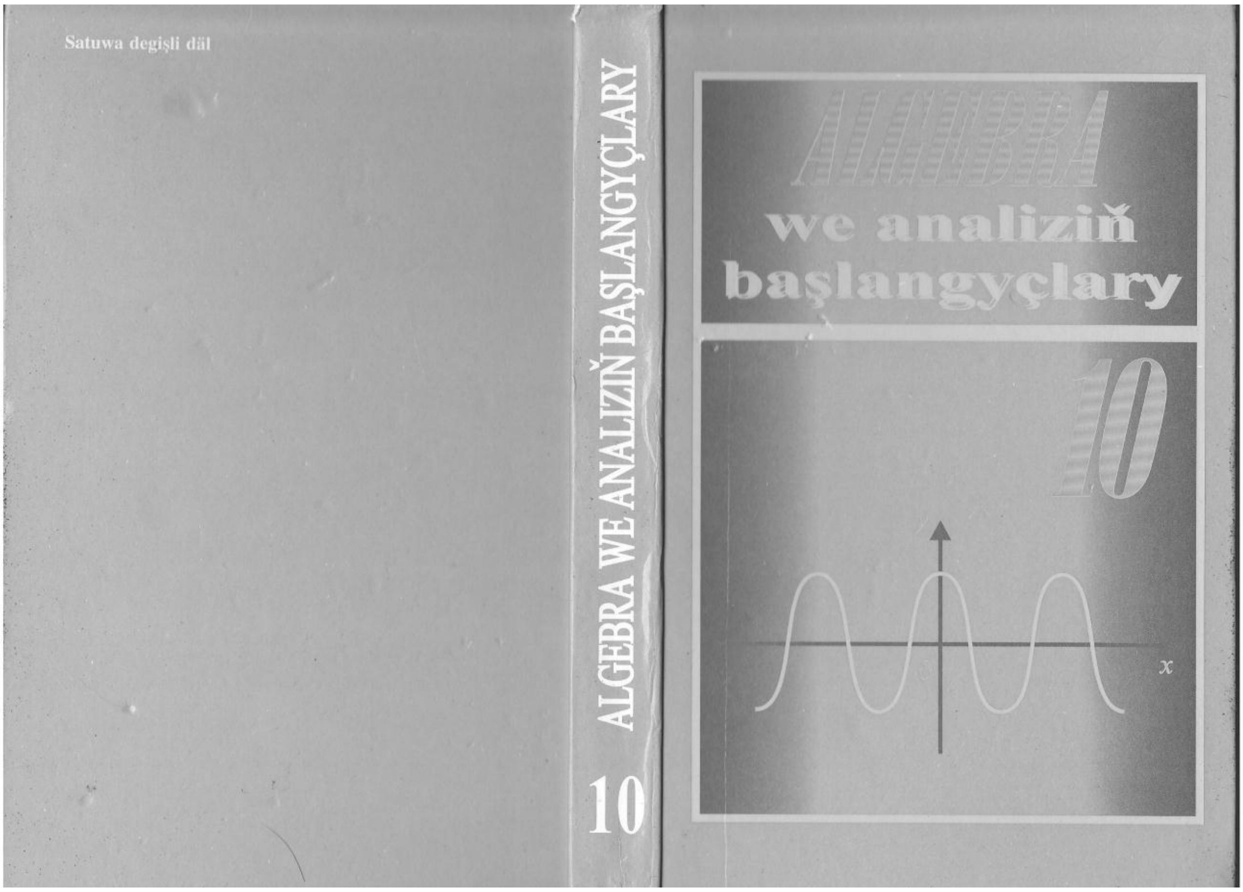
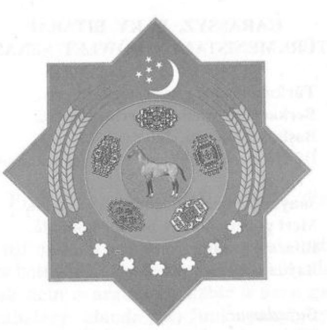


UOK 373.167.1:512
T 74

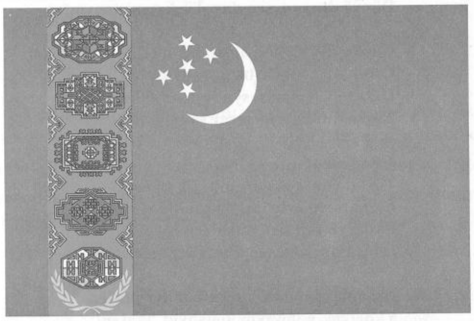
Töräýew J. we basg.
T 74 **Algebra we analiziň başlangyçlary.** Orta mekdepleriň X synpy üçin synag okuw kitaby. A.:Türkmen döwlet neşirýat gullugy. 2008. Dosent A. Narçaýewiň redaksiýasy bilen.

TDKP № 14, 2008 KBK 22.14 ýa 72

TÜRKMENISTANYŇ ILKINJI PREZIDENTI
BEÝIK SAPARMYRAT TÜRKMENBAŞY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY



TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

GARAŞSYZ, BAKY BITARAP
TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Türkmenbaşyň guran beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:
Türkmenbaşyň guran beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:
Türkmenbaşyň guran beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Arkamdyr bu daglar, penamdyr düzler,
Ykbalym, namysym, togabym, Watan!
Saňa şek ýetirse, kör bolsun gözler,
Geçmişim, geljegim, dowamym, Watan!

I BAP. ÖNÜM

§1. Funksiýanyň predeli barada düşünje

Biz 8-nji synpda yzygiderligiň predeli düşünjesi bilen tanyş bolupdyk. Funksiýanyň predeli düşünjesini kesgitlemek üçin x argument käbir a sana gaty golaý ýerleşen bahalary alanda $f(x)$ funksiýanyň üýtgeýşine seredeliň.

Goý, $f(x)=2x+1$ funksiýa berlen bolsun. Aşakdaky tablisada bu funksiýanyň $x=3$ nokada golaý ýerleşen nokatlardaky bahalary görkezilendir.

x	2,5	2,8	2,9	2,95	2,99	3	3,01	3,05	3,1	3,2	3,5
$f(x)$	6	6,6	6,8	6,9	6,98	7	7,02	7,1	7,2	7,4	8

Tablisadan görnüşi ýaly, x-iň bahalary 3-e golaýlaşanda funksiýanyň bahalary 7-ä golaýlaşýar. Şunlukda, $|f(x)-7|$ tapawut $x=3$ nokada ýeterlik golaý nokatlarda islendik kiçi ε (epsilon) položitel sandan kiçi bolar. Munuň şeýledigini $\varepsilon=0{,}01$ üçin görkezeliň:

$$f(x)-7=(2x+1)-7=2x-6,$$

$$|2x-6|<0{,}01,$$

$$2|x-3|<0{,}01, \qquad \text{ýa-da} \qquad \begin{array}{l} -0{,}005<x-3<0{,}005, \\ 2{,}995<x<3{,}005. \end{array}$$

$$|x-3|<0{,}005.$$

Biz x nokatdan 3 nokada çenli aralyk 0,005-den kiçi bolanda (ýa-da 3 nokadyň (2,995; 3,005) etrabyndan alnan bahalarda) $f(x)$ we 7 sanlaryň arasyndaky uzaklygyň 0,01-den kiçi boljaklygyny gördük. Umuman, her näçe kiçi položitel ε sany alsak hem $|x-3|<\frac{\varepsilon}{2}$ bolanda $|f(x)-7|<\varepsilon$ bolar.

Şunuň ýaly bolanda x ululyk 3-e ymtylanda $2x+1$ funksiýanyň predeli 7-ä deň diýilýär we ol $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$ görnüşde ýazylýar.

Kesgitleme. Eger islendik položitel ε san üçin şeýle bir položitel δ (delta) san tapylyp, $|x-a|<\delta$ deňsizligi kanagatlandyrýan a-dan tapawutly ähli x-ler üçin $|f(x)-A|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýetse, onda A sana $f(x)$ funksiýanyň a nokatdaky predeli diýilýär.

Ol $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ýaly belgilenýär.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly $f(x)$ funksiýanyň a nokatda predeliniň bolmagy üçin onuň a nokadyň käbir etrabynda kesgitlenen (a nokadyň özünde kesgitsiz hem bolup biler) bolmagy zerurdyr.

1-nji mysal. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ funksiýanyň $x=2$ nokatdaky predelini tapalyň.

Berlen funksiýanyň 2-ä golaý nokatlardaky bahalarynyň tablisasyny düzeliň.

x	1,5	1,8	1,9	1,95	1,99	2	2,01	2,05	2,1	2,2	2,5
$f(x)$	3,5	3,8	3,9	3,95	3,99	kesgitsiz	4,01	4,05	4,1	4,2	4,5

Tablisadan x-iň alýan bahalary 2-ä golaýlanda, y-iň degişli bahalarynyň 4-e örän ýakyn bolýandygy görünýär. x 2-ä ymtylanda bu funksiýanyň 4-e deň bolan predeliniň barlygyny görkezeliň.

Hakykatdan-da $x\neq 2$ bolsa, onda

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon,\ |x+2-4|<\varepsilon \text{ ýa-da } |x-2|<\varepsilon \text{ bolar.}$$

δ sanyň deregine ε alyp, biz $|f(x)-4|$ tapawudyň 0,001, 0,0001, 0,00001 we ş.m. islendik kiçi položitel sandan kiçi bolmagyny gazanyp bileris. Ýagny x-iň 2-ä ýeterlik ýakyn bahalarynda $f(x)$ funksiýanyň bahalary 4-den örän az tapawutlanar.

Diýmek, berlen funksiýa $x=2$ bolanda kesgitsiz hem bolsa, $x\to 2$ onuň 4-e deň bolan predeli bardyr.

Predeliň kesgitlemesinden peýdalanyp, funksiýalaryň nokatdaky predellerini tapmak örän çylşyrymlydyr. Şoňa görä-de funksiýalaryň predelleri baradaky esasy teoremalary subutsyz getirýäris. Bu teoremalardan peýdalanyp, nokatda funksiýanyň predelini hasaplamak has amatlydyr.

1. *Hemişelik sanyň predeli şol sanyň özüne deňdir:*

$$\lim_{x\to a} c=c.$$

2. *Funksiýalaryň jeminiň (tapawudynyň) predeli bu funksiýalaryň predelleriniň jemine (tapawudyna) deňdir:*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x).$$

3. *Funksiýalaryň köpeltmek hasylynyň predeli ol funksiýalaryň predelleriniň köpeltmek hasylyna deňdir:*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

4. *Hemişelik köpeldijini predel belgisiniň öňüne çykarmak bolýar:*

$$\lim_{x\to a}(k\cdot f(x))=k\cdot\lim_{x\to a} f(x)$$

5. *Eger bölüjiniň predeli nola deň bolmasa, onda funksiýalaryň gatnaşygynyň predeli bu funksiýalaryň predelleriniň gatnaşygyna deňdir:*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)},\quad (\lim_{x\to a} g(x)\neq 0).$$

Funksiýalaryň predellerini hasaplamaga degişli mysallara seredeliň.

2-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 6}(5x-3)$ predeli hasaplalyň.

Predeliň häsiýetlerine görä:

$$\lim_{x\to 6}(5x-3)=\lim_{x\to 6}5x-\lim_{x\to 6}3=5\lim_{x\to 6}x-3=5\cdot 6-3=27.$$

Predeli hasaplamak üçin, $x=6$ bolanda köpagzanyň bahasyny tapmak ýeterlik boldy.

Argument funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli a sana ymtylanda funksiýanyň predeli funksiýanyň a nokatdaky bahasyna deňdir. Ýagny

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

3-nji mysal. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2-2}{2x+1}$ predeli hasaplalyň.

$\lim\limits_{x\to -3}(2x+1)=2\cdot(-3)+1=-5$

$\lim\limits_{x\to -3}(2x+1)\neq 0$ bolýanlygyna görä:

$$\lim_{x\to -3}\frac{3x^2-2}{2x+1}=\frac{3\cdot(-3)^2-2}{2\cdot(-3)+1}=\frac{25}{-5}=-5.$$

4-nji mysal. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ predeli hasaplalyň.

$x\to 2$ bolanda berlen drobuň sanawjysy we maýdalawjysy nola öwrülýär. Şoňa görä-de x-iň ýerine gös-göni 2-ni goýmak mümkin däl. $x\neq 2$ bolanda bu droby $x-2$ gysgaltmak bolýar. Gysgaltmagy ýerine ýetirip alarys:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

Gönükmeler

1. Funksiýanyň predeliniň kesgitlemesinden peýdalanyp, aşakdaky deňlikleri subut etmeli:

1) $\lim\limits_{x\to 3}2x=6.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+5)=5.$

3) $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt[3]{x}=2.$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-0,25}{x-0,5}=1.$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2.$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6.$

7) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0},\ x_0>0.$

8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x+3}=-\dfrac{1}{2}.$

9) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3}{x}=-1.$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x+2}=-5.$

2. Predeliň kesgitlemesini ulanyp, $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$ deňligi subut etmeli. Tablisany doldurmaly:

ε	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{100}$
δ			

3. $0<|x-a|<\delta$ bolanda $|f(x)-A|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly $\delta>0$ sany kesgitlemeli:

1) $f(x)=x^2;\ a=2;\ A=4;\ \varepsilon=0{,}001.$

2) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3};\ a=3;\ A=\dfrac{1}{2};\ \varepsilon=0{,}01.$

3) $f(x)=\sin x;\ a=\dfrac{\pi}{2};\ A=1;\ \varepsilon=0{,}01.$

4. $0<|x-1|<\delta$ bolanda $\left|\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$ deňsizlik ýerine ýeter ýaly, islendik $\varepsilon>0$ san üçin $\delta>0$ sany tapmaly.

5. Funksiýalaryň predelini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to4}(\sqrt{x}-3x).$

2) $\lim\limits_{x\to5}(x-5)(x^2+5x+25).$

3) $\lim\limits_{x\to3}(x^2+4x-1).$

4) $\lim\limits_{x\to0}(2-3x+x^4).$

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2+5x-6}{x^2+7}.$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^3+3}.$

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4+3x^2-1}.$

8) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+2}{3x^3-1}.$

9) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3+4x^2+3x+2}{x^3+x^2-2x}.$

10) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}.$

6. Funksiýalaryň predelini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+3x^2-2}{x^3+1}.$

6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+x-1}.$

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x+2}{x^3-8}.$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^3-8}.$

4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}.$

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}.$

7) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$

8) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}.$

9) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}.$

10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$

7. Funksiýalaryň predelini tapmaly:

1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-x}{\sqrt[3]{x}+x}.$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x+1}.$

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}.$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$

6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.$

7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}.$

8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1},\ n,m\in N.$

8. Funksiýalaryň predelini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}.$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}.$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}.$

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$

§2. Funksiýanyň artdyrmasy

Amalyýetde, köplenç, ululyklaryň bahalaryny däl-de, eýsem, olaryň nähili üýtgeýänligini bilmek zerur bolýar. Funksiýanyň käbir kesgitli (fiksirlenen) x_0 nokatdaky bahasyny bu funksiýanyň x_0 nokadyň etrabynda ýatan dürli x nokatlardaky bahalary bilen deňeşdirenimizde, biz $x-x_0, f(x)-f(x_0)$ görnüşli tapawutlary düzmeli bolýarys. $x-x_0$ tapawuda bagly däl üýtgeýän ululygyň *(argumentiň)* x_0 *nokatdaky artdyrmasy* diýilýär we ol Δx («delta iks» diýlip okalýar)[1] bilen belgilenýär.

Şeýlelikde $x-x_0=\Delta x$, bu ýerden $x=x_0+\Delta x$. Soňky deňlikdäki ýaly bolanda argumentiň ilkibaşdaky x_0 bahasy Δx artdyrma aldy hem diýilýär.

$f(x)-f(x_0)$ tapawuda *funksiýanyň* x_0 *nokatdaky* Δx *artdyrma degişli bolan artdyrmasy* diýilýär we ol Δf («delta ef» diýlip okalýar) bilen belgilenýär. Kesgitlemä görä

$$\Delta f=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

bu ýerden

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f.$$

Soňky deňlikden argumente Δx artdyrma berlende funksiýanyň bahasynyň Δf ululyga üýtgeýänligi görünýär. Şonuň ýaly-da $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ deňlige görä argumentiň x_0 kesgitli bahasynda Δf ululyk Δx artdyrmanyň funksiýasydyr.

[1] Grek harpy Δ (delta) bu ýerde differensiýa (tapawut ýa-da artdyrma) diýen sözüň birinji harpy hökmünde ulanylýar.

Funksiýanyň artdyrmasyna baglanyşykly üýtgeýän y ululygyň artdyrmasy hem diýilýär we ol Δy bilen belgilenilýär.

1-nji mysal. $f(x)=x^3$ we $x_0=2$: a) $x=1{,}9$; b) $x=2{,}1$ bolanda x_0 nokatdaky Δx we Δf artdyrmalary tapalyň:

a) $\Delta x=x-x_0=1{,}9-2=-0{,}1;$

$\Delta f=f(1{,}9)-f(2)=1{,}9^3-2^3=-1{,}141.$

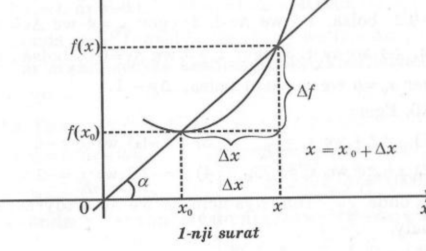
b) $\Delta x=2{,}1-2=0{,}1;$

$\Delta f=2{,}1^3-2^3=1{,}261.$

2-nji mysal. Argumentiň artdyrmasy Δx-e deň. $f(x)=x^2$ funksiýanyň x_0 nokatdaky artdyrmasyny tapalyň.

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2=$$
$$=2x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Δx we Δf artdyrmalaryň arasyndaky baglanyşyk 1-nji suratda has aýdyň görünýär. Δx kesimiň uzynlygynyň kemelmegi bilen Δf-iň uzynlygy hem hökman kemeler.



1-nji surat

Funksiýalaryň häsiýetleri öwrenilende $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gatnaşyk möhüm rol oýnaýar. $(x_0; y_0)$ we $(x; y)$ nokatlar arkaly geçýän göni çyzygyň burç koeffisiýenti $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ deňdir (1-nji sur.). Ony

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

görnüşde ýazyp bolar.

Nokat göni çyzyk boýunça hereket edýän bolsun we onuň $S(t)$ geçen ýoly t wagtyň funksiýasy bolsun, onda $[t_0; t_0+\Delta t]$ wagt aralygyndaky orta tizlik

$$V_{or}(\Delta t) = \frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

bolar.

Şuňa meňzeş $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ aňlatma $[x_0; x_0+\Delta x]$ aralykdaky funksiýanyň üýtgemeginiň orta tizligi diýilýär.

Gönükmeler

9. $y = 2x+3$ funksiýa üçin tapyň: 1) eger $x_0 = 3$ we $\Delta x_0 = 0,2$ bolsa, x-i we Δy-i. 2) eger $x_0 = 4$ we $\Delta x = 0,05$ bolsa, x-i we Δy-i. 3) eger $x_0 = 4$ we $\Delta x = 0,01$ bolsa, Δy-i. 4) eger $x_0 = 6$ we $\Delta x = 0,01$ bolsa, Δy – 1.

10. Eger:

1) $x = 2,4$ we $x_0 = 2$; 3) $x = -1,3$ we $x_0 = -1$;

2) $x = 3,8$ we $x_0 = 3,75$; 4) $x = -2,8$ we $x_0 = -2,6$;

bolsa, onda $y = x^2$ funksiýa üçin Δx we Δy artdyrmalary tapmaly.

11. Eger:

1) $x_0 = 9$, $\Delta x = 0,06$; 3) $x_0 = 5,06$; $\Delta x = -0,3$;

2) $x_0 = 4,02$; $\Delta x = 0,02$; 4) $x_0 = 6$; $\Delta x = -0,02$.

bolsa, onda $y = \frac{1}{x}$ funksiýa üçin Δy artdyrmany tapmaly.

12. Eger:

1) $y = 5-3x$; 2) $y = 2\sqrt{x}$; 3) $y = 3x^2$; 4) $y = 2x - x^2$

bolsa, onda funksiýanyň x_0 nokatdaky artdyrmasyny x_0 we Δx arkaly aňladyň.

13. Eger:

1) $f(x) = x^2$; 3) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

2) $f(x) = ax + b$; 4) $f(x) = x^3$

bolsa, onda $f(x_0+\Delta x)$, $f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ aňlatmalary tapyň.

14. Eger:

1) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$; 3) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,001$;

2) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,1$; 4) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0,0001$;

bolsa, onda $y = x^3$ funksiýanyň $(x_0; y_0)$ we $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$ nokatlar arkaly geçýän kesijisiniň burç koeffisiýentini tapyň.

15. Eger:

1) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$; 3) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,001$;

2) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,01$; 4) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,0001$;

bolsa, onda $y = x^3$ funksiýanyň $(x_0; y_0)$ we $(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y)$

nokatlar arkaly geçýän kesijisiniň burç koeffisiýentini tapyň.

16. Eger x üýtgeýän ululyk 1-den 1000-e çenli üýtgeýän bolsa, onda $x_0 = 1$ nokatda $y = \lg x$ funksiýanyň x argumentiniň iň uly artdyrmasyny we degişli Δy artdyrmany kesgitlemeli.

17. Eger x üýtgeýän ululyk 0,01-den 0,001- e çenli üýtgeýän bolsa, onda $x_0 = 0,01$ nokatda $y = \frac{1}{x^2}$ funksiýanyň x argumentiniň iň uly artdyrmasyny we degişli Δy artdyrmany kesgitlemeli.

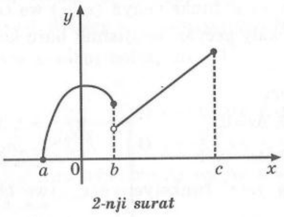
18. Subut etmeli:

1) $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

2) $\Delta[f(x)\cdot g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

§3. Funksiýanyň üznüksizligi

Eger funksiýanyň grafigi käbir aralykda üznüksiz çyzyk, ýagny galamy kagyzdan aýyrman çyzyp bolýan



2-nji surat

çyzyk bolsa, onda bu funksiýa berlen aralykda üznüksiz funksiýadyr. 2-nji suratda $[a; b]$ we $(b; c]$ aralyklarda üznüksiz, $[a; c]$ aralykda bolsa $x = b$ nokatda üzülýän funksiýanyň grafigi şekillendirilendir.

Indi funksiýanyň üznüksizliginiň kesgitlemesini «predel dilde» bereliň.

Kesgitleme. Eger $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bolsa, onda $f(x)$ funksiýa x_0 nokatda üznüksiz diýilýär.

Elbetde, $x \to x_0$ ýazgynyň ýerine $\Delta x \to 0$ ýazgyny, $f(x) \to f(x_0)$ ýazgynyň ýerine bolsa, $\Delta f \to 0$ ýazgyny ýazmak mümkindir. Şoňa görä-de ýokardaky deňligi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

görnüşde hem ýazmak bolýar.

Ýagny x_0 nokatda argument ujypsyzja üýtgände funksiýanyň bahasy hem ujypsyzja üýtgeýän bolsa, onda funksiýa bu nokatda üznüksizdir.

Eger-de bu şertler ýerine ýetmeýän bolsa, onda $f(x)$ funksiýa $x = x_0$ nokatda üznük funksiýadyr. Biziň şu wagta çenli öwrenen ähli elementar funksiýalarymyz özleriniň kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda üznüksizdir.

Kesgitleme. Eger $y = f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralygyň her bir nokadynda üznüksiz bolsa, onda bu funksiýa şol aralykda üznüksiz funksiýa diýilýär.

Mysal üçin, $y = tg\,x$ funksiýa $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ we $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralyklarda üznüksizdir, ähli san okunda bolsa üznük funksiýadyr, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ onuň üzülme nokatlarydyr.

$y=x^2$ we $y=\cos x$ funksiýalar islendik aralykda üznüksizdirler.

Funksiýalaryň üznüksizligini anyklamak üçin üznüksizligiň kesgitlemesinden peýdalanylýar.

1-nji mysal. $f(x)=x^2$ funksiýanyň $x_0=3$ nokatda üznüksizdigini görkezeliň.

$$\lim_{x\to 3} x^2=3^2=9$$

Diýmek, $f(x)=x^2$ funksiýa $x_0=3$ nokatda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ deňligiň ýerine ýetýänligine görä üznüksizdir.

2-nji mysal. $x_0>0$ bolanda, $y=\frac{1}{x}$ funksiýanyň islendik x_0 nokatda üznüksizdigini subut edeliň.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\frac{0}{x_0(x_0+0)}=0.$$

Diýmek, $y=\frac{1}{x}$ funksiýa $x>0$ bolanda üznüksizdir.

Gönükmeler

19. Eger:

1) $y=2x-1$. 2) $y=\frac{1}{x}$. 3) $y=ax+b,\ a\neq 0$. 4) $y=|x|$. 5) $y=\frac{1}{x^2}$.

bolsa, onda $y=f(x)$ funksiýanyň öz kesgitleniş ýaýlasyna degişli her bir nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

20. Eger:

1) $f(x)=\frac{x+3}{2-3x},\ a=\frac{1}{2}$.

2) $f(x)=3x^2-2x+1,\ a\in R$.

3) $f(x)=\frac{x^3+x-1}{2x^2+3x-5},\ a\in(2;3)$

bolsa, onda funksiýanyň nokatda üznüksizliginiň «predel dildäki» kesgitlemesinden peýdalanyp, $f(x)$ funksiýanyň a nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

21. Eger:

1) $f(x)=\cos x,\ a\in R$. 3) $f(x)=\sqrt{x},\ a>0$.

2) $f(x)=\sin(cx+d),\ a\in R$. 4) $f(x)=x^3,\ a\in R$.

bolsa, onda üznüksizligiň kesgitlemesinden peýdalanyp, $f(x)$ funksiýanyň a nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

22. Eger:

1) $f(x)=x^2-3x+1,\ a\in R$.

2) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ a\in R$.

3) $f(x)=x^5,\ a\in R$.

bolsa, onda üznüksizligiň argumentiň we funksiýanyň artdyrmasy bilen berilýän kesgitlemesini ulanyp, $f(x)$ funksiýanyň a nokatda üznüksizdigini subut etmeli.

23. Funksiýanyň üznüksizdigini subut etmeli:

1) $f(x)=\sin 3x,\ x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $f(x)=2^{\frac{1}{1+x^2}},\ x\in(-\infty;+\infty)$.

3) $f(x)=ln(4+x^2)\cdot 3^{\cos^2 x},\ x\in(-\infty;+\infty)$.

Aşakda getirilen funksiýalaryň grafiklerini guruň. Haýsy nokatlarda bu funksiýalaryň üznüksizdigini, haýsylarynda bolsa üznükdigini görkeziň. Üznük nokatda funksiýanyň bahasyny görkeziň:

24. 1) $y=\begin{cases}2-x, & \text{eger } x<0 \text{ bolsa;}\\ x, & \text{eger } x\geq 0 \text{ bolsa.}\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x-1, & \text{eger } x\leq 0 \text{ bolsa;}\\ 1-x, & \text{eger } x>0 \text{ bolsa.}\end{cases}$

25. 1) $y=\begin{cases}2x^2, & \text{eger } x\leq 1 \text{ bolsa;}\\ 1-2x, & \text{eger } x>1 \text{ bolsa.}\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}1+3x, & \text{eger } x<-1 \text{ bolsa;}\\ -x^2, & \text{eger } x\geq -1 \text{ bolsa.}\end{cases}$

26. 1) $y=\begin{cases}\frac{3}{x}, & \text{eger } x\leq -3 \text{ bolsa;}\\ x+2, & \text{eger } x>-3 \text{ bolsa.}\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}x, & \text{eger } x<\frac{1}{2} \text{ bolsa;}\\ \frac{1}{x}-1, & \text{eger } x\geq\frac{1}{2} \text{ bolsa.}\end{cases}$

27. 1) $y=\begin{cases}2-x, & \text{eger } x<1 \text{ bolsa;}\\ \lg x, & \text{eger } x\geq 1 \text{ bolsa.}\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{eger } x\leq -1 \text{ bolsa;}\\ 2, & \text{eger } x>-1 \text{ bolsa.}\end{cases}$

§4. Funksiýanyň üznüksizliginiň ulanylyşy

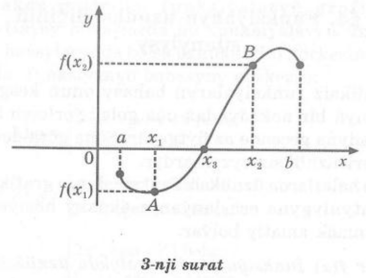
Üznüksiz funksiýalaryň bahasy onuň kesgitleniş ýaýlasynyň bir nokadyndan oňa golaý ýerleşen beýleki bir nokadyna geçende az üýtgeýär. Şoňa görä-de olaryň grafikleri üznüksiz çyzyklardyr.

Köp halatlarda üznüksiz funksiýalaryň grafikleriniň bu aýratynlygyna esaslanýan aşakdaky häsiýetinden peýdalanmak amatly bolýar.

Eger f(x) funksiýa (a; b) aralykda üznüksiz bolsa we nola öwrülmese, onda ol funksiýa bu aralykda öz alamatyny üýtgetmeýär.

Bu tassyklamany aşakdaky ýaly düşündirmek mümkin. Goý, $(a;b)$ aralykda şeýle x_1 we x_2 nokatlar tapylyp, ol nokatlarda $f(x_1)<0$ we $f(x_2)>0$ şertler ýerine ýetýän bolsun (3-nji sur.). Onda bu funksiýanyň grafiginiň $A(x_1;f(x_1))$ we $B(x_2;f(x_2))$ nokatlary abssissalar okundan dürli taraplarda ýatar. Eger $f(x)$ funksiýa $(a;b)$ aralykda üznüksiz bolsa, onda onuň grafigi bu aralykda bütewi çyzyk bolar we şoňa görä-de iň bolmanda bir nokatda abssissalar okuny kesmelidir. Ol nokady x_3 bilen belgiläliň. Onda $f(x_3)=0$ bolar. Bu bolsa «nola öwrülmese» diýen şerte garşy gelýär. Diýmek, $f(x)$ funksiýa $(a;b)$ aralykda alamatyny üýtgetmeýär.

Bir näbellili deňsizlikleri çözmegiň *aralyklar usuly* (8-nji synpda öwrenipdik) üznüksiz funksiýalaryň bu häsiýetine esaslanandyr. Ony beýan edeliň.

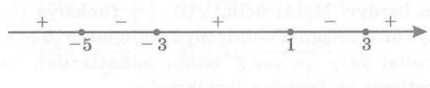


3-nji surat

Goý, käbir aralykda üznüksiz $f(x)$ funksiýa bu aralygyň tükenikli sany nokadynda nola öwrülýän bolsun. Bu nokatlar berlen aralygy birnäçe kiçi aralyklara bölýär. Üznüksiz funksiýalaryň häsiýetine görä, ol aralyklaryň her birinde $f(x)$ funksiýa öz alamatyny üýtgetmän saklaýar. Bu alamaty kesgitlemek üçin ol aralyklaryň her biriniň haýsy hem bolsa bir nokadynda funksiýanyň alamatyny kesgitlemek ýeterlikdir.

1-nji mysal. $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9} \le 0$ deňsizligi çözeliň.

$f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-9}$ funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda üznüksizdir hem -5 we 1 nokatlarda nola öwrülýär. Bu funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy maýdalawjynyň nollaryndan (-3 we 3) başga san göni çyzygynyň ähli nokatlarydyr. -5; -3; 1 we 3 nokatlar $f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny bäş aralyga bölýär (4-nji sur.).



4-nji surat

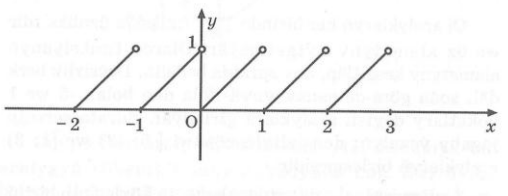
Ol aralyklaryň her birinde $f(x)$ funksiýa üznüksizdir we öz alamatyny üýtgetmeýär. Olarda funksiýanyň alamatyny kesgitläp, ony suratda belläliň. Deňsizlik berk däl, şoňa görä-de sanawjynyň nola deň bolan -5 we 1 nokatlary degişli aralyklara girizilýär. Surata seredip jogaby ýazalyň: deňsizligiň çözüwi [-5; -3) we [1; 3) aralyklaryň birleşmesidir.

2-nji mysal. $x^3-x-1=0$ deňlemäniň kökleriniň birini (0,1-e çenli takyklykda) tapalyň.

$f(x)=x^3-x-1=0$ funksiýa san göni çyzygynyň ähli nokatlarynda üznüksizdir, şeýle-de $f(1)=-1$ we $f(2)=5$. Diýmek, bu funksiýa [1;2] aralygyň iň bolmanda bir nokadynda nola öwrüler. [1;2] kesimi deň ikä böleliň we 1,5 nokatda funksiýanyň bahasyny tapalyň, $f(1,5)=0,85$. $f(1)<0$ we $f(1,5)>0$ bolýandygyna görä, [1; 1,5] kesimi iki bölege böleliň. $f(1,3)=-0,103<0$ we $f(1,5)>0$. Şoňa görä-de deňlemäniň köki [1,3; 1,5] aralykda bolar. Indi biz ony 0,1-e çenli takyklykda tapyp bileris: $x\approx 1,4$.

Deňlemäniň 0,1-e çenli takyklykdaky köküni tapmak üçin kesimleri bölmekligi ahyrlarynda funksiýanyň dürli alamatly bahalary bolan, uzynlygy 0,2-ä deň kesimi alýança dowam etdirmelidir.

Özüniň kesgitleniş ýaýlasynda üzülýän funksiýalar hem bardyr. Mysal üçin, $f(x)=\{x\}$ funksiýa ($\{x\}$–x sanyň drob bölegi). Funksiýanyň grafiginden (5-nji sur.) görnüşi ýaly $x=n, n\in Z$ bolan nokatlardan başga nokatlarda bu funksiýa üznüksizdir.



5-nji surat

Gönükmeler

28. Eger:

1) $f(x)=x^4-x+1;$

2) $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ eger } x\le -1 \text{ bolsa;} \\ x^2-x, \text{ eger } x>-1 \text{ bolsa;} \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, \text{ eger } x<0 \text{ bolsa;} \\ 5-2x, \text{ eger } x\ge 0 \text{ bolsa;} \end{cases}$

4) $f(x)=2x-x^2+x^3$

bolanda $f(x)$ funksiýa $x_1=-1$ we $x_2=0$ nokatlarda üznüksizmi?

29. Funksiýalaryň üznüksizlik aralyklaryny tapyň:

1) $f(x)=x^2-2x^2;$ 3) $f(x)=2x^4-3x^2+4;$

2) $f(x)=\dfrac{x^3+27}{3x+x^2};$ 4) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2}.$

30. Berlen deňlemäniň $[0,1]$ kesimde köküniň bardygyny subut ediň we ony 0,1 takyklyk bilen tapyň:

1) $x^3+10x^2-1,4=0;$ 3) $x^3-5x+3=0;$

2) $100x^4-2x^2-1=0;$ 4) $x^4+2x-0,5=0.$

Deňsizlikleri çözüň (31-34).

31. 1) $x^2-5x+4>0;$ 3) $x^2-3x-4\le 0;$

2) $\dfrac{x+3}{x^2+4x-5}\ge 0;$ 4) $\dfrac{x^2-7x+6}{x-2}<0.$

32. 1) $\dfrac{(x-2)(x-4x)}{x^2+2x-3}\ge 0;$ 3) $\dfrac{2x^2+5x}{x^2+5x+4}\ge 1;$

2) $\dfrac{8}{x^2-6x+8}<1;$ 4) $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+3)(x-4)}<0.$

33. 1) $x^4-10x^2+9\le 0;$ 3) $x^4-5x^2+6>0;$

2) $x^4-8\ge 7x^2;$ 4) $5x^2-4>x^4.$

34. 1) $(x^2-1)(x+4)(x^3-8)\le 0;$ 3) $x^2(3-x)(x+2)>0;$

2) $\sqrt{x^2-4}(x-3)<0;$ 4) $\dfrac{(x-2)^3(x+5)}{(x+3)^2}\ge 0.$

35. Funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalaryny tapyň.

1) $f(x)=\sqrt{x-\frac{4}{x-3}}$; 3) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+7x+12}{x}}$;

2) $f(x)=\sqrt{\frac{3}{x^2-4}+1}$; 4) $f(x)=\sqrt{1-\frac{8}{x^2-1}}$.

§5. Önüm hakynda düşünje

Funksiýanyň artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň predeli baradaky mesele ýokary matematikanyň esasy meselesidir. Bu meseläniň çözüwi ylmyň dürli pudaklarynda köp meseleleri çözmäge ýol açýar.

2-nji paragrafda $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gatnaşyga funksiýanyň $[x_0;x_0+\Delta x]$aralykda üýtgeýşiniň orta tizligi hökmünde seredipdik. Ol gatnaşygyň predeli $\Delta x\to 0$ bolanda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

orta tizlik bolanlygyndan funksiýanyň x_0 nokatdaky üýtgeýiş tizligine öwrülýär we oňa $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümi diýilýär.

Kesgitleme. **Funksiýanyň x_0 nokatdaky artdyrmasynyň argumentiň artdyrmasyna bolan gatnaşygynyň argumentiň artdyrmasy nola ymtylandaky predeline funksiýanyň x_0 nokatdaky önümi diýilýär.**

$f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümi $f'(x_0)$bilen belgilenýär (« $x_0$nokatdaky ef ştrih» diýlip okalýar).

Önümiň kesgitlemesini

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

formula görnüşinde hem ýazmak bolýar.

$f(x)$ funksiýanyň erkin x nokatdaky önümi

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ýaly kesgitlenýär. Bu baglanyşyga x argumentiň täze bir funksiýasy hökmünde garamak bolar. Oňa $f(x)$ funksiýanyň önümi diýilýär.

Mysal hökmünde käbir funksiýalaryň önümini tapalyň.

1-nji mysal. $f(x)=x^2$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümini tapalyň.

Funksiýanyň nokatdaky önüminiň kesgitlemesi boýunça:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0+0=2x_0.$$

Bu netijäni $(x^2)'=2x$ görnüşde ýazmak bolýar.

2-nji mysal. $y=x^3$ funksiýanyň önümini tapalyň. Önümiň kesgitlemesine görä:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2+3x\cdot 0+0^2=3x^2.$$

Diýmek, $(x^3)=3x^2$.

3-nji mysal. $y=\frac{1}{x}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)\cdot\Delta x}=$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x(x+0)}=-\frac{1}{x^2}.$$

Ýagny $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

4-nji mysal. $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{(\sqrt{x+0}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

Ýagny $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

5-nji mysal. $y=kx+b$ çyzykly funksiýanyň önümini tapalyň.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k(x+\Delta x)+b-(kx+b)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k\cdot$$

Diýmek, $(kx+b)'=k$.

Soňky formuladan peýdalanyp alarys:

$(x)'=1$. c – hemişelik san bolanda, $c'=0$, ýagny ***hemişelik sanyň önümi nola deňdir.***

Berlen funksiýanyň önümini tapmaklyga *differensirlemek* diýilýär. Käbir x_0 nokatda önümi bar bolan

funksiýa şol nokatda *differensirlenýän funksiýa* diýilýär. Eger funksiýa $(a;b)$ aralygyň her bir nokadynda differensirlenýän bolsa, onda oňa bu *aralykda differensirlenýän funksiýa* diýýärler.

Eger $f(x)$ funksiýa $(a;b)$ san aralygynda differensirlenýän bolsa, onda ol bu san aralygynda üznüksizdir.

Bu tassyklamany subut etmek üçin, bize bu aralygyň her bir nokadynda $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=0$ deňligiň ýerine ýetýänligini görkezmek ýeterlikdir. Önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x)\cdot 0=0.$$

$f(x)$ funksiýanyň $(a;b)$ san aralygynyň her bir nokadynda differensirlenýänliginden, bu aralygyň her bir nokadynda ýokarky deňligiň dogrulygy gelip çykýar.

Biz differensirlemegiň birnäçe formulasyny getirip çykardyk. Bulary ýatda saklamak gerek:

$c'=0$; $(x)'=1$; $(kx+b)'=k$; $(x^2)'=2x$;

$(x^3)'=3x^2$; $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Gönükmeler

36. Önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp, funksiýalaryň önümleriniň x_0 nokatlardaky bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=ax+b$, $x_0=2$, $x_0=5$.

2) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $x_0=5$.

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=1$.

4) $f(x)=\sqrt{2+x}$, $x_0=0$.

5) $f(x)=x\sqrt{x}$, $x_0=4$.

37. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiýa üçin tapyň:

1) $f'(1)$. 2) $f'(4)$. 3) $f'(25)$. 4) $f'(x)$.

Kesgitlemeden peýdalanyp, funksiýalaryň önümini tapyň (38-39):

38. 1) $3-2x$. 2) $\frac{1}{3}x-7$. 3) x^2-x. 4) $3-2x-x^2$.

39. 1) ax^2+bx+c. 2) x^3. 3) x^3-x. 4) x^3+2x.

40. Aşakdakylary subut ediň:

1) $(x^2)'=2x$. 3) $\left(\sqrt{x^3}\right)'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

2) $\left(-\frac{1}{2}x^4\right)'=-2x^3$. 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)'=-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$.

§6. Önümi hasaplamagyň düzgünleri

Ýönekeýlik üçin u we v funksiýalaryň we olaryň önümleriniň x_0 nokatdaky bahalary üçin aşakdaky belgilemeleri ulanalyň: $u(x_0)=u$, $v(x_0)=v$, $u'(x_0)=u'$, $v'(x_0)=v'$.

Teorema. *Eger u we v funksiýalar x_0 nokatda differensirlenýän bolsalar, onda olaryň jemi hem bu nokatda differensirlenýändir we*

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Gysgaça: *jemiň önümi goşulyjylaryň önümleriniň jemine deňdir diýilýär.*

Ilki bilen funksiýalaryň jeminiň x_0 nokatdaky artdyrmasyny hasaplalyň:

$$\Delta(u+v)=u(x_0+\Delta x)+v(x_0+\Delta x)-(u(x_0)+v(x_0))=$$
$$=(u(x_0+\Delta x)-u(x_0))+v(x_0+\Delta x)-v(x_0))=\Delta u+\Delta v.$$

Önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys:

$$(u+v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Diýmek, $(u+v)'=u'+v'$.

Teorema. *Eger u we v funksiýalar x_0 nokatda differensirlenýän bolsalar, onda olaryň köpeltmek hasyly hem bu nokatda differensirlenýändir we*

$$(uv)'=u'v+uv)'.$$

Ilki köpeltmek hasylynyň artdyrmasyny tapalyň.

$$\Delta(uv)=u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=(u(x_0)+\Delta u)(v(x_0)+\Delta v)-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=u(x_0)v(x_0)+u(x_0)\Delta v+\Delta u\cdot v(x_0)+\Delta u\Delta v-u(x_0)v(x_0)=$$
$$=u(x_0)\Delta v+\Delta u\cdot v(x_0)+\Delta u\Delta v.$$

u we v funksiýalaryň x_0 nokatda differensirlenýänligini göz öňünde tutup alarys:

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=$$
$$=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)+0\cdot v'(x_0)=u'v+uv'.$$

Ýagny $(uv)'=u'v+uv'$.

3. Sargyt № 2629

Netije. *Eger u funksiýa x_0 nokatda differensirlenýän funksiýa, c hemişelik san bolsa, onda Cu funksiýa hem bu nokatda differensirlenýändir we*

$$(Cu)'=Cu'.$$

Gysgaça: *hemişelik köpeldiji önüm belgisiniň öňüne çykarylýar diýilýär.*

Köpeltmek hasylyny differensirlemegiň düzgüninden peýdalanyp alarys:

$$(Cu)'=c'u+cu'=0\cdot u+cu'=cu'.$$

Teorema. *Eger u we v funksiýalar x_0 nokatda differensirlenýän bolsalar, hem-de v funksiýa bu nokatda nola deň bolmasa, onda $\frac{u}{v}$ paý hem x_0 nokatda differensirlenýändir we*

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

$\frac{u}{v}$ gatnaşygy h bilen belgiläliň. Onda $\frac{u}{v}=h$ we $u=hv$ bolar. Köpeltmek hasylyny differensirlemegiň düzgüni boýunça:

$$u'=h'v+hv'.$$

Bu ýerden, h'-y tapyp, h-yň ýerine bolsa onuň $\frac{u}{v}$ bahasyny goýup alarys:

$$h'=\frac{u'-hv'}{v}=\frac{u'-\frac{u}{v}\cdot v'}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Diýmek, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

1-nji mysal. a) $f(x)=\sqrt{x}+6x$; b) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-2}$ funksiýalaryň önümini tapalyň.

a) $f'(x)=(\sqrt{x}+6x)'=(\sqrt{x})'+(6x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+6x'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+6\cdot 1=\frac{1}{2\sqrt{x}}+6.$

b) $f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-2}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x^2-2)-x^3\cdot(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}=\frac{3x^2(x^2-2)-x^3(2x-0)}{(x^2-2)^2}=$

$$=\frac{3x^4-6x^2-2x^4}{(x^2-2)^2}=\frac{x^4-6x^2}{(x^2-2)^2}.$$

Derejeli funksiýanyň önümi

n birden uly natural san bolanda x^n derejeli funksiýanyň önümini hasaplamagyň formulasynyň

$$(x^n)'=nx^{n-1} \qquad (1)$$

bolýanlygyny görmek kyn däldir.

Hakykatdan-da

$(x^2)'=2x=2x^{2-1}$; $(x^3)'=3x^2=3x^{3-1}$;

$(x^4)'=(x^3\cdot x)'=(x^3)'\cdot x+x^3\cdot x'=3x^2\cdot x+x^3\cdot 1=4x^3=4x^{4-1}$;

$(x^5)'=(x^4\cdot x)'=(x^4)'\cdot x+x^4\cdot x'=4x^3\cdot x+x^4\cdot 1=5x^4=5x^{5-1}$.

Şu tertipde dowam edip, (1) formulanyň $n=6,7,8$ we ş.m. bolanda hem dogry boljaklygyny görkezmek bolar.

$x\neq 0$ bolanda (1) formula n-iň 1-e, 0-a we -1-e deň bolan bahalarynda hem dogrudyr:

$$x'=(x^1)'=1\cdot x^{1-1}=1\cdot x^0=1\cdot 1=1.$$
$$1'=(x^0)'=0\cdot x^{0-1}=0$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-1\cdot x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

$x>0$ bolanda:

$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derejeli funksiýanyň önümini hasaplamak üçin biziň alan formulamyz diňe bir natural ýa-da bitin görkezijili derejeler üçin däl-de, eýsem, islendik görkezijili derejeler üçin hem dogrudyr, ýagny islendik α hakyky san üçin

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}, \qquad (x>0).$$

Bu formulany biz soň subut ederis.

