пусть $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - последовательность центрированных некоррелированных случайных величин с дисперсиями $\frac{1}{n}$. Имеет ли последовательность СК-предел? Ответ обосновать.

$\{X_n\}_{n\in N}$ $\quad MX_n = 0 \quad corr(X_n, X_m) = 0$

$DX_n = \frac{1}{n}$

$$corr(X_n, X_m) = \frac{cov(X_n, X_m)}{\sqrt{DX_n}\cdot\sqrt{DX_m}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} cov(X_n, X_m) = 0 \\ DX_n \neq 0,\ DX_m \neq 0 \end{cases}$$

т.к. $cov(MX_n\, MX_m) = 0$

$\Rightarrow M[X_n X_m] = MX_n \cdot MX_m$

$n \neq m$

$$\lim_{n,m\to\infty} M[X_n X_m] = \lim_{n,m\to\infty} (\cancelto{0}{MX_n}\, \cancelto{0}{MX_m}) = 0$$

$n = m$

$$\lim_{n,m\to\infty} MX_n^2 = \lim_{n,m\to\infty} DX_n = \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ с.к. сходимости нет

№3

3. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ - стандартный дискретный белый шум, $X_n = -0{,}95X_{n-1} + V_n$. Найти спектральную плотность последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ее дисперсию.

3. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ - стандартный дискретный белый шум, $X_n = -0{,}95X_{n-1} + V_n$. Найти спектральную плотность последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ее дисперсию.

V_n **- стандартный дискретный белый шум**

$$M[V_n]=0 \qquad R_{V_k} = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k\neq 0 \end{cases}$$

$$Xn = -0.95X\{n-1\} + Vn = 0.9025X\{n-2\} - 0.95V\{n-1\} + Vn = \ldots = \sum_{k=-\infty}^{n} (-0.95)^{n-k} V_k$$

Докажем, что Xn стационарный случпроц в широком смысле (ССП).

$$M[Xn] = M[\sum_{k=-\infty}^{n} (-0.95)^{n-k} V_k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (-0.95)^{n-k} M[V_k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (-0.95)^{n-k} * 0 = 0 \text{ для всех n}$$

K(n+k, n) = M[X{n+k} * Xn] = M[(-0.95 * X{n+k-1} + Vn) * Xn] = -0.95 * M[X{n+k-1} * Xn] +
+ M[Vn]M[Xn] = -0.95 * K(n+k-1, n).

Повторив k раз, получим:
K(n+k, n) = -0.95 * K(n+k-1, n) = (-0.95)^2 * K(n+k-2, n) = … = (-0.95)^k * K(n, n) =
= (-0.95)^k * D(n)

$$D(n) = D[Xn] = D[\sum_{k=-\infty}^{n} (-0.95)^{n-k} V_k] = \sum_{k=-\infty}^{n} (-0{,}95)^{2(n-k)} D[V_n] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-0{,}95)^{2k} = \frac{1}{1-(0{,}95)^2} = 10{,}26$$

Следовательно, Xn стационарен в широком смысле.

R(k) = (-0.95)^|k| * **10.26**

Найдём спектральную плотность распределения:

$$f_\xi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\lambda n} R_\xi(n).$$

Тут 10.26

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\cancel{\frac{20}{39}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda n} * (-0.95)^{|n|} =$$

5.13/pi **5.13/pi**

$$= \cancel{\frac{10}{39\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i\lambda n} * (-0.95)^n + \cancel{\frac{10}{39\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\lambda n} * (-0.95)^n$$

Итого, плотность имеет вид:

$$f(\lambda) = \cancel{\frac{10}{39\pi}}\left(\frac{1}{1+0.95exp(i\lambda)} + \frac{-0.95exp(-i\lambda)}{1+0.95exp(-i\lambda)}\right)$$

5.13/pi

3. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ - стандартный дискретный белый шум, $X_n = 0{,}1X_{n-1} + V_n$. Найти спектральную плотность последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ее дисперсию.

3. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ - стандартный дискретный белый шум, $X_n = -0{,}95V_{n-1} + V_n$. Найти спектральную плотность последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ее дисперсию.

3. Пусть $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ - стандартный дискретный белый шум, $X_n = 0{,}1V_{n-1} + V_n$. Найти спектральную плотность последовательности $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и ее дисперсию.

3. Пусть $\{V_t\}_{t\in R}$ - стандартный непрерывный белый шум, $dX_t = -2X_t dt + 3V_t dt$. Найти спектральную плотность случайной функции $\{X_t\}_{t\in R}$ и ее дисперсию.

3. Пусть $\{V_t\}_{t\in R}$ - стандартный непрерывный белый шум, $dX_t = -2X_t dt + 3V_t dt$. Н
спектральную плотность случайной функции $\{X_t\}_{t\in R}$ и ее дисперсию.

$$\gamma_\xi(t) = \begin{cases} D_\xi, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \longrightarrow D_\xi = 1$$

$$dX_t = -2X_t dt + 3V_t dt$$

$$\dot{X}_t = -2X_t + 3V_t$$

$$\dot{X}_t + 2X_t = 3V_t$$

$$\frac{\dot{X}_t}{3} + \frac{2}{3}X_t = V_t$$

$$f_{V_t} = \frac{D_{V_t}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} =$$

$$\varphi(\lambda)=\frac{1}{a_0+i\lambda a_1}$$

$a_0=1/3$

$a_1=\frac{2}{3}$

$$\varphi(\lambda)=\frac{3}{1+i\lambda\cdot 2}$$

$$|\varphi(\lambda)|^2=\frac{9}{1+(2\lambda)^2}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\left[\alpha+\frac{a_0}{a_1}\right],\quad \beta_0=\frac{1}{2}\left[\frac{a_0}{a_1}-\alpha\right],\quad G=\frac{D}{a_0(\alpha a_1+a_0)}.$$

$$f_{X_t}=\frac{1}{2\pi}\cdot|\varphi(\lambda)|^2=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{9}{1+(2\lambda)^2}$$

$$R_{X_t}(0)=D_{X_t}\Rightarrow R_{X_t}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda h}\cdot f_{X_t}\,d\lambda=\left|Ge^{-\alpha_0|t|}\left[\operatorname{ch}(\beta_0 t)+\frac{\alpha_0}{\beta_0}\operatorname{sh}(\beta_0|t|)\right]\right.$$

Как по другому - Х3

P.S. ебать, да мне похуй, у этого пидораса такая формула, и я её вставил

3. Пусть $\{V_t\}_{t\in R}$ - стандартный непрерывный белый шум, $X_t=\int_{t-h}^{t}(s-t)V_s ds$. Найти спектральную плотность случайной функции $\{X_t\}_{t\in R}$ и ее дисперсию.

$\rightarrow D_v=1$

$e^{i\lambda t},\ t\in R$

$$\gamma_v(t)=\begin{cases}D_v, & t=0\\ 0, & t!=0\end{cases}\qquad f_x(t)-?$$

$$X_t=\int_{t-h}^{t}(s-t)V_s\,dS\qquad D_x(t)-?$$

Ахуе~~е~~янна

$$D_{V_t}=\gamma_v(0)=$$

$$V(t)=e^{i\lambda t},\ t\in\mathbb{R}$$

$$X_t=\int_{t-h}^{t}(s-t)e^{i\lambda s}\,dS=\frac{-e^{-i\lambda(-t+h)}\cdot h\cdot i\cdot\lambda+e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda(-t+h)}}{\lambda^2}=e^{i\lambda t}\left(\frac{-e^{-i\lambda h}hi\lambda+1-e^{-i\lambda h}}{\lambda^2}\right)$$

$$\varphi(\lambda)$$

$$ux\longmapsto|\varphi(\lambda)|^2ux$$

$$f_{X_t}=|\varphi(\lambda)|^2 f_{V_t}$$

$$f_{V_t}=\frac{1}{2\pi}\Rightarrow f_{X_t}=\frac{-e^{-i\lambda h}hi\lambda+1-e^{-i\lambda h}}{2\pi\lambda^2}$$

$$D_{X_t}=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(t)\,e^{i\lambda t}\,d\lambda=$$

$D_{X_t}=M\Big[\Big($  $\Big)^2\Big]$

X

3. Пусть $\{V_t\}_{t\in R}$ - стандартный непрерывный белый шум, $X_t=\int_{t-h}^{t}(s-t+h)V_s ds$. Найти спектральную плотность случайной функции $\{X_t\}_{t\in R}$ и ее дисперсию.