2-nji mysal. a) $y=3x^{10}-\frac{5}{x^3}$; b) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiýalaryň önümini tapalyň.

a) $y'=(3x^{10}-5x^{-3})'=(3x^{10})'-(5x^{-3})'=3(x^{10})'-5(x^{-3})'=$
$=3\cdot 10x^9-5\cdot(-3)x^{-4}=30x^9+\frac{15}{x^4}$;

b) $y'=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=$
$=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$

Gönükmeler

Funksiýalaryň önümlerini tapyň (41-45):

41. 1) $f(x)=x^2+x^3$; 3) $f(x)=2x^2+3x-1$;
2) $f(x)=\frac{1}{x}+5x-2$; 4) $f(x)=x^3+\sqrt{x}$;

5) $f(x)=2x^3-5x^2+7x-12$; 6) $f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4$.

42. 1) $f(x)=x^3(4+2x-x^2)$; 3) $f(x)=x^2(3x+x^3)$;
2) $f(x)=\sqrt{x}(2x^2-x)$; 4) $f(x)=(2x-3)(1-x^3)$.

43. 1) $y=\frac{1+2x}{3-5x}$; 3) $y=\frac{3x-2}{5x+8}$;
2) $y=\frac{x^2}{2x-1}$; 4) $y=\frac{3-4x}{x^2}$.

44. 1) $y=\frac{x-1}{x+1}$; 3) $y=\frac{3x-1}{x^5}$;
2) $y=\frac{x}{1-x^2}$; 4) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

45. 1) $f(x)=x^8-3x^4-x+5$; 3) $f(x)=x^7-4x^5+2x-1$;
2) $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{4}{x^2}+\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x^3}+1$.

46. $f(x)$ **funksiýanyň önüminiň berlen nokatlardaky bahalaryny hasaplaň:**

1) $f(x)=x^2-3x, x=-\frac{1}{2}, x=2$;
2) $f(x)=x-4\sqrt{x}$, $x=0{,}01$, $x=4$;
3) $f(x)=x-\frac{1}{x}$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $f(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $x=-3$, $x=0$.

47. Eger:

1) $f(x)=2x^2-x$; 3) $f(x)=\frac{x^3}{3}-1{,}5x^2-4x$;
2) $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2+12$; 4) $f(x)=2x-5x^2$.

bolsa, $f'(x)=0$ deňlemäni çözüň.

48. Eger:

1) $f(x)=4x-3x^2$; 3) $f(x)=x^2-5x$;
2) $f(x)=x^3-1{,}5x^2$; 4) $f(x)=4x-\frac{1}{3}x^3$.

bolsa, $f'(x)<0$ deňsizligi çözüň.

49. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $f(x)=\frac{x^3-3x}{1+4x^5}$; 3) $f(x)=\frac{5-2x^6}{1-x^3}$;
2) $f(x)=\left(\frac{3}{x}+x^2\right)(2-\sqrt{x})$; 4) $f(x)=\sqrt{x}(3x^5-x)$.

50. f funksiýanyň önümini nola öwürýän x-iň bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=x^5-3\frac{1}{3}x^3+5x$; 3) $f(x)=x^4+4x$;
2) $f(x)=2x^4-x^8$; 4) $f(x)=x^4-12x^2$.

51. Eger:

1) $f(x)=x^3-6x^2-63x$; 3) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x$;
2) $f(x)=3x-5x^2+x^3$; 4) $f(x)=3x^2-9x-\frac{1}{3}x^3$.

bolsa, $f'(x)<0$ deňsizligi çözüň.

52. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=\frac{x^2}{a+b}+\frac{x}{a-b}+b$, $a=const$, $b=const$;
2) $y=7x^{13}+13x^{-7}$;
3) $y=\frac{\ln x}{x}+e^2$;
4) $y=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^4}$;
5) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.

53. $f(x)$ **funksiýanyň önüminiň berlen nokatlardaky bahasyny hasaplaň:**

1) $y=3x^2+4x-1$, $x=-0{,}5$.
2) $y=x-x^3+2x^4$, $x=1$.
3) $y=1-x^2+\sqrt{x}$, $x=4$.
4) $y=3x^5-2x^4+x\sqrt{x}$, $x=1$.

54. Funksiýanyň önümini tapyň:

1) $y=(2x-1)(4x^3+3x^2-x+1)$. 7) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$.
2) $y=(4-x)(x^3-x^2+5x-3)$. 8) $z=\frac{1-y}{\sqrt{y}}$.
3) $y=(x^2-3x+7)(3x^2+x-9)$. 9) $y=\frac{x^2+2}{x^2-x}$.
4) $y=(x+7)(2x-3)$. 10) $y=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$.

5) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.   11) $y=\dfrac{x+a}{a-b}$.

6) $y=\dfrac{1-x}{x+5}$.   12) $y=\dfrac{3x^2-3x+4}{2x-1}$.

55. Önümi:

1) $2x+3$;   3) $3x-2$;

2) $16x^3-0,4$;   4) $9x^2-\dfrac{1}{2}$.

añlatma deñ bolan iñ bolmanda bir funksiýany formula arkaly beriñ.

56. Eger:

1) $f_1(x)$ we $f_2(x)$ funksiýalaryñ her biriniñ x_0 nokatda önüminiñ ýokdugy;

2) x_0 nokatda $f_1(x)$ funksiýanyñ önüminiñ bardygy, emma $f_2(x)$ funksiýanyñ şol nokatda önüminiñ ýokdugy belli bolsa, $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ funksiýanyñ x_0 nokatda önümi ýokdur diýen tassyklama dogrumy?

§7. Çylşyrymly funksiýanyñ önümi

$$f(x)=(x^2-1)^3,\ f(x)=\sqrt{\cos x},\ f(x)=\log_2\sqrt{x},\ f(x)=\sin(2x+5)$$

funksiýalaryñ argumentleri degişlilikde x^2-1, $\cos x$, $\sqrt{x}$ we $2x+5$ funksiýalar. Şular ýaly funksiýalara, ***ýagny başga bir funksiýa görä funksiýa çylşyrymly funksiýa diýýärler:*** $f(x)=\varphi(g(x))$. $g(x)=y$ bilen belgilesek, $\varphi(y)$ funksiýa alnar, onuñ argumenti y başga bir argumente (x) görä funksiýadyr.

Çylşyrymly funksiýanyñ önümini hasaplamagyñ düzgünini subut edeliñ.

Teorema. *Eger g funksiýanyñ x_0 nokatda, φ funksiýanyñ bolsa $y_0(y_0=g(x_0))$ nokatda önümi bar bolsa, onda x_0 nokatda f çylşyrymly funksiýanyñ hem önümi bardyr we*

$$f'(x_0)=(\varphi(g(x_0)))'=\varphi'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

Teoremany subut etmek üçin $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ gatnaşygyñ predeline seredeliñ. Belgileme girizeliñ:

$$\Delta y=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)=\Delta g.$$

Onda $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\varphi(g(x_0+\Delta x))-\varphi(g(x_0))=$
$=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)=\Delta\varphi$ bolar.

x_0 nokatda g funksiýanyñ önümi bar bolanlygyna görä, Δx nola ymtylanda Δy hem nola ymtylar. Indi önümiñ kesgitlemesinden peýdalanyp alarys.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=\varphi'(y_0)\cdot g'(x_0)=\varphi'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

1-nji mysal. $f(x)=(x^2-1)^3$ funksiýanyñ önümini hasaplalyñ.

Berlen funksiýany $f(x)=\varphi(g(x))$ görnüşde ýazalyñ. Bu ýerde $y=g(x)=(x^2-1)$, $\varphi(y)=y^3$ bolanlygyna görä $y'=2x$, $\varphi'(y)=3y^2$ bolar. Onda

$$f'(x)=3y^2\cdot y'=3(x^2-1)^2\cdot(x^2-1)'=3(x^2-1)^2\cdot(2x-0)=6x(x^2-1)^2.$$

2-nji mysal. $f(x)=\sqrt{2-3x^2}$ funksiýanyñ önümini tapalyñ.

$y=2-3x^2$, $\varphi(y)=\sqrt{y}$ bolanlygyna görä,

$\varphi'(y)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ we $y'=-6x$. Bu ýerde $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}\cdot(-6x)=-\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

Gönükmeler

$h(x)=g(f(x))$ çylşyrymly funksiýany düzýän f we g elementar funksiýalary formulalar arkaly añladyñ (57-58):

57. 1) $h(x)=\cos 3x$;   3) $h(x)=tg\dfrac{x}{2}$;

2) $h(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;   4) $h(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

58. 1) $h(x)=(3-5x)^5$;   3) $h(x)=(2x+1)^7$;

2) $h(x)=\sqrt{\cos x}$;   4) $h(x)=tg\dfrac{1}{x}$.

Berlen funksiýalaryñ her biriniñ kesgitleniş ýaýlasyny tapyñ (59-60):

59. 1) $y=\sqrt{9-x^2}$;   3) $y=\sqrt{0,25-x^2}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$;   4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+5-x^2}}$.

60. 1) $y=\sqrt{\cos x}$;   3) $y=tg\,2x$;

2) $y=\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}$;   4) $y=\sqrt{\sin x}$.

Funksiýanyñ önümlerini tapyñ (61-66):

61. 1) $f(x)=(2x-7)^8$;   3) $f(x)=(9x+5)^4$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{(5x+1)^3}$;   4) $f(x)=\dfrac{1}{(6x-1)^5}$.

62. 1) $f(x)=\left(3-\dfrac{x}{2}\right)^{-9}$;   3) $f(x)=(4-1,5x)^{10}$;

2) $f(x)=\left(\dfrac{x}{4}-7\right)^8-(1-2x)^4$;   4) $f(x)=(5x-2)^{13}-(4x+7)^{-6}$.

63. 1) $f(x)=(x^2+2x-6)^7$;   3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$;

2) $u=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$;   4) $y=\dfrac{(x^2+1)^5}{x-4}$.

64. 1) $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-1}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-5}$;

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x+4}}$;

4) $y=\dfrac{1}{99}(1-x)^{-99}-\dfrac{1}{49}(1-x)^{-98}+\dfrac{1}{97}(1-x)^{-97}$.

65. 1) $y=\sqrt{3x-5}$;   3) $y=x\sqrt{x^2+1}$;

2) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;   4) $y=\sqrt{a^2+x^2}$.

66. 1) $y=\sqrt{x+x^2}$;   3) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

2) $y=\sqrt{(2x+1)^2}$;   4) $y=\sqrt{x^3+6x^2+4}$.

67. $f(x)=3-2x$, $g(x)=x^2$ we $p(x)=\sin x$ funksiýalar berlen. Eger:

1) $h(x)=f(g(x))$;   3) $h(x)=g(f(x))$;

2) $h(x)=g(p(x))$;   4) $h(x)=p(f(x))$.

bolsa, onda çylşyrymly h funksiýany formula arkaly beriň.

68. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\cos x$ we $p(x)=\sqrt{x}$ funksiýalar berlen. Eger:

1) $h(x)=f(g(x))$;   3) $h(x)=p(g(x))$;

2) $h(x)=f(p(x))$;   4) $h(x)=p(f(x))$.

bolsa, çylşyrymly h funksiýany formula arkaly beriň; onuň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

69. $f(g(x))=x$ bolar ýaly f funksiýany tapyň:

1. $g(x)=2x$;   3. $g(x)=3x+2$;

2. $g(x)=\sqrt{x}$;   4. $g(x)=x^2+1,\ x\le 0$.

§8. Trigonometrik funksiýalaryň önümleri

1. Sinusyň önümi. *Islendik nokatda sinusyň önümi bardyr we ol*

$$(\sin x)'=\cos x$$

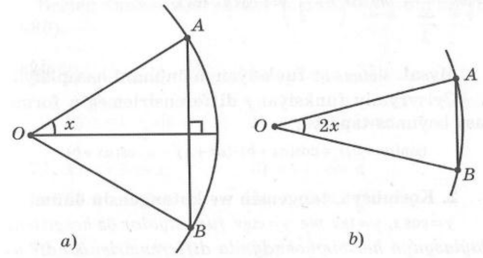
formula boýunça hasaplanylýar.

Bu formulany subut etmek üçin $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ deňligiň dogrulygyna göz ýetirmek gerek.

Birlik töwerekde biri-birine golaý ýerleşen A we B nokatlary alalyň (6-njy sur.). Goý, AB duganyň radian ölçegi $2x$ bolsun, onda

$$\smile AB=2x,\ AB=2\sin x \text{ bolar.}$$

6-njy b suratdan görnüşi ýaly x nola ymtylanda



6-njy surat

duganyň uzynlygy hordanyň uzynlygyna çäksiz golaýlaşar. Şoňa görä-de

$$\lim_{x\to 0}\frac{AB}{\smile AB}=1.$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\frac{AB}{\smile AB}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(Bu berk subudy däldir).

Indi önümiň kesgitlemesinden we $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ formuladan peýdalanyp alarys:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Mysal. $\sin(ax+b)$ funksiýanyň önümini hasaplalyň.

Çylşyrymly funksiýany differensirlemegiň formulasy boýunça taparys:

$$(\sin(ax+b))'=\cos(ax+b)\cdot(ax+b)'=a\cos(ax+b).$$

2. Kosinusyň, tangensiň we kotangensiň önümi

$y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ we $y=\operatorname{ctg}x$ *funksiýalar öz kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda differensirlenýändir we*

$$(\cos x)'=-\sin x;\qquad (\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\qquad (\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Getirme formulalaryndan we differensirlemegiň düzgünlerinden peýdalanyp alarys:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\sin x\cdot(-1)=-\sin x;$$

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Gönükmeler

Berlen funksiýalaryň her biriniň önümini tapyň (70-80).

70. 1) $y=2\sin x$;   3) $y=-0{,}5\sin x$;

2) $y=1-\dfrac{1}{2}\sin x$;   4) $y=0{,}5+1{,}5\sin x$.

71. 1) $y=3\cos x$;   3) $y=1-\cos x$;

2) $y=x+2\cos x$;   4) $y=2\sin x+1{,}5\cos x$.

72. 1) $y=\sqrt{3}-3\operatorname{tg}x$;   3) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x$;

2) $y=\cos x-\operatorname{tg}x$;   4) $y=2\operatorname{tg}x-\sin x$.

73. 1) $y=x^3\sin 2x$; 3) $y=\dfrac{\cos 3x}{x}$;

2) $y=x^4+\mathrm{tg}2x$; 4) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

74. 1) $y=\sin^2 x$; 3) $y=\cos^2 x$;

2) $y=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$; 4) $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

75. 1) $y=\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x$;

2) $y=\cos^2\dfrac{x}{4}-\sin^2\dfrac{x}{4}$;

3) $y=\sin 5x\sin 3x+\cos 5x\cos 3x$;

4) $y=\sin 3x\cos 3x$.

76. 1) $y=3\sin x+1$; 3) $y=a-b\mathrm{ctg}\dfrac{x}{b}$;

2) $y=2\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$; 4) $y=\cos 2x-\sin 3x$.

77. 1) $y=\sin x^2+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{7}$; 3) $y=2\sin^3 4x+3$;

2) $y=\sin^2 x+\mathrm{tg}^2 x$; 4) $y=\sin^2 5x-\cos^3 5x$.

78. 1) $y=x^3+\sin^2\dfrac{1}{2}x$; 3) $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$;

2) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 4) $y=\dfrac{\sin x}{x-\sin x}$.

79. 1) $y=x\sqrt{\sin x}$; 3) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;

2) $y=\dfrac{\cos x+1}{\mathrm{ctg}x}$; 4) $y=2\mathrm{tg}^3 4x$.

80. 1) $y=1-\mathrm{ctg}^2\dfrac{x}{2}$; 4) $y=\dfrac{4}{3}\sin^3(2x^2-x^3)$;

2) $y=\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 2\varphi+\cos\dfrac{\varphi}{3}\sin\dfrac{\pi}{2}$; 5) $y=\dfrac{1-\mathrm{ctg}x}{1+\mathrm{tg}x}$;

3) $y=\cos^2(ax+b)$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}x}$.

81. Eger:

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos(2x-\pi)$; 3) $f(x)=3\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) $f(x)=x-\mathrm{tg}(-2x)$; 4) $f(x)=2\cos\dfrac{x}{2}$

bolsa, $f'(0)$ we $f'(\pi)$ tapyň.

82. Eger:

1) $f(x)=2\sin^2 x-\sqrt{2}x$; 3) $f(x)=\cos 2x$;

2) $f(x)=2x+\cos(4x-\pi)$; 4) $f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}x$

bolsa, onda $f'(0)=0,\ f'(x)>0$ bolýan nokatlary tapyň.

83. Eger:

1) $f'(x)=1-\sin x$; 3) $f'(x)=-\cos x$;

2) $f'(x)=2\cos 2x$; 4) $f'(x)=3\sin x$

bolsa, onda iň bolmanda bir f funksiýany formulasy bilen beriň.

4. Sargyt № 2629

§9. Görkezijili, logarifmik we derejeli funksiýalaryň önümleri

1. Görkezijili funksiýanyň önümi

e^x funksiýanyň önümi baradaky teorema seredeliň. Ol ýokary matematikada subut edilýär.

1-nji teorema. *e^x funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda differensirlenýändir we*

$$(e^x)'=e^x.$$

1-nji mysal. $y=e^{-2x+3}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$(e^{-2x+3})'=e^{-2x+3}\cdot(-2x+3)'=-2e^{-2x+3}$$

Esasy logarifmik toždestwo boýunça islendik položitel a sany $a=e^{\ln a}$ görnüşde ýazyp bolýar. Şoňa görä-de

$$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a} \tag{1}$$

bolar.

Indi görkezijili funksiýanyň önümini hasaplamagyň formulasyny getirip çykaralyň.

2-nji teorema. *a^x görkezijili funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda differensirlenýändir we*

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

(1) deňlikden we çylşyrymly funksiýany differensirlemegiň düzgüninden peýdalanyp alarys:

$$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'=a^x\cdot\ln a\cdot x'=a^x\ln a.$$

Netije. *Görkezijili funksiýa özüniň kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda üznüksizdir.*

Bu tassyklama görkezijili funksiýanyň differensirlenýänliginden gelip çykýar.

2-nji mysal. $y=0{,}6^{5x-4}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$(0{,}6^{5x-4})'=0{,}6^{5x-4}\ln 0{,}6\cdot(5x-4)'=5\cdot 0{,}6^{5x-4}\ln 0{,}6$$

2. Logarifmik funksiýanyň önümi

3-nji teorema. *$\ln x$ logarifmik funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda differensirlenýändir we*

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Esasy logarifmik toždestwo boýunça $x>0$ bolanda $x=e^{\ln x}$. Bu deňligiň çep we sag böleginde (R_+-de kesgitlenen) şol bir funksiýa dur. Şoňa görä-de olaryň önümleri-de deňdir:

$$x'=(e^{\ln x})'. \tag{2}$$

$$x'=1;\quad (e^{\ln x})'=e^{\ln x}\cdot(\ln x)'=x\cdot(\ln x)'.$$

Tapylan önümleri (2) deňlikde ýerine goýup alarys:

$$1=x\cdot(\ln x)',\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Indi $\log_a x$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Diýmek, $\log_a' x=\dfrac{1}{x\ln a}$.

3-nji mysal. a) $y=\ln(10-2x)$; b) $y=\log_3 6x$ funksiýalaryň önümini tapalyň.

a) $\ln'(10-2x)=\dfrac{1}{10-2x}\cdot(10-2x)'=\dfrac{-2}{10-2x}=\dfrac{1}{x-5}$;

b) $\log_3' 6x = \frac{1}{6x\ln 3}\cdot(6x)' = \frac{6}{6x\ln 3} = \frac{1}{x\ln 3}$.

3. Derejeli funksiýanyň önümi

Geçen paragraflarda derejeli funksiýanyň önümini hasaplamagyň formulasyny getirip çykardyk we onuň käbir bitin görkezijili derejelerde, şeýle hem $\alpha = \frac{1}{2}$ bolanda dogrulygyna göz ýetiripdik. Indi biz ol formulany islendik α hakyky san üçin subut edeliň.

4-nji teorema. *x^α derejeli funksiýa kesgitleniş ýaýlasynyň her bir nokadynda differensirlenýändir we*

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Hakykatdan-da, $x = e^{\ln x}$ bolanlygyna görä, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ bolar. Bu ýerden:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)' = x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4-nji mysal. $y = \sqrt[3]{x^2}$ funksiýanyň önümini tapalyň.

$$(\sqrt[3]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Gönükmeler

Funksiýalaryň her biriniň önümini tapyň (84-93).

84. 1) $y = 4e^x + 5$; 3) $y = 3 - \frac{1}{2}e^x$;
2) $y = 2x + 3e^{-x}$; 4) $y = 5e^{-x} - x^2$.

85. 1) $y = e^x \cos x$; 3) $y = 3^x - 3x^2$;
2) $y = 3e^x + 2^x$; 4) $y = x^2 e^x$.

86. 1) $y = e^{x^2}\sin\frac{x}{2}$; 3) $y = e^{\sqrt{x}}\cos 2x$;
2) $y = 7^{\frac{x}{2}}\operatorname{tg}3x$; 4) $y = 2^{-x}\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$.

87. 1) $y = \frac{x^6}{4^x + 5}$; 3) $y = \frac{3^x}{2^x + 5^x}$;
2) $y = \frac{e^{-x}}{x^2 + 2}$; 4) $y = \frac{0{,}3^{-x}}{\sqrt{x} + 0{,}5}$.

88. 1) $y = 2^t + 1$; 3) $y = 2^x\cdot x + 3$;
2) $y = 3^{2x}$; 4) $y = 3^x\cdot 2^{3x}$.

89. 1) $y = 3^{\frac{1}{x}}$; 3) $y = 4^{x^2+x+1}$;
2) $y = 3 - a^{-ax}$; 4) $y = \frac{1}{2}e^{2x}$.

90. 1) $y = a^{-\frac{x}{\ln a}}$; 3) $y = \frac{a}{b}\cdot c^{\frac{bx}{a\ln c}}$;
2) $y = \frac{2^x}{x + 2^x}$; 4) $z = 3^{\sin x}$.

91. 1) $y = 5^{\cos^2\sqrt{x}}$; 3) $y = x^2\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}$;
2) $y = 2^{\sin\frac{x}{\ln 2}}$; 4) $y = a^x x^a$.

92. 1) $y = \sin e^{2x}$; 3) $y = 3^{2x\sqrt{x}}$;
2) $y = 1 - e^{\sin x}\cos x$; 4) $y = e^{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}$.

93. 1) $y = m + x + m^x + x^m$; 3) $y = (\ln a)^{\ln x}$;
2) $y = (\sin\alpha)^{\sin x^2}$; 4) $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$.

Funksiýalaryň her biriniň önümini tapyň (94-100).

94. 1) $y = \ln(2 + 3x)$; 3) $y = \ln(1 + 5x)$;
2) $y = \log_{0,3} x + \sin x$; 4) $y = \lg x - \cos x$.

95. 1) $y = x^2\log_x x$; 3) $y = x\ln x$;
2) $y = \frac{\ln x}{x}$; 4) $y = \frac{x}{\ln x}$.

96. 1) $y = \frac{\ln(5 + 3x)}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{x^2}{\ln 5x}$;
2) $y = \frac{\sqrt{x}}{\lg(1 - 2x)}$; 4) $y = \frac{\log_3 x^2}{x + 1}$.

97. 1) $y = \ln\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{(x-1)\ln x}{x}$;
2) $y = \sqrt{\ln x}$; 4) $y = 3\ln^4 2x$.

98. 1) $y = \frac{x}{2\ln^3\frac{x}{2}}$; 3) $y = x\ln\frac{x}{x-1}$;
2) $y = \ln 3x\cdot\ln x$; 4) $y = x\ln 3 + 3\ln x + \ln 3x$.

99. 1) $z = \frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}$; 3) $y = x^3\lg x + \ln 4$;
2) $y = 2\lg 3x - x\ln x$; 4) $y = \sqrt{\lg\frac{e}{x}}$.

100. 1) $z = 3\ \lg^2 4x$; 3) $y = e^x\log_2 x$;
2) $y = \lg^3 x - \lg x^3$; 4) $y = x^5 e^{-x}$.

Funksiýalaryň önümini tapyň (101-107).

101. 1) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$;
2) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; 4) $f(x) = x^{-\sqrt{5}}$.

102. 1) $f(x) = x^{-e}$; 3) $f(x) = x^\pi$;
2) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$; 4) $f(x) = (2x)^{\ln 3}$.

103. 1) $y = x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 5$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - 5$;
2) $y = 2x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{4}{5}} - 2x$; 4) $y = 6x^{0,4} - 2x^{-0,5} + 3x^{-2}$.

104. 1) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$; 3) $y = x^3\sqrt[3]{x^2} + x^7\sqrt[3]{x}$;
2) $y = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + x^{-2} + \frac{2}{x}$; 4) $y = x^{\sqrt{7}} - x^{-\sqrt{7}}$.

105. 1) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 1}$; 3) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
2) $y = \sqrt[3]{\frac{3x+3}{x+4}}$; 4) $y = \sqrt[3]{(2x-3)^2}$.

106. 1) $y=y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; 3) $y=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$;

2) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 4) $y=\sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}}$.

107. 1) $y=(2+\cos x)^x, x\in R$; 3) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$;

2) $y=x^{2^x}, x>0$; 4) $y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

§10. Ters funksiýanyň önümi

Ters funksiýanyň önümi baradaky teorema seredeliň.

Teorema. *Goý, f we g özara ters funksiýalar bolsun, f funksiýanyň x_0 nokatda önümi bolup, ol hem nola deň däl bolsa, onda $y_0(y_0=f(x_0))$ nokatda g funksiýanyň önümi bardyr we ol $\frac{1}{f'(x_0)}$ deňdir. Ýagny*

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

$y=f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatda önümi bar bolanlygyna görä ol nokatda $\Delta x\to 0$ bolanda $\Delta y\to 0$ bolar. Funksiýa oňa ters bolan funksiýa bilen çalşyrylanda Δy argumentiň y_0 nokatdaky artdyrmasy Δx bolsa fuksiýanyň artdyrmasy bolar. Bulary göz öňünde tutmak bilen önümiň kesgitlemesinden peýdalanyp alarys:

$$g'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Mysal. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ **formulany subut edeliň.**

a^x funksiýa $\log_a x$ funksiýa ters funksiýadyr. $\log_a x=y$ bolsun, onda ters funksiýanyň önümi baradaky teorema görä:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{a^{\log_a x}\cdot\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Gönükmeler

Ters funksiýanyň önümi baradaky teoremadan peýdalanyp, funksiýanyň önümini tapyň (108-110).

108. 1) $y=a^x$; 3) $y=\frac{6}{x}$.

2) $y=\frac{1}{2}x-1$; 4) $y=3-2x$.

109. 1) $y=\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt[3]{x}$.

2) $y=x^3$; 4) $y=\ln x$.

110. Funksiýanyň predeliniň kesgitlemesini beýan ediň.

1) $y=\arcsin x$; 3) $y=\text{arctg}\, x$;

2) $y=\arccos x$; 4) $y=\text{arcctg}\, x$.

Gaýtalamaga degişli soraglar we meseleler

111. Funksiýalaryň predellerini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+7}{8-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2-x^2+x\sqrt{3})$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+3}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{a\to 3}\frac{a^2+3a-3}{6-a}$

112. Funksiýalaryň predellerini tapmaly:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}$;

2) $\lim\limits_{a\to 4}\frac{a^3-64}{a^2-16}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x-2}}{9-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{a\to 0}\frac{\sqrt[3]{a-8}-\sqrt[3]{a+8}}{a}$.

113. 1) argumentiň artdyrmasy we funksiýanyň artdyrmasy näme?

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gatnaşygy x_0 we Δx arkaly aňladyň:

a) $f(x)=x^2-x$; ç) $f(x)=3x-1$;

b) $f(x)=x^3+2$; g) $f(x)=\frac{2}{x}$.

114. Eger:

1) $x_0=5,06,\ \Delta x=-0,3$; 2) $x_0=6,\ \Delta x=-0,02$;

bolsa, onda $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiýa üçin $\Delta f(x_0)$ tapmaly.

115. Eger:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-3}$; 3) $f(x)=\text{tg}\,ax$;

4) $f(x)=e^{kx}$; 5) $f(x)=\ln(x^2-1)$;

bolsa, onda $f(x_0+\Delta x), f(x_0+\Delta x)-f(x_0), \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

tapmaly.

Funksiýalaryň önümini tapmaly (116-118).

116. 1) $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$; 3) $y=\ln(x^3+x^2)$;

2) $y=e^{ax}\cos bx$; 4) $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$;

117. 1) $y=2^{x^2-1}$; 4) $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

2) $y=x\ln x-x^2$; 5) $y=\log_2(x^3+1)$;

3) $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$; 6) $y=2\ln\sin x$;

118. 1) $y=\sqrt{x}+\ln x-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 3) $y=\ln\text{tg}\,x$;

2) $y=\frac{5}{\ln x}$; 4) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

119. $f(x)=\frac{x-2}{x+3}$, $g(x)=\frac{x+3}{x-2}$ funksiýalar berlen.

$f'(x)$ we $g'(x)$ tapmaly we

$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)=0$

deňligiň ýerine ýetýändigini barlamaly.

120. $\sin 2x=2\sin x\cos x$ formuladan differensirlenmäni ulanyp, $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ formulany getirip çykarmaly.

121. $\cos(x+a)=\cos x\cdot\cos a-\sin x\cdot\sin a$ formuladan differensirlenmäni ulanyp, $\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$ formulany getirip çykarmaly.

122. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ belli bolsa, onda $f(x)=\log_a x$ funksiýany differensirlemek üçin formulany getirip çykarmaly.

123. $(uv)'=u'v+uv'$ we $(v^{-1})'=-v^{-2}$ formuladan $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ formulany getirip çykarmaly.

124. $f(x)=3+\frac{5}{x}$ funksiýanyň $x\cdot f'(x)+f(x)=3$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut etmeli.

125. $f(x)=\ln\frac{1}{1+x}$ funksiýanyň $x\cdot f'(x)+1=e^{f(x)}$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut etmeli.

126. $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ funksiýanyň $f(x)=x\cdot f'(x)+\frac{1}{2}\ln 2f'(x)$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut etmeli.

127. $f(x)=\ln\sqrt{2\ln x-x^2+c}$ funksiýanyň c-niň islendik hemişelik bahasynda

$$x\cdot f(x)\cdot f'(x)=1-x^2$$

deňligi kanagatlandyrýandygyny subut etmeli.

BIRINJI BAP BOÝUNÇA BARLAGNAMALAR

I görnüş

1. Predeli tapyň: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-3}{x^2+5x-4}$.

a) $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{3}{4}$; ç) $\frac{4}{3}$; d) $-\frac{4}{3}$.

2. Argumente $\Delta x=-0{,}1$ artdyrma berlende $f(x)=2x^2$ funksiýanyň $x_0=1$ nokatdaky artdyrmasyny tapyň:

a) 0,98; b) 0,38; ç) –0,98; d) –0,38.

3. $f(t)=2t^2-3t$ funksiýanyň önüminiň $t=-0{,}25$ nokatdaky bahasyny tapyň:

a) –2 b) –3; ç)4; d) –4.

4. $f(x)=\sqrt{x^2-7}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-\frac{x}{x^2-7}$; b) $-\frac{x}{\sqrt{x^2-7}}$; ç) $\frac{2}{\sqrt{x^2-7}}$; d) $\frac{x}{x^2-7}$.

5. $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{5}}+x^3$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-\frac{1}{\sqrt{5}}+3x^2$; b) $3x^2$; ç) $-3x^2$; d) $3x$.

6. $f(x)=x^{-3}-2\cos 3x$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-3x^{-4}+6\sin 3x$; ç) $-3x^{-2}+6\sin 3x$;

b) $-3x^2-6\sin 3x$; d) $-3x^{-4}+2\sin 3x$.

7. $f(x)=\frac{3+2x}{x-5}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-\frac{13}{(x-5)^2}$; ç) $\frac{-5}{(x-5)^2}$;

b) $\frac{8}{(x-5)^2}$; d) $\frac{1-x}{(x-5)^2}$.

8. $f(x)=e^{-x}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-xe^{-2x}$; b) $-e^{-x}$; ç) e^{-x}; d) xe^{-x}.

9. $f(x)=x\ln x$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $\ln x+1$; b) $\ln x$; ç) $x+\frac{1}{x}$; d) 1.

10. $f(x)=2^x$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $2^x\ln 2$; b) $2\ln 2^x$; ç) $\ln 2^x$; d) $x2^{x-1}$.

II görnüş

1. Predeli tapyň: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1{,}5}{2x^2+3x+4{,}5}$.

a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{1}{3}$; ç) 3; d) –3.

2. Argumente $\Delta x=0{,}1$ artdyrma berlende $f(x)=3x^2$ funksiýanyň $x_0=-1$ nokatdaky artdyrmasyny tapyň:

a) 0,57; b) 5,43; ç) –0,57; d) –5,43.

3. $f(t)=3t+t^2$ funksiýanyň önüminiň $t=0{,}5$ nokatdaky bahasyny tapyň:

a) 3,5; b) 3; ç) 4; d) 4,5.

4. $f(x)=\sqrt{3-x^2}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-\frac{x}{3-x^2}$; b) $-\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$; ç) $\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}$; d) $-\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$.

5. $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}+2x^2$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}+4x$; b) $2x^2$; ç) $-2x^2$; d) $4x$.

6. $f(x)=2x^2-\sin 4x$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $4x+4\cos 4x$; b) $4x+\cos 4x$; ç) $4x-4\cos 4x$; d) $4x-\cos 4x$.

7. $f(x)=\frac{4-3x}{x+2}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $\frac{2}{(x+2)^2}$; b) $-\frac{10}{(x+2)^2}$; ç) $\frac{10}{(x+2)^2}$; d) $\frac{-2}{(x+2)^2}$.

8. $f(x)=e^{-x^2}$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $-2xe^{-x^2}$; b) e^{-x^2}; ç) $2xe^{-x^2}$; d) e^{-2x}.

9. $f(x)=x\ln x^2$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $x^2\ln x^2$; b) $\ln x^2+2$; ç) $2x\ln x^2$; d) $x\ln 2x$.

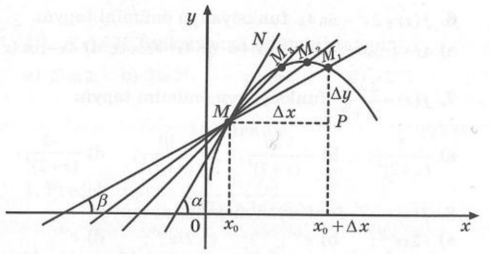
10. $f(x)=3^x$ funksiýanyň önümini tapyň:

a) $x3^{x-1}$; b) $3^x\ln 3$; ç) $3\ln 3^x$; d) $\ln 3^x$.

II BAP. ÖNÜMIŇ ULANYLYŞY

§11. Funksiýanyň grafigine galtaşýan çyzyk

1. Galtaşýan çyzyk. Goý, 7-nji suratdaky egri çyzyk käbir $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi bolsun. Ol grafikde $M(x_0;y_0)$ we $M_1(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ nokatlary alalyň we abssissa okuna parallel edip, MP kesimi geçireliň. MM_1P üçburçlukda $MP=\Delta x, M_1P=\Delta y$ bolar.



7-nji surat

Δx nola ymtylanda M nokat gozganmaýar, M_1 nokat bolsa yzygiderli M_1, M_2, M_3 we ş. m. ýagdaýlary almak bilen, egri çyzyk boýunça M nokada çäksiz ýakynlaşar. ***Şonda MM_1 kesiji çyzygyň predel ýagdaýy bolan MN***

göni çyzyga f funksiýanyň grafigine M nokatda galtaşýan çyzyk diýilýär.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gatnaşyk MM_1 kesiji çyzygyň burç koeffisiýentine ýa-da onuň abssissa oky bilen emele getirýän burçunyň tangensine deňdir, ýagny

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=tg\beta=k_1.$$

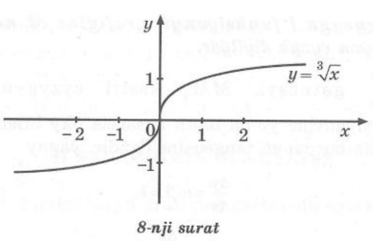
Δx nola ymtylanda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kesiji çyzygyň burç koeffisiýenti galtaşýan çyzygyň burç koeffisiýentine öwrüler.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=k=tg\alpha$$

Bu deňligiň çep tarapyndaky aňlatma $f(x)$ funksiýanyň x_0 nokatdaky önümine deňdir. Şoňa görä-de $k=f'(x_0)$. Ýagny ***önümiň x_0 nokatdaky bahasy funksiýanyň grafigine bu nokatda geçirilen galtaşýan çyzygyň burç koeffisiýentine deňdir.*** Önümiň geometrik manysy şundan ybaratdyr.

x_0 nokatda $f(x)$ funksiýanyň önüminiň barlygy bu nokatda funksiýanyň grafiginiň wertikal däl galtaşýanynyň barlygyny aňladýar. Önüm ýok bolanda galtaşýan çyzyk ýokdur ($y=|x|$ funksiýanyň grafigine (0;0) nokatda galtaşýan çyzyk geçirip bolmaýşy ýaly) ýa-da wertikal ýagdaýda geçýär ($y=\sqrt[3]{x}$ funksiýanyň grafigine (0;0) nokatda geçirilen galtaşýan çyzyk ýaly (8-nji sur.)).

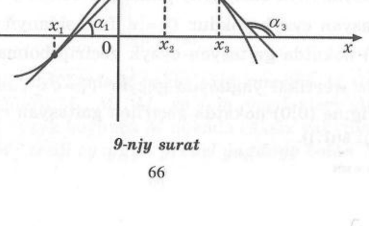
5. Sargyt № 2629



8-nji surat

x_0 nokatda differensirlenýän $f(x)$ funksiýanyň grafigine x_0 abssissaly nokatda geçirilen galtaşýan çyzyk, burç koeffisiýenti $f'(x_0)$ - a deň bolan $(x_0;f(x_0))$ nokat arkaly geçýän göni çyzykdyr. Ol göni çyzyk üçin $k=\mathrm{tg}\alpha=f'(x_0)$ deňlik dogrudyr. Bu ýerde α -galtaşýan çyzygyň Ox okunyň položitel ugry bilen emele getirýän burçudyr. Oňa galtaşýan çyzygyň ýapgytlyk burçy hem diýilýär.

f funksiýanyň grafigine x_1, x_2, x_3 nokatlarda galtaşýan çyzyklary geçireliň we olaryň abssissalar oky bilen emele getirýän burçlaryny belläliň (9-njy sur.).



9-njy surat

Biz α_1-iň ýiti, α_3-iň kütek burçdugyny görýäris. α_2 bolsa nola deňdir, sebäbi l göni çyzyk Ox oka paralleldir. Ýiti burçuň tangensiniň položitel, kütek burçuň tangensiniň otrisatel we $\mathrm{tg}0=0$ bolanlygyna görä,

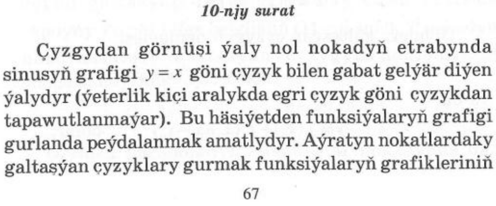
$$f'(x_1)>0,\ f'(x_2)=0,\ f'(x_3)<0.$$

1-nji mysal. $y=\sin x$ finksiýanyň grafigine (0;0) nokatda galtaşýan çyzygyň Ox oky bilen emele getirýän burçuny tapalyň.

$$tg\alpha=f'(x_0)$$

deňlikden peýdalanyp alarys:

$$tg\alpha=\cos 0=1,\quad \alpha=\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}\ \text{(10-njy sur.).}$$



10-njy surat

Çyzgydan görnüşi ýaly nol nokadyň etrabynda sinusyň grafigi $y=x$ göni çyzyk bilen gabat gelýär diýen ýalydyr (ýeterlik kiçi aralykda egri çyzyk göni çyzykdan tapawutlanmaýar). Bu häsiýetden funksiýalaryň grafigi gurlanda peýdalanmak amatlydyr. Aýratyn nokatlardaky galtaşýan çyzyklary gurmak funksiýalaryň grafikleriniň ülňülerini (suduryny) has takyk geçirmäge mümkinçilik berýär. Mysal üçin, $\sin x$ funksiýanyň grafiginiň $[0;\pi]$ kesimdäki ülňüsini gurmak üçin $0, \frac{\pi}{2}$ we π nokatlarda sinusyň önüminiň degişlilikde 1-e, 0-a we -1-e deňligini kesgitleýäris. Soňra (0;0), $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ we $(\pi;0)$ nokatlar arkaly burç koeffisiýentleri degişlilikde 1-e, 0-a we -1-e deň bolan göni çyzyklary geçirýäris we olara galtaşdyryp sinusyň grafigini gurarys (10-njy sur.).

2. Galtaşýan çyzygyň deňlemesi. Indi f funksiýanyň grafigine $A(x_0;f(x_0))$ nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini getirip çykaralyň.

Burç koeffisiýenti $f'(x_0)$-a deň bolan göni çyzygyň deňlemesi aşakdaky görnüşe eýedir.

$$y=f'(x_0)\cdot x+b$$

Galtaşýan çyzygyň A nokadyň üstünden geçýänligine görä, A nokadyň koordinatalary ol deňlemäni kanagatlandyrmalydyr. Ýagny

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b.$$

Bu ýerden

$$b=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0.$$

Diýmek, galtaşýan çyzygyň deňlemesi

$$y=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

ýa-da

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{bolar.}$$

2-nji mysal. $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafigine 1 abssissaly nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini ýazalyň.

Bu mysalda $x_0=1, f(x_0)=f(1)=\sqrt{1}=1.$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$ Bu sanlary galtaşýan çyzygyň deňlemesinde ornuna goýup alarys:

$$y=1+\frac{1}{2}(x-1) \text{ ýa-da } y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

3-nji mysal. $y=x^2$ parabola x_0 abssissaly nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini getirip çykaralyň.

Bu mysalda $f(x_0)=x_0^2,\ f'(x)=2x,\ f'(x_0)=2x_0$ bolar. Bu bahalary galtaşýan çyzygyň deňlemesinde ornuna goýup alarys:

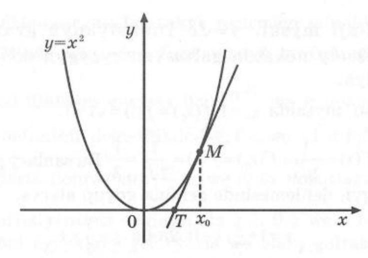
$$y=x_0^2+2x_0(x-x_0).$$

Ýönekeýleşdirsek $y=2x_0x-x_0^2$ bolar. Alnan deňlemede x_0-uň ornuna degişli nokadyň abssissasyny goýup, biz parabolanyň islendik nokady arkaly geçýän galtaşýan çyzygyň deňlemesini alarys.

Şeýle galtaşýan çyzyklary gurmagyň hem aňsat usuly bardyr. Parabolanyň $M(x_0;x_0^2)$ nokady arkaly geçýän galtaşýan çyzygyň Ox oky bilen kesişme nokadyny $T(x_1;0)$ bilen belgiläliň (11-nji sur.). T nokadyň koordinatalary galtaşýan çyzygyň deňlemesini kanagatlandyrmalydyr. Onda

$$O=2x_0x_1-x_0^2,\quad x_1=\frac{x_0}{2};\quad T\left(\frac{x_0}{2};0\right).$$

Diýmek parabolanyň islendik M nokadynda oňa



11-nji surat

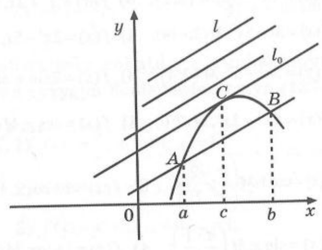
galtaşýan çyzygy gurmak üçin M nokady Ox okunyň $[0;x_0]$ kesiminiň ortasy bolan T nokat bilen birikdirmek ýeterlikdir. $x_0=0$ bolanda ol galtaşýan çyzyk Ox oky bolar.

3. Lagranž formulasy. Käbir aralygyň her bir nokadynda differensirlenýän f funksiýa garalyň. Bu funksiýanyň $A(a;f(a))$ we $B(b;f(b))$ erkin nokatlary arkaly kesiji çyzyk geçireliň. f funksiýanyň grafigi bilen umumy nokatlary bolmadyk we AB göni çyzyga parallel bolan l göni çyzyga garalyň. l göni çyzygy AB göni çyzyga parallel bolar ýaly edip, f funksiýanyň grafigine tarap süýşüreliň. Ol göni çyzygyň l_0 ýagdaýyny f funksiýanyň grafigi bilen umumy nokatlary bolan wagtynda belläliň (fiksirläliň). Şeýle islendik «ilkinji» umumy nokadyň – l_0 göni çyzygyň f funksiýanyň grafigi bilen galtaşma nokadydygy 12-nji suratdan görünýär. Ol nokadyň abssissasyny c bilen belläliň. Onda $f'(c)=\operatorname{tg}\alpha$ bolar, bu ýerde $\alpha-l_0$ göni çyzyk bilen abssissa

okuň arasyndaky burç. l_0PAB bolanlygyna görä, α burç AB kesiji çyzygyň ýapgytlyk burçuna deňdir, ýagny

$$f'(c)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Şunlukda, ***f funksiýa [a,b] kesimde üznüksiz we onuň içki nokatlarynda differensirlenýän bolsa, onda şeýle $c\in(a,b)$ nokat tapylyp***



12-nji surat

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

deňlik ýerine ýetýändir. Bu formula Lagranž formulasy diýilýär.

Gönükmeler

f funksiýanyň berlen M nokady arkaly geçýän galtaşýan çyzygyň abssissa okuna bolan ýapgytlyk burçunyň tangensini tapyň (128-132).

128. 1) $f(x)=x^2, M(-3;9)$; 3) $f(x)=x^3, M(-1;-1)$;

2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x, M(2;\frac{2}{3})$; 4) $f(x)=x^2+2x, M(1;3)$.

129. 1) $f(x)=2\cos x, M\left(\frac{\pi}{2};0\right)$; 3) $f(x)=1+\sin x, M(\pi;1)$;

2) $f(x)=-\mathrm{tg}x, M(\pi;0)$; 4) $f(x)=-\cos x, M(-\pi;1)$.

130. 1) $f(x)=4x^2-7x, M(2;2)$; 3) $f(x)=x^3+2x, M(1;3)$;

2) $f(x)=3x-5x^2, M(2;-14)$; 4) $f(x)=2x^3-5x, M(2;6)$.

131. 1) $f(x)=3x^2-x^3, M(2;4)$; 3) $f(x)=2\sin x, M(0;0)$;

2) $f(x)=4x^2-2x^3, M(2;0)$; 4) $f(x)=\cos x, M(\frac{\pi}{2};0)$.

132. 1) $f(x)=\cos x, M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $f(x)=1+\cos x, M(0;2)$;

2) $f(x)=\sin x, M\left(\frac{\pi}{6};\frac{1}{2}\right)$; 4) $f(x)=1+\mathrm{tg}x, M(0;1)$.

Funksiýanyň grafigi abssissa oky bilen haýsy ýapgytlyk burçy boýunça kesişýär (133-136)?

133. 1) $y=x^2+x$; 3) $y=x^3+\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$;

2) $y=x^2-x$; 4) $y=x^3+\sqrt{3}x^2$.

134. 1) $y=x^3-4x$; 3) $y=\frac{1-x}{x}$;

2) $y=x^3-9x$; 4) $y=\frac{5-3x}{2x-3}$.

135. 1) $y=2x+\frac{1}{x^2}$; 3) $y=(x-1)\sqrt{x+2}$;

2) $y=x+\frac{2}{x^2}$; 4) $y=x\sqrt{3-x}$.

136. 1) $y=\frac{1}{x}-1$; 3) $y=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $y=1-\frac{1}{x}$; 4) $y=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

x_0 **abssissaly nokatda** f **funksiýanyň grafigine galtaşýan çyzygyň deňlemesini ýazyň (137-138).**

137. 1) $f(x)=\frac{3}{x}$, $x_0=-1$; $x_0=1$;

2) $f(x)=2x-x^2$, $x_0=0$, $x_0=2$;

3) $f(x)=x^2+1$, $x_0=0$, $x_0=1$;

4) $f(x)=x^3-1$, $x_0=-1$; $x_0=2$.

138. 1) $f(x)=3\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$; $x_0=\pi$;

2) $f(x)=\mathrm{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$, $x_0=\frac{\pi}{3}$;

3) $f(x)=1+\cos x$, $x_0=0$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

4) $f(x)=-2\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{2}$; $x_0=\pi$.

$f(x)$ **funksiýanyň grafigine** $(x_0;f(x_0))$ **nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini ýazyň (139-141).**

139. 1) $f(x)=x^2+3x+1$, $M(1;5)$;

2) $f(x)=x^2-2x+5$, $M(4;13)$;

3) $f(x)=4x-x^2$, $M(0;0)$;

4) $f(x)=3x-2x^2$, $M(1;1)$.

140. 1) $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x$, $M(3;-3)$;

2) $f(x)=2x-x^3$, $M(2;-4)$;

3) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{\pi}{3};1\right)$;

4) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $M\ \frac{\pi}{2};\frac{1}{2}$.

141. 1) $f(x)=\frac{3x-2}{x+1}$, $x_0=1$;

2) $f(x)=\frac{7-x}{x-3}$, $x_0=4$;

3) $f(x)=\sqrt{3-x}$, $x_0=-1$;

4) $f(x)=\sqrt{3x-2}$, $x_0=6$.

$y=f(x)$ **funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda galtaşýan çyzyk** Ox **okuna** α **burç boýunça ýapgytlanan (142-143)?**

142. 1) $f(x)=x^2+4x+3$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $f(x)=2x^2+\sqrt{3}x+1$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $f(x)=2\sqrt{3}x-3x^2+1$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

4) $f(x)=3x-4x^2+2$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

143. 1) $f(x)=\sqrt{12}x+\cos 2x$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $f(x)=x+\sin 2x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=1{,}5\sin x-5\sin x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

4) $f(x)=\cos 2x-2\cos x+x$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Funksiýanyň grafiginde galtaşýan göni çyzyk abssissa okuna parallel bolar ýaly nokatlary tapyň (144-145).

144. 1) $f(x)=x^3+3x^2+3x$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}x^4+16x$;

3) $f(x)=3x^4-6x^2+x$;

4) $f(x)=x^3-3x+1$.

145. 1) $f(x)=2\cos x+x$;

2) $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}x$;

3) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $f(x)=\sqrt{2}x-2\sin x$.

146. Funksiýalaryň grafikleri Ox oky bilen nähili burç boýunça kesişýär:

1) $f(x)=3x-x^3$; 3) $f(x)=x^2-3x+2$;

2) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $f(x)=-\cos x$?

147. Funksiýalaryň grafikleri Oy oky bilen nähili burç boýunça kesişýär:

1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2$;

2) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

$y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda geçirilen galtaşýan çyzyk $y=\varphi(x)$ göni çyzyga parallel bolar (148-150)?

148. 1) $f(x)=x^2-2x+2,\ \varphi(x)=4x-5$;

2) $f(x)=1-4x-x^2,\ \varphi(x)=2x+3$;

3) $f(x)=x^2-2x+3,\ \varphi(x)=2x+99$;

4) $f(x)=x^2+2x-3,\ \varphi(x)=-2x+3$.

149. 1) $f(x)=\frac{x+1}{x+2},\ \varphi(x)=x+5$;

2) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+x,\ \varphi(x)=-x$;

3) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-7x+1,\ \varphi(x)=x$;

4) $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1,\ \varphi(x)=2x+10$.

150. 1) $f(x)=\sin 2x,\ \varphi(x)=x-3$;

2) $f(x)=\cos 2x,\ \varphi(x)=-\sqrt{3}x+3$;

3) $f(x)=\sin^2 x-\sin x+5x,\ \varphi(x)=5x+2$;

4) $f(x)=\cos^2 x-\cos x+3x,\ \varphi(x)=3x+2$.

151. $y=\frac{x+5}{x+3}$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda geçirilen galtaşýan çyzyk koordinata başlangyjyndan geçer?

152. $y=x+\frac{3}{x}$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda geçirilen galtaşýan çyzyk ordinata okuny (0,0) nokatda keser?

§12. Ýakynlaşan hasaplamalar

Goý,
$$f(x)=x^2+3x$$
funksiýanyň x = 1,02 nokatda ýakynlaşan bahasyny hasaplamaly bolsun. f funksiýanyň 1,02 nokada golaý bolan $x_0=1$ nokatdaky bahasy aňsat tapylýar: $f(1)=4$. f funksiýanyň x_0 nokadyň etrabyndaky grafigi $y=f(x_0)+$ $+f'(x_0)(x-x_0)$ göni çyzyga, ýagny oňa abssissasy 1 bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyga örän golaýdyr. Şonuň üçin $f(1{,}02)\approx y(1{,}02)$. Onda $f'(x)=2x+3,\ f'(x_0)=$ $=f'(1)=5$ we $f(x)\approx y(x)=4+5\cdot 0{,}02=4{,}10$.

Kalkulýatorda hasaplamalar $f(1{,}02)\approx 4{,}1004$ netije berýär.

Umuman x_0 nokatda differensirlenýän f funksiýa üçin Δx kiçi bolanda
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (1)$$
deňlik dogrudyr.

Eger x_0 nokatda $f(x)$ we $f'(x)$ funksiýalaryň bahalaryny hasaplamak kyn bolmasa, onda (1) formula x_0 nokada ýeterlik golaý nokatlarda $f(x)$ funksiýanyň ýakynlaşan bahalaryny tapmaga mümkinçilik berýär. Meselem, $\sqrt{9{,}12}$ aňlatmanyň bahasy hasaplanylanda x_0 hökmünde 9 sany almak tebigydyr, çünki 9,12 san 9-a golaý we x_0=9 bolanda $f(x_0)=\sqrt{x_0}$ hem-de $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ aňlatmalaryň bahalaryny tapmak kyn däl: $f(9)=\sqrt{9}=3$, $f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$. Onda Δx=0,12 bolanda (1) formula boýunça alarys:
$$\sqrt{9{,}08}\approx 3+\frac{1}{6}\cdot 0{,}12=3{,}02.$$

1-nji mysal. (1) formuladan
$$\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\Delta x \qquad (2)$$
formulany getirip çykaralyň.

$f(x)=\sqrt{x},\ x_0=1$ we $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$ alalyň. Indi $f(x_0)=\sqrt{1}=1$ we $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, bu ýerden $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{2}$ alarys. Onda (1) formulada tapylan bahalary goýup alarys:
$$f(x)=\sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\Delta x.$$

$\sqrt{9{,}09}$ aňlatmanyň bahasyny (2) formula boýunça tapalyň.
$$\sqrt{9{,}09}=3\sqrt{1{,}01}\approx 3\left(1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\right)=3{,}015.$$

2-nji mysal. (1) formulany ulanyp
$$(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x \qquad (3)$$
formulany getirip çykaralyň.

$f(x)=x^n,\ x_0=1$ we $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$ bolar. Onda $f(x_0)=1,\ f'(x)=nx^{n-1}$, bu ýerden $f'(x_0)=n$. Indi (1) formulada tapylan bahalary goýup alarys:
$$f(x)=(1+\Delta x)^n\approx 1+n\Delta x.$$

Mysal üçin, $1{,}002^{100}=(1+0{,}002)^{100}\approx 1+100\cdot 0{,}002=1{,}2$.

3-nji mysal. $\frac{1}{0{,}996^{40}}$ aňlatmanyň bahasyny hasaplalyň. (3) formuladan peýdalanmak amatlydyr: $n=-40,\ \Delta x=-0{,}004$ bolanda:
$$\frac{1}{0{,}996^{40}}=(1-0{,}004)^{-40}\approx 1+(-40)\cdot(-0{,}004)=1+0{,}16=1{,}16.$$

4-nji mysal. $|\alpha|<1$ (kiçi ululyk) bolanda $\sqrt[n]{1+\alpha}$ hasaplalyň.

$f(x)=\sqrt[n]{x}$ funksiýa garalyň we (1) formuladan peýdalanalyň.
$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}.\ \text{Onda}\ f(x+\Delta x)\approx\sqrt[n]{x}+\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}\cdot\Delta x.$$

Indi $x=1, \Delta x=\alpha$ diýip alarys:

$$\sqrt[n]{1+\alpha} \approx \sqrt[n]{1}+\frac{\alpha}{n\sqrt[n]{1^{n-1}}} \text{ ýa-da}$$

$$\sqrt[n]{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{n}.$$

Bu formulany

$$\sqrt[n]{1+\Delta x} \approx 1+\frac{\Delta x}{n} \tag{4}$$

görnüşde ýazyp, aşakdaky ýakynlaşan bahalary hasaplalyň:

1) $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{27}\right)}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}}$.

$n=3$, $\Delta x=\frac{2}{27}$. Onda (4) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\sqrt[3]{29}=3\cdot\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3\cdot\left(1+\frac{2}{3\cdot 27}\right)=3+\frac{2}{27}\approx 3,07.$$

2) $\sqrt[4]{1,04}=(1+0,04)^{\frac{1}{4}} \approx 1+\frac{1}{4}\cdot 0,04=1,01.$

5-nji mysal. Δx kiçi ululyk bolanda $\sin(x+\Delta x)$ hasaplamaly.

$f(x)=\sin x$ funksiýa üçin (1) formulany ýazalyň:

$f'(x)=\cos x$ bolýandygy üçin

$$\sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\Delta x\cos x \tag{5}$$

(5) formulany ulanyp, aşakdaky ýakynlaşan bahany hasaplalyň:

1) $\sin 28^\circ=\sin(30^\circ-2^\circ)$, $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ bolýandygy üçin

$\sin(30^\circ-2^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{90}\right)$. Onda $x=\frac{\pi}{6}, \Delta x=-\frac{\pi}{90}$.

(5) formuladan peýdalanyp alarys:

$$\sin 28^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{90}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{90}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{90}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,5-0,35\cdot 0,86\approx 0,4699.$$

Gönükmeler

153. f funksiýanyň x_1 we x_2 nokatlardaky ýakynlaşan bahalaryny (1) formula arkaly hasaplaň:

1) $f(x)=x^4+2x$, $x_1=2,016$, $x_2=0,97$;

2) $f(x)=x^5-x^2$, $x_1=1,995$, $x_2=0,96$;

3) $f(x)=x^3-x$, $x_1=3,02$, $x_2=0,92$;

4) $f(x)=x^7-2x^6+3x^2-x+3$, $x_1=2,02$, $x_2=1,01$.

(1) we (3) formulalar arkaly ýakynlaşan bahalary hasaplaň (154-155).

154. 1) $1,001^{100}$; 2) $0,995^6$; 3) $1,03^{200}$ 4) $0,998^{20}$.

155. 1) $\sqrt{1,004}$; 2) $\sqrt{25,012}$; 3) $\sqrt{0,997}$; 4) $\sqrt{4,0016}$.

Ýakynlaşan bahalary hasaplaň (156-160).

156. 1) $\sin 1^\circ$; 4) $\operatorname{tg}44^\circ$; 7) $\cos 91^\circ$;

2) $\sin 29^\circ$; 5) $\cos 61^\circ$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,01\right)$;

3) $\sin 31^\circ$; 6) $\operatorname{ctg}47^\circ$; 9) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-0,02\right)$.

157. 1) $\frac{1}{1+\sin 1^\circ}$; 2) $\frac{1}{\operatorname{tg}44^\circ+0,003}$;

6. Sargyt № 2629

3) $\sqrt{1+\operatorname{tg}44^\circ}$; 4) $\sqrt{10-\operatorname{tg}46^\circ}$.

158. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,02\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+0,03\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-0,02\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}+0,05\right)$.

159. 1) $\frac{1}{1,003^{20}}$; 3) $\frac{1}{2,0016^2}$;

2) $\frac{1}{0,997^{30}}$; 4) $\frac{1}{0,094^5}$.

160. 1) $\sqrt{1,005}$; 4) $\frac{5}{\sqrt[3]{1,002}}$;

2) $\sqrt[3]{1,998}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{4,028}}$.

3) $\sqrt[4]{267}$;

§13. Önümiň mehaniki manysy

Fizika dersinde hereketiň tizliginiň kesgitlenilişini ýatlalyň. Iň ýönekeý hala garalyň: goý, $x(t)$ funksiýa material nokadyň göni çyzyk boýunça hereketiniň kanuny bolsun, ýagny t_0 wagtdan $t_0+\Delta t$ wagt aralygynda material nokadyň geçen ýoluny aňlatsyn. Onda $\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$ tapawut t_0 wagtdan $t_0+\Delta t$ wagt aralygynda geçilen ýoly aňladýar. Şonuň üçin

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$$

gatnaşyk material nokadyň t_0 wagtdan $t_0+\Delta t$ wagt aralygyndaky orta tizligidir, ýagny

$$\upsilon_{or}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Bu gatnaşygyň $\Delta t \to 0$ bolanda predeli bar bolsa, onda ol predele material nokadyň t_0 pursatdaky tizligi (ýa-da mgnowen tizligi) diýilýär, ýagny

$$\lim_{\Delta t\to 0}\upsilon_{or}(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}=\upsilon(t_0).$$

Bu predele $x(t)$ funksiýanyň t_0 nokatdaky önümi hem diýilýär. Şeýlelikde $x'(t_0)=\upsilon(t_0)$ ***wagt boýunça koordinatadan alnan önüm tizlikdir.*** Önümiň mehaniki manysy şundan ybaratdyr.

Diýmek, t_0 nokatdaky funksiýanyň $x'(t_0)$ önüminiň barlyk meselesi – material nokadyň t_0 wagtdaky mgnowen tizligini kesgitlemek meselesidir.

Mgnowen tizlik hem položitel hem-de otrisatel we elbetde 0 bahany alyp biler. Eger haýsy hem bolsa $(t_1;t_2)$ wagt aralygynda tizlik položitel bolsa, onda nokat položitel ugur boýunça hereket edýär, ýagny wagt geçmegi bilen koordinata artýar, eger-de $\upsilon(t)$ kemelýän bolsa, onda $x(t)$ koordinata kemelýär.

Nokadyň hereketiniň tizligi t wagt boýunça funksiýadyr. Şu funksiýanyň önümine bolsa hereketiň tizlenmesi diýilýär:

$$a=\upsilon'(t).$$

Gysgaça şeýle diýilýär: ***wagt boýunça tizligiň önümi tizlenmedir.***

1-nji mysal. $A(0;1)$ nokatdan abssissa oky boýunça hereket edýän jisime çenli uzaklyk $s(t)=t+2$ kanun boýunça üýtgeýär. $t=1$ bolanda jisimiň hereketiniň tizligini hasaplalyň.

Jisimiň geçýän ýoly $x(t)=\sqrt{s^2(t)-1}=\sqrt{t^2+4t+3}$ bolar. Bu ýerden tizlik $v(t)=x'(t)=\frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+3}}\cdot t_0=1$ bolan pursatdaky tizligi hasaplasak, $v(1)=\frac{1+2}{\sqrt{1^2+4\cdot 1+3}}=$ $=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ bolar.

2-nji mysal. Parallelogramyň esasy $a(t)=2+3t(sm)$ kanun boýunça, beýikligi bolsa $h(t)=1+2t(sm)$ kanun boýunça üýtgeýär. $t=2s$ bolan pursatda parallelogramyň meýdany nähili tizlikde üýtgär?

Parallelogramyň meýdanyny tapalyň: $s(t)=a(t)\cdot h(t)=$ $=(2+3t)(1+2t)=6t^2+7t+2$. Onda onuň meýdanynyň üýtgeýiş tizligi $v(t)=s'(t)=12t+7$ bolar. $t=2s$ bolan pursatda parallelogramyň meýdany $v(2)=31sm^2/s$ tizlikde üýtgär.

3-nji mysal. Material nokadyň erkin gaçyşyna garalyň.

Eger koordinata göni çyzygy wertikal aşak ugrukdyrylsa, material nokadyň başlangyç ýagdaýy bolsa 0 nokat bilen gabat gelse, onda fizikadan belli bolşy ýaly $x(t)=\frac{gt^2}{2}$ bolýar. Onda t wagt pursadynda nokadyň erkin gaçma tizligi

$$v=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt,$$

tizlenmesi bolsa $a=(gt)'=g$ hemişelik ululykdyr.

161. Material nokat $x(t)=-\frac{1}{3}t^3+2t^2+5t$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär; 1) hereketiň tizligini t wagtyň islendik pursady üçin getirip çykaryň. 2) $t=2s$ pursatda tizligi tapyň (orun üýtgeme metrlerde ölçelýär); 3) nokat hereket başlanandan soň näçe sekuntdan durar?

162. Material nokat $x(t)=t^3-4t^2$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. $t=5s$ pursatda (orun üýtgeme metrlerde ölçelýär) tizligi we tizlenmäni tapyň.

163. Jisimiň öz okunyň daşyna aýlanmagy $\varphi(t)=3t^2-4t+2$ kanun boýunça amala aşýar. Wagtyň erkin t pursadynda we $t=4s$ bolanda $\omega(t)$ burç tizligini tapyň ($\varphi(t)$ – radianlardaky burç, $\omega(t)$ – sekuntda radianlardaky tizlik, t sekuntdaky wagt).

164. Tormoz bilen saklanýan uly çarh t wagtyň içinde $\varphi(t)=4t-0,3t^2$ burça öwrülýär. 1) wagtyň $t=2s$ pursadynda çarhyň aýlanmagynyň $\omega(t)$ burç tizligini tapyň; 2) wagtyň haýsy pursadynda çarhyň saklanjakdygyny kesgitläň ($\varphi(t)$ – radianlardaky burç, t – wagtyň sekuntdaky ölçegi).

165. Nokat $x(t)=2t^3+t-1$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. Wagtyň t pursadyndaky tizlenmäni tapyň. Wagtyň haýsy pursadynda tizlenme: 1) $1sm/s^2$, 2) $2sm/s^2$ bolar?

166. Nokat $x(t)=-\frac{t^3}{6}+3t^2-5$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär (wagt sekuntlarda, koordinata bolsa metrlerde ölçelýär). 1) nokadyň tizlenmesiniň nola

deň bolýan wagtynyň pursadyny; 2) nokadyň hereketiniň şu pursadyndaky tizligini tapyň.

167. Nokat $x(t)=\sqrt{t}$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. Nokadyň tizlenmesiniň onuň tizliginiň kubuna proporsionaldygyny görkeziň.

168. $t=2$ bolanda $x(t)=2t^3-t^2$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýän m massaly material nokada täsir edýän F güýji tapyň.

169. 2 kg massaly jisim $x(t)=t^2+t+1$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. x koordinata santimetrlerde, wagt bolsa sekuntlarda ölçenilýär. 1) täsir ediji güýji; 2) hereket başlanandan $2s$ geçen soň jisimiň E kinetik energiýasyny tapyň.

170. Uzynlygy $20sm$ bolan AB sterženiň A nokadyndan l sm uzaklykda bolan islendik C nokat üçin AC bölegiň massasy gramlarda $m(l)=3l^2+5l$ kanun boýunça kesgitlenýändigi bellidir. Sterženiň: 1) AB kesimiň ortasyndaky; 2) sterženiň B ujundaky çyzykly dykyzlygyny tapyň.

171. Iki material nokat göni çyzyk boýunça $x_1(t)=4t^2-3$ we $x_2(t)=t^3$ kanunlar arkaly hereket edýärler. Wagtyň haýsy aralygynda birinji nokadyň tizligi ikinji nokadyň tizliginden uly bolar?

172. O punktdan aralaryndaky burç 60° bolan iki şöhle boýunça iki jisim hereket edýär: birinjisi $5km/s$ tizlik bilen deňölçegli, ikinjisi bolsa $s(t)=2t^2+t$ kanun boýunça hereket edýär. Olar biri-birlerinden nähili tizlik bilen daşlaşýarlar? (s kilometrlerde, t bolsa sekuntlarda ölçelýär).

173. Kwadratyň taraplary $v=0,1m/s$ tizlik bilen ulalýar. Onuň meýdany $4m^2$ bolan pursadynda nähili tizlik bilen ulalýar?

174. Uzynlygy 5 m bolan kesimiň uçlary koordinata oklary boýunça typyp başlaýar. Kesimiň A ujy $2m/s$ hemişelik tizlik bilen koordinata başlangyjyna golaýlaşýar. $AO=4m$ bolan pursadynda AOB üçburçlugyň meýdanynyň üýtgeýiş tizligini tapyň.

175. R radiusly tegelegiň radiusy $R(t)=3+2t^2(sm)$ formula boýunça üýtgeýär. $t=1s$ bolan pursadynda tegelegiň meýdanynyň haýsy tizlikde üýtgeýändigini kesgitläň.

176. Kubuň gapyrgasy 2 dm/s tizlik bilen ulalýar. Kubuň gapyrgasy $0,5\,dm$ bolan pursadynda onuň göwrüminiň nähili tizlikde ulalýandygyny kesgitläň.

177. Tegelek metal disk gyzdyrylanda giňelýär we onuň radiusy deňölçegli $0,2\,sm/sag$ tizlikde ulalýar. Gyzdyrylyp başlanandan 15 min geçenden soňra diskiň meýdanynyň üýtgeýiş tizligi $2,02\ sm^2/sag$ deň bolan bolsa, diskiň radiusynyň ilkibaşdaky bahasyny kesgitläň.

178. Jaýyň üstünden $v_0=15m/s$ başlangyç tizlik bilen wertikal ýokarlygyna daş zyňlypdyr. Eger zyňlandan 2 sekuntdan soň daş bölegi ýerden $30m$ ýokarlykda bolan bolsa, onda jaýyň beýikligi näçe?

179. Beýikligi $20m$ bolan jaýyň üstünden wertikal ýokarlygyna daş zyňlypdyr. Eger zyňlandan 1 sekuntdan soň daş bölegi ýerden $30m$ ýokarlykda bolan bolsa, onda onuň başlangyç tizligi näçä deň?

§14. Funksiýanyň artýan, kemelýän aralyklary

Funksiýanyň artýan ýa-da kemelýän aralyklaryny derňemegi önümler arkaly geçirmek amatlydyr.

Funksiýanyň artmagynyň ýeterlik şerti.

Eger (a; b) aralygyň her bir nokadynda $f'(x) > 0$ bolsa, onda f funksiýa (a; b) aralykda artýar.

Funksiýanyň kemelmeginiň ýeterlik şerti.

Eger (a; b) aralygyň her bir nokadynda $f'(x) < 0$ bolsa, onda f funksiýa (a; b) aralykda kemelýär.

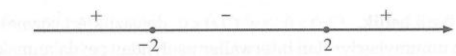
Funksiýanyň artmagynyň we kemelmeginiň bu şertleri Lagranž formulasyny ulanyp subut edilýär. Berlen aralykda x_1 we x_2 islendik iki sany alalyň. Goý, $x_1 < x_2$ bolsun. Lagranž formulasyna görä

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \qquad (1)$$

deňlik ýerine ýeter ýaly şeýle bir $c \in (x_1; x_2)$ san bardyr. c san $(a; b)$ aralyga degişlidir, çünki x_1 we x_2 sanlar $(a; b)$ aralyga degişlidir. Eger $x \in (a; b)$ üçin $f'(x) > 0$ bolsa, onda $f'(c) > 0$ bolar. Onda $x_2 - x_1 > 0$ bolany üçin (1) formuladan $f(x_1) < f(x_2)$ gelip çykýar. Şeýlelikde, biz f funksiýanyň $(a; b)$ aralykda artýandygyny subut etdik. Eger-de $x \in (a; b)$ üçin $f'(x) < 0$ bolsa, onda $f'(c) < 0$ bolar. Onda (1) formuladan $f(x_1) > f(x_2)$ gelip çykýar, çünki $x_2 - x_1 > 0$. f funksiýanyň $(a; b)$ aralykda kemelýändigi subut edildi.

1-nji mysal. $f(x) = x^3 - 12x + 2$ funksiýanyň artýan (kemelýän) aralyklaryny tapalyň we grafigini guralyň.

Berlen funksiýa ähli hakyky sanlaryň köplüginde kesgitlenen. Funksiýanyň artýan aralygyny tapmak üçin onuň önüminiň položitel bolan aralygyny tapmalydyr, ýagny $3x^2 - 12 > 0$ deňsizligi çözmelidir. Bu deňsizligi $3(x-2)(x+2) > 0$ görnüşde ýazalyň. Şu deňsizligi aralyklar usuly bilen (13-nji sur.) çözüp, $(-\infty; -2)$ we $(2; +\infty)$ aralyklarda $f'(x) > 0$ bolýanlygyna göz ýetireris. Diýmek, bu aralyklarda funksiýa artýar.



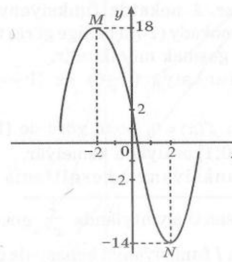
13-nji surat

$(-2; 2)$ aralykda $f'(x) < 0$, şonuň üçin bu aralykda f funksiýa kemelýär. Soňra f funksiýanyň -2 we 2 nokatlardaky bahalaryny hasaplalyň:

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 2 = 18; \quad f(2) = 2^3 - 2 \cdot 12 + 2 = -14.$$

Koordinata tekizliginde $M(-2; 18)$ we $N(2; -14)$ nokatlary belläliň we şol nokatlar arkaly geçýän, $(-\infty; -2)$ hem $(2; +\infty)$ aralyklarda artýan we $(-2; +2)$ aralykda kemelýän funksiýanyň grafigini çyzalyň (14-nji sur.). Suratdan görnüşi ýaly f funksiýa $[-\infty; -2]$ hem $[2; +\infty)$ aralyklarda artýar we $[-2; 2]$ kesimde kemelýär.

1-nji bellik. Eger f funksiýa artýan (kemelýän) aralygynyň haýsy hem bolsa bir ujunda üznüksiz bolsa, onda ol nokady (1-nji mysaldaky -2 we 2 nokatlar ýaly) şol aralyga girizýärler. Biz bu fakty subutsyz kabul edýäris.



14-nji surat

2-nji bellik. $f'(x) > 0$ we $f'(x) < 0$ deňsizlikleri çözmek üçin umumylaşdyrylan interwallar usulyndan peýdalanmak amatlydyr. Önümiň 0-a deň ýa-da ýok nokatlary f funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny aralyklara bölýär. Bu aralyklaryň her birinde f' öz alamatyny hemişelik saklaýar. Alamaty aralygyň haýsy hem bolsa bir nokadynda f'-iň bahasyny hasaplap kesgitlemek mümkindir.

2-nji mysal. $f(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2}$ funksiýanyň artýan (kemelýän) aralygyny tapalyň we grafigini guralyň.

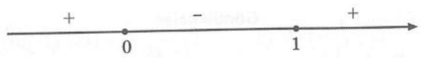
Berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty; 0)$ we $(0; +\infty)$ aralyklaryň birleşmesidir. $f'(x) = 6 - \dfrac{6}{x^3}$; $x = 1$ bolanda $f'(x) = 0$ bolýar. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny 0 we 1 nokatlar $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ we $(1; \infty)$ üç aralyga bölýär. 2-nji bellige görä olaryň her birinde f' alamatyny hemişelik saklaýar. Bu aralyklaryň her birinde önümiň alamaty 15-nji suratda bellenilendir.

Şeýlelikde, berlen funksiýa $(-\infty; 0)$ we $(1; +\infty)$ aralyklarda artýar, 1 nokatda funksiýanyň üznüksiz bolany sebäpli, bu nokady (1-nji bellige görä) funksiýanyň artýan aralygyna goşmak mümkindir.

Netijede, f funksiýa $(-\infty; 0)$ we $[1; +\infty)$ aralykda artýandyr.

$(0; 1)$ aralykda $f'(x) < 0$, şoňa görä-de (1-nji bellige görä) f funksiýa $(0; 1]$ aralykda kemelýär.

0 nokat f funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna girmeýär, ýöne x san 0-a ymtylanda $\dfrac{3}{x^2}$ goşulyjy çäksiz artýar. Şonuň üçin f funksiýanyň bahasy-da çäksiz artar.



15-nji surat

1 nokatda funksiýa 9 bahany alýar.

Indi koordinata tekizliginde $M(1; 9)$ nokady belläliň we onuň üstünden geçýän, $(-\infty; 0)$ hem $[1; \infty)$ aralyklarda artýan we $(0; 1]$ aralykda kemelýän funksiýanyň grafigini çyzalyň (16-njy sur.).

3-nji mysal.

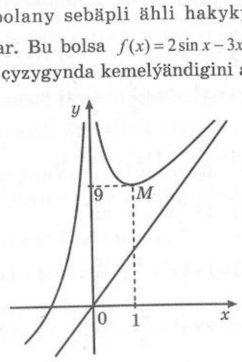
$$f(x) = 2\sin x - 3x$$

funksiýanyň artýan (kemelýän) aralyklaryny tapalyň.

Funksiýa san göni çyzygynyň hemme nokatlarynda kesgitlenendir. Onuň önümi

$$f'(x) = 2\cos x - 3.$$

$|\cos x| \le 1$ bolany sebäpli ähli hakyky x-ler üçin $f'(x) < 0$ bolýar. Bu bolsa $f(x) = 2\sin x - 3x$ funksiýanyň ähli san göni çyzygynda kemelýändigini aňladýar.



16-njy surat

Gönükmeler

Funksiýalaryň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň (180-187).

180. 1) $f(x)=3-\frac{1}{2}x$; 3) $f(x)=4x-5$;
2) $f(x)=-x^2+2x-3$; 4) $f(x)=5x^2-3x+1$.

181. 1) $f(x)=-\frac{2}{x}+1$; 3) $f(x)=\frac{x-3}{x}$;
2) $f(x)=x^2(x-3)$; 4) $f(x)=x^3-27x$.

182. 1) $f(x)=12x+3x^2-2x^3$; 3) $f(x)=x(x^2-12)$;
2) $f(x)=4-x^4$; 4) $f(x)=\frac{3}{x^2}$.

183. 1) $f(x)=4-8x-5x^2$; 3) $f(x)=2x^3+x^2$;
2) $f(x)=x^2-2x+\frac{3}{4}$; 4) $f(x)=x^3-x^2-x-2$.

184. 1) $f(x)=\frac{8}{3}x^3+11x^2-6x+4$;
2) $f(x)=1+\frac{5}{2}x^2-x-2x^3$;
3) $f(x)=1+3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$;
4) $f(x)=2+x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^4$.

185. 1) $f(x)=1-\frac{1}{3x-1}$; 3) $f(x)=\frac{4}{x^2}-x$;
2) $f(x)=2+\frac{1}{1-4x}$; 4) $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$.

186. 1) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$; 3) $f(x)=\sin x+\cos x-x$;
2) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$; 4) $f(x)=\sin x-\cos x-x$.

187. 1) $f(x)=tgx-2x$; 3) $f(x)=|x^3-3x|$;
2) $f(x)=ctgx+2x$; 4) $f(x)=|2x-x^3|$.

188. Aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan f funksiýanyň grafiginiň suduryny guruň.

1) $x\in(-2;5)$ bolanda $D(f)=[-2;5]$, $f'(x)<0$;
2) $x\in(1;3)\cup(3;6)$ $f'(3)=0$ bolanda $D(f)=[1;6]$, $f'(x)<0$;
3) $x\in(-2;1)\cup(1;5)$ $f'(1)=0$ bolanda $D(f)=[-2;5]$, $f'(x)>0$;
4) $x\in(1;6)$ bolanda $D(f)=[1;6]$, $f'(x)<0$.

Aşakdaky funksiýalaryň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň we grafiklerini guruň (189-190).

189. 1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$;
2) $f(x)=4x^3-1,5x^4$;
3) $f(x)=2+9x+3x^2-x^3$;
4) $f(x)=x^4-2x^2$.

190. 1) $f(x)=2-\frac{4}{0,5x-1}$; 3) $f(x)=8x^2-x^4$;
2) $f(x)=|x-3|-2$; 4) $f(x)=\left|\frac{1}{x}-1\right|$.

$f(x)$ funksiýanyň artýandygyny, $g(x)$ funksiýanyň bolsa kemelýändigini subut ediň (191-195).

191. 1) $f(x)=3x+\cos x,\ x\in R$;
2) $g(x)=-\frac{3x^3}{3}-x,\ x\in R$;
3) $f(x)=x^7+2x^5+3,\ x\in R$;
4) $g(x)=-4x+\sin 3x,\ x\in R$.

192. 1) $g(x)=3-4x+3x^2-x^3,\ x\in R$;
2) $g(x)=5-4x-2x^2-\frac{2}{3}x^3,\ x\in R$;
3) $f(x)=1,8x^5-2\frac{1}{3}x^3+7x+12,5,\ x\in R$;
4) $g(x)=-0,2x^5+x^3-5x+25,2,\ x\in R$.

193. 1) $f(x)=12x+\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right),\ x\in R$;
2) $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-13(2-x),\ x\in R$;
3) $f(x)=tgx+e^x-\frac{1}{x},\ x\in D(f)$;
4) $g(x)=ctg2x+e^{-x}+x,\ x\in D(f)$.

194. 1) $g(x)=x\ln x,\ x\in\left(0;\frac{1}{e}\right]$;
2) $f(x)=x+\ln(2x-1),\ x\in(0,5;1,5]$;
3) $f(x)=x+e^{2x-1},\ x\in-[0,5;\infty)$;
4) $g(x)=\frac{e^{1-x}}{x}+x,\ x\in[-1;0)\cup(0,\infty)$.

195. 1) $f(x)=\log_{0,5}(3-2x),\ x\in D(f)$;
2) $f(x)=0,4^{1-5x},\ x\in D(f)$;
3) $g(x)=2^{1-2x}-x,\ x\in D(g)$;
4) $g(x)=\log_4(2-3x),\ x\in D(g)$.

196. a-nyň haýsy bahalarynda $g(x)$ funksiýa $(1;\infty)$ aralykda kemelýär:
1) $g(x)=ax^3+x$; 2) $g(x)=ax-x^3$?

197. a-nyň haýsy bahalarynda $f(x)$ funksiýa san okunyň ähli nokatlarynda artýar:
1) $f(x)=\left((a+2)\sqrt{a^2+2a-15}\right)x^2+x-4$;
2) $f(x)=\left((a+3)\sqrt{a^2-a-20}\right)x^2+2x-1$?

198. Berlen p_1 we p_2 aralyklaryň her birinde deňlemäniň ýeke-täk köküniň bardygyny subut ediň:
1) $x^3-27x+2=0$, $p_1=[-1;1]$, $p_2=[4;6]$;
2) $x^4-4x-9=0$, $p_1=[-2;0]$, $p_2=[2;3]$;
3) $x^4+6x^2-8=0$, $p_1=[-2;-1]$, $p_2=[1;2]$;
4) $-1+3x^2-x^3=0$, $p_1=[-2;0]$, $p_2=[2;3]$.

§15. Funksiýanyň ekstremumy

Biz $f'(x) > 0$ we $f'(x) < 0$ bolan aralyklarda funksiýanyň özüni alyp barşyna garadyk. Indi önümiň nola deň ýa-da ýok nokatlaryna seredeliň. Eger funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasynyň içki nokatlarynda onuň önümi nola deň ýa-da ýok bolsa, onda şol nokatlara funksiýanyň ***kritiki nokatlary*** diýilýär. Funksiýanyň grafigi gurlanda kritiki nokatlar möhüm rol oýnaýarlar, sebäbi diňe şol nokatlar funksiýanyň ekstremum nokatlary bolup biler (17-nji we 18-nji sur.). Indi Fermanyň teoremasy (fransuz matematigi Pýer Fermanyň hatyrasyna) diýlip atlandyrylýan aşakdaky tassyklama seredeliň.

Ekstremumyň zerur şerti. Eger x_0 nokat f funksiýanyň ekstremum nokady bolsa we bu nokatda f′ önüm bar bolsa, onda ol nola deňdir: $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) > 0$ hala garalyň. Önümiň kesgitlemesine görä $x \to x_0$ bolanda $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ gatnaşyk $f'(x_0)$ položitel sana ymtylýar. Diýmek, ol x_0 nokada ýeterlik golaý x-leriň hemmesinde položitel bolar, ýagny

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Diýmek, x_0 nokadyň käbir etrabynda $x > x_0$ şerti kanagatlandyrýan ähli x-ler üçin $f(x) > f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýetýär. Şoňa görä-de x_0 nokat f funksiýanyň maksimum nokady bolup bilmeýär.

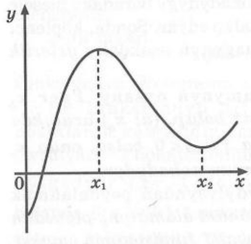
Eger-de $x < x_0$ bolsa, onda $f(x) < f(x_0)$ deňsizligi alarys. Diýmek, x_0 nokat f funksiýanyň minimum nokady-da bolup bilmeýär.

$f'(x_0) < 0$ hal şuňa meňzeş garalýar.

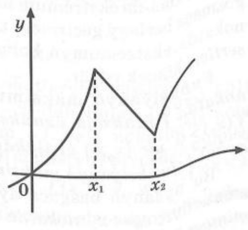
Fermanyň teoremasy ekstremumyň diňe zerur şertidir, çünki x_0 nokatda önümiň nola deňliginden bu nokatda funksiýanyň ekstremumynyň barlygy gelip çykmaýar. Mysal üçin, $f(x) = x^3$ funksiýanyň önümi 0 nokatda nola öwrülýär, emma bu nokatda funksiýanyň ekstremumy ýokdur (19-njy sur.).

Biz şu wagta çenli diňe önümi nola deň bolan kritiki nokatlara garadyk. Indi önümi bolmadyk kritiki nokatlara garalyň ($y = \sqrt{x}$ funksiýa üçin 0 nokat kritiki nokat däldir, ol nokatda önüm ýok, emma ol nokat funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasynyň içki nokady däldir). Funksiýanyň önümi bolmadyk nokatlarda esktremumynyň bolmagy-da mümkin, bolmazlygy-da.

1-nji mysal. $f(x) = |x|$ funksiýa garalyň (20-nji sur.). Bu funksiýanyň 0 nokatda önümi ýokdur. Onda 0 kritiki nokatdyr. 0 nokatda funksiýanyň minimumynyň barlygy düşnüklidir.

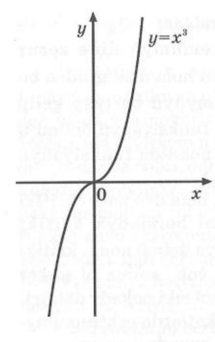


17-nji surat

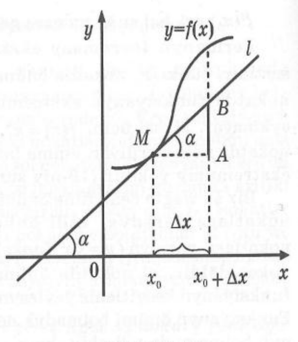


18-nji surat

7. Sargyt № 2629



19-njy surat



20-nji surat

Funksiýanyň ekstremum nokatlary tapylanda ilki bilen onuň kritiki nokatlaryny tapmalydyr. Ol ekstremumyň zerur şertinden gelip çykýar. Emma garalan mysallardan görnüşi ýaly, berlen kritiki nokadyň hakykatdan-da ekstremum nokadydygy baradaky mesele goşmaça barlagy geçirmegi talap edýär. Şonda, köplenç, nokatda ekstremumyň bolmagynyň aşakdaky *ýeterlik şertleri* kömek edýär.

Funksiýanyň maksimumynyň nyşany. ***Eger x_0 nokatda f funksiýa üznüksiz bolup, (a; x_0) aralykda $f'(x_0) > 0$ we (x_0;b) aralykda $f'(x_0) < 0$ bolsa, onda x_0 nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr.***

Bu nyşanyň başgaça aýdylyşyndan peýdalanmak amatlydyr: *eger x_0 nokatda önüm alamatyny plýusdan minusa üýtgetse, onda x_0 nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr.*

Subudy. $(a; x_0)$ aralykda önüm $f'(x_0) > 0$, x_0 nokatda f funksiýa üznüksiz. Onda f funksiýa $(a; x_0]$ aralykda artýar. Şoňa görä-de, $(a; x_0)$ aralykda ähli x üçin $f(x) < f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýetýär. $[x_0, b)$ aralykda f funksiýanyň kemelýänligi hem şeýle subut edilýär. Şoňa görä-de, (x_0, b) aralykda ähli x üçin $f(x) < f(x_0)$.

Şeýlelikde, $(a;b)$ aralykda $x \neq x_0$ bolanda $f(x) < f(x_0)$ deňsizlik ýerine ýetýär, ýagny x_0 nokat f funksiýanyň maksimum nokadydyr.

Funksiýanyň minimumynyň nyşany. ***Eger x_0 nokatda f funksiýa üznüksiz bolup, (a; x_0) aralykda $f'(x_0) < 0$ we (x_0; b) aralykda $f'(x_0) > 0$ bolsa, onda x_0 nokat f funksiýanyň minimum nokadydyr.***

Bu nyşanyň başgaça aýdylyşyndan peýdalanmak amatlydyr: *eger x_0 nokatda önüm alamatyny minusdan plýusa üýtgedýän bolsa, onda x_0 nokat f funksiýanyň minimum nokadydyr.*

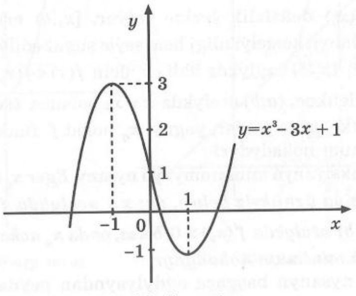
Bu nyşanyň subudy maksimum nyşanynyň subudyna meňzeşdir.

2-nji mysal.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapalyň.

Bu funksiýanyň $3x^2 - 3$ deň bolan önümi ähli nokatlarda kesgitlidir hem -1 we 1 nokatlarda nola öwrülýär. -1 nokatda önüm alamatyny plýusdan minusa üýtgedýär ($x < -1$ bolanda $f'(x_0) > 0$ we $-1 < x < 1$ bolanda $f'(x_0) < 0$). 1 nokatda önüm alamatyny minusdan plýusa üýtgedýär. Maksimumyň we minimumyň nyşanlaryndan peýdalanyp, -1 nokadyň f funksiýanyň maksimum nokady 1 nokadyň bolsa minimum nokady bolýanlygyny anyklarys. Funksiýanyň grafigi 21-nji suratda şekillendirilendir.



21-nji surat

Gönükmeler

199. Aşakdaky funksiýalaryň kritiki nokatlaryny tapyň:

1) $f(x)=4-2x+7x^2$; 3) $f(x)=x-2\sin x$;

2) $f(x)=1+\cos 2x$; 4) $f(x)=4x-\dfrac{x^3}{3}$.

200. Funksiýalaryň kritiki nokatlaryny tapyň. Olaryň haýsysynyň maksimum, haýsysynyň minimum nokatlary bolýandygyny kesgitläň:

1) $f(x)=5+12x-x^3$; 3) $f(x)=2x^3+3x^2-4$;

2) $f(x)=9+8x^2-x^4$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^2$.

201. f funksiýanyň kritiki nokatlarynyň ýokdugyny subut ediň:

1) $f(x)=\sqrt{x}$; 3) $f(x)=3x-7$;

2) $f(x)=tgx$; 4) $f(x)=3x^5+2x$.

f funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapyň (202-203).

202. 1) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$;

2) $f(x)=2x+\dfrac{8}{x^2}$;

3) $f(x)=10\cos x+\sin 2x-6x$;

4) $f(x)=x^3-4x+8$.

203. 1) $f(x)=(x-2)^2$;

2) $f(x)=\begin{cases} -x-2, & \text{eger } x\le -1 \text{ bolsa,} \\ x, & \text{eger } -1<x<1 \text{ bolsa,} \\ 2-x, & \text{eger } x\ge 1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

3) $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$;

4) $f(x)=\begin{cases} x+6, & \text{eger } x<-2 \text{ bolsa,} \\ x^2, & \text{eger } -2\le x\le 2 \text{ bolsa,} \\ 6-x, & \text{eger } x>2 \text{ bolsa.} \end{cases}$

204. Aşakdaky häsiýetlere eýe bolan funksiýalaryň grafikleriniň eskizini guruň:

1) $D(f)=[-3;5]$, $x\in(-3;1)$ bolanda $f'(x)>0$, $x\in(1;5)$ bolanda $f'(x)<0$ we $f'(1)=0$;

2) $D(f)=[-3;5]$, $x\in(-3;1)$ bolanda $f'(x)<0$, $x\in(1;5)$ bolanda $f'(x)>0$ we f funksiýanyň 1 nokatda önümi ýok;

3) $D(f)=[a;b]$, x_1 – nokat funksiýanyň minimum nokady, x_2 – maksimum nokady, $f(a)>f(b)$;

4) $D(f)=[a;b]$, x_1 – maksimum nokady, x_2 – minimum nokady, $f(a)=f(b)$.

205. Funksiýanyň artmagyny, kemelmegini we ekstremumyny derňäň. Funksiýanyň grafigini guruň:

1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-8x^2$; 3) $f(x)=2x-\dfrac{1}{6}x^3$;

2) $f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$.

Funksiýanyň artýan, kemelýän aralyklaryny we ekstremumlaryny tapyň (206-215).

206. 1) $y=x^2+6x+8$; 3) $y=x-x^3$;

2) $y=12-4x-x^2$; 4) $y=x^3-\dfrac{3}{2}x^2$.

207. 1) $y=\dfrac{3x-11}{\sqrt{2-x}}$; 3) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$;

2) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x+3}$; 4) $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{1-x}}$.

208. 1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; 3) $y=(x-1)^2\cdot(x+2)^2$;

2) $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$; 4) $y=(x+1)^2\cdot(x-2)^4$.

209. 1) $y=x+\dfrac{1}{x}$; 3) $y=|x^3-3x+2|$;

2) $y=\dfrac{3x}{x^2+4}$; 4) $y=|x(x+2)\cdot(x-1)|$.