№4

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое меньше вероятности повторения символа. Записать матрицу переходной вероятности цепи за два шага. Является ли исходная цепь эргодической (ответ обосновать)? Найти стационарное распределение цепи

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое меньше вероятности повторения символа. Записать матрицу переходной вероятности цепи за два шага. Является ли исходная цепь эргодической (ответ обосновать)? Найти дисперсию цепи в стационарном режиме.

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое больше вероятности повторения символа. Записать матрицу переходной вероятности цепи на одном шаге. Является ли цепь эргодической (ответ обосновать)? Найти математическое ожидание цепи в стационарном режиме.

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое больше вероятности повторения символа. Записать матрицу переходной вероятности цепи на одном шаге. Является ли цепь эргодической

4. Бесконечная двоичная строка - марковская цепь.

$E = \{0; 1\}$

вероятность изменения символа - a

вероятность повторения символа - $3a$

найдем эти вероятности:

$$3a + a = 1$$

$$a = 0{,}25$$

Построим матрицу переходной вероятности:

$p_{00} = p_{11} = 3a = 0{,}75$

$p_{01} = p_{10} = a = 0{,}25$

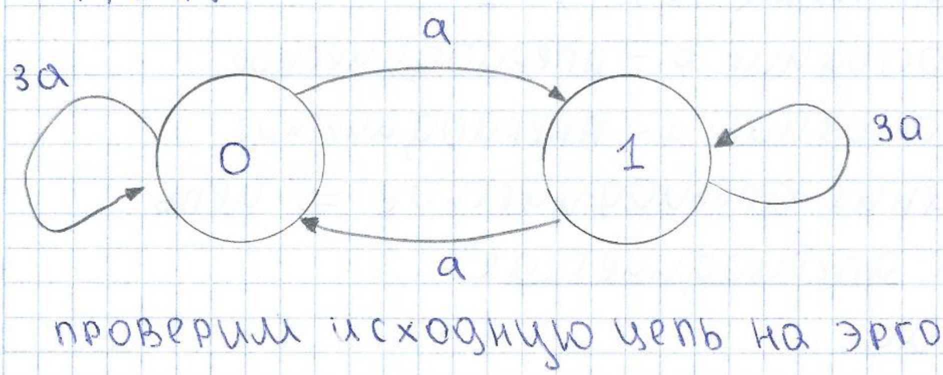
$\Downarrow$

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$ - матрица за один шаг

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}625 \end{pmatrix}$$

матрица за два шага

для наглядности построим стохастический граф:



проверим исходную цепь на эргодичность

$\left.\begin{array}{l} \text{неразложимая} \\ \text{апериодическая} \end{array}\right\} \Rightarrow$ эргодическая все состояния:

$\left.\begin{array}{l}\text{существенные}\\ \text{сообщающиеся}\end{array}\right\} \Rightarrow$ неразложимая

• проверим существенность состояний:

опр. несущественности:

$\exists e_j \in E$, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ для некоторого $m \geq 1$, но $p_{j,k}^{(n)} = 0$ для всех $n \geq 1$

где

$p_{k,j}^{(n)} = P\{\xi_n = e_j \mid \xi_0 = e_k\}$ - вероятность перехода из состояния e_k в состояние e_j за n шагов.