210. 1) $y=|x^3-4x|$; 3) $y=\sin^2 x$;

2) $y=|16x-x^3|$; 4) $y=\cos^2 x$.

211. 1) $y=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$; 3) $y=\cos 2x-\sqrt{3}x$;

2) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{x}{2}$; 4) $y=\sin 2x-x$.

212. 1) $y=2x+ctgx$; $x\in(0;\pi)$; 3) $y=2\ln x+x^{-2}$;

2) $y=2x-tgx$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $y=x^2e^x$.

213. 1) $y=x^3e^{-3x}$; 3) $y=xe^x$;

2) $y=x^3-3\ln(2x)$; 4) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

214. 1) $y=x^2\ln x$; 3) $y=x\ln(2x)$;

2) $y=2^{x^2+2x}$; 4) $y=\dfrac{x}{\ln(2x)}$.

215. 1) $y=2e^x(x^3+2x^2)$; 3) $y=x^2-2\ln x$;

2) $y=3e^x\left(x^3-\dfrac{4}{3}x^2\right)$; 4) $y=-x^2+8\ln x$.

§16. Funksiýalary derňemekde we olaryň grafiklerini gurmakda önümiň ulanylyşy

Funksiýanyň grafigini gurmagy onuň derňewinden başlamak oňat bolýar. Berlen funksiýanyň derňewi aşakdakylardan durýar: 1) kesgitleniş ýaýlasyny tapmak; 2) f funksiýanyň jübütdigini ýa-da täkdigini, periodikdigini anyklamak; 3) grafigiň koordinatalar oklary bilen kesişme nokatlaryny tapmak; 4) alamatynyň hemişelik aralyklaryny kesgitlemek; 5) artýan we kemelýän aralyklaryny tapmak; 6) ekstremum nokatlary we ol nokatlarda f funksiýanyň bahalaryny tapmak; 7) «aýratyn» nokatlaryň etrabynda we moduly boýunça x-iň uly bahalarynda funksiýanyň özüni alyp barşyny derňemek.

Şeýle derňewiň esasynda funksiýanyň grafigi gurulýar.

Funksiýanyň artmagyny (kemelmegini) we ekstremumyny derňemegi önümiň kömegi bilen geçirmek amatly bolýar. Şol maksat bilen ilki f funksiýanyň soňra önümini we onuň kritiki nokatlaryny tapýarlar, soňra olaryň haýsy biriniň ekstremum nokatlary bolýandygyny anyklaýarlar.

1-nji mysal. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+\frac{64}{15}$ funksiýany derňäliň we onuň grafigini guralyň.

Ilki bilen derňewi geçireliň.

1) $D(f)=R$, çünki f köpagza.

2) f funksiýa jübütem däl, täk hem däl (muny özbaşdak subut ediň).

3), 4) f funksiýanyň grafigi ordinata oky bilen $(0; f(0))$ nokatda kesişýär. Abssissa oky bilen kesişme

nokatlaryny tapmak üçin $\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+\frac{64}{15}=0$ deňlemäni çözmeli bolar. Onuň kökleriniň biri 2-ä deň. Beýleki köki diňe, takmynan, tapylyp bilner. Ony biz tapmarys. Şoňa görä-de berlen funksiýanyň grafiginiň abssissa oky bilen kesişme nokatlaryny we alamatynyň hemişelik aralyklaryny görkezjek däldiris.

5), 6) funksiýanyň önümini tapalyň.

$$f'(x)=x^4-4x^2=x^2(x^2-4)=x^2(x+2)(x-2).$$

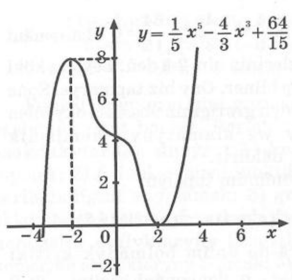
$D(f)=R$, şoňa görä-de önüm bolmadyk kritiki nokatlar ýokdur. $x^4-4x^2=0$ deňlemäni çözüp, -2; 0 we 2 kritiki nokatlary alarys.

Tablisany düzeliň

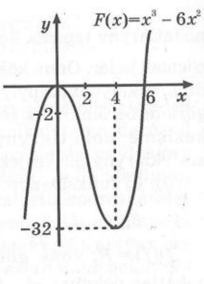
x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$8\frac{8}{15}$	$\searrow$	$4\frac{4}{15}$	$\searrow$	0	$\nearrow$
		max				min	

Bu tablisanyň birinji hatarynda funksiýanyň kritiki nokatlary we olar bilen çäklenen aralyklar görkezilendir. Ikinji hatarda önümiň bu aralyklardaky alamatlary bellenilen. Üçünji hatarda berlen funksiýanyň üýtgeýşi baradaky maglumatlar ýerleşdirilen: «$\nearrow$» – artýar, «$\searrow$» – kemelýär. Dördünji hatarda bolsa kritiki nokatlaryň görnüşleri görkezilendir. O nokat finksiýanyň ekstremum nokady däldir.

Tablisadaky maglumatlardan peýdalanyp, funksiýanyň grafigini gurarys (22-nji sur.).



22-nji surat



23-nji surat

2-nji mysal. $f(x)=x^3-6x^2$ funksiýa berlen. Onuň grafigini guralyň we $f(x)=a$ deňlemäniň a baglylykda näçe kökünüň bardygyny anyklalyň.

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$. Önümiň alamatyny derňäp, f funksiýanyň $(-\infty;0]$ we $[4;+\infty)$ aralyklarda artýandygyny we $[0;4]$ kesimde kemelýändigini taparys. Onuň grafigi 23-nji suratda şekillendirilendir.

$y=a$ göni çyzygy geçirip we onuň berlen funksiýanyň grafigi bilen kesişme nokatlaryna seredip, çözmeli meselämiziň jogabyny aýtmak bolar. Eger $a<-32$ bolsa, onda diňe bir köki bar; eger $a=-32$ bolsa, onda iki köki bar; eger $-32<a<0$ bolsa, onda üç köki bar; eger $a=0$ bolsa, onda iki köki bar; eger $a>0$ bolsa, onda bir köki bar.

3-nji mysal. Islendik x üçin

$$x^5+(1-x)^5\geq\frac{1}{16}$$

deňsizligiň dogrudygyny subut edeliň.

$f(x)=x^5+(1-x)^5$ funksiýanyň önümini tapalyň:

$$f'(x)=5x^4-5(1-x)^4=5\left(x^2-(1-x)^2\right)\left(x^2+(1-x)^2\right)=$$
$$=5(2x-1)\left(2x^2-2x+1\right).$$

$x=\frac{1}{2}$ bolanda $f'(x)=0$. Funksiýanyň basga kritiki nokady ýokdur $\left(2x^2-2x+1=0\right.$ deňlemäniň köki ýok).

$x<\frac{1}{2}$ bolanda $f'(x)<0$, $x>\frac{1}{2}$ bolanda $f'(x)>0$ bolýar.

Diýmek, $x=\frac{1}{2}$ funksiýanyň minimum nokady. Berlen üznüksiz funksiýanyň başga ekstremum nokatlary ýokdur, onda $f\left(\frac{1}{2}\right)$ funksiýanyň iň kiçi bahasy bolar.

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}$. Şunlukda, $f(x)\geq\frac{1}{16}$, ýagny $x^5+(1-x)^5\geq\frac{1}{16}$.

Gönükmeler

Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň (216-218).

216. 1) $f(x)=x^2-2x+8$; 3) $f(x)=-x^2+5x+4$;

2) $f(x)=-\frac{2x^2}{3}+x+\frac{2}{3}$; 4) $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{16}+\frac{1}{4}$.

217. 1) $f(x)=-x^3+3x-2$; 3) $f(x)=x^3+3x+2$;

2) $f(x)=x^4-2x^2-3$; 4) $f(x)=3x^2-x^3$.

218. Funksiýalaryň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

1) $f(x)=1+1{,}5x-3x^2-2{,}5x^3$; 3) $f(x)=\frac{x^4}{5}+8x-5$;

2) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}-6x+1$; 4) $f(x)=x^3-6x^2-15x-2$.

219. f funksiýanyň R köplükde artýandygyny subut ediň:

1) $f(x)=2x-\cos x$; 3) $f(x)=\sin x+\frac{3x}{2}$;

2) $f(x)=x^5+4x$; 4) $f(x)=2x^3+x-5$.

Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň (220-222).

220. 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$; 3) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-1\frac{1}{3}x^3$;

2) $f(x)=4x^2-x^4$; 4) $f(x)=5x^3-3x^5$.

221. 1) $f(x)=x^2\sqrt{1+x}$; 3) $f(x)=x\sqrt{2-x}$;

2) $f(x)=\frac{6(x-1)}{x^2+3}$; 4) $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$.

222. 1) $f(x)=\sin^2 x+\sin x$; 3) $f(x)=\cos^2 x-\cos x$;

2) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x}{x-1}$.

Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň (223-225).

223. 1) $y=2xe^{-0,5x}$; 3) $y=\frac{2x^2}{e^x}$;

2) $y=4xe^{0,5x}$; 4) $y=3x^2e^{2x}$.

224. 1) $y=\sqrt{e^{x^2}-1}$; 3) $y=(1-x)\ln\frac{1}{x}$;

2) $y=\sqrt[3]{e^{x^2}+2}$; 4) $y=-x\ln(1-x)$.

225. 1) $y=2\ln x-x^2$; 3) $y=\frac{x^2}{e^{-x}}$;

2) $y=e^{2x}\cdot x^{-2}$; 4) $y=e^{1-x}\cdot x^{-1}$.

226. f funksiýanyň berlen aralykda položitel bahalary alýandygyny subut ediň:

1) $f(x)=tgx-x$; $I=\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$; $I=[1;\infty)$;

3) $f(x)=x-\sin x$; $I=(0;\infty)$;

4) $f(x)=x+\frac{\pi}{2}-\cos x$; $I=\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Deňlemäniň hakyky kökleriniň sanyny tapyň (227-230).

227. 1) $2x^3-3x^2-12x-11=0$;

2) $4x^3-3x^2-36x-10=0$;

3) $\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x=0$;

4) $x^4-4x^3-9=0$.

228. 1) $x^2-\frac{x}{3}-1=0$; 3) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x-1=0$;

2) $\frac{x^3}{3}+x^2-3x+2=0$; 4) $x^4-2x^3+\frac{3}{2}=0$.

229. 1) $12x^4-16x^3+3=0$; 3) $3x^2-x^3-1=0$;

2) $2-27x+x^3=0$; 4) $x^3+\frac{1}{x}-2x=0$.

230. 1) $x^5+\frac{1}{x^3}-2x=0$;

2) $|x|(x^2-3)=-1$;

3) $x^2(|x|-6)=-15$;

4) $x^3-12x+10=0$, $\left[-3;\frac{3}{2}\right]$ kesimde.

231. $f(x)=x^5-12{,}5x^3+32{,}5x$ funksiýa berlipdir. $f(x)=a$ deňlemäniň a baglylykda näçe köki bar?

232. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ funksiýa berlen. $f(x)=a$ deňlemäniň a baglylykda näçe köki bar?

233. $f(x)=x(x-1)^3$ funksiýa berlen. $f(x)=a$ deňlemäniň a baglylykda näçe položitel köki bar?

234. $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ funksiýa berlen. $f(x)=a$ deňlemäniň [1; 2] kesimde näçe köki bar?

Deňsizligi subut ediň (235-238).

235. 1) $3x^{\frac{2}{3}}-1\le 2x$;

2) $5\sqrt[5]{x}\le x+4,\ x\ge 0$;

3) $x^3+5x^2+3x>2(x^2-0{,}5),\ x\in(-1;\infty)$;

4) $x^3+3x<3x^2+1,\ x\in(-\infty;1)$.

236. 1) $4x^2-2x+1>\frac{2}{3},\ x\in R$;

2) $3x^2+2x+1\ge\frac{2}{3},\ x\in R$;

3) $\sin x>x\cos x,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\cos x>1-\frac{x^2}{2},\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

237. 1) $2x+\frac{1}{2x^2}>5,\ x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$;

2) $\alpha+\cos\alpha<\beta+\cos\beta,\ \alpha<\beta$;

3) $(1+x)^7>1+7x,\ x\in(0;\infty)$;

4) $(x-1)^5>5x-9,\ x\in(2;\infty)$.

238. 1) $\sin x+tgx>2x,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\sqrt{x}<\frac{x}{2}+\frac{2}{x},\ x\in[4;\infty)$;

4) $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x},\ x\in[1;\infty)$.

§17. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak

Amaly meseleleriň köpüsi çözülende kesimde üznüksiz funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmaly bolýar. Matematiki analiz dersinde Weýerştrassyň şeýle teoremasy subut edilýär: ***[a;b] kesimde üznüksiz f funksiýa bu kesimde iň uly we iň kiçi baha eýedir.*** Başgaça $[a;b]$ kesimde f funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary alýan nokatlary bardyr.

f funksiýa $[a;b]$ kesimde diňe bir üznüksiz bolman, eýsem, bu kesimde onuň tükenikli sany kritiki nokatlary bolan ýagdaýy üçin f funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmagyň düzgünini beýan edeliň.

Ilkibaşda f funksiýanyň $[a;b]$ kesimde kritiki nokatlary bolmadyk ýagdaýyna seredeliň. Onda f funksiýa bu kesimde artýar ýa-da kemelýär. Şoňa görä-de, $[a;b]$ kesimde f funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalary kesimiň a we b uçlaryndaky bahalarydyr.

Goý, indi f funksiýanyň $[a;b]$ kesimde tükenikli sany kritiki nokatlary bar bolsun. Bu nokatlar $[a;b]$ kesimi, olaryň içinde kritiki nokatlary bolmadyk tükenikli sany kesimlere bölýär. Şoňa görä-de, f funksiýanyň şeýle kesimlerdäki iň uly we iň kiçi bahalary hökmünde olaryň uçlaryndaky, ýagny kritiki nokatlardaky ýa-da a we b nokatlardaky bahalary alynýar.

Şunlukda, kesimde tükenikli sany kritiki nokatlary bolan funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapmak üçin funksiýanyň ähli kritiki nokatlardaky we kesimiň uçlaryndaky bahalaryny hasaplamaly, soňra bolsa tapylan sanlaryň içinden iň ulusyny we iň kiçisini saýlap almaly.

1-nji mysal. $y(x)=x^3-3x^2+3x$ funksiýanyň $[-1;2]$ kesimdäki iň uly we iň kiçi bahalaryny tapalyň.

Ilki bilen kritiki nokatlaryny taparys: $y'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ önümiň islendik x üçin kesgitlenendigi sebäpli, diňe $y'(x)=0$ deňlemäni çözmek galýar. Ony çözüp, $x=1$ taparys.

Indi $y(-1)=-7$, $y(1)=1$, $y(2)=2$ sanlaryň içinden iň ulusyny we iň kiçisini saýlap almak gerek. Iň kiçi bahanyň -1 nokatda bolup -7 deňdigi, iň uly bahanyň 2 nokatda bolup 2 deňdigi aýdyňdyr. Bu gysgaça şeýle ýazylýar:

$$\max_{[-1;2]} y(x)=y(2)=2; \quad \min_{[-1;2]} y(x)=y(-1)=-7.$$

Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny gözlemegiň ýokarda beýan edilen usulyny dürli amaly ähmiýetli meseleleri çözmekde ulanmak mümkindir. Ony aşakdaky shema boýunça amala aşyrmak amatlydyr:

1) meseläni funksiýa diline «geçirýärler». Şol maksat bilen amatly x parametri saýlap alýarlar, şonuň üsti bilen bizi gyzyklandyrýan ululygy funksiýa hökmünde aňladýarlar.

2) derňewiň serişdeleri arkaly käbir aralykda bu funksiýanyň iň uly ýa-da iň kiçi bahasy gözlenilýär.

3) alnan (funksiýa dilinde) netijäniň nähili amaly manysynyň barlygy aýdyňlaşdyrylýar.

Umuman amaly meseleleri matematikanyň kömegi bilen çözmek, üç esasy etapy öz içine alýar: 1) berlen meseläni matematika diline geçirmek, 2) alnan matematiki meseläni çözmek we 3) tapylan çözüwi matematika dilinden ilkibaşdaky meseläniň adalgalaryna geçirmek.

Bu usulyň ulanylyşyna mysal getireliň.

8. Sargyt № 2629

2-nji mysal. Uzynlygy 80 m bolan germewiň kömegi bilen iň uly meýdana eýe bolan gönüburçluk formaly meýdançanyň daşyny aýlamaly. Bu meýdançanyň ölçeglerini tapalyň.

Gönüburçlugyň taraplaryny x we y bilen belgiläliň. Bu gönüburçlugyň perimetri 80 m-e deňdir, onda $x+y=40$ bolar. Şoňa görä-de, $y=40-x$. Diýmek, gönüburçlugyň meýdany $S(x)=x\cdot(40-x)$ bolar, $x\in(0;40)$.

Meseläni çözmek üçin $s(x)$ funksiýanyň $(0;40)$ aralykda iň uly bahasyny tapmalydyr. Emma biz iň uly we iň kiçi bahalary tapmagyň düzgünini kesim üçin kesgitläpdik. Şonuň üçin berlen funksiýanyň $[0;40]$ kesimdäki iň uly bahasyny tapyp, soňra çözülýän mesele üçin netije çykararys. Funksiýanyň kritiki nokatlaryny tapalyň: $S'(x)=40-2x$. $S'(x)$ önüm $x=20$ nokatda nola öwrülýär. Indi $s(x)$ funksiýanyň 0,20 we 40 nokatlardaky bahasynyň iň ulusyny saýlamak galýar: $S(0)=0$, $S(20)=400$, $S(40)=0$. Onda $\max\limits_{[0;40]} S(x)=S(20)=400$. Funksiýa iň uly baha $[0;40]$ kesimiň içinde eýe boldy. Şoňa görä-de $(0;40)$ aralykdaky iň uly baha hem şol bolar. Diýmek, gönüburçlugyň ölçegleri 20×20 bolanda onuň meýdany iň uly bolar.

Gönükmeler

Berlen kesimde $f(x)$ funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň (239-245).

239. 1) $f(x)=4x+5$; $[-1;2]$;

2) $f(x)=3-2x$; $[-2;1]$;

3) $f(x)=x^2-2x-3$; $\left[-5;-\frac{1}{2}\right]$;

4) $f(x)=x^2-5x+6$; $[0;3]$.

240. 1) $f(x)=x^2-27x$; $[-5;1]$;

2) $f(x)=12x-x^3$; $[-1;3]$;

3) $f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2+2$; $[0;3]$;

4) $f(x)=2x^3+3x^2+\frac{3}{2}x+30$; $[-3;3]$.

241. 1) $f(x)=x^4-8x^2-9$; $[-1;1]$;

2) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$; $[-4;-1]$;

3) $f(x)=x^4-4x+5$; $[-3;2]$;

4) $f(x)=x^4-\frac{x}{2}+1$; $[-1;1]$.

242. 1) $f(x)=3x^5-5x^3$; $[0;2]$;

2) $f(x)=\frac{x}{x+1}$; $[-3;-2]$;

3) $f(x)=x^2\sqrt{3-x}$; $[1;3]$;

4) $f(x)=(x-1)\sqrt{x+1}$; $[-2;0]$.

243. 1) $f(x)=x-4\sqrt{x}+5$; $[1;9]$;

2) $f(x)=x-4\sqrt{x+2}+8$; $[-1;7]$;

3) $f(x)=\sqrt{3}x-\cos 2x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x)=\sqrt{3}x+\sin 2x$; $[0;\pi]$.

244. 1) $f(x)=2\sin x+\cos 2x;\ [0;\pi]$;

2) $f(x)=2\cos x-\sin 2x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) $f(x)=2\cos x+3\sin x;\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x)=2\cos x+\sin 2x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

245. 1) $f(x)=\sqrt{1-\cos x};\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x)=\sqrt{1+\sin x};\ [0;\pi]$;

3) $f(x)=x^2-2x|x-2|;\ [0;3]$;

4) $f(x)=-5x^3-x|x-1|;\ [0;2]$.

246. Funksiýanyň p_1 aralykdaky iň uly bahasyny we p_2 aralykdaky iň kiçi bahasyny deňeşdiriň:

1) $f(x)=x^3+3x^2-9x;\ p_1=[-4;0],\quad p_2=[3;4]$;

2) $f(x)=x^4-2x^3+4;\ p_1=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\quad p_2=[2;3]$.

247. Material nokat $S(t)=12t^2-\frac{2}{3}t^3$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär, bu ýerde $S(t)$ – metrlerdäki ýol we t – sekuntlardaky wagt. [4; 10] aralykda wagtyň haýsy pursadynda nokadyň tizligi iň uly bolar we bu iň uly tizligiň ululygy nähili?

248. $f(x)=21x+2x^2-\frac{x^3}{3}$ funksiýanyň üýtgemeginiň tizligi iň uly ýa-da iň kiçi bolar ýaly [–2;5] aralykda argumentiň bahalaryny tapyň.

249. Gönüçyzykly hereket edýän material nokadyň tizligi $v(t)=\frac{1}{6}t^3-12t$ kanun boýunça üýtgeýär (tizlik metr/sekuntlarda ölçelýär). Eger herekete $t_1=10s$-den $t_2=50s$-e çenli wagt arasynda garalsa, onda wagtyň haýsy pursadynda hereketiň tizlenmesi iň kiçi bolar?

250. Jemi 82-ä deň, köpeltmek hasyly iň uly bolan iki sany tapyň.

251. Tapawudy 20-ä deň, köpeltmek hasyly iň kiçi bolan iki sany tapyň.

252. Sandan şol sanyň kuby aýrylanda iň uly tapawut alnar ýaly položitel sany tapyň.

253. Haýsy položitel san şol sanyň üçeldilen kubundan aýrylanda iň kiçi tapawut alnar?

254. Birinji goşulyjynyň kubunyň we üçeldilen ikinji goşulyjynyň jemi iň kiçi bolar ýaly edip, π sany iki položitel goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazyň.

255. Birinji goşulyjynyň we ikinji goşulyjynyň kubunyň köpeltmek hasyly iň uly bolar ýaly edip, π sany iki goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazyň.

256. Sanlaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly edip, 24 sany iki otrisatel däl goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazyň.

257. Sanlaryň köpeltmek hasyly iň uly bolar ýaly edip, 4 sany iki goşulyjynyň jemi görnüşinde ýazyň.

258. Gönüburçluk emele geler ýaly edip, uzynlygy 48 m bolan simi egreltdiler. Gönüburçlugyň meýdanynyň iň uly bolmagy üçin onuň taraplarynyň uzynlyklary nähili bolmaly?

259. Sanlaryň kwadratlarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly edip, 16 sany iki položitel sanyň jemi görnüşinde ýazyň.

260. Gönüburçlugyň meýdany 64 sm^2. Perimetri iň kiçi bolar ýaly, onuň taraplarynyň uzynlyklary nähili bolmaly?

261. Kwadrat esasly gönüburçly parallelepiped görnüşdäki açyk gaba 13,5 l suwuklyk ýerleşdirmeli. Ony taýýarlamaga iň az mukdarda metal sarp etmek üçin gabyň ölçegleri nähili bolmaly?

262. Esasy 60 sm we ýan tarapy 50 sm bolan deňýanly üçburçlugyň içinden iň uly meýdanly gönüburçluk çyzylan. Gönüburçlugyň iki depesi üçburçlugyň esasynda, beýleki iki depesi bolsa ýan taraplarynda ýatýarlar. Gönüburçlugyň taraplarynyň uzynlyklaryny tapyň.

263. Togalak agaçdan kese kesiginiň meýdany iň uly bahaly gönüburçluk kesikli pürsi kesip alýarlar. Eger agajyň kesiginiň radiusy 20 sm bolsa, onda pürsüň kesiginiň ölçeglerini tapyň.

264. Goşulyjylaryň kublarynyň jemi iň kiçi bolar ýaly edip, 8-i iki goşulyja dagydyň.

265. Gaýyk kenaryň iň golaý A nokadyndan 3 km uzaklykda kölde ýerleşýär. Gaýykdaky ýolagçy kenardaky A nokatdan 5 km uzaklykda ýerleşen B oba barýar (kenaryň AB uçastogyny göni çyzyk diýip hasaplaýarys). Gaýyk 4 km/s tizlik bilen hereket edýär, ýolagçy bolsa gaýykdan düşeninden soň sagatda 5 km geçip bilýär. Ýolagçynyň oba iň gysga wagtda barmagy üçin gaýyk kenaryň haýsy nokadyna barmaly?

266. San tapmaly, şunlukda onuň özüniň kwadraty bilen jemi iň kiçi baha eýe bolmaly.

267. Berlen gipotenuzaly gönüburçly üçburçluklaryň içinden deňýanly üçburçlugyň iň uly meýdanlydygyny subut ediň.

268. Töweregiň içinde çyzylan gönüburçluklaryň içinde iň uly meýdanly gönüburçlugy tapyň.

269. Berlen tegelegiň içinde çyzylan deňýanly üçburçluklaryň içinde iň uly meýdanlysynyň deňtaraply üçburçlukdygyny subut ediň.

270. Berlen deňtaraply ABC üçburçlugyň içinden iň uly meýdana eýe bolan $ADEF$ ($EF \parallel AB$; $DE \parallel AC$) parallelogramy çyzyň.

271. Katetleri 4 sm we 8 sm bolan gönüburçly üçburçlugyň içinden taraplary berlen üçburçlugyň katetlerine parallel bolan gönüburçluk çyzylypdyr. Iň uly meýdana eýe bolan gönüburçlugyň taraplaryny tapyň.

272. Aşaky gyrasy gözegçiniň gözüniň deňinden 75 *sm*, ýokary gyrasy 3 *m* ýokarda bolar ýaly edilip diwardan surat asylan. Suraty iň uly burç boýunça görmek üçin gözegçi diwardan näçe daşlykda durmaly?

273. $R = 4$ *sm* radiusly töweregiň üstünde A nokat berlipdir. ABC üçburçlugyň meýdany iň uly bolar ýaly edip, A nokatda geçirilen galtaşýan çyzyga parallel bolan BC hordany nädip geçirmeli?

274. Dogry üçburçly prizmanyň umumy depesi bolan üç gapyrgasynyň uzynlyklarynyň jemi 4-e deň. Beýikligiň haýsy bahasynda prizmanyň gapdal üsti iň uly meýdana eýe bolar?

275. Dogry dörtburçly prizmanyň gapdal granynyň perimetri 2-ä deň. Beýikligiň haýsy bahasynda prizmanyň göwrümi iň uly bolar?

276. Dogry dörtburçly piramidada apofemanyň uzynlygy $2\sqrt{3}$-e deň. Piramidanyň beýikliginiň haýsy bahasynda onuň göwrümi iň uly bolar?

277. Dogry dörtburçly prizmanyň diagonalynyň uzynlygy 6-a deň. Prizmanyň beýikliginiň haýsy bahasynda prizmanyň göwrümi iň uly bolar?

278. $MABCD$ dogry piramidada MO – beýiklik. $MK + MO = 4$, bu ýerde MK – piramidanyň apofemasy. $MO \in [0,5; 1,5]$. Piramidanyň göwrümi iň uly bolar ýaly MO-nyň bahasyny tapyň.

279. $MABCD$ dogry piramidada, MO – beýiklik. Eger $MC = 2m$ bolsa, onda piramidanyň AMC tekizlik bilen kesilendäki kesiginiň iň uly meýdanyny tapyň.

280. $KABC$ piramidanyň esasynda ABC deňýanly üçburçluk ýatýar. $ACB = 90^0$, $MC \perp (ABC)$, $BC \in [0,5; 1]$, $AC + KC + CB = 3$. AKB granyň iň uly meýdanyny tapyň.

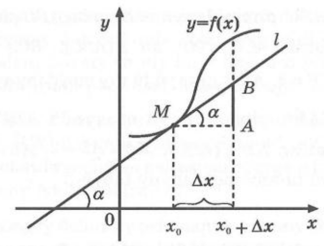
281. $KABC$ piramidanyň esasynda ABC dogry üçburçluk ýatýar. $KA \perp (ABC)$, $KA + AB = 2$. $AB \in [1;1,5]$. CKB granyň iň kiçi meýdanyny tapyň.

TARYHY MAGLUMATLAR

Matematikanyň önümleri we funksiýalary derňemekde olaryň ulanylyşyny öwrenýän bölümine *differensial hasaplama* diýilýär. Tapawudy aňladýan Δf görnüşdäki artdyrmalar önümler bilen iş salşylanda uly rol oýnaýar. Şonuň üçin tapawutlaryň hasaplanylyşy ýaly terjime edilýän ***calculis differentialis*** atda latynça ***differentia*** (tapawut) diýen sözüň ýüze çykyşy tebigydyr, bu at eýýäm XVII asyryň ahyrynda, ýagny täze usullaryň döremegi bilen ýüze çykdy.

Önüm sözi fransuzça derivee sözüniň sözme-söz türkmençe terjimesi bolup, ony J.Lagranž (1736-1813) 1797-nji ýylda girizdi; häzirki döwürdäki y', f' belgilemesini-de ol girizdi. Şeýle at aşakdaky düşünjäniň manysyny aňladýar; $f'(x)$ funksiýa $f(x)$-den gelip çykýar, $f(x)$-iň önümidir. I.Nýuton funksiýanyň önümini flýuksiýa, funksiýanyň özüni bolsa flýuenta diýip atlandyrypdyr.

df belgini Leýbnis f funksiýanyň differensialyny bellemek üçin saýlap alypdyr. f funksiýanyň df



24-nji surat

differensialy $f'(x_0)$ önümiň Δx artdyrma köpeltmek hasylydyr, ýagny $df = f'(x_0)\Delta x$; Δx belgilemäni dx bilen çalşyp, şuny şeýle-de ýazmak mümkin: $df = f'(x_0)dx$, bu ýerden $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$. Differensialyň geometrik manysy 24-nji suratdan aýdyň görünýär: bu ýerde $df = AB$, l göni çyzyk grafige galtaşýan göni çyzykdyr.

lim belgilemesi – limes (araçäk, serhet) latyn sözüniň gysgaldylany, mysal üçin Δx-i kiçeldip, biz $\frac{\Delta f}{\Delta x}$-iň bahasyny $f'(x_0)$ araçägine golaýladýarys. «Predel» adalgasyny Nýuton girizdi.

Eger $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ bolsa, onda $\alpha(x)$-a tükeniksiz kiçi diýilýär.

Tükeniksiz kiçiler matematiki analizde möhüm rol oýnaýarlar, şonuň üçin olara, köplenç, tükeniksiz kiçileriň analizi hem diýilýär.

«Ekstremum» sözüniň **extremum** (çetki) diýen latyn sözünden gelip çykýandygyny belläliň. Maximum iň uly, minimum bolsa iň kiçi hökmünde terjime edilýär.

Önümler baradaky bilimler Leýbnis we Nýuton tarapyndan ösdürildi we analiziň iki esasy problemasy kesgitlenildi:

1. Geçilen ýoluň uzynlygy belli (wagtyň islendik pursadynda) bolanda, teklip edilen wagtda hereketiň tizligini tapmak talap edilýär.

2. Hereketiň tizligi belli bolanda teklip edilen wagtda geçilen ýoluň uzynlygyny tapmak talap edilýär. Birinji problema differensial hasaplamanyň esaslarynyň ösüşini berýär, olaryň elementleri bilen siz eýýäm şu bapda tanyş boldyňyz.

Ikinji problema integral hasaplamalara degişlidir.

Eger Nýuton, esasan, mehanikanyň meselelerinden ugur alan bolsa (Nýuton analizi nýuton klassyky mehanikasy bilen bir wagtda döredilipdi), Leýbnis, köplenç, geometriki meselelerden ugur alypdyr.

Gaýtalamaga degişli soraglar we meseleler

282. Aşakdaky funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

1) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 5}{4 - x^2}$; 3) $f(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 10}$;

2) $f(x) = 1 - 2tgx$; 4) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$.

283. Aralyklar usuly bilen deňsizligi çözüň:

1) $\frac{4}{x+4}+\frac{1}{x+1}>1$; 3) $\frac{x^2-3x-4}{x-4}\le 0$;

2) $x^4-15x^2-16\le 0$; 4) $(x-1)(x-2)(x+4)\ge 0$.

284. 1) f funksiýanyň grafigine $(x_0; f(x_0))$ nokatda galtaşýan göni çyzyk diýip nähili çyzyga aýdylýar?

2) önümiň geometrik manysy nämeden ybarat?

3) f funksiýanyň grafigine $(x_0; f(x_0))$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=\cos x,\ x_0=\frac{2\pi}{3}$; ç) $f(x)=\sin x,\ x_0=\pi$;

b) $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2$; d) $f(x)=x^2,\ x_0=-\frac{1}{2}$.

$y=f(x)$ funksiýanyň grafigine M nokatda galtaşýan çyzygyň ýapgytlyk burçunyň tangensini tapyň (285-286):

285. 1) $f(x)=\frac{1}{2}tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\ M\left(\frac{\pi}{2};\frac{1}{2}\right)$;

2) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),\ M\left(0;\frac{1}{2}\right)$;

3) $f(x)=\frac{1}{x-1},\ M(2;1)$;

4) $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2,\ M\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

286. 1) $f(x)=\frac{x-3}{x},\ M\left(6;\frac{1}{2}\right)$;

2) $f(x)=1-\frac{2}{x},\ M\left(4;\frac{1}{2}\right)$;

3) $f(x)=|4-x^2|,\ M(3;5)$;

4) $f(x)=2|x|-x^2,\ M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

287. Funksiýanyň grafigi abssissa oky bilen haýsy burç boýunça kesişýär:

1) $y=\sin x+\cos x$; 3) $y=e^x-1$;

2) $y=\sin x-\cos x$; 4) $y=\ln x$?

$f(x)$ funksiýanyň grafigine $(x_0; f(x_0))$ nokatda galtaşýan göni çyzygyň deňlemesini ýazyň (288-291).

288. 1) $f(x)=\cos 2x,\ M\left(\frac{\pi}{4};0\right)$;

2) $f(x)=\sin 3x,\ M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $f(x)=tg\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),\ M\left(\frac{\pi}{3};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

4) $f(x)=ctg\left(\frac{\pi}{3}-3x\right),\ M\left(\frac{\pi}{6};-\sqrt{3}\right)$.

289. 1) $f(x)=\sin(1-2x),\ x_0=\frac{1}{2}$;

2) $f(x)=\cos(2x+1),\ x_0=\frac{1}{2}$;

3) $f(x)=\frac{8}{\sqrt{x}},\ x_0=4$;

4) $f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{2},\ x_0=4$.

290. 1) $f(x)=\ln(2x)+x^{-2},\ x_0=0,5$;

2) $f(x)=e^{1+2x}-4x^3,\ x_0=-0,5$;

3) $f(x)=\ln(-0,5x)-x^2,\ x_0=-2$;

4) $f(x)=e^{1-2x}-x^{-2},\ x_0=0,5$.

291. 1) $f(x)=x^2\ln(2x-3),\ x_0=2$;

2) $f(x)=e^{2x}+1\cdot x^{-2},\ x_0=-0,5$;

3) $f(x)=\ln(0,5x)-x^2,\ x_0=2$;

4) $f(x)=x\ln(2x),\ x_0=0,5$.

$y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda galtaşýan çyzyk Ox okuna α burç arkaly ýapgytlanandyr (292-294).

292. 1) $f(x)=\sqrt{3}x-\frac{x^4}{3},\ \alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{3}}-\frac{4x}{\sqrt{3}},\ \alpha=-\frac{\pi}{6}$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-1},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$;

4) $f(x)=\sqrt{3x+2},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$.

293. 1) $f(x)=2x^2-3x+1,\ \alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $f(x)=x^4+31x,\ \alpha=\frac{3\pi}{4}$;

3) $f(x)=\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}x+2,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$;

4) $f(x)=3x^2+7x+1,\ \alpha=\frac{\pi}{4}$.

294. 1) $f(x)=\frac{x}{x+1},\ \alpha=\frac{\pi}{4}$;

2) $f(x)=\frac{x-\sqrt{3}}{x},\ \alpha=\frac{\pi}{6}$;

3) $f(x)=\frac{2}{3}\cos^2 x-\sqrt{2},\ \alpha=\frac{\pi}{6}$;

4) $f(x)=2\sin^2 x+7,\ \alpha=\frac{\pi}{3}$.

$y=f(x)$ funksiýanyň grafiginiň haýsy nokadynda geçirilen galtaşýan çyzyk $y=\varphi(x)$ çyzyga parallel bolar (295-297)?

295. 1) $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1,\ \varphi(x)=0$;

2) $f(x)=2+x^2-\frac{x^4}{2},\ \varphi(x)=0$;

3) $f(x)=2x^2-x+1,\ \varphi(x)=3x+5$;

4) $f(x)=6-2x+x^2,\ \varphi(x)=4x-3$.

296. 1) $f(x)=x^4-x^2,\ \varphi(x)=2x$;

2) $f(x)=x^4+22x,\ \varphi(x)=-10x$;

3) $f(x)=e^{2x}+1,\ \varphi(x)=2x-1$;

4) $f(x)=e^{0,5x},\ \varphi(x)=0,5x-2$.

297. 1) $f(x)=x^2-\frac{2}{x},\ \varphi(x)=4x$;

2) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$, $\varphi(x)=-\frac{3}{2}x$.

298. $f(x)=x^4-x^3-x$ we $g(x)=3x-x^3$ funksiýalaryň grafiklerine $(a,f(a))$ we $(a,g(a))$ nokatlarda geçirilen galtaşýan çyzyklar parallel bolar ýaly a-ny tapyň. Bu galtaşýan çyzyklaryň deňlemesini ýazyň.

299. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ parabola $(-1;2)$ we $\left(2;\frac{1}{2}\right)$ nokatlarda geçirilen galtaşýan çyzyklaryň haýsy nokatda kesişýändigini hasaplaň.

300. $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2x$ funksiýanyň grafigine haýsy nokatda geçirilen galtaşýan çyzyk abssissa okuna parallel bolar?

301. $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ funksiýanyň grafigine haýsy nokatlarda geçirilen galtaşýan çyzygyň ýapgytlyk burçunyň tangensi iň uly baha eýe bolar?

302. 1. x_0 nokatda differensirlenýän funksiýanyň ýakynlaşan bahalaryny hasaplamak üçin formulalary ýazyň.

2. Aşakdaky funksiýalaryň ýakynlaşan bahalaryny hasaplamak üçin formulalary ýazyň:

a) $f(x)=\cos x$; b) $f(x)=\frac{1}{x}$.

3. Ýakynlaşan bahalary hasaplaň:

a) $\frac{1}{1{,}001^{10}}$; b) $\sin 59^0$; ç) $\sqrt{9{,}009}$; d) $0{,}999^{15}$.

303. Ýakynlaşan bahasyny tapyň:

1) $\sin 44^0$; 5) $tg\frac{5\pi}{36}$;

2) $3{,}01^3$; 6) $tg\frac{13\pi}{36}$;

3) $\frac{1}{1{,}0015}$; 7) $tg^2 44$;

4) $\frac{1}{0{,}99}$; 8) $tg^2 46$.

304. 1. Önümiň mehaniki manysy nämeden ybarat?

2. Jisim $x(t)$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. Wagtyň t pursadyndaky tizligi we tizlenmäni tapmak üçin formulany ýazyň.

3. Eger:

a) $x(t)=t^3-2t^2+5$, $t_0=4$; ç) $x(t)=5t-t^2$, $t_0=2$;

b) $x(t)=3\cos 2t$, $t_0=\frac{\pi}{3}$; d) $x(t)=2t^2+t-4$, $t_0=4$

bolsa, onda nokadyň t_0 pursadyndaky tizligini we tizlenmesini tapyň.

305. Abssissa oky boýunça iki nokat $x(t)=t^2$ we $x(t)=4+3t$ kanunlar boýunça hereket edýär. Olar haçan duşuşarlar?

306. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň v tizligi we x geçen ýoly $v=\frac{1}{2}x^2$ deňleme bilen baglanyşýar. Nokadyň $x=4$ bolan pursadyndaky tizlenmesini tapyň.

307. Jisim abssissa oky arkaly $x(t)=t+t^2$ kanun boýunça hereket edýär. $t=\frac{1}{2}$ bolan pursatda ol $A(0,1)$ nokatdan nähili tizlik bilen daşlaşýar?

308. $A(0,1)$ nokatdan abssissa oky boýunça hereket edýän jisime çenli uzaklyk $s(t)=t+2$ kanun boýunça üýtgeýär. t=1 bolanda jisimiň hereketiniň tizligini hasaplaň.

309. Funksiýanyň artysyny we kemelişini derňäň:

a) $y=\frac{x}{x^2+9}$; b) $y=x^4-4x$;

ç) $y=3x-\sin 3x$; d) $y=x^2+\frac{16}{x}$.

Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny kesgitläň (310-311).

310. 1) $y=5x-1$; 3) $y=\cos x-\frac{x}{2}$;

2) $y=5-6x$; 4) $y=\sin x+\frac{x}{2}$.

311. 1) $y=\frac{x^3-2x^2}{e^x}$; 3) $y=\frac{1+x}{2-|x+2|}$;

2) $y=\frac{3x^2-2x-2}{e^{-x}}$; 4) $y=\frac{1-x}{|x-3|-3}$.

312. $f(x)$ funksiýanyň artýandygyny, $g(x)$ funksiýanyň bolsa kemelýändigini subut ediň:

1) $f(x)=x^3+e^{2+3x}$, $x\in D(f)$;

2) $f(x)=e^x-x$, $x\in[0;\infty)$;

3) $g(x)=2x-e^{2x}$, $x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$.

313. Aşakdaky funksiýalary maksimuma we minimuma derňäň:

a) $y=\frac{x}{2}-x^4$; ç) $y=x^3-3x$;

b) $y=2\sin x+\cos 2x$; d) $y=x-tgx$.

Funksiýanyň artýan (kemelýän) aralyklaryny we ekstremumlaryny tapyň (314-318).

314. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x-1$; 3) $y=2x^4-x$;

2) $y=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3$; 4) $y=x^4+\frac{x}{2}$.

315. 1) $y=\frac{3}{x}-12x^2$; 3) $y=\frac{3+2x^2}{x-1}$;

2) $y=x^2-\frac{2}{x}$; 4) $y=\frac{4-x^2}{x+3}$.

316. 1) $y=x^2\sqrt{2-x}$; 3) $y=2\sqrt{x}+\frac{1}{x}$;

2) $y=(1-x)\sqrt{x}$; 4) $y=\sqrt{x}-2x^2$.

317. 1) $x\sin x+\cos x$; 3) $y=\sqrt{3}\cos x-\sin x-x$;

2) $y=x\cos x-\sin x$; 4) $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x+x$.

318. 1) $y=\sin 2x+6\sin x-2x$;

2) $y=\sin 2x+10\cos x+4x$;

3) $y = \sin x - \cos x + x$;

4) $y = \sin x + \cos x - x$.

319. Önümiň kömegi bilen aşakdaky funksiýalary derňäň we olaryň grafigini guruň:

a) $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$; ç) $f(x)=x^3-3x^2-9x$;

b) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$; d) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$.

320. Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň:

1) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$; 3) $f(x)=2x^2+3x-1$;

2) $f(x)=x^2(x-1)^2$; 4) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+1$.

321. Berlen kesimde funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

a) $f(x)=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$, [1;6]; ç) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $\left[-2;-\frac{1}{2}\right]$;

b) $f(x)=\frac{4}{x}+x-3$, [1;4]; d) $f(x)=x-\sqrt{x}$, [0;4].

322. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=e^x+e^{-x}$, [–1;1]; 3) $f(x)=3^{x+2}+3^{-x-1}$, [–2;0];

2) $f(x)=\frac{2^x+2^{2-x}}{\ln 2}$, [–1;2]; 4) $f(x)=2^x+2^{2-x}$, [0;2].

323. Iki sanyň tapawudy 8. Birinji sanyň kubunyň ikinji sana köpeltmek hasyly iň kiçi baha eýe bolar ýaly şu sanlar nähili bolmaly?

324. Maşynlary goýmak üçin bir tarapy jaýyň diwary bolan gönüburçluk görnüşinde meýdança bölünip berildi. Meýdançanyň daşyny üç tarapyndan uzynlygy 200m bolan demir setka bilen aýladylar, şunlukda onuň meýdany iň uly boldy. Meýdançanyň ölçegleri näçe?

325. Esasynyň we beýikliginiň jemi b bolan üçburçluklaryň içinden iň uly meýdana eýe bolanyny tapyň.

326. Perimetri p deň bolan deňýanly üçburçluklaryň içinden iň uly meýdana eýe bolanyny tapyň.

327. Burç we onuň içinde nokat berlipdir. Bu nokadyň üstünden burçdan iň kiçi meýdanly üçburçlugy kesip alýan göni çyzygy geçiriň.

328. Dogry üçburçly prizmanyň aşaky esasynyň merkezinden ýokarky esasynyň depelerine çenli bolan uzaklyk $\sqrt{3}\,m$. Beýikliginiň haýsy bahasynda şeýle prizma iň uly göwrüme eýe bolar?

329. Gapdal granynyň diagonaly $\sqrt{3}\,m$ bolan dogry üçburçly prizmanyň iň uly göwrümini tapyň.

330. Göni prizmanyň esasynda deňýanly gönüburçly üçburçluk ýatýar. Uly gapdal granyň diagonaly $2\sqrt{3}m$. Prizmanyň iň uly göwrümini tapyň.

331. Apofemasy $4\sqrt{3}\,dm$ bolan dogry üçburçly piramidanyň iň uly göwrümini tapyň.

332. Gapdal gapyrgasy 12 sm bolan dogry üçburçly piramidanyň iň uly göwrümini tapyň.

IKINJI BAP BOÝUNÇA BARLAGNAMALAR

I görnüş

1. $s=5t^2$ kanun boýunça hereket edýän jisimiň $t=2$ wagtdaky tizligini tapyň:

a) 20 b) 10; ç) 5; d) 0.

2. Material nokat $x(t)=t^3-4t^2$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. Wagtyň $t=2s$ pursatdaky (ölçegler metrlerde geçirilýär) tizlenmesini tapyň:

a) 4 m/s; b) 5 m/s; ç) 10 m/s; d) 8 m/s.

3. $f(x)=x^2$ funksiýanyň grafigine M (3;9) nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=6x-9$; ç) $f(x)=x-9$;

b) $f(x)=7x+1$; d) $6x+9$.

4. Ýakynlaşan bahasyny tapyň: $2{,}015^3$.

a) 8,18; b) 9,15; ç) 7,01; d) 8,15.

5. $f(x)=-x^4$ funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň:

a) $(-\infty;0]$ artýar, $[0;+\infty)$ kemelýär;

b) $(-\infty;0]$ kemelýär, $[0;+\infty)$ artýar;

ç) kemelýär;

d) artýar.

6. $f(x)=1{,}5x^4+3x^3$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapyň:

a) $x_{min}=0$, $x_{max}=-1{,}5$; ç) $x_{min}=-1{,}5$;

b) $x_{min}=-1{,}5$, $x_{max}=0$; d) $x_{max}=1{,}5$.

7. $f(x)=x^3-2x+x-3$ funksiýanyň $\left[\frac{1}{2};2\right]$ aralykdaky iň uly bahasyny tapyň:

a) $\frac{1}{9}$; b) 1; ç) –1; d) $-2\frac{23}{27}$.

8. $f(x)=x^3-3x^2+3x$ funksiýanyň [1;2] aralykdaky iň kiçi bahasyny tapyň:

a) –7; b) –6; ç) 0; d) 1.

9. $x^4-4x+2=0$ funksiýanyň [1;2] aralykdaky iň kiçi bahasyny tapyň:

a) –5; b) –1; ç) 0; d) 5.

10. Gönüburçlugyň meýdany 64 sm^2. Bu gönüburçlugyň mümkin bolan iň kiçi perimetrini tapyň:

a) 24sm; b) 32sm; ç) 16sm; d) 48sm.

II görnüş

1. $s=t^2+t+5$ kanun boýunça hereket edýän jisimiň $t=2$ wagtdaky tizligini tapyň:

a) 4; b) 5; ç) 6; d) 1.

2. Material nokat $x(t)=t^3-5t$ kanun boýunça gönüçyzykly hereket edýär. Wagtyň $t=2$ s pursatdaky (ölçegler metrlerde geçirilýär) tizlenmesini tapyň:

a) 12 m/s; b) 10 m/s; ç) 2 m/s; d) 6 m/s.

3. $f(x)=3x^2-6x+1$ funksiýanyň grafigine $M(0;1)$ nokatda galtaşýan çyzygyň deňlemesini ýazyň:

a) $f(x)=2+6x$; ç) $f(x)=1-3x$;

b) $f(x)=1-6x$; d) $4-7x$.

4. Ýakynlaşan bahasyny tapyň: $\sqrt[3]{8,6}$.

a) 2,05; b) 3,06; ç) 4,01; d) 1,05.

5. $f(x)=x^2-3x+1$ funksiýanyň kemelýän aralygyny tapyň:

a) $(1,5;\infty)$; b) $(-\infty;+\infty)$; ç) $(-\infty;1,5]$; d) $(-\infty;1,5)$.

6. $f(x)=-2x^2+8x-3$ funksiýanyň artýan aralygyny tapyň:

a) $(2;+\infty)$; b) $(-\infty;\infty)$; ç) $(-\infty;2]$; d) $(-2;2)$.

7. $f(x)=(x-1)^2$ funksiýanyň ekstremum nokatlaryny tapyň:

a) $x_{min}=1$; b) $x_{min}=0$; ç) *ýok*; d) $x_{min}=-1$, $x_{max}=0$.

8. $f(x)=-2x^2+8x-3$ funksiýanyň artýan aralygyny tapyň:

a) $(-\infty;2]$; b) $[2;\infty)$; ç) $(-\infty;\infty)$; d) $[-2;8]$.

9. $f(x)=3x^2-x+5$ funksiýanyň $[1;2]$; kesimde iň kiçi we iň uly bahalaryny tapyň:

a) $f_{min}=f(1)=7$; $f_{max}=f(2)=15$.

b) *ýok*;

ç) $f_{min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{36}$; $f_{max}=f(2)=15$;

d) $f_{min}=f(1)=7$; $f_{max}=f(2)=16$.

10. $x^6-6x^5+1=0$ deňlemäniň näçe köki bar?

a) *bir*; b) *alty*; ç) *iki*; d) *ýok*.

III BAP. ASYL FUNKSIÝA WE INTEGRAL

§18. Asyl funksiýanyň kesgitlenilişi

Biz differensirlemegiň kömegi bilen material nokadyň göni çyzyk boýunça hereketiniň kanuny berlende wagtyň t pursadyndaky mgnowen tizligi hasaplap bilýäris. Ýöne, köplenç, ters meseläni çözmeli, ýagny material nokadyň wagtyň her bir pursadyndaky mgnowen tizligi boýunça onuň hereketiniň kanunyny kesgitlemeli bolýar. Bu mesele funksiýanyň berlen önümi boýunça onuň özüni tapmaklyga getirýär. Başgaça aýdanyňda, berlen f funksiýa boýunça $F'(x)=f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan F funksiýany tapmak meselesidir. Şeýle meseleler differensirlemäge ters bolan integrirleme operasiýasy bilen çözülýändir.

Kesgitleme. Eger berlen aralygyň ähli x-leri üçin

$$F'(x)=f(x) \qquad (1)$$

bolsa, onda berlen aralykda F funksiýa f funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

1-nji mysal. $(-\infty;\infty)$ aralykda $f(x)=3x^2$ funksiýa üçin $F(x)=x^3$ funksiýa asyl funksiýadyr, çünki ähli $x\in(-\infty;\infty)$ üçin

$$F'(x)=(x^3)'=3x^2=f(x).$$

x^3+5 funksiýanyň hem edil şunuň ýaly $3x^2$ önüminiň

bardygyny aňsat görmek bolýar. Şonuň üçin x^3+5 funksiýa hem $3x^2$ funksiýa üçin $(-\infty;\infty)$ aralykda asyl funksiýadyr. 5 sanyň ornuna islendik hemişelik sany goýup boljakdygy düşnüklidir. Şunlukda asyl funksiýany tapmak meselesiniň tükeniksiz köp çözüwiniň bardygyny görmek bolýar. Bu çözüwleriň ählisiniň nähili tapylýandygyny indiki paragrafda göreris.

2-nji mysal. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiýa üçin $(0;\infty)$ aralykda $F(x)=\ln x$ funksiýa asyl funksiýadyr, çünki bu aralygyň ähli x-i üçin

$$F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x).$$

Edil 1-nji mysaldaky ýaly, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiýa üçin $(0;\infty)$ aralykda $F(x)=\ln x+C$ funksiýa asyl funksiýadyr, bu ýerde C hemişelik san.

3-nji mysal. $F(x)=\frac{1}{x}$ funksiýa $(-\infty;\infty)$ aralykda $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ funksiýa üçin asyl funksiýa däldir, çünki 0 nokatda $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetmeýär. Emma $(-\infty;0)$ we $(0;\infty)$ aralyklaryň her birinde f üçin F asyl funksiýa bolýar.

Gönükmeler

333. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýadygyny subut ediň:

1) $F(x)=x^5$, $f(x)=5x^4$, $x\in(-\infty;\infty)$;

2) $F(x)=x^{-3}$, $f(x)=-3x^{-4}$, $x\in(0;\infty)$;

3) $F(x)=\frac{1}{7}x^7$, $f(x)=x^6$, $x\in(-\infty;\infty)$;

4) $F(x)=-\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x)=x^{-7}$, $x\in(0;\infty)$.

334. Berlen aralykda f funksiýa üçin F funksiýa asyl funksiýa bolup bilýärmi:

1) $F(x)=4-x^3$, $f(x)=-3x^2$, $x\in(-\infty;\infty)$;

2) $F(x)=2\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0;\infty)$;

3) $F(x)=\cos x+10$, $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty;\infty)$;

4) $F(x)=3+\sin 2x$, $f(x)=2\cos 2x$, $x\in(0;\infty)$?

R-de f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapyň (335-337).

335. 1) $f(x)=4,5$; 2) $f(x)=\cos x$; 3) $f(x)=2x$; 4) $f(x)=\sin x$.

336. 1) $f(x)=-\sin x$; 2) $f(x)=-x$; 3) $f(x)=-4$; 4) $f(x)=-\cos x$.

337. 1) $f(x)=e^{-x}$; 2) $f(x)=\frac{3}{x}$; 3) $f(x)=4x^{-2}$; 4) $f(x)=x^{\sqrt{5}-1}$.

338. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýadygyny subut ediň:

1) $F(x)=\sin^2 x$, $f(x)=\sin 2x$, $x\in R$;

2) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x)=-\sin 2x$, $x\in R$;

3) $F(x)=\sin 3x$, $f(x)=3\cos 3x$, $x\in R$;

4) $F(x)=3+tg\frac{x}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x\in(-\pi;\pi)$.

339. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin F funksiýa asyl funksiýa bolup bilermi:

1) $F(x)=2x+\cos\frac{x}{2}$, $f(x)=2-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x\in R$;

2) $F(x)=\sqrt{4-x^2}$, $f(x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $x\in(-2;2)$;

3) $F(x)=\frac{1}{x^2}$, $f(x)=15-\frac{1}{x}$, $x\in(0;\infty)$;

4) $F(x)=4x\sqrt{x}$, $f(x)=6\sqrt{x}$, $x\in(0;\infty)$?

340. R-de f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapyň:

1. $f(x)=x-4$;
2. $f(x)=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;
3. $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;
4. $f(x)=3x^2+1$;

341. Funksiýa üçin asyl funksiýalaryň ikisini tapyň:

1. $f(x)=2x$;
2. $f(x)=1-\sin x$;
3. $f(x)=x^2$;
4. $f(x)=\cos x-2$.

342. Berlen üç funksiýanyň içinden beýleki ikisi, degişlilikde, onuň önümi we asyl funksiýasy bolar ýaly üçünji funksiýany görkeziň:

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}$; $g(x)=-\frac{1}{x}$, $h(x)=-\frac{2}{x^3}$;
2. $f(x)=\frac{x^2}{2}-\cos x$, $g(x)=1+\cos x$, $h(x)=x+\sin x$;
3. $f(x)=1$, $g(x)=x+2$, $h(x)=\frac{x^2}{2}+2x$;
4. $f(x)=3-2\sin x$, $g(x)=3x+2\cos x$, $h(x)=-2\cos x$.

§19. Asyl funksiýanyň esasy häsiýeti

1. Asyl funksiýalaryň umumy görnüşi. Integrirleme meselesi berlen funksiýa üçin ähli asyl funksiýalary tapmakdan ybaratdyr. Bu mesele çözülende aşakdaky tassyklama möhüm rol oýnaýar.

Funksiýanyň hemişelik nyşany. ***Eger käbir (a;b) aralykda $F'(x)=0$ bolsa, onda F funksiýa bu aralykda hemişelikdir.***

Subudy. $(a;b)$ aralykda käbir x_0 nokady belläliň. Onda bu aralykdan islendik x san üçin Lagranžyň formulasynyň esasynda

$$F(x)-F(x_0)=F'(c)(x-x_0)$$

bolar ýaly edip, x bilen x_0 arasynda şeýle bir c sany görkezmek bolar. $c\in(a;b)$ bolany üçin $F'(x)=0$ şerte görä $F'(c)=0$ bolar. Diýmek, $F(x)=F(x_0)$. Şunlukda, islendik $x\in(a;b)$ üçin F funksiýa hemişelik bahasyny saklaýar.

f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň hemmesini ***asyl funksiýanyň umumy görnüşi*** diýlip atlandyrylýan bir formulanyň kömegi bilen ýazmak mümkin. Aşakdaky teorema (asyl funksiýanyň esasy häsiýeti) dogrudyr :

Teorema. *Eger F funksiýa $(a;b)$ aralykda f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri bolsa, onda f funksiýanyň $(a;b)$ aralykdaky islendik asyl funksiýasyny $F(x)+C$ görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde C erkin hemişelik san.*

Subudy. Teoremanyň şertine görä islendik $x\in(a;b)$ üçin $F'(x)=f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Şonuň esasynda C hemişelik san bolanda $[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)$

bolýandygyna görä, islendik $x\in(a;b)$ üçin $[F(x)+C]'=f(x)$ deňlik dogrudyr. Bu bolsa $(a;b)$ aralykda $F(x)+C$ funksiýanyň f funksiýanyň asyl funksiýasy bolýandygyny görkezýär.

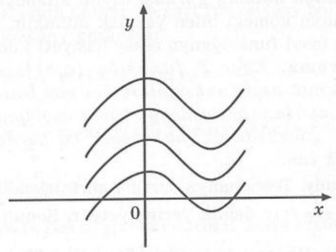
Diýmek, f funksiýanyň $(a;b)$ aralykda iň bolmanda bir asyl funksiýasy bar bolsa, onda bu funksiýanyň $(a;b)$ aralykda tükeniksiz köp asyl funksiýasy bardyr. Goý, $\Phi(x)$ şol asyl funksiýalaryň biri bolsun, onda $\Phi(x)=F(x)+C$ bolýandygyny subut edeliň.

$\Phi'(x)=f(x)$ we $F'(x)=f(x)$ bolanlygyna görä islendik $x\in(a;b)$ üçin

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

deňlik dogrudyr. Bu ýerden funksiýanyň hemişeliklik nyşanyndan $\Phi(x)-F(x)=C, \Phi(x)=F(x)+C$.

Asyl funksiýanyň esasy häsiýetine geometrik many bermek mümkindir: ***f funksiýanyň islendik iki asyl funksiýasynyň grafigi Oy okuň ugruna parallel göçürmek arkaly biri-birinden alynýar*** (25-nji sur.).



25-nji surat

2. Asyl funksiýalary tapmaga degişli mysallar.

1-nji mysal. R-de $f(x)=-x^5$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapalyň.

f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $-\frac{x^6}{6}$ bolar, çünki $\left(-\frac{x^6}{6}\right)'=-x^5$. Subut edilen teoremanyň esasynda f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşi şeýle bolar:

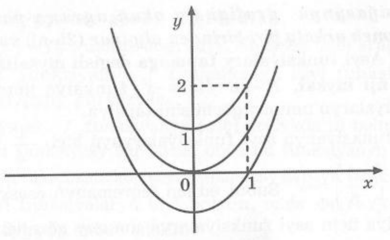
$$F(x)=-\frac{x^6}{6}+C.$$

2-nji mysal. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiýanyň $(0;\infty)$ aralykda $x=1$ bolanda 1 baha alýan asyl funksiýasyny tapalyň.

f funksiýanyň islendik asyl funksiýasynyň $F(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ görnüşiniň bardygyny barlamak aňsatdyr. Şerte görä $F(1)=1$ bolany sebäpli $\frac{2}{3}+C=1$ görnüşdäki deňlemäni (C-e görä) alýarys, bu ýerden $C=\frac{1}{3}$. Diýmek, $F_0(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{1}{3}$.

3-nji mysal. $f(x)=2x$ funksiýanyň grafigi $M(1;2)$ nokadyň üstünde geçýän asyl funksiýasyny tapalyň.

$f(x)=2x$ funksiýanyň islendik asyl funksiýasy x^2+C görnüşde ýazylýar.Bu asyl funksiýalaryň grafikleri 26--njy suratda şekillendirilendir. Gözlenilýän asyl funksiýanyň grafiginiň $M(1;2)$ nokadynyň koordinatalary $1+C=2$ deňlemäni kanagatlandyrmalydyr. Bu ýerden $C=1$. Diýmek, $F(x)=x^2+1$.



26-njy surat

Käbir funksiýalaryň asyl funksiýalarynyň tablisasy

f funksiýa	k (hemişelik)	x^α $(\alpha \in R$ $\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
f üçin asyl funk-siýalaryň umumy görnüşi	$kx+C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$2\sqrt{x}+C$	$-\cos x+C$	$\sin x+C$	$tgx+C$

f funksiýa	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x	e^{kx}	$\frac{1}{x}$
f üçin asyl funk-siýalaryň umumy görnüşi	$-ctgx+C$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	e^x+C	$\frac{1}{k}e^{kx}+C$	$\ln x+C,$ $x>0$

Bu tablisanyň doldurylyşynyň dogrulygyny özbaşdak barlaň.

Gönükmeler

f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (343-344).

343. 1. $f(x)=2-x^4$; 3. $f(x)=4x$;
2. $f(x)=x+\cos x$; 4. $f(x)=-5$.

344. 1. $f(x)=x^8$; 3. $f(x)=1-\frac{1}{x^4}$;
2. $f(x)=\frac{1}{x^3}-7$; 4. $f(x)=x^{13}$.

345. f funksiýa üçin görkezilen nokatda berlen bahany alýan asyl funksiýany tapyň:

1. $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=-12$; 3. $f(x)=x^3$, $F(-1)=2$;
2. $f(x)=\frac{1}{\cos x^2}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$; 4. $f(x)=\sin x$, $F(-\pi)=-1$;

346. f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýadygyny barlaň:

1. $F(x)=\sin x-x\cos x$, $f(x)=x\sin x$;
2. $F(x)=\sqrt{x^2+1}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
3. $F(x)=\cos x+x\sin x$, $f(x)=x\cos x$;
4. $F(x)=x-\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1+x^2}{x^2}$.

10. Sargyt № 2629

f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň.

f funksiýanyň grafigi berlen M nokat arkaly geçýän asyl funksiýasyny tapyň(347-350).

347. 1. $f(x)=2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2};1\right)$;
2. $f(x)=1-x^2$, $M(-3;9)$;
3. $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$;
4. $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2};3\right)$.

348. 1. $f(x)=2x-4x^3$, $M(2;-8)$;
2. $f(x)=2x+6x^5$, $M(1;3)$;
3. $f(x)=4x^3+2x$, $M(1;-2)$;
4. $f(x)=3x^2-2$, $M(2;4)$.

349. 1. $f(x)=2-\sin 2x$, $M(0;2,5)$;
2. $f(x)=2+\cos 2x$, $M(0;3)$;
3. $f(x)=\cos x+\sin x$, $M\left(\frac{\pi}{2};4\right)$;
4. $f(x)=\sin x-\cos x$, $M(\pi;6)$.

350. 1. $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$, $M(1;3e)$;
2. $f(x)=x^{-1}+e^x$, $M(1;2e)$;

3. $f(x)=x^{-2}+\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2};-\frac{2}{\pi}\right)$;
4. $f(x)=x^{-1}-\sin x$, $M(\pi;\ln\pi)$;

351. f funksiýa üçin grafikleriniň degişli (abssissalary deň bolan) nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk a deň bolan iki asyl funksiýany tapyň.

1. $f(x)=2-\sin x$, $a=4$;
2. $f(x)=1+tg^2x$, $a=1$;
3. $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$, $a=0,5$;
4. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $a=2$.

352. Nokat $a(t)$ tizlenme bilen göni çyzyk boýunça hereket edýär. Wagtyň başlangyç t_0 pursadynda onuň koordinatasy x_0, tizligi bolsa υ_0. Nokadyň $x(t)$ koordinatasyny wagtyň funksiýasy hökmünde tapyň:

1. $a(t)=-2t$, $t_0=1$, $x_0=4$, $\upsilon_0=2$;
2. $a(t)=\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $x_0=2$, $\upsilon_0=1$;
3. $a(t)=6t$, $t_0=0$, $x_0=3$, $\upsilon_0=1$;
4. $a(t)=\cos t$, $t_0=\pi$, $x_0=1$, $\upsilon_0=0$.

§20. Asyl funksiýalary tapmagyň üç düzgüni

Asyl funksiýalary tapmagyň düzgünleri differensirlemegiň degişli düzgünlerine meňzeşdir.

1-nji düzgün. *Eger f üçin F asyl funksiýa, g üçin G asyl funksiýa bolsa, onda $f+g$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F+G$ deňdir.*

Hakykatdan-da, şert boýunça $F'=f$ we $G'=g$ bolany üçin jemiň önümini hasaplamagyň düzgüni boýunça

$$(F+G)'=F'+G'=f+g.$$

2-nji düzgün. *Eger f üçin F asyl funksiýa, k - hemişelik san bolsa, onda kf funksiýanyň asyl funksiýasy kF - e deňdir.*

Hakykatdan-da, k hemişelik köpeldijini önüm belgisiniň daşyna çykarmak mümkin, şoňa görä-de

$$(kF)'=kF'=kf.$$

3-nji düzgün. *Eger $f(x)$ üçin $F(x)$ asyl funksiýa bolup, k we b hemişelik san we $k\neq 0$ bolsa, onda $f(kx+b)$ funksiýanyň asyl funksiýasy $\frac{1}{k}F(kx+b)$ deňdir.*

Hakykatdan-da, çylşyrymly funksiýanyň önümini hasaplamagyň düzgüni boýunça

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=\frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k=f(kx+b) \quad \text{bolar.}$$

Bu düzgünleriň ulanylyşyna mysallar getireliň.

1-nji mysal.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^3}$$

funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapalyň.

x^2 üçin asyl funksiýalaryň biri $\frac{x^3}{3}$, $\frac{1}{x^3}$ üçin bolsa asyl funksiýalaryň biri $-\frac{1}{2x^2}$ bolany üçin 1-nji düzgün boýunça $f(x)=x^2+\frac{1}{x^3}$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň biri $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2x^2}$ bolar.

Jogaby. $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2x^2}+C.$

2-nji mysal $f(x)=\frac{4}{x}$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň birini tapalyň.

$\frac{1}{x}$ üçin asyl funksiýalaryň biri $\ln x$ bolany sebäpli, 2-nji düzgüni ulanyp, aşakdaky jogaby alarys:

$$F(x)=4\ln x.$$

3-nji mysal. $y=\cos(4x-3)$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapalyň.

$\cos x$ üçin asyl funksiýalaryň biri $\sin x$ bolany üçin, 3-nji düzgün boýunça gözlenilýän asyl funksiýa $F(x)=\frac{1}{4}\sin(4x-3)$ deňdir.

4-nji mysal.

$$f(x)=\frac{1}{(5-2x)^7}$$

funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapalyň.

$\frac{1}{x^7}$ üçin asyl funksiýalaryň biri $-\frac{1}{6x^6}$ bolany üçin, 3-nji düzgün boýunça gözlenilýän asyl funksiýa

$$F(x)=\frac{1}{-2}\cdot\frac{-1}{6(5-2x)^6}=\frac{1}{12(5-2x)^6} \quad \text{deňdir.}$$

5-nji mysal. Massasy 4 kg bolan material nokat Ox oky buýunça şu okuň ugruna ugrukdyrylan güýjüň täsiri astynda hereket edýär. Wagtyň t pursadynda bu güýç $F(t)=8t+8$ deň. Eger $t=2s$ bolanda nokadyň tizligi $9m/s$ koordinatasy 7-ä deň bolan bolsa, hereketiň $x(t)$ kanunyny tapyň (F-nýutonlardaky güýç, t – sekuntlardaky wagt, x – metrlerdäki ýol).

Çözülişi. Nýutonyň 2-nji kanunyna laýyklykda $F=ma$, bu ýerde a tizlenme.

$a=\frac{F}{m}$ we $a(t)=\frac{F(t)}{m}=2t+2$ bolar.

Nokadyň $v(t)$ tizligi onuň $a(t)$ tizlenmesi üçin asyl funksiýadyr, şoňa görä-de

$$v(t)=t^2+2t+C_1.$$

C_1 – hemişelik sany $v(2)=9$ şertden peýdalanyp taparys:

$2^2+2\cdot 2+C_1=9$, ýagny $C_1=1$ we $v(t)=t^2+2t+1$.

$x(t)$ koordinata bolsa $v(t)$ tizlik üçin asyl funksiýadyr, şoňa görä-de

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t+C_2$$

C_2 hemişeligi $x(2)=7$ şertden tapýarys:

$$\frac{1}{3}\cdot 8+4+2+C_2=7,\quad C_2=-\frac{5}{3}.$$

Şeýlelikde nokadyň hereket kanuny aşakdaky ýaly bolar:

$$x(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+t-\frac{5}{3}.$$

Gönükmeler

f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (353-355).

353. 1. $f(x)=2-x^3+\frac{1}{x^2}$; 3. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\sin x$;

2. $f(x)=x^2-\frac{2}{x^5}+\cos x$; 4. $f(x)=5x^2-1$.

354. 1. $f(x)=(2x-3)^5$; 3. $f(x)=(4-5x)^7$;

2. $f(x)=3\sin 2x$; 4. $f(x)=-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$.

355. 1. $f(x)=\frac{3}{(4-15x)^4}$; 3. $f(x)=\frac{4}{(3x-1)^2}$;

2. $f(x)=\frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$; 4. $f(x)=-\frac{2}{x^5}+\frac{1}{\cos^2(3x-1)}$.

f funksiýa üçin grafigi M nokat arkaly geçýän asyl funksiýany tapyň (356-357).

356. 1. $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1;4)$;

2. $f(x)=x^3+2$, $M(2;15)$;

3. $f(x)=1-2x$, $M(3;2)$;

4. $f(x)=\frac{1}{x^3}-10x^4+3,\quad M(1;5).$

357. 1. $f(x)=e^{-2x}+1,\quad M(0;2,5);$

2. $f(x)=\frac{2}{x+1},\quad M(0;5);$

3. $f(x)=e^{2x}+\cos x,\quad M(0;-4);$

4. $f(x)=\sin 2x-e^{-x},\quad M(0;6).$

358. 1. $f(x)=\frac{1}{\cos^2 2x}+\cos x,\quad M(\frac{\pi}{2};-3);$

2. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\sin 2x,\quad M(\frac{\pi}{4};-3);$

3. $f(x)=\frac{5x}{\sqrt[3]{x}},\quad M(8;15);$

4. $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x}},\quad M(4;12).$

Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (359-363).

359. 1. $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right);$

2. $f(x)=\frac{1}{\sin^2 4x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2;$

3. $f(x)=\frac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x;$

4. $f(x)=\frac{1}{(3-2x)^2}+\frac{3}{\sqrt{5-x}}-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$

360. 1. $f(x)=5e^x;$ 3. $f(x)=4^x;$

2. $f(x)=2\cdot 3^x;$ 4. $f(x)=\frac{1}{2}e^x+1.$

361. 1. $f(x)=e^{3-2x};$ 3. $f(x)=2^{-10x};$

2. $f(x)=2\cdot 0,9^x-5,6^{-x};$ 4. $f(x)=e^{3x}+2,3^{1+x}.$

362. 1. $f(x)=\frac{3}{7x+1};$ 3. $f(x)=\frac{1}{x+2};$

2. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+5};$ 4. $f(x)=\frac{4}{x}.$

363. 1. $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}};$ 3. $f(x)=3x^{-1};$

2. $f(x)=x^{2\sqrt{3}};$ 4. $f(x)=x^e.$

364. Eger F-iň grafiginiň M nokadynyň koordinatalary belli bolsa, onda f funksiýa üçin F asyl funksiýany görkezeliň:

1. $f(x)=2x+1,\ M(0;0);$ 3. $f(x)=x+2,\ M(1;3);$

2. $f(x)=3x^2-2x,\ M(1;4);$ 4. $f(x)=-x^2+3x,\ M(2;-1).$

365. Göni çyzyk boýunça hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t)=t^2+2t-1$ formula bilen berlen. Eger wagtyň başlangyç $(t=0)$ pursadynda nokadyň koordinatalar başlangyjynda bolandygy belli bolsa, onda x koordinatasynyň t wagta baglylykdaky formulasyny ýazyň.

366. Göni çyzyk boýunça hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t)=2\cos\frac{t}{2}$ formula bilen berlen. Eger wagtyň

$t=\frac{\pi}{3}s$ pursadynda nokadyň koordinatalar başlangyjyndan $4m$ uzaklykda bolandygy belli bolsa, onda nokadyň koordinatasynyň wagta baglylygynyň formulasyny tapyň.

367. Nokat $a(t)=12t^2+4$ tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Eger wagtyň $t=1s$ pursadynda onuň tizligi $10m/s$ bolup, koordinatasy 12 (a-nyň ölçeg birligi $1m/s^2$) deň bolsa, onda nokadyň hereketiniň kanunyny tapyň.

368. Massasy m bolan material nokat Ox ok boýunça, şu okuň ugruna ugrukdyrylan güýjüň täsiri astynda hereket edýär. Wagtyň t pursadynda güýç $F(t)$ deň. Eger $t=t_0$ bolanda nokadyň tizliginiň υ_0 koordinatasynyň x_0 deňligi belli bolsa, ($F(t)$ – nýutonlarda, t – sekuntlarda, υ – sekuntda hem metrlerde, m – kilogramlarda ölçelýär) onda $x(t)$-niň t wagt bilen baglylygynyň formulasyny tapyň:

1. $F(t)=6-9t,\ t_0=1,\ \upsilon_0=4,\ x_0=-5,\ m=3;$

2. $F(t)=14\sin t,\ t_0=\pi,\ \upsilon_0=2,\ x_0=3,\ m=7;$

3. $F(t)=25\cos t,\ t_0=\frac{\pi}{2},\ \upsilon_0=2,\ x_0=4,\ m=5;$

4. $F(t)=3t-2,\ t_0=2,\ \upsilon_0=3,\ x_0=1,\ m=2.$

369. f funksiýanyň F_1 asyl funksiýasynyň grafigi M nokat arkaly, F_2 asyl funksiýasynyň grafigi bolsa N nokat arkaly geçýär. Şu asyl funksiýalaryň tapawudy näçä deň?

1) $f(x)=3x^2-2x+4,\ M(-1;1),\ N(0;3);$

2) $f(x)=4x-6x^2+1,\ M(0;2),\ N(1;3);$

3) $f(x)=4x-x^3,\ M(2;1),\ N(-2;3);$

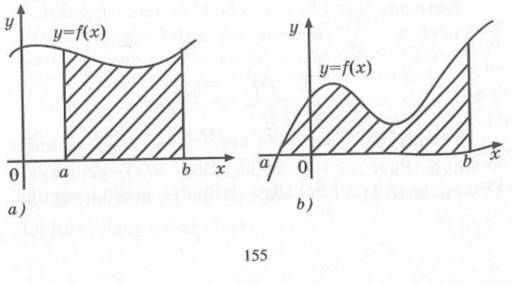
4) $f(x)=(2+1)^2,\ M(-3;-1),\ N(-1;6\frac{1}{3}).$

F_1 we F_2 grafikleriň haýsysy ýokarda ýerleşer?

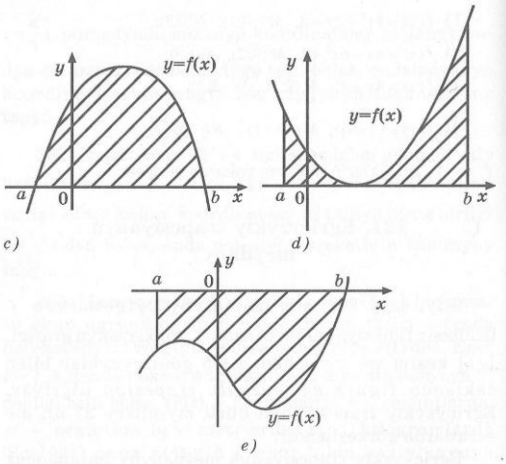
§21. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany

Goý, $[a;b]$ kesimde alamatyny üýtgetmeýän f üznüksiz funksiýa berlen bolsun. f funksiýanyň grafigi, $[a;b]$ kesim we $x=a$ hem $x=b$ göni çyzyklar bilen çäklenen figura *egriçyzykly trapesiýa* diýilýär. Egriçyzykly trapesiýanyň dürli mysallary 27-nji a-e suratlarda görkezilendir.

Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin aşakdaky teoremadan peýdalanylýar:



a) b)



27-nji surat

Teorema. *Eger f funksiýa [a; b] kesimde üznüksiz we otrisatel däl, F berlen kesimde onuň asyl funksiýasy bolsa, onda degişli egriçyzykly trapesiýanyň meýdany*

$$S=F(b)-F(a) \tag{1}$$

formula bilen hasaplanýar.

Subudy. $[a;b]$ kesimde kesgitlenen $S(x)$ funksiýa garalyň. Eger $a<x\le b$ bolsa, onda $S(x)$ egriçyzykly trapesiýanyň $(x;0)$ nokadyň üstünden geçýän wertikal

göni çyzykdan çepde ýerleşen böleginiň meýdany bolsun (28-nji *a* sur.). Eger $x=a$ bolsa, onda $S(a)=0$ bolar. Eger $x=b$ bolsa, onda $S(b)=S$ (S – egriçyzykly trapesiýanyň meýdany) bolýanlygyny belläliň.

$$S'(x)=f(x) \tag{2}$$

deňligi subut edeliň.

Önümiň kesgitlemesi boýunça

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(x). \tag{3}$$

Sanawjydaky $\Delta S(x)$ aňlatmanyň geometrik manysyny aýdyňlaşdyralyň. Ýönekeýlik üçin $\Delta x>0$ hala garalyň. $\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)$ bolany üçin $\Delta S(x)$ 28-nji *b* suratda ştrihlenen figuranyň meýdanydyr. Indi şonuň ýaly meýdany bolan, $[x;x+\Delta x]$ kesime daýanýan (28-nji *c* sur.) gönüburçluk alalyň. Şert boýunça f üznüksiz funksiýadyr. Onda gönüburçlugyň ýokarky tarapy funksiýanyň grafigini abssissasy $c\in[x;x+\Delta x]$ bolan käbir nokatda keser (seýle bolmasa bu gönüburçlugyň meýdany $\Delta S(x)$ meýdandan ýa kiçi ýa-da uly bolar). Gönüburçlugyň beýikligi $f(c)$ deň. Onda onuň meýdany $\Delta S(x)=f(c)\cdot\Delta x$ bolar, bu ýerden $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(c)$ deňligi alarys. (Bu formula $\Delta x<0$ bolanda-da dogrudyr). c nokat x bilen $x+\Delta x$ nokatlaryň arasynda ýatýar, soňa görä-de $\Delta x\to 0$ bolanda c nokat x nokada ymtylýar. f funksiýa üznüksiz bolany üçin $\Delta x\to 0$ bolanda $f(c)\to f(x)$ bolar.

Şeýlelikde, $\Delta x\to 0$ bolanda $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}\to f(x)$ bolýar. Biz (2) formulany subut etdik.

Biz f funksiýa üçin $S(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasydygyny görkezdik. Şoňa görä-de asyl funksiýalaryň esasy häsiýeti boýunça ähli $x\in[a;b]$ üçin

$$S(x)=F(x)+C$$

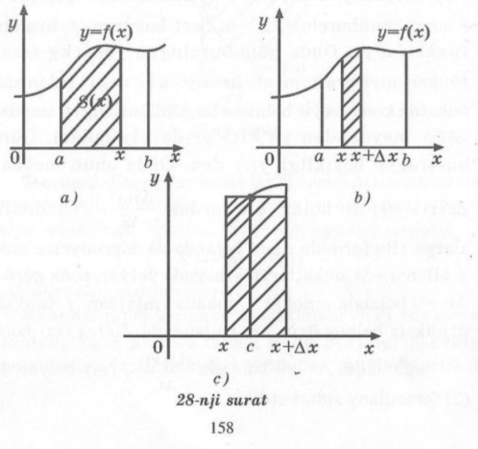
bolar, bu ýerde C – käbir hemişelik san, F bolsa f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biridir. C – ni tapmak üçin $x=a$ goýalyň:

$$F(a)+C=S(a)=0,$$

bu ýerden $C=-F(a)$ alarys. Diýmek,

$$S(x)=F(x)-F(a). \tag{4}$$

Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany $S(b)$ bolany üçin (4) formuladan $x=b$ goýup alarys:



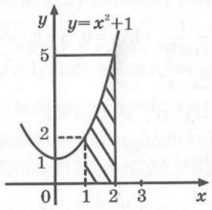
28-nji surat

$$S=S(b)=F(b)-F(a).$$

Mysal. $f(x)=x^2+1$ funksiýanyň grafigi, $y=0$, $x=1$ we $x=2$ göni çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyny hasaplalyň (29-njy sur.).

$f(x)=x^2+1$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň biri $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ bolar. Diýmek,

$$S=F(2)-F(1)=\left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)=3\frac{1}{3}.$$



29-njy surat

Gönükmeler

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (370-371).

370. 1) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$;

2) $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;

3) $y=\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$;

4) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

371. 1) $y=x^3+1,\ y=0,\ x=0,\ x=2;$

2) $y=1+2\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2};$

3) $y=4-x^2,\ y=0;$

4) $y=1+\frac{1}{2}\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}.$

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (372-373).

372. 1) $y=(x+2)^2,\ y=0,\ x=0;$

2) $y=\frac{1}{(x+1)^2}+1,\ y=0,\ x=0,\ x=2;$

3) $y=2x-x^2,\ y=0;$

4) $y=-(x-1)^3,\ y=0,\ x=0.$

373. 1) $y=3\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right),\ y=0,\ x=-\frac{3\pi}{4},\ x=\frac{3\pi}{4};$

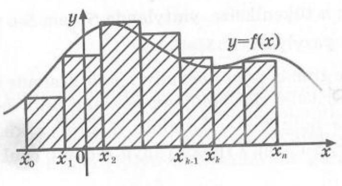
2) $y=2\cos 2x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{4};$

3) $y=\sin x-\frac{1}{2},\ y=0,\ x=\frac{\pi}{6},\ x=\frac{5\pi}{6};$

4) $y=1-\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{6},\ x=\frac{\pi}{2}.$

§22. Integral. Nýuton-Leýbnisiň formulasy

1. Integral barada düşünje. Goý, f funksiýa [a; b] kesimde otrisatel däl we üznüksiz bolsun. Bu



30-njy surat

funksiýanyň grafigi, abssissa oky, $x=a$, $x=b$, $(a<b)$ göni çyzyklar bilen çäklenen (30-njy sur.) egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyny aşakdaky ýaly edip takmyny hasaplap bolýandyr.

[*a*; *b*] kesimi $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ nokatlar bilen birmeňzeş uzynlyklary bolan n kesime böleliň. Goý, $\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1}$ bolsun, bu ýerde $k=1,2,\ldots,n$. $[x_{k-1};x_k]$ kesimleriň her birini esasy hökmünde kabul edip $f(x_{k-1})$ beýikligi bolan gönüburçluk guralyň. Bu gönüburçlugyň meýdany

$$f(x_{k-1})\Delta x=\frac{b-a}{n}f(x_{k-1})$$

deňdir. Şeýle gönüburçluklaryň hemmesiniň meýdanlarynyň jemi bolsa

$$S_n=\frac{b-a}{n}(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))$$

deň bolar (30-njy sur.)

f funksiýa üznüksizdir. Şoňa görä n näçe uly bolsa, ýagny Δx näçe kiçi bolsa, onda gurlan gönüburçluklaryň meýdanlarynyň jemi egriçyzykly trapesiýanyň meýdany bilen «gabat gelýär» diýen ýalydyr. Şonuň üçin, n uly bolanda $S_n\approx S$ diýip gümän etmek bolar. Gysgaça şeýle

11. Sargyt № 2629

diýilýär: n tükeniksize ymtylanda S_n jem S-e ymtylýar we şeýle ýazylýar: $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

Şeýle gümän etme dogrudyr. [*a*; *b*] kesimde üznüksiz bolan (otrisatel däl bolmagy hökman däl), islendik f funksiýa üçin $n\to\infty$ bolanda S_n ululyk käbir sana ymtylýar. Şu sana ***f* funksiýanyň *a*-dan *b* çenli aralykdaky integraly diýilýär we** $\int_a^b f(x)dx$ **bilen belgilenýär,** ýagny

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

(okalyşy: *a*-dan *b*-çenli integral ef iks de iks). a we b sanlara ***integrirlemegiň predelleri diýilýär: a – aşaky, b*** – ýokarky predeli $\int$ belgä ***integral belgisi*** diýilýär. f funksiýa ***integral aşagyndaky funksiýa***, x – üýtgeýän ululyga bolsa ***integrirlemegiň üýtgeýän ululygy*** diýilýär.

Şeýlelikde, eger [*a*; *b*] kesimde $f(x)\geq 0$ bolsa, onda degişli egriçyzykly trapesiýanyň S meýdany aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

2.Nýuton – Leýbnisiň formulasy. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanlarynyň

$$S=F(b)-F(a) \text{ we } S=\int_a^b f(x)dx$$

formulalaryny deňeşdirip, şeýle netijäni alarys:

Eger [*a*; *b*] kesimde f üçin F asyl funksiýa bolsa, onda

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \quad (3)$$

deňlik dogrudyr. Bu formula Nýuton-Leýbnisiň formulasy diýilýär. Ol [*a*;*b*] kesimde üznüksiz bolan islendik f funksiýa üçin dogrudyr. Nýuton-Leýbnisiň formulasynyň ulanylyşynyň mysallaryna garalyň.

1-nji mysal. $\int_2^3 x^3dx$ integraly hasaplalyň.

x^3 funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $\frac{x^4}{4}$ bolany sebäpli

$$\int_2^3 x^3dx=\frac{3^4}{4}-\frac{2^4}{4}=\frac{65}{4}=16\frac{1}{4}.$$

Ýazgynyň amatly bolmagy üçin $F(b)$-$F(a)$ tapawudy (F funksiýanyň [*a*; *b*] kesimdäki artdyrmasy) gysgaça şeýle belgilemek $F(x)\big|_a^b$, ýagny

$$F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$$

kabul edilendir.

Şu belgilemelerden peýdalanyp, Nýuton-Leýbnisiň formulasyny, adatça, aşakdaky görnüşde ýazýarlar:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a).$$

2-nji mysal. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$ integraly hasaplalyň.

Girizilen belgilemelerden peýdalanyp alarys:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

1-nji bellik. Integrala berlen kesgitleme $\frac{1}{x^3}$ funksiýanyň – 1-den 2-ä çenli integraly barada gürrüň açmaga mümkinçilik bermeýär, çünki [-1; 2] kesimde bu funksiýa üznüksiz däldir. Şonuň ýaly-da bu kesimde $\frac{1}{x^3}$ funksiýa üçin $-\frac{1}{2x^2}$ funksiýanyň asyl funksiýa bolmaýandygyny belläliň, çünki bu kesime degişli 0 san funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna girmeýär.

3-nji mysal. $xy = 4$ we $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň.

Gözlenýän meýdany $S = \int_a^b f(x)dx$ formula boýunça hasaplalyň. $xy = 4$ giperbolanyň deňlemesinden $y = \frac{4}{x}$ tapalyň. 31-nji suratdan görnüşi ýaly $a = 2$ we $b = 4$. Onda alarys:

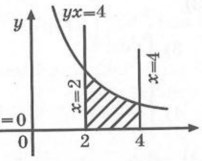
$$S = \int_2^4 \frac{4}{x}dx = 4\ln x\Big|_2^4 = 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln\frac{4}{2} = 4\ln 2.$$

4-nji mysal. $y = 3\text{-}1{,}5x$, $y = 1{,}5x^3$ we $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň (32- nji sur.).

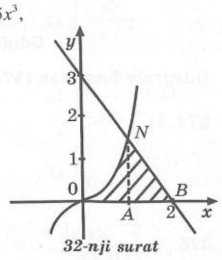
Gözlenýän meýdany ONA egriçyzykly trapesiýanyň we ANB üçburçlugyň meýdanlarynyň jemi hökmünde almak mümkin. S_1 egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny kesgitlemek üçin N nokadyň abssissasyny (integrir-

lemegiň ýokarky predelini) bilmek zerurdyr. Berlen çyzyklaryň deňlemelerini bilelikde çözüp, N nokadyň abssissasyny tapalyň:

$$\begin{cases} y = 3 - 1{,}5x, \\ y = 1{,}5x^3, \end{cases}$$



31-nji surat



32-nji surat

$3 - 1{,}5x = 1{,}5x^3$, $x^3 + x - 2 = 0$. Alnan deňlemäniň ýeke-täk $x = 1$ hakyky köki bardyr.

Şeýlelikde,

$$S_1 = \int_0^1 1{,}5x^3dx = 1{,}5 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

S_2 üçburçlugyň meýdanyny hem kesgitli integralyň kömegi bilen tapmak bolýandyr, ýöne ony $S_2 = \frac{AB \cdot AN}{2}$ formula boýunça hasaplamak aňsatdyr.

$AB = 1$, $AN = \frac{3}{2}$, $S_2 = \frac{3}{4}$. Diýmek, ştrihlenen figuranyň meýdany

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

bolýar.

2-nji bellik. $a \geq b$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, hususy halda $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Gönükmeler

Integraly hasaplaň (374-383).

374. 1) $\int_{-1}^{2} x^4dx$; 3) $\int_1^3 x^3dx$;

2) $\int_0^{\pi} \sin xdx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

375. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 3) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

2) $\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$.

376. 1) $\int_{-2}^{2} (x-3)^2dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

2) $\int_{-1}^{1} (x+3)^3dx$; 5) $\int_0^2 (x-2)(x^2+2x+4)dx$;

3) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 3xdx$; 6) $\int_{-1}^{2} (x-1)^2dx$;

7) $\int_{-1}^{1} (x-2)^3dx$.

377. 1) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; 3) $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$;

2) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 4) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

378. 1) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx$;

2) $\int_0^2 (1+2x)^3dx$; 4) $\int_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$;

5) $\int_0^2 \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx$.

379. 1) $\int_1^4 \frac{3\sqrt{x^3}+3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int_1^4 \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}$;

2) $\int_4^9 \frac{3x^3-\sqrt{x^5}}{x^2}dx$; 4) $\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

380. 1) $\int_{0{,}5\pi}^{1{,}5\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$; 3) $\frac{2}{8}\int_1^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$;

2) $\int_0^{1{,}5\pi} \cos^2\frac{x}{2}dx$; 4) $\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{28\sqrt{x}}dx$;

5) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$.

381. 1) $\int_{0}^{1} 0{,}5^x dx$; 3) $\int_{-2}^{1} 2^x dx$;

2) $\int_{0}^{1} e^{2x} dx$; 4) $\int_{-\frac{2}{1}}^{2} 3^x dx$.

382. 1) $\int_{1}^{7} \frac{2dx}{x}$; 3) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$; 4) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{3x+1}$.

383. 1) $\int_{1}^{4} x^{\frac{5}{2}} dx$; 3) $\int_{e}^{e^2} 2x^{-1} dx$;

2) $\int_{1}^{8} \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\int_{0}^{1} 5x^{\frac{3}{4}} dx$.

384. Deňligiň dogrudygyny subut ediň:

1) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{0}^{1} dx$; 3) $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx = \int_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$;

2) $\int_{0}^{\pi/3} \sin x dx = \int_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int_{0}^{1} (2x+1) dx = \int_{0}^{2} (x^3-1) dx$.

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (385-401).

385. 1) $y=x^4,\ y=0,\ x=-1,\ x=1$;

2) $y=x^4,\ y=1$;

3) $y=x^2-4x+5,\ y=0,\ x=0,\ x=4$;

4) $y=x^2-4x+5,\ y=5$.

386. 1) $y=1-x^3,\ y=0,\ x=0$;

2) $y=2-x^3,\ y=1,\ x=-1,\ x=1$;

3) $y=-x^2-4x,\ y=0,\ x=-3,\ x=-1$;

4) $y=-x^2-4x,\ y=1,\ y=-3,\ x=-1$.

387. 1) $y=x^3,\ y=8,\ x=1$;

2) $y=2\cos x,\ y=1,\ x=-\frac{\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{3}$;

3) $y=x^2-2x+4,\ y=3;\ x=-1$;

4) $y=\sin x,\ y=\frac{1}{2},\ x=\frac{\pi}{3},\ x=\frac{5\pi}{6}$.

388. 1) $y=4x-x^2,\ y=4-x$;

2) $y=\frac{16}{x^2},\ y=2x,\ x=4$;

3) $y=x^2,\ y=2x$;

4) $y=6-2x,\ y=6+x-x^2$.

389. 1) $y=x^2-4x+4,\ y=4-x^2$;

2) $y=x^2-2x+2,\ y=2+6x-x^2$;

3) $y=x^2,\ y=2x-x^2$;

4) $y=x^2,\ y=x^3$.