Для $\forall e_j \in E$, $E = \{0;1\}$, $p_{j,k}^{(n)} \neq 0$ $n \geq 1 \Rightarrow$ состояния исходной цепи существенные (т.к. по условию из любой вершины графа можно попасть в любую вершину графа)

• проверим сообщаемость состояний:

опр. сообщающихся

$\exists m, n \geq 1$, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ $p_{j,k}^{(n)} > 0$

$\forall e_j \in E = \{0;1\}$ $p_{j,k}^{(n)} > 0$ и $p_{k,j}^{(m)} > 0$

(т.к. вероятности переходов между состояниями ненулевые по опр.) $\Rightarrow$ сообщающиеся

получили:

$\left.\begin{array}{l}\checkmark \text{ существенные}\\ \checkmark \text{ сообщающиеся}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\text{неразложимость}}{\text{доказана}}$

проверим апериодичность цепи:

опр. периодической цепи:

d_k – наибольший общий делитель в последовательности

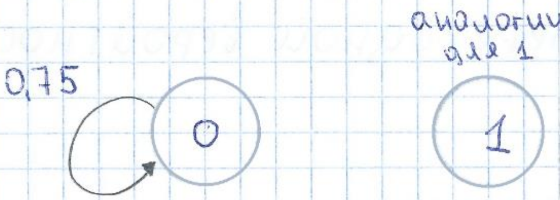
$\{ n \geq 1 \mid f_k(n) > 0 \}$

где

$$f_k(n) = P\{ \xi_n = e_k, \xi_{n-1} \neq e_k, \ldots, \xi_1 \neq e_k \mid \xi_0 = e_k \}$$

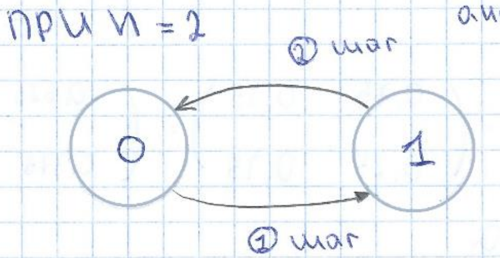
вероятность впервые вернуться в точку, из которой начинали за n шагов

при $n = 1$:



$f_0(1) = 0{,}75 > 0$

при $n = 2$



аналогично для 1

$f_0(2) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 > 0$

аналогично для $n \geq 3 \in \mathbb{N}$

$d_k = d_0 = d_1 = \text{НОК}(1, 2, 3, \ldots) = 1$

$d_0 = 1 \Rightarrow$ состояние 0 – апериодическое

$d_1 = 1 \Rightarrow$ состояние 1 – апериодическое

все состояния апериодические $\Rightarrow$ цепь маркова <u>апериодическая</u>

получили:

$\left.\begin{array}{l} \wedge \text{ апериодичность} \\ \wedge \text{ неразложимость} \end{array}\right\} \Rightarrow$ данная цепь <u>эргодичная</u>

Найдем стационарное распределение цепи:

Составим систему:

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{k,j} \cdot p_k \qquad j=0,1,\dots \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0 = p_{00} \cdot p_0 + p_{10} \cdot p_1 \\ p_1 = p_{01} \cdot p_0 + p_{11} \cdot p_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}75 \cdot p_0 + 0{,}25\, p_1 = p_0 \\ 0{,}25\, p_0 + 0{,}75\, p_1 = p_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases}$$

Первые 2 уравнения являются лк друг друга => исключим одно из них

$$\begin{cases} 0{,}75\, p_0 + 0{,}25 p_1 = p_0 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}75\,(1-p_1) + 0{,}25\, p_1 = 1 - p_1 \\ p_0 = 1 - p_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}5 \\ p_0 = 0{,}5 \end{cases}$$

получили стационарное распределение вероятн.

В некоторых билетах:

• найти мат. ожидание цепи в стационарном режиме:

$$M = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$$

• найти дисперсию цепи в стационарном режиме:

$$D = M[x^2] - (M[x])^2 = 0^2 \cdot p_0 + 1^2 \cdot 0{,}5 - 0{,}5^2 =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое меньше вероятности повторения символа. Предполагая, что цепь изначально находилась в стационарном распределении, найти вероятность того, что первыми 5 символами ее будут 11011.