390. 1) $y=4x-x^2,\ y=0$;

2) $y=x-x^2,\ y=0$;

3) $y=\frac{1}{(x+1)^2},\ y=0,\ x=+1,\ x=2$;

4) $y=\frac{1}{(x+1)^2},\ y=0,\ x=-1,\ x=0$.

391. 1) $y=x^2-4x,\ y=0,\ x=-\frac{3}{2},\ x=-\frac{1}{2}$;

2) $y=3x-x^2,\ y=0,\ x=0,\ x=1$;

3) $y=x^2,\ y=x$;

4) $y=(x+1)^2,\ y=0,\ x=0$.

392. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}},\ x=-\frac{3}{4},\ x=0,\ y=1$;

2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ y=2,\ x=0$;

3) $y=x,\ y=\frac{1}{x^2},\ x=2$;

4) $x=\frac{1}{2},\ y=2x,\ y=\frac{2}{x^2}$.

393. 1) $y=x^2+4x+5,\ y=11-x^2$;

2) $y=e^x,\ y+x=1,\ x=1$;

3) $y=1-4x-x^2,\ y+x=1$;

4) $y=3+2x-x^2,\ y-x=1$.

394. 1) $y=\frac{4}{x},\ x+y=5$;

2) $y=x^2-2x+1,\ x+y=3$;

3) $y=\frac{4}{x+1},\ x=0,\ y=1$;

4) $y=\frac{4}{\sqrt{x}},\ y=1,\ x=1$.

395. 1) $y=4{,}5-0{,}5x^2,\ y=-x^2+x+6$;

2) $y=0{,}8+0{,}2x^2,\ y=x^2+4x+4$;

3) $y=\sin\frac{x}{2},\ y=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{3\pi}{2}$;

4) $y=\cos 2x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{4}$.

396. 1) $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=1$;

2) $y=3^x,\ y=9^x,\ x=1$;

3) $y=2^x,\ y=0,\ x=-1,\ x=1$;

4) $y=e^x,\ y=e^{2x},\ x=1$.

397. 1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ y=3,\ x=1$;

2) $y=e^x,\ y=e^{-x},\ y=e$;

3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y=1,\ x=-2$;

4) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y=4^x,\ x=4$.

398. 1) $y=\frac{4}{x}+2,\ y=0,\ x=2,\ x=6$;

2) $y=-\frac{2}{x},\ y=0,\ x=-4,\ x=-1$;

3) $y=\frac{1}{2x},\ y=0,\ x=\frac{1}{4},\ x=2$;

4) $y=3-\frac{1}{x},\ y=0,\ x=-6,\ x=-3$.

399. 1) $y=x^{\sqrt{2}},\ y=0,\ x=1;$

2) $y=x^{\sqrt{3}},\ y=\frac{1}{x},\ x=\frac{1}{2};$

3) $y=x^{0,8},\ y=0,\ x=1,\ x=32;$

4) $y=\frac{1}{x},\ y=0,\ x=3,\ x=5.$

400. 1) $y=1-|x-1|,\ y=1-\frac{x}{2};$

2) $y=2-|x|,\ y=x^2;$

3) $y=x^2+2|x|-8,\ y=4-x^2;$

4) $y=x^2-2|x|-3,\ y=9-x^2.$

401. 1) $y=|x^2-3x|+x,\ y=x+4;$

2) $y=|x^2+4x|+2x,\ y=10-x;$

3) $|x^2-4|+y=5,\ y=-7;$

4) $|4-x^2|-y=5,\ y=7;$

402. $y = 8x-2x^2$ funksiýanyň grafigi, bu parabola onuň depesinde galtaşýan göni çyzyk we $x=0$ göni cyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

403. $f\ (x)=8-0{,}5x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x=-2$ abssissaly nokatda galtaşýan göni çyzyk we $x=1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

404. Ox oky, $y = 2x-x^2$ parabola we oňa $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

405. $y = 2x^3$ kubik parabola we oňa (1;2) nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

406. $y=x^2$ parabola we oňa $(0;-4)$ nokadyň üstünden geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

407. $y=\cos x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{3}$ çyzyklar we $y=\cos x$ funksiýanyň grafigine $\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

408. $y = 4{,}5-0{,}5x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x_0=1$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x=-2$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

409. $y = 8-0{,}5\ x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x_0=-2$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x=1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

410. $y = 0{,}5\ x^2-2x + 6$ funksiýanyň grafigi, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x=-1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

411. $y = -0{,}5\ x^2-2x + 1$ funksiýanyň grafigi, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x=-1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

412. $y = x^2-2x+2$ parabola, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we ordinata oky bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

413. $y = -x^2 + 4x-3$ parabola hem oňa $M_1(0;-3)$ we $M_2(3;0)$ nokatlarda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

414. $y=x^2+1$ parabola we oňa ordinatasy 5-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

415. $y=-x^2-1$ parabola we oňa ordinatasy -5-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

416. $y=\sqrt{x},\ y=0$ çyzyklar we $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafigine ordinatasy 2-ä deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

417. $y = x^2-4$ parabola hem $y=0$ we $x=3$ oňa galtaşýan $y = 2x-5$ göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

418. Bitin abssissaly nokatlarda kesişýän:
1) $y=\cos\pi x + 1$ we $y = 2x^2-2$;
2) $y = \sin 0{,}5\ \pi x$ we $y=-x^2 + 3x-1$
funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

419. Deňligi subut ediň:

1) $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx;$

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$ (bu ýerde k - hemişelik san).

§23. Integralyň ulanylyşy

1. Jisimleriň göwrümlerini hasaplamak. Goý, V göwrümli jisim berlen bolsun, şunlukda şeýle bir göni çyzyk tapylyp (33-nji sur.), bu göni çyzyga perpendikulýar bolan haýsy tekizligi alsak-da, jisimiň şu tekizlik bilen kesilen S kesiginiň meýdany belli bolsun. Ox oka perpendikulýar bolan tekizlik ony käbir x nokatda kesýär. Diýmek, her bir x sana ($[a;\ b]$ kesimde alnan, 33-nji sur. ser.) ýeke-täk $S(x)$ san degişli edilipdir. $S(x)$-jisimiň bu tekizlik bilen kesilende alnan kesigiň meýdanydyr. Şeýlelikde $[a;\ b]$ kesimde $S(x)$ funksiýa berlen. Eger S funksiýa $[a;\ b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

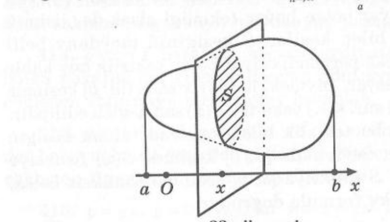
Şu formulanyň doly subudy matematiki analiz dersinde berilýär, bu ýerde bolsa şoňa getirýän käbir oýlanmalaryň üstünde durup geçeliň. $[a;\ b]$ kesimi $a = x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ nokatlar arkaly deň uzynlykdaky n kesime böleliň. Goý,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=x_k-x_{k-1},\ k=1,2,\ldots,n$$

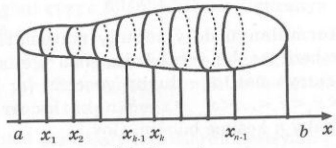
bolsun. Her bir x_k nokat arkaly Ox oka perpendikulýar bolan tekizlik geçireliň. Şu tekizlikler berlen jisimi gatlaklara bölýärler (34-nji we 35-nji sur.). α_{k-1} we α_k tekizlikleriň arasyndaky gatlagyň göwrümi, n ýeterlikçe uly bolanda, takmynan, $S(x_{k-1})$ kesigiň meýdanynyň Δx «gatlagyň galyňlygyna» köpeltmek hasylyna deňdir. Şonuň üçin

$$V\approx S(x_0)\Delta x+S(x_1)\Delta x+\ldots+S(x_{n-1})\Delta x=V_n.$$

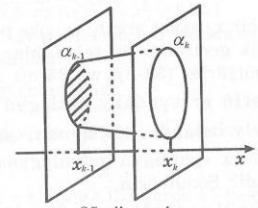
Şu takmyny deňligiň takyklygy jisimiň kesilen gatlaklary ýuka boldugyça, ýagny n uly boldugyça ýokarydyr. Şonuň üçin, $n\to\infty$ bolanda $V_n\to V$ bolar. Integralyň kesgitlemesine görä $\lim\limits_{n\to\infty}V_n=\int_a^b S(x)dx.$.



33-nji surat



34-nji surat



35-nji surat

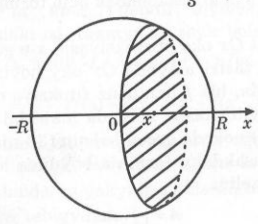
1-nji mysal. R radiusly şaryň göwrüminiň $\frac{4}{3}\pi R^2$ deň bolýandygyny subut edeliň.

Ox oky şaryň O merkeziniň üstünden geçireliň (36--njy sur.). Ox oka perpendikulýar bolan we onuň $[-R;\ R]$ kesimini x nokatda kesýän her bir tekizlik şaryň kesiginde $\sqrt{R^2-x^2}$ radiusly tegelegi berýär. Bu tegelegiň meýdany

$$S(x)=\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2=\pi\left(R^2-x^2\right)$$

bolar. Diýmek, (1) formula boýunça

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi(R^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$



36-njy surat

2-nji mysal. Goý, egriçyzykly trapesiýa Ox okuň $[a;b]$ kesimine daýanýan bolsun we ýokardan $[a;b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl f funksiýanyň grafigi bilen çäklenen bolsun. Bu egriçyzykly trapesiýa Ox okuň daşynda aýlananda käbir jisim alynýar (37-nji sur.), onuň göwrümi

$$V=\int_a^b \pi\, f^2(x)dx \tag{2}$$

formula boýunça tapylýar.

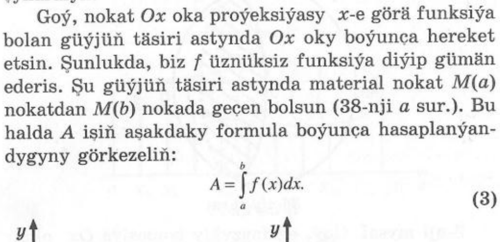
12. Sargyt № 2629

Hakykatdan-da, Ox oka perpendikulýar bolan we bu okuň $[a;b]$ kesimini x nokatda kesýän her bir tekizlik jisim bilen kesişende $f(x)$ radiusly we $S(x)=\pi f^2(x)$ meýdanly tegelek alynýar (37-nji *b* sur.). Bu ýerden (1) formuladan (2) formula alynýar.

2. Üýtgeýän güýjüň işi. P güýjüň täsiri astynda göni çyzyk boýunça hereket edýän material nokada garalyň. Eger täsir ediji güýç hemişelik we göni çyzygyň ugry boýunça ugrukdyrylan bolsa, orun üýtgeme S-e deň diýsek, onda fizikadan belli bolşy ýaly şu güýjüň A işi PS köpeltmek hasylyna deňdir. Indi üýtgeýän güýjüň ýerine ýetirýän işini hasaplamak üçin formulany getirip çykaralyň.

Goý, nokat Ox oka proýeksiýasy x-e görä funksiýa bolan güýjüň täsiri astynda Ox oky boýunça hereket etsin. Şunlukda, biz f üznüksiz funksiýa diýip gümän ederis. Şu güýjüň täsiri astynda material nokat $M(a)$ nokatdan $M(b)$ nokada geçen bolsun (38-nji *a* sur.). Bu halda A işiň aşakdaky formula boýunça hasaplanýandygyny görkezeliň:

$$A=\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$



37-nji surat

$[a;\ b]$ kesimi deň $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ uzynlykly n kesime böleliň. Netijede $[a;x_1]$, $[x_1;\ x_2]$ ..., $[x_{n-1};\ b]$ kesimleri alarys (38-nji *b* sur.). Güýjüň ähli $[a;\ b]$ kesimdäki işi bu güýjüň alnan kesimlerdäki işleriniň jemine deňdir. f funksiýanyň x-a görä üznüksiz funksiýa bolany sebäpli, ýeterlik kiçi bolan $[a;\ x_1]$ kesimde bu güýjüň işi, takmynan, $f(a)(x_1-a)$ deňdir (biz f funksiýanyň kesimde üýtgeýändigini göz öňünde tutmaýarys). Şuňa meňzeşlikde, güýjüň işi ikinji $[x_1;x_2]$ kesimde, takmynan, $f(x_1)(x_2-x_1)$ deň we ş.m., güýjüň n-nji kesimdäki işi, takmynan, $f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$ deňdir. Diýmek, güýjüň tutuş $[a;\ b]$ kesimdäki işi, takmynan, şeýle bolar:

$$A\approx A_n=f(a)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x=$$

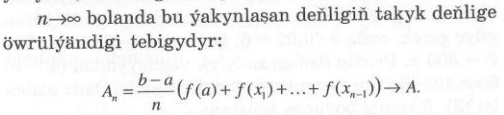
$$=\frac{b-a}{n}(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})).$$

$[a;\ b]$ kesimiň bölünen kesimleri gysga bolduklaryça, ýakynlaşan deňligiň takyklygy şonça-da ýokarydyr. $n\to\infty$ bolanda bu ýakynlaşan deňligiň takyk deňlige öwrülýändigi tebigydyr:

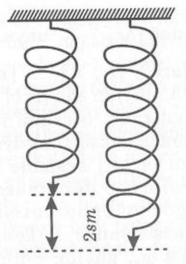
$$A_n=\frac{b-a}{n}\left(f(a)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)\to A.$$

Integralyň kesgitlemesine görä

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\int_a^b f(x)dx.$$



38-nji surat



39-njy surat

3-nji mysal. Goý, pružini x uzynlyga süýndürmäge gerek bolan güýç x süýndürmä proporsional bolsun. Eger pružini 2 *sm* süýndürmäge 6 nýuton güýç gerek bolsa, pružin 6 *sm* süýndürilende edilen işi tapalyň.

Gukuň kanuny boýunça pružina täsir edýän güýç $F=kx$ formula bilen hasaplanylýar, bu ýerde k proporsionallygyň hemişelik koeffisiýenti (39-njy sur.). Şerte görä pružini 2 *sm* = 0,02 *m* süýndürmäge 6 nýuton güýç gerek, onda $k \cdot 0,02 = 6$. Diýmek, $k = 300$ we güýç $F = 300\,x$. Pružin deňagramlylyk ýagdaýyndan ($a = 0$) 6 *sm* ($b = 0,06$ *m*) uzynlyga süýndürilipdir. Onda edilen işi (3) formula boýunça taparys:

$$A = \int_0^{0,006} 300x\,dx = 150x^2\Big|_0^{0,006} = 0,54 \text{ (j)}.$$

Gönükmeler

420. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen, egriçyzykly trapesiýanyň abssissa okunyň daşynda aýlanmagyndan alnan jisimiň göwrümini tapyň:

1) $y = x^2 + 1,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;$

2) $y = \sqrt{x},\ x = 0,\ x = 4,\ y = 0;$

3) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ y = 0;$

4) $y = 1 - x^2,\ y = 0.$

421. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen, figuranyň abssissa okunyň daşynda aýlanmagyndan alnan jisimiň göwrümini tapyň.

1) $y = x^2,\ y = x;$

2) $y = 2x;\ y = x + 3,\ x = 0,\ x = 1;$

3) $y = x + 2,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 2;$

4) $y = \sqrt{x}, y = x.$

422. R radiusly we H beýiklikli şar segmentiniň göwrümini tapyň.

423. H beýiklikli we esaslarynyň radiuslary R we r bolan kesilen konusyň göwrümi üçin formulany getirip çykaryň.

424. Beýikligi H, esaslarynyň meýdanlary S we s bolan kesilen piramidanyň göwrüminiň $\frac{1}{3}H(S + s + \sqrt{Ss})$ deňdigini subut ediň.

425. Beýikligi H we esasynyň radiusy R bolan konusyň göwrüminiň $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ bolýandygyny subut ediň.

426. 5 *sm* süýndürilen pružini maýysgaklyk güýji 3 *N*. Pružini 5 *sm* süýndürmek üçin näçe iş edilmeli?

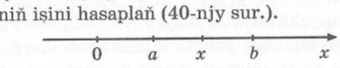
427. Eger 2 *N* güýç pružini 1 *sm* gysýan bolsa, onda pružini 4 *sm* gysmak üçin näçe güýç sarp etmeli?

428. 4*N* güýç pružini 8 *sm* süýndürýär. Pružini 8 *sm* süýndürmek üçin nähili iş etmeli?

429. Eger pružini 1 *sm* süýndürmäge 1 *kg* güýç gerek bolsa, pružin 5 *sm* süýndürilende edilen işi tapmaly.

430. q ululykdaky elektrik zarýadyň täsiri astynda elektron göni çyzyk boýunça a uzaklykdan b uzaklyga ornuny üýtgedýär. Zarýadlaryň özära täsir güýjüniň işini tapyň. (Iki hala garaň: 1) $a < b$, $q < 0$, 2) $b < a$, $q < 0$. Kulonyň kanunyny aňladýan formuladaky proporsionallyk koeffisiýenti γ diýip hasap ediň).

431. Ox okuň üstünde O nokatda m massaly material nokat berkidilen. Ol nokat edil şol Ox okuň üstünde ýerleşen, massasy 1 bolan başga bir nokady Nýutonyň kanuny boýunça dartýar. Birlik massaly birlik nokat a ýagdaýdan b ýagdaýa orun üýtgedende dartylma güýjüniň işini hasaplaň (40-njy sur.).



40-njy surat

432. Kanalyň kesigi deňýanly trapesiýa görnüşinde, onuň beýikligi h, esaslary a we b. Kanaly dolduryan suwuň bende edýän basyş güýjüni tapyň ($a>b$, a – trapesiýanyň ýokarky esasy).

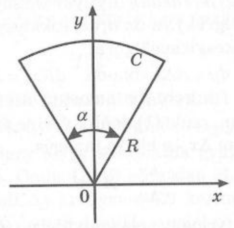
433. Silindrik bagyň esasynyň tekizligindäki deşikden girýän suw bagy bütinleý dolduryar. Bagyň beýikligi h, esasynyň radiusy r bolsa, edilen işi kesgitläň.

434. Şar suwa çümendäki itýän güýje garşy işi tapyň.

435. Uzynlygy l=20 *sm* bolan bir jynsly steržen ujundan geçýän wertikal okuň daşynda gorizontal tekizlikde aýlanýar. Aýlanmagyň burç tizligi $w=10\pi\ c^{-1}$. Sterženiň kese kesiginiň meýdany $S = 4\ sm^2$, sterženiň ýasalan materialynyň dykyzlygy $\rho = 7,8 g/sm^3$. Sterženiň kinetik energiýasyny tapyň.

436. Birjynsly göni togalak konusyň massasynyň merkezini tapyň.

437. Birjynsly sektoryň massasynyň merkezini tapyň (41-nji sur.).



41-nji surat

438. Birjynsly töweregiň dörtden biriniň massasynyň merkezini tapyň.

§24. Funksiýanyň differensialy barada düşünje

1. Funksiýanyň differensialy. Goý, $[a;b]$ aralykda haýsy hem bolsa bir $y=f(x)$ funksiýa berlen bolsun. x argumente onuň bahasyny şol aralykdan çykarmaýan haýsy hem bolsa bir Δx artdyrma bereliň. Onda y funksiýa hem Δy artdyrmany alar.

Eger funksiýanyň Δy artdyrmasyny argumentiň Δx artdyrmasynyň üsti bilen

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (1)$$

görnüşde ýazyp bolsa (A bu ýerde x-a bagly bolup, Δx-a bagly bolmadyk ululykdyr, α bolsa Δx nola ymtylanda nola ymtylýan ululykdyr), onda $y=f(x)$ funksiýa berlen x nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. Differensirlenýän funksiýanyň Δy artdyrmasynyň Δx-e çyzykly bagly $A\Delta x$ bölegine $y=f(x)$ funksiýanyň *differensialy* diýilýär we şeýle belgilenýär: dy(okalyşy:de igrek) ýa-da $df(x)$ (okalyşy: de ef iks).

Şunlukda kesgitlemä görä:

$$dy = A\Delta x \quad \text{ýa-da} \quad df(x) = A\Delta x. \qquad (2)$$

Goý, $f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän funksiýa bolsun, onda (1) deňlik ýerine ýetýändir. Onuň iki bölegini hem Δx - e bölüp taparys.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Indi Δx artdyrmany nola ymtyldyryp alarys: $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$,

çünki α ululygyň kesgitlemesine görä $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\alpha = 0$.

Eger Δx nola ymtylanda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gatnaşyk hem belli bir predele ymtylsa, onda şol predel berlen $y=f(x)$ funksiýanyň önümidir diýlip ozal kesgitlenipdi. Şonuň üçin hem

$$A = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \quad \text{ýa-da} \quad A = f'(x).$$

Şoňa görä-de x nokatda differensirlenýän $y=f(x)$ funksiýa üçin ýazyp bileris:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (3)$$

Eger $f(x)=x$ bolsa, onda (3) formuladan peýdalanyp taparys: $dy = dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, ýagny argumentiň differensialy onuň Δx artdyrmasyna deňdir:

$$dx = \Delta x.$$

Şunlukda, differensirlenýän $y=f(x)$ funksiýanyň differensialy şu aşakdaky formula bilen aňladylýandyr:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (4)$$

Bu formuladan peýdalanyp, $y=f(x)$ funksiýanyň önümini şu aşakdaky görnüşde hem ýazyp bolar:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

2. Differensialyň geometrik manysy

$y=f(x)$ funksiýanyň grafiginde $A(x_0, y_0)$ we $B(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ nokatlary alyp, A nokatda grafige galtaşýan çyzyk geçireliň. Onda 42-nji suratdan görnüşi ýaly, Δx artdyrma degişli Δy artdyrma CB kesimiň ululygyna, şol bir artdyrma degişli dy differensial bolsa CE kesimiň ululygyna deňdir, çünki ACE üçburçlukdan

$$tg\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{\Delta x}$$

deňlik alnar, ondan bolsa önümiň geometrik manysynyň we (3) formulanyň esasynda şeýle deňlik alynýar:

$$CE = tg\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x = dy.$$

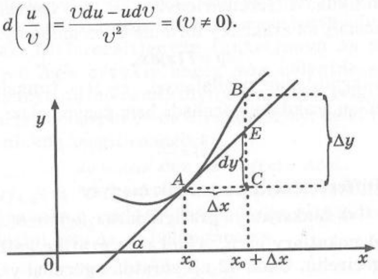
Şeýlelikde, 42-nji suratdan Δy we dy ululyklaryň, umuman aýdanyňda deň däldigi aýdyň görünýär.

Diýmek, $f(x)$ funksiýanyň $f'(x_0)\Delta x$ differensialy şol egri çyzyga x_0 nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzygyň ordinatasynyň abssissa x_0 nokatdan $x_0+\Delta x$ nokada geçendäki artdyrmasyna deňdir. Bu bolsa differensialyň geometrik manysydyr.

3. Differensiallary tapmagyň düzgünleri

1. $d(u+v) = du + dv$.
2. $d(u+v) = du + dv$.

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} = (v \neq 0).$



42-nji surat

1-nji mysal. $y = 5x - 10$ funksiýanyň differensialyny tapalyň.

(4) formulany peýdalanyp taparys:

$$dy = (5x-10)'dx = 5dx.$$

Gönükmeler

Funksiýalaryň differensialyny tapmaly (439-448).

439. 1) $f(x) = 10$; 3) $f(x) = x^2 + 5x - 10$;

2) $f(x) = 10x + 5$; 4) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$.

440. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 100$;

2) $f(x) = (x^2+6)(3x-1)$;

3) $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$;

4) $f(x) = (x+1)(x^2-2x+4)$.

441. 1) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$; 6) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^{-2}}$;

2) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}}$; 7) $f(x) = ax^{-5}$;

3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$; 8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

4) $f(x) = -3x^{\frac{1}{3}}$; 9) $f(x) = \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$.

5) $f(x) = \sqrt{x}$;

442. 1) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$; 5) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$;

3) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$; 6) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x-1}$.

443. 1) $f(x) = x + \sin x$; 4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = x\cos x$; 5) $f(x) = 2\sin^3 x$

3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 + \cos x$; 6) $f(x) = -\cos^2 x$.

444. 1) $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$; 3) $f(x) = \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x}$;

2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; 4) $f(x) = x\cos\frac{x}{2}$.

445. 1) $f(x) = \frac{1}{3}tg^3 x$; 3) $f(x) = x + \cos x \sin x$;

2) $f(x) = (x^2+1)\cos 5x$; 4) $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$.

446. 1) $f(x)=e^{-x}$; 4) $f(x)=e^{2x}$;

2) $f(x)=3^{x}$; 5) $f(x)=xe^{x}$;

3) $f(x)=x^2e^{-x}$; 4) $f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$;

447. 1) $f(x)=x^n\ln x$; 5) $f(x)=\ln^4 x+3\ln^2 x$;

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x^n}$; 6) $f(x)=\ln ax$;

3) $f(x)=\ln ex$; 7) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln x$.

4) $f(x)=\sin^2 x\cdot\ln x$;

§25. Differensial deňleme barada düşünje

x argumenti, y näbelli funksiýany we onuň önümlerini baglanyşdyrýan deňlemä ***differensial deňleme*** diýilýär:

$$g(x,y,y',y'',...)=0 \qquad (1)$$

Differensial deňlemäniň çözüwi diýip şu differensial deňlemede goýlanda ony toždestwo öwürýän funksiýa aýdylýar.

Berlen $f(x)$ finksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasy

$$F'(x)=f(x) \qquad (2)$$

ýönekeý differensial deňlemäniň çözüwidir. (2) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwiniň bolşy ýaly, (1) deňlemäniň hem tükeniksiz köp çözüwi bardyr, ondan anyk hususy çözüwi saýlap almak üçin goşmaça şertler berilmelidir.

Köp fiziki kanunlar differensial deňleme görnüşinde aňladylýar. Iki mysala garalyň.

1. Mehaniki hereketiň deňlemesi

m massaly nokat $F(t)$ (t-wagt) güýjüň täsir etmeginde $x=x(t)$ kanun bilen Ox oky boýunça hereket etsin, material nokadyň tizlenmesi $a(t)$ bolsun. Nýutonyň ikinji kanuny boýunça $F=ma$. Tizlenmäniň hereketiň kanunynyň ikinji tertipli önümine deňligini göz öňünde tutup alarys:

$$mx''(t)=F(t) \qquad (3)$$

(3) differensial deňlemä **mehaniki hereketiň deňlemesi** diýilýär.

Maýysgak pružiniň hereketi Gukuň kanunyna laýyk gelýär, ýagny $F(t)$ güýç nokadyň $x(t)$ süýşmesine proporsionaldyr:

$$F(t)=-kx(t),(k>0) \qquad (4)$$

«–» alamat güýjüň we süýşmäniň ugurlarynyň garşylyklydygyny aňlatmak üçin ýazylýar.

Şeýlelikde, $mx''(t)=-kx(t)$

ýa-da $k/m=\omega^2$ belläp,

$$x''(t)+\omega^2x(t)=0 \qquad (4)$$

alarys. (4) deňlemä ***garmonik yrgyldynyň deňlemesi*** diýilýär.

2. Radioisjeň dargaýyş

Radioisjeň maddanyň t pursatdaky massasy $m(t)$ diýeliň. Köp gözegçilikler massanyň kemeliş tizliginiň maddanyň şol pursatdaky massasyna proporsionaldygyny görkezýär, ýagny

$$m'(t)=-km(t),\ k>0 \qquad (5)$$

deňlemä getirýär, «–» alamat massanyň kemelýändigini görkezmek üçin ýazylýar.

Differensial deňlemäni çözmeklige ony integrirlemek diýilýär. Biz integrirlemek usullaryny öwrenmek bilen meşgullanmakçy däl. Diňe durmuş meselelerinde köp duş gelýän (4) deňlemäniň umumy çözüwini

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t \qquad (6)$$

we (5) deňlemäniň umumy çözüwini

$$m(t)=Ce^{-kt} \qquad (7)$$

(A,B we C – käbir näbelli hemişelik sanlar) bermek bilen çäklenmekçidiris.

Mysal. $y''+y=0$ garmonik yrgyldynyň differensial deňlemesiniň $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ şerti kanagatlandyrýan $y(t)$ çözüwini tapalyň.

Bu ýerde $\omega=1$. Çözüwi $y=A\cos t+B\sin t$ görnüşde gözläliň. Şert boýunça $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; diýmek, $1=A\cos\frac{\pi}{2}+$ $+B\sin\frac{\pi}{2}$, ýagny $B=1$. $y'=(B\sin t)+A\cos t)'=B\cos t-$ $-A\sin t$. Şert boýunça $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$; diýmek, $2=B\cos\frac{\pi}{2}-$ $-A\sin\frac{\pi}{2}=-A$, ýagny $A=-2$.

Şunlukda, biz koeffisiýentleriň bahalaryny tapdyk: $B=1$, $A=-2$. Olary deňlemäniň umumy çözüwinde goýup, gözlenýän çözüwi alarys

$$y=\sin t-2\cos t.$$

Gönükmeler

448. $y=5e^{3x}$ funksiýanyň $y'=3y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

449. $y=7e^{-2x}$ funksiýanyň $y'=-2y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

450. $y=3e^{-7x}$ funksiýanyň $y'=-7y$ deňlemäni kanagatlandyrmagyny subut ediň.

451. $y=x^3$ funksiýanyň $xy'=3y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň. $y=cx^3$ görnüşdäki islendik funksiýanyň hem bu deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

452. $y=\sin 4x$ funksiýanyň $y''+16y=0$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

453. $y=3x-8+\frac{x^3}{6}$ funksiýanyň $y''=x$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň. $y=C_1x+C_2+\frac{x^3}{6}$ görnüşdäki islendik funksiýanyň hem bu deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

454. $y(t)$ funksiýanyň berlen differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny barlap görüň:

1) $y(t)=3\cos(2t+\pi)$, $y''=-4y$;

2) $y(t)=4\sin\left(\frac{1}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)$, $y''=-\frac{1}{4}y$;

3) $y(t)=2\cos 4t$, $y''+16y=0$;

4) $y(t)=\frac{1}{3}\sin(0{,}1t+1)$, $y''+0{,}01y=0$.

455. Differensial deňlemeleri çözüň:

1) $y' = 0$; 4) $y' = x^4$;

2) $y'' = 0$; 5) $y'' = x^2$;

3) $y'' + 9y = 0$; 6) $y'' + 25y = 0$.

456. Differensial deňlemeleriň haýsy bolsa-da noldan tapawutly çözüwini tapyň:

1) $y'' = -25y$; 3) $4y'' + 16y = 0$;

2) $\frac{1}{9}y'' + 4y = 0$; 4) $4y'' = -\frac{1}{4}$.

457. $y'' + 9y = 0$ differensial deňlemäniň aşakdaky başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapyň:

1) $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$;

2) $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$;

3) $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.

458. Garmonik yrgyldylaryň differensial deňlemesini ýazyň:

1) $x = 2cos(2t - 1)$; 3) $x = 4sin(3t - \frac{\pi}{4})$;

2) $x = 6,4cos(0,1t + \frac{\pi}{7})$; 4) $x = 0,71sin(0,3t + 0,7)$.

459. $x_1(t) = A_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ we $x_2(t) = A_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ iki garmoniki yrgyldynyň jeminiň ýygylyk gatnaşygy r rasional san bolanda, periodik funksiýa bolýandygyny subut ediň.

460. t minutdan soň C radiniň m milligramynyň radioaktiw dargamagyndan n milligram galdy. C radiniň ýarym dargaýyş periodyny tapyň.

461. Radioaktiw dargamasyndan ozal 1 g A radi bardy. Eger onuň ýarym dargaýyş periody 3 min bolsa, näçe minutdan soň onuň 0,125 g galar?

462. Radioaktiw maddanyň ýarym dargaýyş periody 1 sag deň. Onuň mukdary näçe sagatdan soň 10 esse kemeler? Eger radiniň ýarym dargaýyş periody 1550 ýyl bolsa, onda onuň 1000 ýyldan soň näçe ülşüniň galýandygyny hasaplaň.

463. Jisimiň biriniň temperaturasy 200^0, beýlekisiniňki bolsa 100^0. Bu jisimler 0^0 temperaturaly howada 10 minut sowadylandan soň, birinji jisim 100^0 temperatura çenli, ikinji jisim bolsa 80^0 çenli sowady. Näçe minutdan soň jisimleriň temperaturasy deňleşer? ($T(t)$ jisimiň temperaturasy $T'(t) = -k(T - T_1)$ deňlemäni kanagatlandyrýar, bu ýerde T_1 – töwerekdäki sredanyň temperaturasy).

464. Iki jisimiň birmeňzeş 100^0 temperaturasy bar. Olar açyk howada (onuň temperaturasy 0^0). 10 minutdan soň jisimiň biriniň temperaturasy 80^0, ikinjisiniňki bolsa 64^0 boldy. Sowap başlanlaryndan näçe minutdan soň olaryň temperaturalarynyň tapawudy 25^0 bolar?

465. Motorly gaýyk kölde 30 km/sag tizlik bilen hereket edýär. Motoryny işledip ugrandan 3 min soň gaýygyň tizligi nähili bolar? (Gaýygyň $\upsilon(t)$ tizliginiň $\upsilon'(t) = -k\upsilon(t)$ differensial deňlemäni kanagatlandyrýandygyndan peýdalanyň, bu ýerde $K = \frac{5}{3}$, υ -tizlik minutda metr hasabynda).

TARYHY MAGLUMATLAR

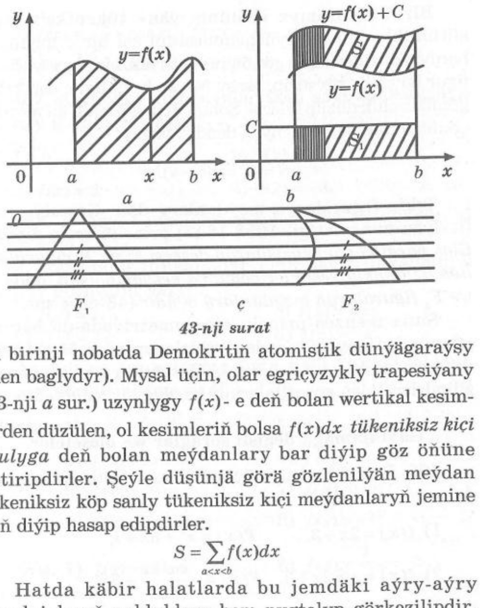
Integral $\int$ belgisi Leýbnis tarapyndan (1675 ý.) girizildi. Bu belgi S latyn harpynyň (jem sözüniň birinji harpy) üýtgedilen görnüşidir. Integral sözüniň özüni Ý.Bernulli (1690 ý.) oýlap tapypdyr. Ol *ozalky ýagdaýyna eltmek, dikeltmek* ýaly terjime edilýän latyn sözi bolan integrodan gelip çykan bolsa gerek (hakykatdan-da integrirlemek operasiýasy, differensirlemek arkaly alnan integral asyl funksiýasyny dikeldýär).

Integral hasaplama degişli beýleki adalgalar has giç döredi. Häzirki wagtda ulanylýan *asyl funksiýa* ady Lagranžyň has irki girizen (1797 ý.) «primitiw funksiýasyny» çalyşdy. Latynça *primitivus* sözi «başlangyç» hökmünde terjime edilýär: $F(x) = \int f(x)dx$ – differensirlemek bilen $F(x)$-den alynýan $f(x)$ üçin başlangyç funksiýa.

$f(x)$ funksiýa üçin ähli asyl funksiýalaryň köplügine ***kesgitsiz integral*** hem diýilýär. Asyl funksiýalaryň biri-birinden erkin hemişelik bilen tapawutlanýandyklaryny gören Leýbnis şu düşünjäni saýlap alypdyr. $\int_a^b f(x)dx$ – a bolsa ***kesgitli integral*** diýilýär (belgilemäni K. Furs (1768-1830) girizdi, integrirlemegiň predellerini bolsa Eýler görkezdi).

Arhimed integral hasaplamanyň köp ideýalaryny öňünden görmäni başarypdyr (predeller baradaky ilkinji teoremalary onuň subut edendigi bellidir). Emma welin, ol ideýalaryň takyk aňladylmagyna we hasaplama derejesine ýetmegine çenli bir ýarym müň ýyldan köpräk wagt gerek boldy.

XVII asyryň matematikleri Arhimediň işlerinden öwrenýärler. Şonuň ýaly-da gadymy Gresiýada dörän, başga bir usul – *bölünmeýänleriň usuly* giňden ulanylýar



43-nji surat

(ol birinji nobatda Demokritiň atomistik dünýägaraýşy bilen baglydyr). Mysal üçin, olar egriçyzykly trapesiýany (43-nji *a* sur.) uzynlygy $f(x)$- e deň bolan wertikal kesimlerden düzülen, ol kesimleriň bolsa $f(x)dx$ ***tükeniksiz kiçi ululyga*** deň bolan meýdanlary bar diýip göz öňüne getiripdirler. Şeýle düşünjä görä gözlenilýän meýdan tükeniksiz köp sanly tükeniksiz kiçi meýdanlaryň jemine deň diýip hasap edipdirler.

$$S = \sum_{a<x<b} f(x)dx$$

Hatda käbir halatlarda bu jemdäki aýry-aýry goşulyjylaryň nolduklary hem nygtalyp görkezilipdir, emma olar tükeniksiz sanda goşulyp, bütünleý kesgitli položitel jemi berýän aýratyn nollardyr.

Goý, 43-nji *b* suratda şekillendirilen figuranyň meýdanyny tapmak talap edilsin, bu ýerde $y = f(x)$ we $y = f(x) + C$ figurany aşakdan we ýokardan çäklendirýän egri çyzyklaryň deňlemeleridir.

Biziň figuramyz «bölünmeýän» tükeniksiz ýuka sütünjiklerden (olaryň hemmesiniň şol bir c uzynlygy bardyr) düzülen diýip göz öňüne getirsek, biz olary wertikal ugur boýunça süýşürip, esasy b-a we beýikligi c deň bolan gönüburçluk düzüp bileris. Şonuň üçin gözlenilýän meýdan gönüburçlugyň meýdanyna deňdir, ýagny:

$$S = S_1 = c(b - a).$$

Tekiz figuralaryň meýdanlary üçin Kawalýeriniň (italýan matematigi, 1958-1647) prinsipi şeýle diýýär: *Goý, parallel göni çyzyklaryň dessesi F_1 we F_2 figuralary deň uzynlykly kesimler boýunça kesýän bolsun,* onda F_1 *we F_2 figuralaryň meýdanlary deňdir* (43-nji ç sur.).

Şuňa meňzeş prinsip stereometriýada-da bar we göwrümler tapylanda ondan peýdalanyp bolar. Mysal üçin, umumy esaslary we deň beýiklikleri bolan göni we ýapgyt silindrleriň deň göwrümleriniň bardygyny subut ediň.

Gaýtalamaga degişli soraglar we meseleler

466. R-de f funksiýa üçin F-iň asyl funksiýa bolýandygyny subut ediň:

1) $f(x) = 2x + 3, \quad F(x) = x^2 + 3x + 1;$

2) $f(x) = \sin 2x + 3, \quad F(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2} + 3x;$

3) $f(x) = -x^3 + 5, \quad F(x) = -\dfrac{x^4}{4} + 5x + 2;$

4) $f(x) = -\cos\dfrac{x}{2} + 1, \quad F(x) = -2\sin\dfrac{x}{2} + x;$

5) $f(x) = 2x - 1; \quad F(x) = x^2 - x;$

6) $f(x) = \dfrac{-2}{x^3} - \cos x; \quad F(x) = \dfrac{1}{x^2} - \sin x;$

7) $f(x) = 1 - \sin x; \quad F(x) = x + \cos x.$

467. Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýanyň umumy görnüşini ýazyň:

1) $f(x) = 1;$ 3) $f(x) = \dfrac{1}{2};$

2) $f(x) = 2;$ 4) $f(x) = -3.$

468. 1. Asyl funksiýalary tapmagyň üç düzgünini beýan ediň.

2. Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýanyň umumy görnüşini ýazyň:

a) $f(x) = x;$ ç) $f(x) = ax;$

b) $f(x) = 2x;$ d) $f(x) = -x.$

Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (469–470).

469. 1) $f(x) = -3x + \sqrt{2};$ 5) $f(x) = x + m;$

2) $f(x) = 2x + m;$ 6) $f(x) = ax + m;$

3) $f(x) = -3x;$ 7) $f(x) = -x^2;$

4) $f(x) = 3x + 2;$ 8) $f(x) = -x^2.$

470. 1) $f(x) = 2x^2;$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2};$

2) $f(x) = x^2 + 3;$ 7) $f(x) = x^{\frac{1}{5}};$

3) $f(x) = -2\sin 2x;$ 8) $f(x) = \sqrt{x};$

4) $f(x) = 2\cos 2x;$ 9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}.$

5) $f(x) = x^7;$

471. 1) $f(x) = x^3;$ 5) $f(x) = x^4;$

2) $f(x) = x^{100};$ 6) $f(x) = x^{-4};$

3) $f(x) = x^{-101};$ 7) $f(x) = x^{\frac{3}{4}};$

4) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}};$ 8) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$

f funksiýanyň grafiginiň M nokatdan geçýän asyl funksiýasyny tapyň (472–474).

472. 1) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{7 + 3x}}, \quad M(3;8);$

2) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{3 - 2x}}, \quad M(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{16});$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(\pi - x)}, \quad M(-\dfrac{2\pi}{3}; -\sqrt{3});$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} + x)}, \quad M(-\dfrac{\pi}{4}; -1).$

473. 1) $f(x) = \sin(1 - 2x), \ M(\dfrac{1}{2};3);$

2) $f(x) = \cos(2x - 1), \ M(\dfrac{1}{2};2);$

3) $f(x) = \dfrac{2}{3x - 2} - \dfrac{1}{\sin^2(0{,}5\pi x)}, \ M(1;2);$

4) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{\sin^2(0{,}5\pi x)}, \ M(1;3).$

474. 1) $f(x) = \cos(2\pi - x), \ M(-\dfrac{\pi}{2};-1);$

2) $f(x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + x), \ M(\pi;-1);$

3) $f(x) = \sin 2x, \ M(\dfrac{\pi}{4};-2);$

4) $f(x) = \sqrt{2}\cos x, \ M\left(\dfrac{\pi}{2};2\right).$

475. 1. Egriçyzykly trapesiýa diýlip nähili figura aýdylýar? Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin formulany ýazyň.

2. Berlen çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany çyzyň we onuň meýdanyny tapyň:

a) $y = \sin x, \ y = 0;$ b) $y = -x^3, \ y = 0, \ x = -2;$

c) $y = (x - 1)^2, \ y = 0, \ x = 3;$

d) $y = 3 - 2x - x^2, \ y = 0, \ x = 0, \ x = -2.$

476. Integraly hasaplaň:

1) $\int_1^3 dx;$ 2) $\int_1^2 4dx;$ 3) $\int_{-3}^{a} (-1)dx;$ 4) $\int_{-1}^{2} x^2 dx.$

Integrallary hasaplaň (477–479).

477. 1) $\int_0^2 \dfrac{x^3}{4} dx;$ 6) $\int_{-1}^{1} (2x - 3)dx;$

2) $\int_0^1 2x^5 dx;$ 7) $\int_{-1}^{2} (3x - 2)dx;$

3) $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx;$ 8) $\int_0^1 (ax + b)dx;$

4) $\int_1^4 x^{-\frac{1}{2}} dx;$ 9) $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 2x - 1)dx;$

5) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx;$ 10) $\int_1^3 (6x^2 - 4x + 1)dx.$

478. 1) $\int_{2}^{\pi}\frac{\sin x}{2}dx$; 7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$;

2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos 2xdx$; 8) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{x}{2}dx$;

3) $\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 xdx$; 9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{x}{4}dx$;

4) $\int_{0}^{\pi/2}(2\sin x+3\cos x)dx$; 10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx$;

5) $\int_{0}^{\pi/3}\sin^2\frac{x}{2}dx$; 11) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{3x}{2})dx$;

6) $\int_{0}^{\pi/4}\cos^2 xdx$; 12) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{\sin^2 x}dx$.

479. 1) $\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|dx$.

480. Integraly hasaplaman, netijäniň alamatyny kesgitläň:

1) $\int_{1}^{2}(x^2+1)dx$; 3) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos xdx$;

2) $\int_{1}^{3}(1-x^2)dx$; 4) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$;

5) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin xdx$; 6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}tgxdx$.

481. Subut ediň:

1) $\int_{0}^{1}\sin 2tdt>0$; 3) $\int_{0}^{\pi}\sin tdt>\int_{0}^{\pi}\sin^2 tdt$;

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}(\cos t-1)dt<0$; 4) $\int_{0}^{\pi}\sin tdt>\int_{0}^{\pi}\sin tdt$.

482. Eger f funksiýa jübüt bolsa, onda

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$$

deňligi subut etmeli.

Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (483–490).

483. 1) $y=x^2$, $y=3x$;

2) $y=x^2-4x+6$, $y=1$, $x=1$, $x=3$;

3) $y=4-x^2$, $y=3$;

4) $y=cos\,x$, $y=1$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

484. 1) $y=\sqrt{x}$, $x+2y=3$, $2y-x=-3$;

2) $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$;

3) $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$;

4) $y=\frac{1}{x}x^2$, $y=2\sqrt{x}$.

485. 1) $y=\sqrt{x+1}$, $x=3$, $y=0$;

2) $y=\sqrt{x-1}$, $x=2$, $x=5$, $y=0$;

3) $y=(x-3)^2$, $y=9-2x$;

4) $y=(x+3)^2$, $y=4-x$.

486. 1) $y=x^2+1$, $y=2x+4$;

2) $y=x^2+2$, $y=4x-1$;

3) $y=1-x^2$, $y=2-2x$, $x=0$;

4) $y=4-x^2$, $y=-4x+8$, $x=0$.

487. 1) $y=\frac{4}{x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;

2) $y=-\frac{2}{x}$, $x=-4$, $x=-1$, $y=0$;

3) $y=\frac{3}{x}$, $y=3$, $x=3$;

4) $y=-\frac{4}{x}$, $y=1$, $x=-1$.

488. 1) $y=4-x^2$, $y=x+2$;

2) $y=x^2+2$, $y=4-x$;

3) $y=4-x^2$, $y=x^2-4$;

4) $y=-2x^2+8$, $y=2x^2-8$.

489. 1) $y=9-x^2$, $y=2(6-x-x^2)$;

2) $y=x^2+3$, $y=2x^2-x+1$;

3) $y=2\sqrt{x-1}$, $x=2$, $x=5$, $y=0$;

4) $y=\sqrt{2-1}$, $x=1$, $x=-2$, $y=0$.

490. 1) $y=(x-1)^3$, $y=8$, $x=2$;

2) $y=(2-x)^3$, $y=8$, $x=1$;

3) $y=\frac{1}{x}$, $y=1$, $x=e$;

4) $y=-\frac{1}{x}$, $y=1$, $x=-e$.

491. $y=|x^2-4|$ funksiýanyň grafigi, Ox oky we $x=-1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

492. $y=x^2-2x+2$ parabola hem oňa (0;2) we (3;5) nokatlarda geçirilen galtaşýan çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

493. Aşakdaky deňsizlikler bilen berlen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

1) $|y|\le -x^2+2x$; 2) $|y|\le -x^2+6x-8$.

494. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t)=t+3t^2$ kanun boýunça üýtgeýär (t-wagt sekuntlarda, υ tizlik sekuntda metrlerde ölçenilýär). Eger $t=0$ pursatda nokat koordinata başlangyjynda ýerleşýän bolup, nokadyň koordinatasy 1-e deň bolsa, onda onuň koordinatasynyň haýsy kanun boýunça üýtgeýänini kesgitläň.

495. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t)=\cos\pi t$ formula boýunça aňladylýar (υ -sekuntda metrler hasabyndaky tizlik, t-sekuntlarda ölçenilýän wagt):

1) $t=2$ bolanda nokadyň koordinatasy 2-ä deň, $t=\frac{3}{2}$ bolanda nokadyň koordinatasyny tapyň;

2) $t=1$ bolanda nokadyň koordinatasy 1-e deň. $t=3{,}5$ bolanda nokadyň koordinatasyny tapyň.

496. Daş bölegi beýikligi 20 m bolan jaýyň üstünden wertikal ýokarlygyna zyňlypdyr. Eger 1 sekuntdan soň daş bölegi 30 m ýokarylykda bolan bolsa, onda onuň başlangyç tizligi näçä deň?

497. Daş bölegi jaýyň üstünden $v_0 = 15\ m/s$ başlangyç tizlik bilen wertikal ýokarlygyna zyňlypdyr. Eger zyňlandan 2 sekuntdan soň daş bölegi 30 m ýokarylykda bolan bolsa, jaýyň beýikligi näçe?

498. Tizligiň üýtgeýşi $v(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ formula bilen berlen (tizlik sekuntda metr hasabynda ölçenilýär). Jisimiň hereket edip başlanyna 3 s bolandan soňraky geçen ýoluny tapyň.

499. Jisimiň tizligi $v(t)=\frac{1}{\sqrt{3/4+t/2}}$ formula arkaly berlen (tizlik sekuntda metr hasabynda ölçenilýär). Jisimiň hereket edip başlanyna 3 s bolandan soňraky geçen ýoluny tapyň.

500. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizlenmesi $a = 2t$ kanun boýunça üýtgeýär (t wagt sekuntlarda, a tizlenme bolsa sekundyň kwadratynda metrlerde ölçenilýär). Eger:

1) birinji sekundyň ahyrynda nokat 10 m ýoly geçen bolsa we tizligi 4 m/s bolsa;

2) ikinji sekundyň ahyrynda nokadyň tizligi 6 m/s bolup, üçünji sekundyň ahyryna çenli ol 40 m ýoly geçen bolsa, onda nokadyň haýsy kanun boýunça hereket edýändigini kesgitläň.

501. Material nokat $a(t)=3\cos 3t\ m/s^2$ tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Deslapky wagt pursadynda nokadyň tizligi 4,5 m/s bolsa, nokadyň tizliginiň deňlemesini ýazyň.

502. Material nokat $a(t)=\left(\frac{1}{t}+e^t\right)m/s^2$ tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Eger $t = 1s$ pursatda onuň tizligi 2 m/s bolan bolsa, nokadyň tizliginiň deňlemesini ýazyň.

503. $y = xe^{-3x}$ funksiýanyň $y' + 3y = e^{-3x}$ differensial deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

504. Differensial deňlemeleri çözüň:

1) $y' = 2y$; 3) $y' = -10y$; 5) $y' = -2y$;

2) $y' = \frac{1}{2}y$; 4) $y' = 10y$; 6) $y' = -\frac{1}{2}y$.

505. $y' = 5y$ differensial deňlemäniň $y(1) = 7$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapyň.

506. Çözüwi aşakdaky funksiýalar bolan differensial deňlemäni tapyň:

1) 3^{2x}; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

507. $y = d\cdot x^{\frac{2}{3}}$ funksiýa $y'' = -k\cdot\frac{1}{y^2}$ deňlemäniň çözüwi bolar ýaly d sany tapyň.

508. $y_1 = c_1e^x$, $y_2 = c_2e^{-2x}$ funksiýalaryň $y'' + y' - 2y = 0$ deňlemäniň çözüwi bolýandygyny barlamaly.

509. Aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan f funksiýany tapyň:

1) $f'(x) = x^2$, $f(2) = 1$; 4) $f'(x) = \frac{1}{x}(x < 0)$, $f(-1) = 1$;

2) $f'(x) = e^{-x}$, $f(0) = -2$; 5) $f'(x) = \sin x$, $f(0) = 2$;

3) $f'(x) = \frac{1}{x}(x > 0)$, $f(e) = 1$; 6) $f'(x) = 2\cos$, $f(\frac{\pi}{2}) = 3$.

ÜÇÜNJI BAP BOÝUNÇA BARLAGNAMALAR

I görnüş

1. $f(x) = \frac{x^2}{3} - \sin 2x$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasynyň umumy görnüşini ýazyň:

a) $F(x) = \frac{x^3}{9} + \cos 2x + C$; b) $F(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{\cos 2x}{2} + C$;

ç) $F(x) = x^3 - \frac{\cos 2x}{2} + C$; d) $F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{\cos 2x}{2} + C$.

2. $f(x) = \frac{2}{\cos^2 4x}$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasynyň umumy görnüşini ýazyň:

a) $F(x) = 0{,}5tg4x + C$; b) $F(x) = 2tg4x + C$;

ç) $F(x) = 0{,}5ctg4x + C$; d) $F(x) = -0{,}5ctg4x + C$.

3. Eger $F\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ bolsa, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ funksiýanyň asyl funksiýasyny tapyň:

a) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 2$; b) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 1$;

ç) $F(x) = \frac{1}{2x^2} + 1$; d) $F(x) = \frac{1}{2x^2} + 2$.

4. $f(x) = 4x^3 + 2x$ funksiýa üçin grafigi $M(1;4)$ nokat arkaly geçýän asyl funksiýany tapyň:

a) $x^4 + x^2 + 2$; ç) $x^4 + x^2 + 4$;

b) $x^4 + x^2 - 2$; d) $x^4 + x^2 + 1$.

5. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

a) 8; b) $8\frac{2}{3}$; ç) $8\frac{1}{3}$; d) 9.

Integraly hasaplaň (6-9):

6. $\int_{-1}^{2}(x+1)^2dx$. a) $6\frac{1}{3}$; b) 8; ç) 6; d) 9.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; ç) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1.

8. $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$. a) 4; b) 8; ç) -4; d) -8.

9. $\int_0^1 \sqrt[3]{x^4}dx$. a) 0; b) $\frac{4}{3}$; ç) $\frac{3}{7}$; d) 1.

10. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň Ox okunyň daşynda aýlamakdan emele gelýän jisimiň göwrümini tapyň:

a) π; b) $\frac{\pi}{2}$; ç) $\frac{3}{2}\pi$; d) 2π.

II görnüş

1. $f(x) = \frac{x^3}{2} - \cos 3x$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasynyň umumy görnüşini ýazyň:

a) $F(x) = \frac{x^4}{8} - 3\sin 3x + C$; b) $F(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{\sin 3x}{3} + C$;

ç) $F(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+C$; d) $F(x)=\frac{x^4}{2}-3\sin 3x$.

2. $f(x)=\frac{-2}{\sin^2 4x}$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasynyň umumy görnüşini ýazyň:

a) $F(x)=0{,}5tg4x+C$; ç) $F(x)=0{,}5ctg4x+C$;

b) $F(x)=2tg4x+C$; d) $F(x)=-0{,}5ctg4x+C$.

3. Eger $F(1)=1$ bolsa, $f(x)=\frac{3}{x^4}$ funksiýanyň asyl funksiýasyny tapyň:

a) $F(x)=-\frac{1}{x^3}+1$; b) $F(x)=\frac{1}{x^3}+1$;

ç) $F(x)=\frac{1}{x^3}+2$; d) $F(x)=-\frac{1}{x^3}+2$.

4. $f(x)=5x^4+3x^2$ funksiýa üçin grafigi $M(1;4)$ nokat arkaly geçýän asyl funksiýany tapyň:

a) x^5+x^3+2; b) x^5+x^3-2; ç) x^5+x^3+4; d) x^5+x^3+1.

5. $y=x^2$, $y=0$, $x=2$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

a) 4; b) $2\frac{2}{3}$; ç) $2\frac{1}{3}$; d) 2.

Integraly hasaplaň (6-9):

6. $\int_1^2 (x-1)^2dx$. a) 9; b) 7; ç) $\frac{1}{3}$; d) 6.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$. a) 0; b) $\frac{1}{2}$; ç) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 1.

8. $\int_0^1 \frac{3dx}{2\sqrt{x}}dx$. a) 4; b) 8; ç) 3; d) −3.

9. $\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}dx$. a) 1; b) $\frac{5}{3}$; ç) $\frac{3}{5}$; d) 1.

10. $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$ çyzyklar bilen çäklenen figurany Ox okunyň daşynda aýlamakdan emele gelýän jisimiň göwrümini tapyň:

a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; ç) 2π; d) 4π.

IV BAP. KOMBINATORIKANYŇ, STATISTIKANYŇ WE ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETINIŇ ELEMENTLERI

§26. Çalşyrmalaryň, utgaşdyrmalaryň we ýerleşdirmeleriň sanynyň formulalary

1. Kombinatorikanyň umumy düzgünleri. Tükenikli sany elementlerden dürli-dürli kombinasiýalary düzüp we käbir düzgün boýunça düzülen ähli mümkin bolan kombinasiýalaryň sanyny hasaplamaly bolýan meselelere ***kombinatoriki meseleler***, olaryň çözülişleri bilen meşgullanýan matematikanyň bölümine bolsa ***kombinatorika*** diýilýär.

Kombinatoriki meseleleriň köpüsini çözmekde ulanylýan iki umumy düzgüne – jemlemek we köpeltmek düzgünlerine garalyň.

Goý, gutuda n sany dürli reňkli şarjagazlar bar bolsun.Erkin ýagdaýda, bir şary çykaralyň.Ony näçe usul bilen ýerine ýetirip bolar? Elbetde n. Indi bu n şarjagazlary iki guta böleliň:birinji gutuda m şarjagazlar, ikinji gutuda bolsa k şarjagazlar bar bolsun.Erkin ýagdaýda gutularyň birinden bir şar çykaralyň. Ony näçe dürli usul bilen amala aşyryp bolar? Birinji gutudan m dürli usullar bilen, ikinji gutudan bolsa k dürli usullar bilen şarjagazlary çykarmak bolýandyr. Diýmek, jemi $n = m + k$ usullar bolar.

Eger käbir A obýekti m usullar bilen, B obýekti k usullar bilen (A-obýektdäki ýaly däl) alyp bolýan bolsa, onda «ýa-ha A, ýa-da B» obýekti $m+k$ usullar bilen almak bolar. Bu usula ***jemlemek düzgüni*** diýilýär.

Aşakdaky meselä garalyň.

Mesele. Sanlaryň onluk sistemasynda ikibelgili sanlaryň näçesini ýazyp bolar?

Ikibelgili sanlaryň onluk razrýady 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sanlaryň birini, birlik razrýady bolsa, bu sanlaryň birini ýa-da noly alyp biler.

Onluk razrýady 1 bolan 10 sany ikibelgili sanyň boljakdygy düşnüklidir. Şeýle hem, onluk razrýady 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 bolan ikibelgili sanlaryň her biriniň hem degişlilikde 10 sany boljakdygy aýdyňdyr. Şeýlelikde ähli mümkin bolan ikibelgili sanlar 90 sany bolar.

Alnan netijäni umumylaşdyralyň.

Goý, $n=m+k$ sany elementleri bolan köplük degişlilikde m we k sany elementleri bolan bölek köplükleriň jemi bolsun. Baglanysyksyz ýagdaýda bu bölek köplükleriň her birinden bir element alnan bolsun. Şeýle usul bilen alynýan elementler jübütleriniň näçe sany dürlülerini almak mümkin?

Goýlan soragyň jogabyny aşakdaky tablisa berýär?

$$\left.\begin{array}{l} a_1b_1;\ a_1b_2;\ a_1b_3;\ \dots;\ a_1b_k \\ a_2b_1;\ a_2b_2;\ a_1b_3;\ \dots;\ a_1b_k \\ \dots \\ a_mb_1;\ a_mb_2;\ a_mb_3;\ \dots;\ a_mb_k \end{array}\right\}$$

Şeýlelikde, eger mümkin bolan jübütleriň umumy sanyny N bilen belgilesek, onda

$$N = mk$$

bolar.

Indi *köpeltmek düzgünini* beýan edeliň:

Eger-de A we B obýektler degişlilikde m we k sany dürli usullar bilen saýlanyp bilinýän bolsalar, olaryň ähli mümkin bolan jübütleriniň sany mk bolar.

2. Çalşyrmalar. Türkmen elipbiýiniň otuz harpyny şu hili tertipde ýerleşdirmek kabul edilendir:

A, B, Ç, D, E, Ä, F, G, H, I, J, Ž, K, L, M, N, Ň, O, Ö, P, R, S, Ş, T, U, Ü, W, Y, Ý, Z.

Harplaryň şu hili ýerleşişinde A harpy birinji, B-ikinji, Ç-üçünji we şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen Z otuzynjy orunda bolar. Edil şol harplary ters tertipde hem ýerleşdirmek mümkin: birinji harp diýip Z, ikinji Ý, we ş.m., otuzynjy harpy A diýip hasap etmek bolar. Otuz harpyň kesgitli tertipde ýerleşişiniň her birine olardan ***çalşyrma*** diýilýär. Otuz harpyň dürli çalşyrmalary örän köpdür.

Çalşyrmalary islendik tükenikli köplügiň elementlerinden düzmek mümkindir. Bir elementli köplügi ýeke-täk usul bilen tertipleşdirmek bolýar: köplügiň ýeke-täk elementini birinji element diýip hasap etmeli bolýar. Iki elementli, mysal üçin, A we B iki harpdan düzülen köplügi alalyň. Olary tertip boýunça iki usul bilen ýerleşdirmegiň mümkindigi aýdyňdyr: AB ýa-da BA.

A, B we $Ç$ üç harpy tertip boýunça alty usul bilen ýerleşdirmek mümkindir: $ABÇ$, $AÇB$, $BAÇ$, $BÇA$, $ÇAB$, $ÇBA$.

Tükenikli köplügiň elementleriniň islendik tertipde ýerleşmeklerine ol elementlerden ***çalşyrma*** diýilýär.

n elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sany P_n arkaly belgilenýär. $P_n = nP_{n-1}$ (1) rekurrent formuladan peýdalanyp,

P_n-iň bahasyny yzygider hasaplamak bolýar. (1) formula boýunça yzygiderlikde alarys:

$$P_2 = 2\cdot P_1 = 2; \qquad P_7 = 7\cdot 720 = 5040;$$
$$P_3 = 3\cdot P_2 = 6; \qquad P_8 = 8\cdot 5040 = 40320;$$
$$P_4 = 4\cdot P_3 = 24; \qquad P_9 = 9\cdot 40320 = 362880;$$
$$P_5 = 5\cdot P_4 = 120; \qquad P_{10} = 10\cdot 362880 = 3628800;$$
$$P_6 = 6\cdot P_5 = 720; \qquad P_{11} = 11\cdot 3628800 = 39916800.$$

Mysal üçin, 11 myhmany 11 orunda 39916800 usul bilen stoluň başynda oturtmak bolar.

Umuman P_n-iň (n elementden düzülen çalşyrmalaryň sanynyň) ilkinji n natural sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdigi (1) formuladan gelip çykýar.

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \qquad (2)$$

Ilkinji n natural sanlaryň köpeltmek hasyly üçin ýörite belgi kabul edilendir: $n!$ (en-faktorial diýlip okalýar). Şu belgini peýdalanyp, (2) formulany aşakdaky görnüşde ýazmak bolar:

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Boş köplügi diňe bir usul bilen tertipleşdirmek bolýar, ýagny $P_0=1$ diýip hasap edilýändir. Onda (1) formuladan $n=1$ bolanda hem peýdalanmak bolar: $P_1=1 \cdot P_0=1$.

3. Ýerleşdirmeler. Köplüge öz elementleriniň ýerleşiş tertibiniň berilmegi bilen bilelikde ***tertipleşdirilen köplük*** diýilýär. Tertipleşdirilen köplügi onuň elementlerini ýaý şekilli skobkalarda berlen tertipde ýerleşdirip ýazýarlar. Mysal üçin, $(A;B)$ we $(B;A)$ dürli tertipleşdirilen köplüklerdir. Olar şol bir $\{A;B\}$ köplükden iki usul bilen tertipleşdirilip alynýandyr. Köplügiň ýazgysynda onuň elementleriniň ýerleşiş tertibiniň möhüm däldigini belläliň, ýagny $\{A;B\}=\{B;A\}$.

Goý, A, B, $Ç$, D dört harp berlen bolsun. Olardan iki harpy saýlap alyp, olary belli tertipde ýerleşdirmek talap edilsin. Ony näçe usul bilen etmek bolar? Şu hili usullaryň sany on ikidir. Hakykatdan-da, birinji harpy dört usul bilen saýlap almak mümkin, ikinjisini bolsa galan üçüsinden saýlap almaly bolar. Ine şol on iki usul:

$(A;B)$; $(A;Ç)$; $(A;D)$; $(B;A)$; $(B;Ç)$; $(B;D)$;
$(Ç;A)$; $(Ç;B)$; $(Ç;D)$; $(D;A)$; $(D;B)$; $(D;Ç)$.

Diýmek, dört elementli $\{A;B;Ç;D\}$ köplügiň elementlerinden her birinde iki elementi bolan on iki sany tertipleşdirilen köplügi emele getirip bolýar. Indi şeýle meselä garalyň: n elementden her birinde m element bolar ýaly edip, näçe sany tertipleşdirilen köplük düzmek bolar?

Indi berlen köplügiň tertipleşdirilen bölek köplüklerine garalyň. Köplügiň özi tertipleşdirilmedik hasap edilip, onuň her bir bölek köplügi mümkin bolan usulda tertipleşdirilip bilner.

n elementli köplügiň tertipleşdirilen m elementli bölek köplüklerine n elementden m elementli ***ýerleşdirmeler*** diýilýär.

n elementden m elementli ýerleşdirmeleriň sanyny adatça, A_n^m ýaly belgileýärler. A_n^m bilen gyzyklanalyň. Biz eýýäm $A_4^2=12$ bolýandygyny gördük. $A_n^1=n$ (1). Hakykatdan-da, n elementden bir elementi n usul arkaly saýlap almak mümkin, şu bir elementden bolsa diňe bir tertipleşdirilen köplük alynýar.

$1 \le m < n$ bolanda $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$ (2) formula dogrudyr. Hakykatdan-da, berlen n elementden alnan $m+1$ elementi $m+1$ orun boýunça paýlaşdyrmak üçin ilki bilen haýsy hem bolsa m elementi saýlap alyp, olary

ilkinji m orun boýunça ýerleşdirmek mümkin. Ony A_n^m usul bilen ýerine ýetirmek mümkindir. Şu usullaryň her birinde n-m element galar. Olaryň islendigini m+1-nji orunda goýmak mümkin. Şunlukda, ilkinji m orunlar A_n^m gezek doldurmagyň her birinde $(m+1)$ ornuň mümkin bolan $n-m$ doldurylyşyny alarys. Diýmek, olaryň hemmesi $A_n^m(n-m)$ bolar. (1) we (2) formulalary ulanyp, yzygiderli $A_n^1=n$, $A_n^2=n(n-1)$, $A_n^3=n(n-1)(n-2)$ (3) alarys. $n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ bolýandygy üçin gutarnykly suratda $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$ (4) alarys. m=0 bolanda (4) formuladan $A_n^0=1$ alynýar. Bu dogrudyr, diňe bir boş köplük bar bolup, ol islendik köplügiň bölek köplügidir we ony diňe bir usul bilen tertipleşdirmek mümkindir. (3) we (4) formulalary $0 \le m \le n$ deňsizligi kanagatlandyrýan islendik m we n bitin sanlar üçin ulanmak bolar.

4. Utgaşdyrmalar. $\{A;\ B;\ Ç\}$ köplügiň ähli bölek köplüklerine garalyň; olaryň sany sekizdir: Ø-boş köplük; $\{A\}$,$\{B\}$,$\{Ç\}$- her birinde bir element bolan üç köplük; $\{A;B\}$; $\{A;Ç\}$; $\{B;Ç\}$-her birinde iki element bolan üç köplük; $\{A,B,Ç\}$-üç elementli bir köplük.

n elementli köplükde saklanýan her birinde m element bolan bölek köplükleriň sany C_n^m bilen belgilenýär.

n elementli köplügiň islendik m elementli bölek köplügine n elementden m elementli ***utgaşdyrma*** diýilýär. Şunlukda, bölek köplügiň elementleriniň tertipleri hasaba alynýan däldir.

Biz $C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$, we $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8=2^3$ bolýandygyny görýäris.

C_n^m üçin formulany getirip çykaralyň. Ilkibaşda $A_n^m=C_n^m\cdot P_m$ (1) subut edeliň. Berlen n elementden m elementi saklaýan tertipleşdirilen köplügi emele getirmek üçin:

a) n elementden haýsy-da bolsa m elementi saýlap almak (muny C_n^m usul bilen ýerine ýetirmek mümkindir),

b) saýlanyp alnan elementleri tertipleşdirmek (muny P_m usul bilen ýerine ýetirmek mümkindir) gerek. Jemi $C_n^m\cdot P_m$ usul (tertipleşdirilen köplük) alarys, ýagny $A_n^m=C_n^m\cdot P_m$. (1) formulany $C_n^m=A_n^m:P_m$ görnüşde ýazalyň. Bize eýýäm mälim bolan, $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$, $P_m=m!$ aňlatmalary ornuna goýup alarys: $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, muny başgaça $C_n^m=\dfrac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$ ýaly ýazyp bolar.

Utgaşdyrmalaryň sanynyň käbir häsiýetleri:

1. Islendik n we m $0\le m\le n$ üçin $C_n^m=C_n^{n-m}$ deňlik dogrudyr.

2. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n$ jem n elementli köplügiň bölek köplükleriniň doly sanydyr, $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$.

3. $0\le m\le n$ bolanda $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ deňlik dogrudyr.

1-nji mysal. 9 okuwçynyň sanawyny näçe usul bilen düzmek bolar?

Çözülişi. $P_n=n!$. $n=9$. $P_9=9!=362880$ usul bilen düzmek bolar.

2-nji mysal. Ýolagçy otlynyň 14 wagony bar. Eger her wagona bir ýolbeledi berkidilýän bolsa, onda 14 ýolbeledi wagonlara näçe usul bilen paýlaşdyrmak bolar?

Çözülişi. $P_n=n!$. $n=14$. Diýmek, $P_{14}=14!$.

3-nji mysal. Kärende ýerde işlemek üçin 20 adamdan 6 adam saýlap almaly. Muny näçe usul bilen ýerine ýetirmek bolar?

Çözülişi. $C_{20}^6=38760$.

5. Paskalyň üçburçlugy. $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$ formula C_n^m sany yzygiderli tapmaga mümkinçilik berýär. Hakykatdan-da, $n=1$, $m=0$ goýup, $C_2^1=C_1^1+C_1^0=2$; soňra $n=2$, $m=0$ ýa-da $m=1$ goýup alarys:

$$C_3^1=C_2^1+C_2^0=2+1=3,\quad C_3^2=C_2^2+C_2^1=1+2=3.$$

Eger n=3 bolsa, onda $m=0,1,2$ bolanda degişlilikde alarys:

$$C_4^1=C_3^1+C_3^0=3+1=4,$$
$$C_4^2=C_3^2+C_3^1=3+3=6,$$
$$C_4^3=C_3^3+C_3^2=1+3=4 \quad \text{we ş.m.}$$

Eger C_n^m sany aşakdaky üçburçly tablisa görnüşinde ýerleşdirsek,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}$$

onda setirleriň her biriniň başynda we ahyrynda birlik durar, çünki $C_n^0=C_n^n=1$. Üçburçly tablisanyň galan orunlaryndaky sanlary bolsa, $C_{n+1}^{m+1}=C_n^m+C_n^{m+1}$ formula bilen yzygiderli tapyp bolýar. Bu tablisadan islendik setiriň islendik ornundaky (gyraky orunlardan başga) sanynyň öňündäki setiriň özünden ýokarda duran iki sanynyň jemine deňdigi görünýär. Şu tablisany, onuň häsiýetlerini derňän fransuz matematigi B. Paskalyň (1623–1662) hatyrasyna «Paskalyň üçburçlugy» diýip atlandyrmak kabul edilendir. Paskalyň üçburçlugynyň ilkinji sekiz setiri aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \end{array}$$

Gönükmeler

510. Eger:

1) $A=\{1\}$; 3) $A=\{a;\ b;\ c\}$;
2) $A=\{6;7\}$; 4) $A=\{m;\ n;\ p;\ q\}$

bolsa, onda A köplügiň elementlerinden mümkin bolan çalşyrmalary düzüň.

511. Formulalary subut ediň:

1) $\dfrac{(m+3)!}{m!}=(m+1)(m+2)(m+3)$;

2) $\dfrac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)...(n-m+2)(n-m+1)(n>m)$.

512. Aňlatmanyň bahasyny tapyň:

1) $8!+9!$; 2) $10!-1!$; 3) $\dfrac{102!}{100!}$; 4) $\dfrac{6!-5!}{120}$.

513. Droby gysgaldyň:

1) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; 3) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$;

2) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$; 4) $\dfrac{2k(2k-1)}{(2k)!}$ $(k\in N)$.

514. 0,1,2,3 sifrlerden hiç birinde birmeňzeş sifr bolmaz ýaly edip, ähli mümkin bolan dörtbelgili sanlar düzülen. Näçe san alyndy?

515. 1,2,3,4,5 sifrlerden sifrleri gaýtalanmaýan ähli mümkin bolan bäşbelgili sanlar düzülen. Şu bäşbelgili sanlaryň arasynda näçesiniň:

1) 3 sifr bilen başlanýandygyny;
2) 5 sifr bilen başlanmaýandygyny;
3) 54 bilen başlanýandygyny;
4) 543 bilen başlanmaýandygyny aýdyňlaşdyryň.

516. $A_n^{n-1}=A_n^n=n!$ bolýandygyny görkeziň.

517. 10^7 sany ýedi belgili telefon nomerleriniň näçesi ýedi sany dürli sifrlerden düzülen?

518. Hasaplamaly:

1) C_5^2; 3) C_8^3; 5) C_{10}^4; 7) $C_5^4+C_5^0$;
2) C_6^3; 4) C_7^6; 6) C_{17}^1; 8) $C_{100}^{100}+C_{100}^1$.

519. 1) $C_7^4+C_7^3=C_8^4$; 2) $C_{10}^5+C_{10}^6=C_{11}^6$ deňligiň dogrudygyny subut ediň.

520. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

1) $\frac{2}{n+2}C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{2(2n-1)}C_{2n}^{2n-3}$.

521. Hasaplaň:

1) C_{18}^{17}; 3) C_{94}^{94}; 5) C_{37}^{34};

2) C_{20}^{18}; 4) C_{1000}^{999}; 6) C_{190}^{98}.

522. Deňligiň dogrudygyny görkeziň:

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6.$$

523. Deňligiň dogrudygyny subut ediň:

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$;

2) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

524. Deňligiň dogrudygyny subut ediň:

1) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} = C_{n+2}^{m+2}$;

2) $C_n^m + 2C_n^{m+1} + C_n^{m+2} + C_n^{m+3} = C_{n+3}^{m+3}$.

525. Dokuzynjy synpda 35 okuwçy bar. Olardan konferensiýa 4 delegat saýlamaly. Şeýle saýlawyň näçe mümkinçiligi bar?

526. 2310 sanyň ýönekeý bölüjilerinden diňe iki ýönekeý bölüjisini saklaýan näçe düzme san ýazmak bolar?

527. *A* şäherden *B* şähere iki ýol, *A* şäherden *D* şähere dört ýol, *B* şäherden *Ç* şähere üç ýol, *D* şäherden *Ç* şähere bäş ýol eltýär. 1) *A* şäherden *B* şäheriň üsti bilen *Ç* şähere näçe dürli ýol eltýär? 2) *A* şäherden *Ç* şähere barýan umuman näçe dürli ýol bar?

528. Her birinde 100 pälwan bolan 2 sport jemgyýetinden ýaryşa gatnaşmak üçin her birinden bir pälwan almaly. Bu saýlawy näçe usul bien amala aşyryp bolar?

529. Markasyz konwertleriň 5 görnüşi we deň gymmatly markalaryň 4 görnüşi bar. Hat ibermek üçin markaly konwertleri näçe usul bilen almak bolar?

530. Dürli ölçegli ellikleriň 6 jübüti bar. Näçe usul bilen sag we çep eliňdäki ellikleriň ölçegi dürli bolar ýaly edip bolar?

531. Dükanda 6 ekzemplýar «Doganlar» romany, 3 ekzemplýar «Ykbal» romany, 4 ekzemplýar «Aýgytly ädim» romany bar. Ondan başga-da «Doganlar» we «Ykbal» romanlary saklaýan 5 tom, «Ykbal» we «Aýgytly ädim» romanlary saklaýan 7 tom bar. Bu romanlaryň her birinden 1 ekzemplýar bolar ýaly näçe usul bilen söwda edip bolar?

532. Demir ýol duralgasynda *m* swetofor bar. Eger swetoforlaryň her biriniň gyzyl, sary we ýaşyl ýagdaýy bar bolsa, onda dürli signallaryň näçesi berlip bilner?

533. Gapda 12 alma we 10 armyt bar. Ahmet ondan alma ýa-da armyt alandan soňra, Bagty hem alma we armyt alýar. Ahmet alma alandamy ýa-da armyt alanda Bagtynyň miwe saýlap almaga mümkinçiligi köp?

534. 100-den 10000-e çenli bitin sanlaryň arasynda ýazgysynda dogry üç sany deň sifrleri bolan sanlaryň näçesi bar?

535. Morze elipbiýiniň harplary nokat we tere yzygiderliginden emele gelýär. Eger 5 simwoly saklaýan kodlar ulanylsa, onda dürli harplaryň näçesini emele getirip bolar?

536. Futbol komandada (11 adam) kapitany we onuň kömekçisini näçe usul bilen saýlap bolar?

537. Gyzyl, gara, gök we ýaşyl şarikleri näçe usul bilen hatara goýup bolar?

538. Bir ýurtda 20 şäher bar, olaryň her bir ikisi uçar ýoly bilen birikdirilen. Bu ýurtda näçe uçar ýoly bar?

539. Bäş dürli reňkli galamdan üç dürli reňkli galamy näçe usul bilen alyp bolar?

540. Eger bäş sany dürli reňkli matalar bar bolsa, onda: 1) üç reňkli zolakdan durýan baýdagy näçe usul bilen düzmek bolar?

2) eger zolaklaryň biri hökman gyzyl reňkli bolmaly bolsa?

541. Türkmen, iňlis, fransuz, nemes we rus dilleriniň islendigini gönümel terjime eder ýaly näçe sözlük neşir etmek gerek? (Sözlükleriň her biri iki taraplaýyn terjimäni amala aşyrýar).

542. Eger komandalaryň her birinde hiç bolmanda bir oglan bolmaly bolsa, onda her biri 4 adamdan durýan iki komanda 5 gyzy we 3 oglany näçe usul bilen bölüp bolar?

543. 6 haty ibermek gerek. Eger-de hatlar 3 sany kurýerden iberilýän we hatlaryň her birini kurýerleriň islendik birine berip bolýan bolsa, onda ony näçe usul bilen amala aşyryp bolar?

544. Dürli ýedibelgili telefon belgileriniň näçesi bar?

§27. Nýuton binomynyň formulasy

Şu wagta çenli bize $a + b$ ikagzanyň ikinji we üçünji derejeleriniň formulalary mälimdir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Indi bolsa,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

bolýandygyny hasaplamak kyn däldir.

Islendik *n* natural san üçin

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ma^{n-m}b^m + ... + C_n^nb^n \quad (1)$$

formula dogrudyr. Bu formula iňlis matematigi we fizigi Isak Nýutonyň (1642–1727) hatyrasyna Nýuton binomynyň formulasy diýilýär. (1) deňligiň sag bölegine binomyň derejesiniň dagytmasy diýilýär.

(1) formulanyň subudyny matematiki induksiýa usuly bilen geçireliň. Berlen *n*-de (1) deňligi $A(n)$ bilen belgiläliň.

1) $A(1)$ dogry, çünki $(a+b)^1 = a + b = C_1^0a + C_1^1b$.

2) islendik natural *k*-da $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ bolýandygyny görkezeliň. Ilki bilen bu subudy $k = 3$ üçin geçireliň. Goý,

$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$$

dogry bolsun. Onda

$$(a+b)^4 = (C_3^0 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3)(a+b) = C_3^0a^4 + C_3^1a^3b +$$
$$+ C_3^2a^2b^2 + C_3^3ab^3 + C_3^0a^3b + C_3^1a^2b^2 + C_3^2ab^3 + C_3^3b^4 = C_3^0a^4 +$$
$$+ (C_3^0 + C_3^1)a^3b + (C_3^1 + C_3^2)a^2b^2 + (C_3^2 + C_3^3)ab^3 + C_3^3b^4.$$

Indi

$$C_3^0 = 1 = C_4^0,\ C_3^0 + C_3^1 = C_4^1,\ C_3^1 + C_3^2 = C_4^2,\ C_3^2 + C_3^3 = C_4^3,\ C_3^3 = 1 = C_4^4,$$

bolýandygy sebäpli, gutarnykly suratda

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$$

alarys. Islendik natural *k* üçin hasaplamalar şuňa meňzeş geçirilýär:

$$(a+b)^{k+1}=(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots+C_k^ma^{k-m}b^m+\ldots+C_k^kb^k)\cdot(a+b)=$$
$$=C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb+\ldots+C_k^{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots+C_k^kab^k+C_k^0a^kb+\ldots+$$
$$+C_k^ma^{k-m}b^{m+1}+\ldots+C_k^{k-1}ab^k+C_k^kb^{k+1}=C_k^0a^{k+1}+(C_k^0+C_k^1)a^kb+$$
$$+\ldots+(C_k^m+C_k^{m+1})a^{k-m}b^{m+1}+\ldots+(C_k^{k-1}+C_k^k)ab^k+C_k^kb^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+$$
$$+C_{k+1}^1a^kb+\ldots+C_{k+1}^{m+1}a^{k-m}b^{m+1}+\ldots+C_{k+1}^kab^k+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}.$$

Matematiki induksiýa usuly esasynda 1 we 2 formulalardan islendik natural n üçin $A(n)$ tassyklamanyň çynlygy gelip çykýar. (1) formula subut edildi.

(1) formuladaky C_n^0, C_n^1, $C_n^2,\ldots,C_n^{n-1},C_n^n$ koeffisiýentlere binomial koeffisiýentler diýilýär. Nýuton binomynyň C_n^k koeffisiýenti aşakdaky formula boýunça hasaplanýar:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

1-nji mysal. $(a+b)^4=a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4$.

Emma

$$C_4^1=\frac{4}{1}=4;\ C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6;\ C_4^3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4;\ C_4^4=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=1.$$

Şoňa görä-de,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Indi binomial koeffisiýentleriň häsiýetine garap geçeliň:

Dagytmanyň uçlaryndan deň uzaklykda durýan binomial koeffisiýentler özara deňdirler (çünki $C_n^k=C_n^{n-k}$).

Kesgitlemä görä

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}. \qquad (2)$$

Şu drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny

$(n-k)(n-k-1)\ldots3\cdot2\cdot1$ köpeldip alarys:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots k(n-k)(n-k-1)\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Şeýlelikde,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Eger $n>k$ bolsa, onda bu formula islendik n we k natural sanlar üçin dogrudyr. Hususy halda, bu formuladaky k-ny $(n-k)$ bilen çalşyryp alarys:

$$C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (4)$$

(3) we(4) deňlikleriň sag bölekleri deňdir, şol sebäpli çep bölekleri hem deňdir:

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \qquad (5)$$

(5) formula binomial koeffisiýentleriň möhüm häsiýetini aňladyp, olary hasaplamagy has aňsatlaşdyrýar. Meselem, $a+b$ ikagza 6-njy derejä göterilende C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, C_6^6 hasaplamaly bolýar. Kesgitlemä görä ((2) formula ser.):

$$C_6^1=\frac{6}{1}=6;\ C_6^2=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15;\ C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20.$$

Indi C_6^4 we C_6^5 hasaplamak üçin olary (2) formula görnüşde ýazmagyň geregi ýokdur. Onuň üçin (5) formulany we alnan netijeleri peýdalanmak ýeterlikdir:

$$C_6^4=C_6^{6-4}=C_6^2=15;\quad C_6^5=C_6^{6-5}=C_6^1=6.$$

Ýene, $C_n^n=1$ bolýandygyny belläliň. Bu C_n^n sanyň kesgitlemesinden gös-göni gelip çykýar:

$$C_n^n=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-2)(n-1)n}=1.$$

$C_n^0=1$ bolýandygyny şertleşeliň. Şunuň ýaly şertleşmegiň netijesinde (2) formula diňe $n>k$ bolanda dogry bolman, eýsem, $n=k$ bolanda hem dogrudyr.

Binomial koeffisiýentler ilki bilen artýarlar, soňra bolsa kemelýärler. Eger binomyň dereje görkezijisi jübüt bolsa, onda dagytmanyň ortaky goşulyjysynyň binomial koeffisiýenti iň ulusydyr, eger-de binomyň dereje görkezijisi täk bolsa, onda iki ortaky goşulyjylaryň koeffisiýentleri özara deňdir we iň ulusydyr.

Nýutonyň formulasy boýunça $(a+b)^n$ dagytmada $n+1$ goşulyjy bardyr. (1) deňlikde a-nyň dereje görkezijisi n-den 0-a çenli kemelýär, b-niň dereje görkezijisi bolsa 0-dan n-e çenli artýar. Dagytmanyň islendik goşulyjysynda a we b-niň dereje görkezijileriniň jemi binomyň dereje görkezijisine, ýagny n-e deňdir.

(1) deňlikde goşulyjylary umumy görnüşde ýazmak üçin $(k+1)$-nji goşulyjyny k-njy agza diýip hasap etmek we T_k bilen belgilemek amatlydyr. Şonda

$$T_k=C_n^ka^{n-k}b^k,\quad k=0,1,\ldots,n. \qquad (6)$$

Meselem, $T_0=C_n^0a^nb^0$ – birinji goşulyjy, $T_1=C_n^1a^{n-1}b^1$ – ikinji goşulyjy, $T_2=C_n^2a^{n-2}b^2$ – üçünji goşulyjy.

2-nji mysal. $(z^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{2}{3}})^{12}$ dagytmanyň dördünji agzasyny tapalyň.

Dagytmanyň gözlenilýän agzasyny (6) formula boýunça tapýarys.

$$T_4=C_{12}^4(z^{\frac{1}{2}})^8(z^{\frac{2}{3}})^4=495z^{\frac{20}{3}}$$

Bellik. Dagytmanyň goşulyjysynyň koeffisiýenti bilen şol goşulyjynyň binomial koeffisiýentiniň arasyndaky tapawudy ýatdan çykarmaly däldir. Meselem, $(2a-3a)^4=16a^4-96a^3b+216a^2b^2-216ab^3+81b^4$ dagytmada 3-nji goşulyjynyň koeffisiýenti 216, onuň binomial koeffisiýenti bolsa $C_4^2=6$.

Gönükmeler

545. Nýuton binomynyň formulasyndan ugur alyp, iki sanyň jeminiň we tapawudynyň kublarynyň formulalaryny çykarmaly.

546. Binomyň derejesiniň dagydylyşyny tapyň:

1) $(a+b)^7$; 5) $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^5$; 9) $(p^{-2}-1)^6$;

2) $(x+y)^5$; 6) $(x-2y)^5$; 10) $(\frac{1}{y}+2)^5$;

3) $(x-y)^5$; 7) $(3x-1)^7$; 11) $(x^2-y)^6$;

4) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4$; 8) $(1+y^2)^4$; 12) $(3a^2-2b)^5$.

547. Binomyň derejesiniň dagydylyşyny tapyň:

1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^5$; 2) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^5$; 4) $(\sqrt{10}-\sqrt{2})^6$;

3) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})^6$; 5) $(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}})^7$; 6) $(x^2+\frac{2}{x})^8$.

548. Eger $(3a-2)^n$ binom dagydylanda a^2-yň koeffisiýenti 216 bolýandygy mälim bolsa, şol binomyň derejesini kesgitlemeli.

549. $(a+\frac{1}{a})^{12}$ dagytmada a^8-iň koeffisiýentini tapmaly.

550. $(2a-\frac{1}{3a})^{10}$ dagytmada a^4-üň koeffisiýentini tapmaly.

551. $(2x - 3)^{10}$ dagytmada ýedinji agzany tapmaly.

552. $(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}})^9$ dagytmada dördünji agzany tapmaly.

553. $(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x})^{10}$ dagytmada ortaky agzany tapmaly.

554. $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^{13}$ dagytmanyň iki ortaky agzasyny tapmaly.

555. $(a^3 - ab)^{31}$ dagytmanyň iki ortaky agzasyny tapmaly.

556. Dagytmanyň x-e bagly däl agzalaryny tapmaly:

1) $(x^2-\frac{1}{x})^6$; 2) $(\frac{1}{x}+\sqrt{x})^{12}$.

557. Dagytmanyň z-e bagly däl agzalaryny tapmaly:

1) $(\frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}-2\sqrt{z})^{11}$; 2) $(z^{\frac{1}{3}}-z^{-\frac{1}{2}})^{15}$.

558. $(2x+\frac{1}{x})^n$ binomyň derejesiniň dagydylyşynda binomial koeffisiýentleriň jemi 256. Dagytmanyň x-e bagly däl agzasyny tapmaly.

559. Köpagzalaryň iň uly koeffisiýentlerini tapmaly.

1) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)^{100}$; 3) $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x)^{10}$; 5) $(\sqrt{5}+2x)^{20}$.

2) $(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}x)^{12}$; 4) $(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}x)^{105}$;

560. $(1+x^2-x^3)^9$ dagytmada x^8-iň koeffisiýentini tapmaly.

561. $(1+3x+2x^3)^{10}$ dagytmada x^4-üň koeffisiýentini tapmaly.

562. $(z+z^{-2})^{12}$ dagytmanyň z-ni saklamaýan, ýagny z nol derejede saklaýan agzasyny tapmaly.

563. $(1 + 0,01)^{1000}$ dagytmada iň uly agzanyň nomerini tapmaly.

564. Jemleri hasaplamaly.

1) $\sum_{k=0}^{n} c_n^k$; 2) $\sum_{k=2}^{n-2} c_n^k$; 3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_n^k$;

4) $\sum_{k=0}^{n} c_{2n}^{2k}$; 5) $\sum_{k=1}^{n} c_{2n}^{2k-1}$.

565. Köpagzalaryň koeffisiýentleriniň jemini tapmaly.

1) $(2x-1)^{100}$; 2) $(x^3-x-1)^{99}$.

§28. Ähtimallyklar nazaryýetiniň elementleri

1. Ähtimallyklar nazaryýetine giriş. Ähtimallyklar nazaryýetiniň döräp başlan wagtyny, adatça, XVII asyra degişli edip, ony gyzykdyran humarly oýunlaryň kombinatoriki meseleleri bilen baglanyşdyrýarlar.

Ähtimallyklar nazaryýetiniň ilkinji obýekti bilmezlik ýa-da onuň prinsipial ýagdaýy zerarly ýüze çykýan tötänleýinlik hem-de kesgitsizlikdir.

Durmuşda «örän ähtimal», «az ähtimal» ýa-da «ähtimal» sözlemlerini ýygy-ýygydan eşitmek bolýar. Onda ähtimallyk näme?

Ähtimallyklar nazaryýeti wakanyň ýüze çykmaklygynyň ähtimallygyna mukdar taýdan takyk baha berip boljak ýagdaýlar bilen iş salyşýar.

Mysal üçin, teňňäni 5 gezek oklanymyzda sifr ýüzüniň ýere düşjek sany, elbetde, tötändir. Bu sany $\mu(s)$ bilen belgilesek, onuň alyp biljek bahalary 0; 1; 2; 3; 4; 5 bolup, teňňäniň sifr ýüzüniň ýere düşmeginiň otnositel ýygylygy $\frac{\mu(s)}{5}$

$$0;\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5};\frac{5}{5}$$

bahalaryň birini alyp biler.

Indi teňňäni oklamalaryň sany $n=10000$ diýsek, onda $\frac{\mu(s)}{10^4}$ gatnaşygyň, elbetde, takyk bolmasa-da $\frac{1}{2}$-e örän ýakyn boljagy welin aýdyňdyr.

Getirilen mysal, $\frac{\mu}{n}$ gatnaşygyň tötän ululyk bolandygyna garamazdan, n-iň ulalmagy bilen onuň käbir drob sana örän ýakyn (biziň mysalymyzda $\frac{1}{2}$ sana ýakyn bolan) ululyk bolup «durnukly» baha eýe bolýandygyny görkezýär.

Synagyň, tejribäniň, gözegçiligiň netijelerini waka diýip atlandyrjakdyrys. «Tejribe», «eksperiment», «gözegçilik» sözlerini «synag» diýip ulanarys.

Düzümli (ýa-da bölünýän) we elementar (ýa-da bölünmeýän) wakalary özara tapawutlandyralyň.

Mysal üçin, kubik oklanymyzda jübüt oçkonyň ýüze çykmagyny aňladýan waka «2-lik oçkonyň, ýa-da 4-lük oçkonyň, ýa-da 6-lyk oçkonyň» haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagy bilen deňgüýçlüdir. Şeýlelikde, «jübüt oçkonyň ýüze çykmagy» diýlen waka üç sany elementar waka dargaýar, ýagny bölünýär. Şeýlelikde elementar wakalaryň islendik bölek köplügi waka ýaly garalýandyr.

Synagyň bolup biljek her bir netijesi-elementar wakadyr. Ähli elementar wakalaryň köplügine elementar wakalaryň giňişligi diýilýär.

Elementar wakalar giňişligi, adatça, Ω bilen belgilenýär.

Ýönekeý synaglarda, adatça, biz tükenikli giňişlik bilen iş salyşýarys. Mysal üçin, teňňäni bir gezek oklanymyzda gerbiň ýa-da sifriň düşmegi mümkindir, onda G we S harplar bilen degişlilikde gerb we sifr düşmegini aňladýan wakalary belgiläp alarys:

$$\Omega=\{G,S\}.$$

Görşümiz ýaly bu ýagdaýda elementar wakalar giňişligi iki elementden durýar. *Kubigi iki gezek oklanymyzda Ω giňişlik 4 elementden durýar*: $\Omega=\{GG,GS,SG,SS\}$. Iki ýagdaýda-da giňislik tükeniklidir. Ýöne, teňňäni oklamak bilen baglanyşykly ýönekeý synagda hem tükenikli giňişligiň ýeterlik bolmaýan ýagdaýyna getirýän synagy gurmak mümkindir. Aýdaly, teňňe tä gerb birinji gezek ýüze çykýança oklanylýan bolsun. Onda bu synagyň elementar wakalaryny (SS...SG) görnüşdäki yzygiderlik bilen aňlatmak mümkindir. Şeýle yzygiderlikler tükeniksiz köp we olaryň hemmesi dürlüdir. Diýmek, synagyň ähli elementar wakalaryny doly teswirlemek üçin hiç hili tükenikli giňişlik bilen çäklenip bolmaz, bu ýagdaýda

$\Omega = \{(G),(SG),(SSG),\ldots,(SS\ldots SG)\ldots\}$ bolar.