Рябинин А.С.
М8О-305Б-18

№4

Матрица ~~пф~~ перехода за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} 3x & x \\ x & 3x \end{pmatrix}$$

По условию нормировки

$$\begin{cases} 3x + x = 1 \\ x + 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Подставим

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Найдем стационарное распределение вероятностей. Оно является единственным решением с-мы:

$$\begin{cases} p_j = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_{k,j} p_k, \quad j = 0, 1, \ldots \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{00} p_0 + p_{10} p_1 = p_0 \\ p_{01} p_0 + p_{11} p_1 = p_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}75 p_0 + 0{,}25 p_1 = p_0 \\ 0{,}25 p_0 + 0{,}75 p_1 = p_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}25 - 0{,}25 p_1 + 0{,}75 p_1 \\ p_0 = 1 - p_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0{,}5 \\ p_0 = 0{,}5 \end{cases}$$

$$P(11011) = p_1 \cdot p_{11} \cdot p_{10} \cdot p_{01} \cdot p_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{512}$$

Ответ: $P(11011) = \frac{9}{512}$

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое больше вероятности повторения символа. Предполагая, что цепь изначально находилась в стационарном распределении, найти вероятность того, что 1-м, 3-м и 5-м символами ее будут 1.

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое больше вероятности повторения символа. Предполагая, что цепь изначально находилась в стационарном распределении, найти вероятность того, что 1-м, 3-м и 5-м символами ее будут 1.

$$P = \begin{pmatrix} a & 3a \\ 3a & a \end{pmatrix}$$ – матрица перехода за один шаг

$$a + 3a = 1 \Rightarrow a = 0{,}25 \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} p_0 = p_{00} p_0 + p_{10} p_1 \\ p_1 = p_{01} \cdot p_0 + p_{11} p_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 0{,}5 \\ p_1 = 0{,}5 \end{cases}$$

$P(10101) = p_1 \cdot p_{10} \cdot p_{01} \cdot p_{10} \cdot p_{01} =$ 0.5*0.75*0.75*0.75*0.75 = 0.1582

$P(10111) = p_1 \cdot p_{10} \cdot p_{01} \cdot p_{11} \cdot p_{11} =$ 0.5*0.75*0.75*0.25*0.25 = 0.0175

$P(11101) = p_1 \cdot p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{10} \cdot p_{01} =$ 0.5*0.25*0.25*0.75*0.75 = 0.0175

$P(11111) = p_1 \cdot p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{11} \cdot p_{11} =$ 0.5*0.25*0.25*0.25*0.25 = 0.0019

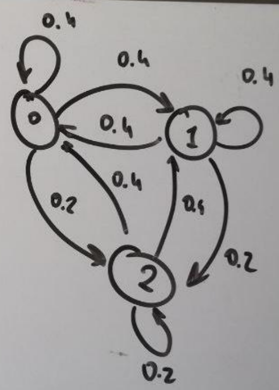
P = P(10101) + P(10111) + P(11101) + P(11111) = 0.1951 - вероятность того, что на 1, 3 и 5-ом местах будут 1

4. Бесконечная двоичная строка представляет собой марковскую цепь. Вероятности изменения символа одинаковые и втрое меньше вероятности повторения символа. Предполагая, что цепь изначально находилась в стационарном распределении, найти вероятность того, что 1-м, 3-м и 5-м символами ее будут 0.

4. Бесконечная троичная строка составлена из независимых одинаково распределенных дискретных случайных величин. В каждой позиции строки вероятности появления 0 и 1 равны, и вдвое больше вероятности появления 2. Доказать, что данная строка описывает марковскую цепь. Нарисовать стохастический граф данной цепи. Записать матрицу переходных вероятностей на двух шагах.

$\underline{P}\{0\} = \underline{P}\{1\} = 2a$

$\underline{P}\{2\} = a$



$2a + 2a + a = 1 \Rightarrow a = 0.2$

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \\ \Sigma = 1 \end{array}$$

$$P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$