2. Wakalaryň özara gatnasygy. Tötän wakalar A, B, C, D, E ýaly latyn uly harplary bilen belgilenýär. Goý, bize islendik, elementar wakalaryň fiksirlenen giňişligi berlen bolsun:

1) eger A wakanyň ýüze çykmagy B-niň ýüze çykmagyna alyp gelýän bolsa (bu sözleme «eger A waka B-niň hususy haly bolsa» hem diýilýär), ýagny A-nyň ýüze çykmagy bilen B hem ýüze çykýan bolsa, onda bu ýagdaý $A \subset B$ ýa-da $B \supset A$ bilen belgilenýär. $A \subset B$ ýazgy A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän her bir elementar waka B wakanyň düzüminde hem bardyr diýildigidir. $B \supset A$ ýazgy bolsa, B *waka* A *wakanyň netijesidir diýildigi bolýar.*

2) eger A waka B-niň ýüze çykmagyna alyp gelýän bolsa we şol bir wagtyň özünde B hem A-nyň ýüze çykmagyna alyp gelýän bolsa, onda biz A we B wakalara deňgüýçli diýeris we bu ýagdaýy $A=B$ görnüşde belgiläris.

Deňgüýçli wakalar nazary nukdaý nazardan biri-birini çalşyryp bilýärler. Şonuň üçin mundan beýläk islendik iki deňgüýçli wakalary özara deň diýip hasaplarys.

3) A we B wakalaryň ikisiniň hem ýüze çykmagyndan ybarat waka, A we B wakalaryň köpeltmek hasyly (bu wakalaryň kesişmesi) diýilýär hem-de AB (ýa-da $A \cap B$) görnüşinde belgilenýär.

4) A we B wakalaryň iň bolmanda biriniň ýüze çykmagyny aňladýan waka A we B wakalaryň jemi (birleşmesi) diýilýär we $A+B$ ýa-da $A \cup B$ görnüşinde belgilenýär.

5) A wakanyň ýüze çykyp, B wakanyň bolsa ýüze çykmazlygyny aňladýan waka A we B wakalaryň tapawudy diýilýär we $A-B$ görnüşinde belgilenýär.

6) eger A waka özünde hiç bir elementar wakany saklamasa, hiç bir elementar waka A-nyň ýüze çykmagyna ýardam bermese, onda oňa mümkin däl waka diýilýär we $A = \varnothing$ görnüşinde belgilenýär.

7) eger waka özünde ähli elementar wakalary saklasa, ýagny giňişlik bilen gabat gelse, onda oňa hökmany waka diýilýär we $A = \Omega$ görnüşinde belgilenýär.

8) eger A we B wakalar üçin $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$ iki gatnaşyk bir wagtda ýerine ýetse, onda A we B wakalara garşylykly waka diýilýär. Adatça, A wakanyň garşylykly wakasy $\overline{A}$ görnüşinde belgilenýär.

9) eger A we B wakalar biri-birini ret edýän bolsalar, onda olaryň ikisine bir wagtda ýüze çykmaklaryna ýardam berjek elementar waka bolmaz we AB waka mümkin däldir, ýagny $A \cap B = \varnothing$. Bu ýagdaýda A we B wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär.

3. Wakalaryň meýdany. Ähtimallyklar nazaryýetiniň her bir meselesinde käbir kesgitli synag we bu synag bilen baglanyşykly ýüze çykýan ýa-da ýüze çykmaýan käbir wakalaryň S ulgamy bilen iş salyşmaly bolýarys. Bu ulgam barada aşakdaky tassyklamalary aýtmak bolar:

1) eger A we B wakalar S ulgama degişli bolsalar, onda oňa $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ wakalar hem degişli bolmalydyrlar;

2) hökmany Ω we mümkin däl $\varnothing$ wakalar hem S ulgama degişlidirler.

Bu talaplary kanagatlandyrýan wakalaryň ulamyna **wakalaryň meýdany** diýilýär.

4. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesi. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinde ähtimallyk düşünjesi wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän

elementar wakalaryň saklanýan giňişligindäki ähli elementar wakalaryň sanynyň tükenikli jemi bolup, olaryň deň ähtimallykly (deň mümkinçilikli) bolmaklaryna esaslanýar.

Deňähtimallykly – bu ilkinji düşünje bolup, ol formal kesgitlemä degişli bolmaýar. Mysal üçin, birjynsly materialdan ýasalan dogry formaly kubigi oklanymyzda 1,2,3,4,5,6 ockolaryň islendiginiň düşmegi ähtimallyklary deň wakalardyr, çünki simmetriýanyň barlygy zerarly, haýsy-da bolsa bir grany beýleki granlardan artykmaç hasap etmäge hiç hili esas ýokdur.

Goý, Ω giňişlik n sany goşa-goşadan sygyşmaýan, deňähtimallykly $w_1, w_2, \ldots, w_n$ elementar wakalardan dursun. Bu giňişligiň döredýän wakalarynyň S meýdanyndan alnan islendik

$$A = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_m}\} = w_{j_1} \cup w_{j_2} \cup \ldots \cup w_{j_m}$$

tötän wakanyň ähtimallygy

$$P(A) = \frac{(A - \textit{nyň}\ \text{elementleriniň sany})}{n} = \frac{m}{n}.$$

Mysal üçin, kubigi bir gezek oklanymyzda goşa-goşadan sygyşmaýan we deňähtimallykly wakalar bolup,

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ w_5,\ w_6$$

degişlilikde 1,2,3,4,5,6 ockolaryň düşmegini aňladýan wakalar bolarlar.

3-e kratny ockonyň düşmegi – iki hususy hala (w_3 we w_6) bölünýär, şonuň üçin

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Elbetde,

$$P(w_i) = \frac{1}{6},\quad 1 \le i \le 6$$

bolup, kubik oklananda jübüt ockonyň düşmeginiň ähtimallygy $P(w_2 \cup w_4 \cup w_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ bolar.

Şeýlelikde, bu ýagdaýda islendik A wakanyň $P(A)$ ähtimallygy A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän ýagdaýlaryň sanynyň ähli mümkin bolan ýagdaýlaryň sanyna bolan gatnaşygyna deň.

$P(\cdot)$ ähtimallyga S wakalaryň meýdanynda kesgitlenen funksiýa ýaly garamak mümkindir.

Bu funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýedir:

1) S meýdanyndan alnan islendik A waka üçin $P(A) \ge 0$.

2) hökmany Ω waka üçin

$$P(\Omega)=1.$$

3) eger A waka B we C hususy hallara bölünip, A, B, C wakalaryň üçüsem S meýdana degişli bolsalar, onda

$$P(A)=P(B+C)=P(B)+P(C),$$
$$A = B + C,\quad B \cap C = \varnothing.$$

Bu häsiýete ähtimallyklary goşmak teoremasy diýilýär.

Ähtimallyklaryň bu häsiýeti islendik tükenikli sany, özara kesişmeýän, ýagny sygyşmaýan wakalar üçin hem saklanýandyr: $i \ne j$ bolanda $A_i A_j = \varnothing$ bolan islendik $A_1 A_2, \ldots, A_n$ wakalar üçin

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j).$$

4) A wakanyň garşylykly $\overline{A}$ wakasynyň ähtimallygy

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

5) mümkin däl wakanyň ähtimallygy nola deňdir, ýagny $P(\varnothing) = 0$.

6) eger A wakanyň ýüze çykmagy B wakanyň ýüze çykmagyna alyp gelýän bolsa, ýagny $A \subset B$ bolanda

$$P(A) \leq P(B).$$

7) islendik A wakanyň ähtimallygy nol bilen biriň arasynda bolýar, ýagny

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

8) eger A we B wakalar sygyşýan bolsalar, onda bu wakalaryň jeminiň ähtimallygy

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

formula bilen hasaplanýar.

Gönükmeler

566. Iki kubjagaz oklananda mümkin bolan 36 haly deňähtimallykly diýip hasap edip, jemi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 we 12 bolan oçkolaryň düşmek ähtimallygyny tapmaly.

567. Urnada formasy boýunça birmeňzeş bolan on sany şar bar, olaryň üç sanysy ak, iki sanysy gara we bäş sanysy gyzyl. Tötänleýin çykarylan şaryň: 1) gyzyl; 2) gara däl bolmaklygynyň ähtimallygy näçä deň?

568. Uzynlyklary 1, 3, 5, 7 we 9 *sm* bolan bäş kesim bar. Şu kesimleriň bäşisiniň arasyndan tötän alnan üç kesimden üçburçluk emele getirip bolmak ähtimallygyny kesgitlemeli.

569. 1,2,3,4,5 sanlar bilen nomerlenen 5 şary saklaýan urnadan biri-biriniň yzyndan tötän 2 şar çykarylýar. Çykarylan şarlaryň nomerleriniň artýan tertipde gitmekliginiň ähtimallygy näçä deň?

570. 1,2,3,4,5 sanlar bilen nomerlenen 5 şary saklaýan urnadan tötänden yzly-yzyna 5 şaryň hemmesi

çykarylýar. Çykarylýan şarlaryň nomerleriniň artýan tertipde gitmekliginiň ähtimallygy näçe bolar?

571. 1,2,3,4,5 sanlar bilen nomerlenen 5 şary saklaýan urnadan tötänden 4 şar çykarylýar. Çykarylan şarlaryň nomerleriniň jeminiň täk bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

572. Köpsanly taýýar önümler kabul edilende saýlama barlagy geçirilýär: 100 önümden 20-si saýlanyp alynýar we şu saýlanyp alnanlaryň arasynda ýekejesi kemisli bolsa, onda ähli önümler ýaramaz hasaplanýar (ýa-da başdan-aýak barlaga berilýär). Ähli önümiň 10 sanysy kemisli bolsa, saýlanyp alnanlaryň arasyna kemisli önümlerden düşmeginiň ähtimallygy näçe?

573. Sekiz sany birmeňzeş kartoşkalarda 2,4,6,7,8,11,12 we 13 sanlar ýazylan. Tötänden iki kartoşka alynýar. Alnan iki sandan düzülen drobuň gysgalýan bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

574. Urnada a ak we b gara şar bar. Urnadan iki şar tötänden çykarylýar. Şarlaryň ikisiniň-de ak bolmaklygynyň ähtimallygyny tapmaly.

575. 10 biletden ikisi utýar. Alnan 5 biletiň arasynda 1) ikisiniň; 2) iň bolmanda biriniň utýan bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

576. Günüň ahyryna dükanda 60 garpyz galdy, şolaryň ellisi bişen. Alyjy tötänden iki garpyz saýlaýar. Saýlanan iki garpyzyň hem bişen bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

577. Küşt ýaryşyna 16 adam gatnaşýar, şunlukda olar bije boýunça her birinde 8 adamdan 2 topara paýlanýar. Oýna gatnaşýanlaryň arasynda bar bolan has

güýçlülerinden ikisiniň: 1) bir toparda oýnamaklarynyň; 2) dürli toparda oýnamaklarynyň ähtimallygyny tapyň.

578. r önümden k-sy kemisli. Barlamaga alnan s önümden takyk 1 önümiň kemisli bolmagynyň ähtimallygyny kesgitlemeli.

579. Kubjagaz k gezek (k=2,3,4,5,6) oklananda düşen oçkolaryň sanlarynyň hemmesiniň dürli bolmaklygynyň ähtimallygyny tapyň.

580. Myhmanlaryň bäsisi hem şlýapaly geldiler. Gaýtmakçy bolanlarynda myhmanlar degişip, şlýapalaryň çem gelenini geýeliň diýişýärler. Olaryň ählisiniň hem başganyň şlýapasyny geýmekleriniň ähtimallygyny tapmaly.

581. Sekiz sany dürli kitap bir tekjede çem gelşine goýulýar. Haýsy hem bolsa kesgitli iki kitabyň biri-biriniň ýanynda bolmaklygynyň ähtimallygyny tapyň.

582. Atyjy nyşana atýar, 10 oçkodan urmagyň ähtimallygy 0,3-e deň, 9 oçkodan urmagyň ähtimallygy bolsa 0,6-a deň. 9-dan az bolmadyk oçkodan urmagyň ähtimallygy näçä deň?

583. 100-den 999-a çenli natural sanlaryň arasyndan tötän natural san alyndy. Bu sanyň iň bolmanda iki sifriniň gabat gelmekliginiň ähtimallygyny tapyň.

584. Iki okuwçy şeýle oýun oýnaýarlar. Olar iki kubjagazy oklaýarlar. Eger düşen oçkolaryň jemi 8 bolsa, biri oçko alýar. Eger-de jemi 9 bolsa, onda beýlekisi oçko alýar. Bu oýun adalatlymy?

585. Bäş sany birmeňzeş kartoçkalarda *A, T, E, H, M* harplar ýazylan kartoçkalar garyşdyrylýar we tötänden almak bilen bir hatara goýulýar. *AHMET* sözüniň alynmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

V BAP. DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

§29. Deňlemeler

Biz deňlemeleri, deňsizlikleri, deňlemeler we deňsizlikler ulgamlaryny çözmegiň usullary bilen 4-10--njy synplarda matematika kursuny öwrenenimizde köp iş salyşdyk. Indi algebra we analiziň başlangyçlarynyň bu soňky babynda ýene-de deňlemeleri, deňsizlikleri, deňlemeler we deňsizlikler ulgamlaryny çözmegiň usullaryna dolanmagymyzyň esasy maksady olar babatdaky alan bilimlerimizi sistemalaşdyrmakdan we umumylaşdyrmakdan ybaratdyr. Biz olaryň çözülişleriniň ýörite usullarynyň diňe käbirlerine we olary çözenlerinde ýüze çykýan käbir kynçylyklara gararys.

1. Deňlemeler çözülende üýtgeýän ululyklaryň ýolbererlik bahalar ýaýlasyny bilmek peýdaly bolsa-da, ol, köplenç, anyklanýan däldir (elbetde, bu ýerde üýtgeýän ululyklaryň ýolbererlik bahalar ýaýlasyny anyklamak çylşyrymly ýa-da mümkin däl bolan ýagdaýlary aradan aýrylýandyr).

Mysal üçin,

$$lg(x-5) - lg(3-2x) = 1$$

deňleme şeýle çözülýär:

$$lg\frac{x-5}{3-2x} = 1, \qquad \frac{x-5}{3-2x} = 10, \qquad x-5 = 30-20x,$$

$$21x = 35, \qquad x = \frac{5}{3}.$$

Barlagy ýerine ýetireliň:

$$lg\left(\frac{5}{3}-5\right)-lg\left(3-2\cdot\frac{5}{3}\right)=1;$$

$$lg\left(-\frac{10}{3}\right)-lg\left(-\frac{1}{3}\right)=1.$$

Ýöne esasy položitel bolanda otrisatel sanyň logarifmi ýokdur, diýmek, $x=\frac{5}{3}$ del kökdür diýlip netije çykarylýar. Deňlemäniň köki ýok.

Eger aşakdaky getirilen kesgitlemäni ulanyp, üýtgeýän ululyklaryň ýolbererlik bahalar ýaýlasy anyklanylsa, onda şeýle netijä örän çalt gelip bolardy.

Kesgitleme. Üýtgeýän ululyklaryň deňlemäniň iki bölegini hem manyly edýän bahalaryna üýtgeýän ululyklaryň ýolbererlik bahalar ýaýlasy ýa-da deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy diýilýär.

Berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny anyklalyň. Eger

$$\begin{cases} x-5>0; \\ 3-2x>0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} x>5; \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$$

bolsa, onda deňlemäniň manysy bardyr. Emma x ululyk 5-den uly 1,5-den bolsa kiçi bolup bilmeýär. Şoňa görä-de deňsizlikler ulgamynyň çözüwi ýokdur. Şunlukda, berlen deňlemäniň hem çözüwi ýokdur.

2. Deňlemäniň alnan çözüwini barlamak käbir ýagdaýda hökmandyr we ol deňlemäniň çözüwiniň içine girýär, başga bir ýagdaýda bolsa ol gerek däldir.

Deňlemäniň alnan çözüwiniň barlagy del kökleri aradan aýyrmak maksady bilen ýerine ýetirilýär. Del

kökler, köplenç, aşakda getirilen özgertmeler netijesinde ýüze çykýar:

a) drob agzaly deňlemäniň iki bölegi üýtgeýän ululykly aňlatma köpeldilende del kökleriň emele gelmegi mümkindir. Mysal üçin, $\frac{x-5}{x-1}+\frac{5+3x}{x^2-1}=0$ deňlemäniň iki bölegini-de (x^2-1) aňlatma köpeltsek, onda $x=1$ del kök alynýar;

b) deňlemedäki drob üýtgeýän ululykly aňlatma gysgaldylanda del kökler ýüze çykyp bilýändir. Mysal üçin, $\frac{x^2-81}{x-9}-2x=0$ deňlemedäki droby $(x-9)$ aňlatma gysgaltsak, onda $x=9$ del kök alynýandyr.

ç) deňlemedäki dürli alamatly deň üýtgeýän ululykly aňlatmalar özara ýoklananda del kökleriň peýda bolmagy mümkindir.

Mysallar.

1) $4x^2-\frac{2}{3x^2}-x^3+\frac{2}{3x^2}=0$ deňlemede ikinji we dördünji agzalary goşup alarys: $4x^2-x^3=0$; $x_1=x_2=0$; $x_3=4$. Bu ýerde x_1 we x_2 kökler berlen deňlemäniň del kökleridir.

2) $x+3\sqrt{x+2}+5-3\sqrt{x+2}=0$ deňlemede ikinji we dördünji agzany goşup alarys: $x+5=0$; $x=-5$. Alnan kök berlen deňlemäniň del köküdir.

3) $x^2+\frac{1}{4}lgx+x-6-\frac{1}{4}lgx=0$ deňlemede ikinji we bäşinji agzany goşup alarys: $x^2+x-6=0$; $x_1=-3$; $x_2=2$. $x_1=-3$ berlen deňlemäniň del köküdir.

16. Sargyt № 2629

d) deňlemäniň iki bölegi-de jübüt derejä göterilende del kökleriň peýda bolmagy mümkindir. Mysal üçin, $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$ deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata götersek, onda $x=165$ del kök ýüze çykýar;

e) Logarifmik deňlemeler potensirlenende del kökleriň emele gelmegi mümkindir. Mysal üçin, $lg(x-1)+lg(x+1)=0$ deňlemäni potensirläp alarys: $lg(x^2-1)=0$, $x^2-1=1$; $x=\pm\sqrt{2}$. Barlag geçirip, $x=-\sqrt{2}$ kökün del kökdügine göz ýetirmek bolar.

Ýokarda görkezilen özgertmeleriň her birinde deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynyň giňelmesiniň bolmagy mümkindir, bu bolsa del kökleriň ýüze çykmagyna mümkinçilik berýändir.

Berlen deňlemede ornuna goýup, del kökleri ýüze çykarmak, köplenç, kynçylyklara getirýär. Şoňa görä-de, deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny tapmak we oňa girmeýän kökleri barlagsyz taşlamak amatlydyr.

Elbetde, bu ýerde deňleme çözülende deňlemäniň deňgüýçlüligi bozulmaly däldir. Eger berlen deňlemede özgertme geçirilende deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy üýtgemeýän bolsa, ýöne käbir sebäplere görä deňlemäniň deňgüýçlüligi bozulsa, onda del kökleriň ýüze çykmagy ýa-da tersine kökleriň ýitirilmegi mümkindir.

1-nji mysal. $lg^2x-lgx=0$ (1)
deňlemä garalyň.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x>0$. Berlen deňlemäniň iki bölegini hem lgx gysgaldyp alarys:

$$lgx-1=0, \qquad (2)$$

bu ýerden

$$lgx=1;\ x=10.$$

(1) deňlemeden (2) deňlemä geçilende, deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy üýtgemän galan hem bolsa, $x=1$ kök ýitirildi.

Eger (2) deňlemäniň iki bölegine lgx köpeltsek, onda (1) deňlemäni alarys. Şeýle öwürmäniň netijesinde (2) deňlemäni kanagatlandyrmaýan $x=1$ kök emele geler.

2-nji mysal. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+1}=4$
deňlemäni çözeliň.

Kesgitleniş ýaýlasyny tapalyň:

$$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ 2x+1\ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 3, \\ x\ge -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad x\ge 3.$$

Berlen deňlemäniň iki bölegini-de kwadrata göterip alarys:

$$x-3+2\sqrt{(x-3)(2x+1)}+2x+1=16$$

ýa-da

$$2\sqrt{(x-3)(2x+1)}=18-3x$$

deňligiň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$4(x-3)(2x+1)=324-108x+9x^2.$$

$$x^2-88x+336=0,\ x_1=4,\ x_2=84.$$

Barlagyň görkezişi ýaly, x_2 kök kesgitleniş ýaýla degişlidir, ýöne ol berlen deňlemäniň köki däldir.

Jogaby: $x=4$.

3. Logarifmirlenende, deňlemäniň iki bölegi hem üýtgeýän ululyk saklaýan aňlatma köpeldilende ýa-da bölünende deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynyň gysylmagy we kökün ýitirilmegi mümkindir.

Mysal üçin,

$$lgx^2 = lg81$$

deňleme şeýle çözüldi:

$$lgx^2 = lg9^2; \qquad (1)$$

$$2lgx = 2lg9; \qquad (2)$$

$$lgx = lg9;$$

$$x = 9.$$

Çözülişi nädogry, çünki $x=-9$ kök ýitirildi. Onuň sebäbi, (1) deňlemeden (2) deňlemä geçilende kesgitleniş ýaýla gysyldy. (1) deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x=0$ bahadan başga ähli hakyky sanlaryň köplügidir, emma (2) deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy položitel sanlaryň köplügidir.

Berlen deňleme başga usulda çözülmelidir. Eger sanlaryň 10 esasly logarifmleri deň bolsa, onda sanlaryň özi hem deňdir, ýagny $x^2=81$, bu ýerden $x=\pm9$.

4. Amalyýetde, haçanda deňlemäniň deňgüýçlüliginiň bozulmagyna getirýän özgertmelerden gaça durmak mümkin däl bolsa, onda deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny giňeldýän özgertmeleri geçirmek maslahat berilýär. Bu ýagdaýda, del kökleri barlamak bilen aradan aýyrmak bolýandyr.

Del kökleriň ýok etmekligiň, ýitirilen kökleri tapmakdan has ýeňildigini ýatda saklamak zerurdyr.

Mysal.

$$lg(x-10)^2 + lgx^2 - lg576 = 0$$

deňlemäni çözeliň.

Käwagtda şeýle çözülýär:

$$lg(x-10)^2 + lgx^2 = lg24^2; \qquad (1)$$

$$2lg(x-10) + 2lgx = 2lg24; \qquad (2)$$

$$lg(x-10) + lgx = lg24; \qquad lg(x-10)x = lg24;$$

$$(x-10)x = 24; \quad x^2-10x-24=0; \quad x_1=12, x_2=-2.$$

Barlag geçirilip, x_1 we x_2 kökleriň berlen deňlemäni kanagatlandyrýandygyna göz ýetirildi. Emma bu ýerde berlen deňlemäniň iki köki ýitirilendir. Ol (1) deňlemeden (2) deňlemä geçilende deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynyň gysylmagy netijesinde bolup geçdi.

Berlen deňlemäni başgaça çözeliň. Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x=0$, $x=10$ sanlardan başga ähli hakyky sanlaryň köplügidir.

$$lg(x-10)^2 + lgx^2 = lg576;$$

$$lg((x-10)^2\cdot x^2) = lg24^2; \qquad (3)$$

$$(x-10)^2\cdot x^2 = 24^2; \qquad (4)$$

$$[(x-10)\cdot x]^2 = 24^2.$$

Bu ýerden:

1) $x^2-10x-24=0$; $x_1=12$, $x_2=-2$.

2) $x^2-10x+24=0$; $x_3=6$, $x_4=4$.

(3)-den (4)-e geçilende deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy giňeldi, şoňa görä-de barlag geçirmek zerurdyr.

Jogaby: $x_1=12$, $x_2=-2$, $x_3=6$, $x_4=4$.

5. «Eger köpeldijileriň iň bolmanda biri nola deň bolsa, onda köpeltmek hasyly nola deňdir» diýen tassyklamany formal ulanmaklyk deňleme çözülende düýpli ýalňyşlyklara getirýändir. Mysal üçin,

$$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$$

deňlemäniň çözülişine seredeliň.

1) $x-5=0$, $x_1=5$,

2) $x+2=0$, $x_2=-2$,

3) $\sqrt{x-3}=0$, $x_3=3$.

Şu ýerde $x_2=-2$ bolanda deňlemäniň çep böleginiň manysy ýokdur, çünki köküň manysy ýokdur.

Şuňa meňzeş ýalňyşlyklara *tgmx* ýa-da *ctgmx* $(m=1,2,3...)$ saklaýan trigonometrik deňlemeler çözülende hem duş gelmek bolýar.

6. Iň köp ýaýran ýalňyşlyklaryň biri-de deňlemäniň iki bölegini üýtgeýän ululykly aňlatma gysgaltmaklykdyr, çünki şol sebäpli kök, köplenç, ýitirilýär.

Mysal üçin,

$$3^x(x^2-2x-3) = 9(x^2-2x-3)$$

deňleme çözülende deňlemäniň iki bölegini (x^2-2x-3) gysgaldyp çözmek bilen

$3^x=9$; $3^x=3^2$; $x=2$ kök alnan bolsun.

Şeýle çözmeklik iki köküň ýitmegine getirdi. Berlen deňlemäni nähili çözmelidigini görkezeliň:

$3^x(x^2-2x-3)-9(x^2-2x-3)=0$;

$(x^2-2x-3)(3^x-9)=0$.

Bu ýerden

1) $x^2-2x-3=0$; $x_1=3$; $x_2=-1$;

2) $3^x-9=0$; $3^x=9$; $3^x=3^2$; $x_3=2$.

Jogaby: $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

7. Parametrli deňlemeler we deňlemeler ulgamy çözülende parametrleriň kesgitleniş ýaýlasy anyklanylmalydyr.

1-nji mysal.

$$mx-nx=m$$

deňlemäni çözeliň.

Adatça, şeýle ýazylýar:

$$x=\frac{m}{m-n}.$$

m-iň we n-iň haýsy bahalarynda deňlemäniň çözüwiniň bardygy düşnüksiz bolup galdy, ýagny deňlemäniň çözüwi soňuna çenli ýerine ýetirilmedi.

Şulary bellemek gerekdir:

1) eger $m\ne n$ bolsa, onda m-i $(m-n)$-e bölmek elmydama mümkindir we deňlemäniň ýeke-täk çözüwi bar;

2) eger $m=n$ we $m\ne0$ bolsa, onda deňlemäniň çözüwi ýok;

3) eger $m=n=0$ bolsa, onda deňlemäni x-iň islendik bahasy kanagatlandyrýar.

Eger berlen deňlemäni

$$(m-n)x=m$$

görnüşde ýazsak, onda soňky iki netijäniň dogrudygyna ýeňil göz ýetirmek bolar.

2-nji mysal.

$$\begin{cases} mx+y=n \\ x+my=2m \end{cases}$$

deňlemeler ulgamyny çözeliň.

Deňlemeler ulgamynyň jogabyny aşakdaky görnüşde ýazmak bilen çäklenilýär:

$$x=\frac{m(n-2)}{m^2-1},\quad y=\frac{2m^2-n}{m^2-1}.$$

Bu ýerde hem çözüw soňuna çenli ýerine ýetirilen däldir.

Aşakdaky barlaglar bolmalydyr:

1) eger $m^2-1\neq 0$ ýa-da $m^2\neq 1$, $m\neq\pm 1$ bolsa, onda (m^2-1)-e bölmek elmydama mümkindir we sistemanyň ýeke-täk çözüwi bardyr.

2) eger $m=\pm 1$, $m(n-2)\neq 0$ ýa-da $2m^2-n\neq 0$ bolsa, onda sistemanyň çözüwi ýokdur;

3) eger $m=\pm 1$, $m(n-2)=0$, $2m^2-n=0$ (soňky iki deňlik $n=2$ bolanda ýerine ýetýär) bolsa, onda sistemanyň tükeniksiz köp çözüwi bardyr.

Berlen sistemanyň deňlemelerinden taparys:

$$(m^2-1)x=m(n-2);\quad (m^2-1)y=2m^2-n.$$

Bu deňlikler soňky iki netijäniň adalatlydygyna göz ýetirmäge mümkinçilik berýär.

8. Absolýut ululyk we arifmetik kök ýaly düşünjelere ýüzleý düşünmeklik deňleme çözülende gödek ýalňyşlyklara getirýändir.

1-nji mysal.

$$|x-3|+|x-4|-1=0$$

deňlemäni çözeliň.

Absolýut ululygyň belgisiniň içindäki aňlatmanyň köklerini tapalyň we olary artýan tertipde ýerleşdireliň. $x-3=0$ we $x-4=0$ diýip taparys: $x_1=3$; $x_2=4$. Ähli hakyky sanlaryň köplügini aşakdaky ýaly aralyklara böleliň:

$$-\infty<x<3;\quad 3\le x<4;\quad 4\le x<+\infty.$$

Bu aralyklaryň her birinde deňlemäni çözeliň:

1) $-\infty<x<3$.

x-iň bu aralyga degişli bahalary üçin alarys:

$$|x-3|=-(x-3)=-x+3;$$
$$|x-4|=-(x-4)=-x+4.$$

Berlen deňleme şeýle görnüşe geler:

$$-x+3-x+4-1=0,$$

bu ýerden

$$x=3.$$

$x=3$ baha $-\infty<x<3$ şerti kanagatlandyrmaýar.

2) $3\le x<4$.

Görkezilen aralykda alarys:

$$|x-3|=x-3;\quad |x-4|=-(x-4)=-x+4.$$

Berlen deňleme aşakdaky toždestwo bolýan deňlemä getirilýär:

$$x-3-x+4-1=0.$$

Şoňa görä-de, $3\le x<4$ aralyga degişli islendik san berlen deňlemäniň köküdir.

3) $4\le x<+\infty$.

Bu aralykda

$$|x-3|=x-3;\quad |x-4|=x-4.$$

Berlen deňlemäni şeýle ýazmak bolar:

$$x-3+x-4-1=0,$$

bu ýerden

$$x=4.$$

$x=4$ baha berlen deňlemäniň köki bolýar, sebäbi ol $4\le x<+\infty$ şerti kanagatlandyrýar.

Jogaby: $3\le x\le 4$.

2-nji mysal.

$$|2x-4|+|x-3|+|1-x|=4 \qquad (1)$$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$2|x-2|+|x-3|+|x-1|=4. \qquad (2)$$

Taparys:

eger $x=2$ bolsa, onda $x-2=0$;
eger $x=3$ bolsa, onda $x-3=0$;
eger $x=1$ bolsa, onda $x-1=0$.

$(-\infty;1)$, $[1;2)$, $[2;3)$, $[3;\infty)$ aralyklaryň her birinde (2) deňlemäni çözeliň.

1) $x<1$. $-(2x-4)-(x-3)-(x-1)=4$, $-4x+8=4$, $x=1$. Bu kök garalýan aralyga degişli däldir;

2) $1\le x<2$. $-2(x-2)-(x-3)+(x-1)=4$, $-2x+6=4$, $x=1$. Bu kök deňlemäni kanagatlandyrar, sebäbi ol görkezilen aralyga degişlidir.

3) $2\le x<3$. $2(x-2)-(x-3)+(x-1)=4$, $2x-2=4$, $x=3$. Bu kök garalýan aralyga degişli däldir.

4) $x\ge 3$. $2(x-2)+(x-3)+(x-1)=4$, $4x-8=4$, $x=3$. Bu kök görkezilen aralyga degişlidir.

Jogaby: $x_1=1$, $x_2=3$.

3-nji mysal.

$$\sqrt{(x+3)^2}=x+3$$

deňlemäni çözeliň.

Köplenç halatlarda berlen deňlemäniň köki islendik hakyky san diýlip nädogry tassyklama aýdylýar. Arifmetik kökün häsiýetine görä, berlen deňleme aşakdaky deňlemä deňgüýçlüdir;

$$|x+3|=x+3.$$

Položitel sanyň we noluň moduly özüne deňdir. Şunlukda

$$x+3\ge 0 \text{ ýa-da } x\ge -3.$$

Soňky deňsizligi kanagatlandyrýan x-iň bahalarynyň köplügi berlen deňlemäniň çözüwi bolýar.

Jogaby: $[-3;\infty)$.

4-nji mysal.

$$lg\sqrt{(x-10)^2}-1=0$$

deňlemäni çözeliň.

$lg\sqrt{(x-10)^2}=lg|x-10|$, onda

$lg|x-10|-1=0$; $lg|x-10|=1$; $|x-10|=10$.

Eger $x\ge 10$ bolsa, onda $|x-10|=x-10$; $x-10=10$; $x_1=20$;

Eger $x<10$ bolsa, onda $|x-10|=10-x$; $10-x=10$; $x_2=0$.

Jogaby: $x_1=20$; $x_2=0$.

9. Käbir irrasional deňlemeler çözülende ornuna goýma usulyny ulanmak amatly bolýar.

1-nji mysal.

$$x^2-4x-\sqrt{2x^2-8x+12}=6$$

deňlemäni çözeliň.

Berlen deňlemäni ornuna goýma usuly bilen ýeňil çözüp bolýar. Goý,

$$z=\sqrt{2x^2-8x+12}$$

bolsun, onda

$$z^2=2x^2-8x+12,\quad z^2=2(x^2-4x)+12;$$

$$x^2-4x=\frac{1}{2}(z^2-12)$$ bolar.

Berlen deňlemäni şeýle görnüşde ýazmak bolýandyr:

$$\frac{1}{2}(z^2-12)-z=6.$$

Bu ýerden

$$z^2-2z-24=0,\quad z_1=6,\quad z_2=-4.$$

Arifmetik kök düşünjesiniň saklanýandygyny göz öňünde tutup, $z_2=-4$ bahany taşlaýarys.

Diýmek,

$$\sqrt{2x^2-8x+12}=6.$$

Ýönekeýleşdirip alarys:

$$x^2-4x-12=0,\quad x_1=6,\quad x_2=-2.$$

Kwadrata göterilende, del kökün emele gelmegi mümkindir, şonuň üçin barlag etmek zerurdyr. x_1-iň we x_2-niň bahalaryny berlen deňlemede goýup, x_1-iň we x_2-niň deňlemäniň kökleridigine göz ýetirýäris.

Jogaby: $x_1=6$, $x_2=-2$.

10. $4^x-5^x=0$

deňlemäniň çözüwi şeýle görnüşde ýazylypdyr:

$lg(4^x-5^x)=0$; $xlg4-xlg5=0$; $x(lg4-lg5)=0$; $x=0$.

Alnan jogap dogry, çözülişi ýalňyş. Sebäbi deňleme çözülende iki ýalňyşlyk goýberildi. Birinjiden $4^x-5^x=0$ deňleme logarifmirlenende $lg0=0$ diýlip kabul edildi. Hakykatda bolsa, ol kesgitlenmedikdir; ikinjiden (4^x-5^x) tapawut agzama-agza logarifmirlenendir. Bir

ýalňyş beýlekisini aradan aýyrýar we dogry jogap alnypdyr. Berlen deňlemäni nähili çözlemelidigini görkezeliň:

$$4^x=5^x;\quad \frac{4^x}{5^x}=1.$$

Deňlemäni 5^x-e bölmek mümkindir, çünki x-iň islendik bahasynda $5^x\ne 0$. Diýmek,

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x=1;\quad \left(\frac{4}{5}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^0,\quad x=0.$$

Elbetde, deňlemäni logarifmirlemäniň kömegi bilen hem çözüp bolardy. $4^x=5^x$ deňligi logarifmirläp alarys

$$xlg4=xlg5,$$

bu ýerden

$$x(lg4-lg5)=0;$$

$$x=0.$$

Jogaby: $x=0$.

11. $(x+5)^{x^2+x-2}=1$

deňleme käwagtda şeýle çözülýär:

$$(x+5)^{x^2+x-2}=(x+5)^0;$$

$$x^2+x-2=0;\quad x_1=1,\quad x_2=-2.$$

Nädogry. $a^{\varphi(x)}=a^{\psi(x)}$ $(a\ne 1)$ we $\varphi(x)=\psi(x)$ deňlemeler deňgüýçlüdir. Eger a-üýtgeýän x ululygy özünde saklaýan bolsa, onda $a^{\varphi(x)}=a^{\psi(x)}$ we $\varphi(x)=\psi(x)$ deňlemeleriň deňgüýçli bolmazlyklary hem mümkindir. Soňky ýagdaýyň hususan-da x üýtgeýän ululygyň käbir bahalarynda $a=1$, ýöne $\varphi(x)\ne\psi(x)$ bolanda deňgüýçli bolmaklygy mümkindir.

Ýokarda aýdylanlar esasynda $x+5=1$ goýup, $x=-4$ taparys. Soňra x-iň haýsy hem bolsa bir $x=x_0$ bahasynda $(-1)^{2n}=1 \quad (n=1,2,3,...)$ deňligiň ýerine ýetýändigini barlamak zerurdyr.Eger ol adalatly bolsa, onda x_0 berlen deňlemäniň köküdir.

$x+5=-1$ goýup, $x=-6$ taparys. $x=-6$ bolanda x^2+x-2 üçagzanyň jübüt san bolýandygyny barlalyň.

$x^2+x-2=(-6)^2-6-2=28$ – jübüt san. Şunlukda, $x=-6$ deňlemäniň köküdir.

Diýmek, ilkibaşda işlenende $x=-4$ we $x=-6$ kökler ýitirilipdir.

Berlen deňlemäni başgaça usul bilen çözeliň. Deňlemäni logarifmirläp alarys:

$(x^2+x-2)lg|x+5|=0.$

Alarys:

1) $x^2+x-2=0, \; x_1=1, \; x_2=-2;$

2) $lg|x+5|=0, \quad |x+5|=1.$

Eger $x+5>0$ bolsa, onda $x+5=1, \; x_3=-4;$

Eger $x+5<0$ bolsa, onda $-(x+5)=1, \; x_4=-6.$

Jogaby: $x_1=1, \; x_2=-2, \; x_3=-4, \; x_4=-6.$

12. Logarifmik deňlemeler çözülende goýberilýän ýalňyşlyklaryň köp bölegi potensirlemäniň düzgüniniň bozulmagy we logarifmleriň üstünde amallaryň nädogry ýerine ýetirilmegi netijesinde ýüze çykýar.

Mysallar.

1) $log_4 4+\dfrac{log_4(10-x)}{log_4 x}=\dfrac{2log_4 4}{log_4 x}$ deňlemeden

$$4[(10-x)-x]=16-x$$

deňligi alýarlar. Bu ýerde paýyň logarifmi tapawudyň logarifmi bilen ýalňyş çalşyrylandyr.

2) $log_3 x\cdot log_3(3x)=log_3(81x)$

deňleme şeýle çözülýär:

$$log_3(3x^2)=log_3(81x);$$

$$3x^2=81x;$$

$$x=27.$$

Çözülende iki sany gödek ýalňyşlyk goýberildi. Birinjisi, iki sanyň logarifmleriniň köpeltmek hasyly bu sanlaryň köpeltmek hasylynyň logarifmi bilen çalşyryldy; ikinjisi bolsa $3x^2=81x$ deňleme çözülende $x=0$ kök ýitirildi.Elbetde, bu kök berlen deňlemäniň köki däldir, ýöne ony hem bellemek gerekdir. Berlen deňlemäniň çözüwi aşakdaky ýaly bolmalydyr: deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x>0$;

$$log_3 x(log_3 3+log_3 x)=log_3 81+log_3 x;$$

$$log_3 x(1+log_3 x)=log_3 3^4+log_3 x;$$

$$log_3 x+log_3^2 x=4log_3 3+log_3 x;$$

$$log_3^2 x=4; \quad log_3 x=\pm 2;$$

$$x_1=3^2=9; \quad x_2=3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

Jogaby: $x_1=9; \quad x_2=\dfrac{1}{9}.$

13. Položitel sanlar üçin subut edilen köpeltmek hasylynyň, paýyň we derejäniň logarifmileri baradaky teoremalary sanyň absolýut ulylygy düşünjesini peýdalanyp, otrisatel sanlar üçin hem getirip bolýandyr.

Eger x we y bir alamatly noldan tapawutly islendik hakyky sanlar bolsa, onda

$$log_a(xy)=log_a|x|+log_a|y|; \tag{1}$$

$$log_a\frac{x}{y}=log_a|x|-log_a|y|. \tag{2}$$

$x\neq 0$ islendik bahasynda we n jübüt bolanda

$$log_a x^n=n\,log_a|x|; \tag{3}$$

eger $x\neq 0, \; x\neq 1$ we $N>0$ bolsa, onda n jübüt bolanda

$$log_{x^n}N=\frac{1}{n}log_{|x|}N. \tag{4}$$

Mysal.

$$lg\,x^2=4$$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$2lg|x|=4$$

bu ýerden

$$lg|x|=2; \qquad |x|=100.$$

Jogaby: $x_1=100; \quad x_2=-100.$

Eger deňleme $2lgx=4$ görnüşde ýazylan bolsady, onda $x=-100$ kök ýitirilerdi.

14. Dürli esasly logarifmileriň üstünde amallar ýerine ýetirilende uly kynçylyk çekilýär. Onuň sebäbi-de

$$log_a N=\frac{log_b N}{log_b a}, \tag{1}$$

bu ýerde $a>0; \;\; b>0; \;\; N>0; \;\; a\neq 1; \;\; b\neq 1;$

$$log_a b=\frac{1}{log_b a}, \tag{2}$$

formulalary ulanyp bilmeýärler.

Soňky formula (1) formuladan gelip çykýar.

Indi käbir mysallaryň doly çözüwini getireliň:

1-nji mysal.

$$\log_2 5 \;\; \log_5 x \;\; \log_3 x-(2-\log_5 2)\log_2 x \;\; \log_3 5=0$$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x>0$. (1) formulany ulanyp, deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$log_2 5\cdot\frac{log_2 x}{log_2 5}\cdot\frac{log_2 x}{log_2 3}-\left(2-\frac{log_2 2}{log_2 5}\right)log_2 x\cdot\frac{log_2 5}{log_2 3}=0.$$

Ýönekeýleşdirip alarys:

$$log_2^2 x+log_2 x(1-2log_2 5)=0;$$

$$log_2 x(log_2 x+1-2log_2 5)=0;$$

Bu ýerden:

1) $log_2 x=0; \quad x_1=2^0=1;$

2) $log_2 x+1-2log_2 5=0; \quad log_2 x=log_2 25-log_2 2;$

$log_2 x=log_2\dfrac{25}{2}; \qquad x_2=12{,}5.$

Jogaby: $x_1=1; \quad x_2=12{,}5.$

2-nji mysal.

$(log_x 5+2)log_5^2 x=1$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x>0, \; x\neq 1$. (2) formulany ulanyp, deňlemäni ýazalyň:

$$(log_x 5+2)\cdot\frac{1}{log_x^2 5}=1,$$

$$log_x 5+2=log_x^2 5,$$

ýa-da

$$\log_x^2 5 - \log_x 5 - 2 = 0,$$

bu ýerden

$$\log_x 5 = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad (\log_x 5)_I = 2; \quad (\log_x 5)_{II} = -1.$$

Alarys:

1) $x^2 = 5$, $x_1 = \sqrt{5}$ (deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny göz öňünde tutup, otrisatel köki almadyk);

2) $x^{-1} = 5$, $x_2 = \frac{1}{5}$. x_1 we x_2 bahalaryň deňlemäni kanagatlandyrýandygyny barlag görkezýär.

Jogaby: $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = \frac{1}{5}$.

Logarifmik deňlemeler çözülende käwagt

$$\log_a N = \log_{a^m} N^m \qquad (3)$$

formulany ulanmak amatly bolýar.

3-nji mysal.

$\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1{,}5$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x > 0$. (3) formulany ulanyp, deňlemäni ýazalyň:

$\log_{81} x - 2\log_{81} x^4 + 5\log_{81} x^2 = 1{,}5$

ýa-da

$\log_{81} x - 8\log_{81} x + 10\log_{81} x = 1{,}5$

bu ýerden

$$3\log_{81} x = \frac{3}{2}; \quad \log_{81} x = \frac{1}{2}.$$

Jogaby: $x = 9$.

15. Trigonometrik deňlemeler çözülende onuň kesgitleniş ýaýlasy görkezilmeýär. Bu bolsa ýalňyşlyk goýberilmeginiň sebäpleriniň biridir.

Mysal üçin, $tg3x - tgx = 4\sin x$ deňlemäniň çözülişine seredeliň:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} = 4\sin x$$

$$\sin 2x = 4\sin x \cos x \cos 3x;$$

$$\sin 2x = 2\sin 2x \cos 3x;$$

$$\sin 2x - 2\sin 2x \cos 3x = 0;$$

$$\sin 2x(1 - 2\cos 3x) = 0.$$

Bu ýerden:

1) $\sin 2x = 0$; $2x = k\pi$; $x_1 = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$;

2) $1 - 2\cos 3x = 0$; $\cos 3x = \frac{1}{2}$; $3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$;

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \ k \in Z.$$

Soňra şeýle jogap ýazylýar: $x_1 = \frac{k\pi}{2}$; $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$; Emma bu ýerde gödek ýalňyşlyk goýberildi. $x_1 = \frac{k\pi}{2}$ we k täk bolanda berlen deňlemäniň manysy ýokdur.

16. Trigonometrik deňleme çözülende, köplenç, argumente goýulýan çäklendirmeler hasaba alynmaýar. Netijede bolsa ýalňyşlyga ýol berilýär.

$\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ deňlemäniň $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aralykdaky çözüwlerini tapalyň:

$$\cos\frac{x}{2} - (\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}) = 1;$$

$$\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + \sin 2\frac{x}{2} = 1;$$

$$\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} + 1 - \cos^2\frac{x}{2} = 1;$$

$$\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(1 - 2\cos\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Bu ýerden:

1) $\cos\frac{x}{2} = 0$; $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \pi + 2k\pi, k \in Z$;

2) $1 - 2\cos\frac{x}{2} = 0$; $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in Z$;

Jogaby: $x_1 = \pi(2k+1)$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}(6k \pm 1)$, $k \in Z$;

Bu ýerde alnan çözüwleriň hiç biriniň $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aralyga degişli däldigine üns berilmedi.

17. Trigonometrik deňlemeler çözülende käwagtda diňe hususy çözüwi görkezmek bilen çäklenilýär ýa-da umumy çözüwi nädogry ýazylýar.

Mysallar. 1) $\sin x - \cos x = 0$

deňleme çözülende, köplenç, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$ ýazmagyň ýerine $x = \frac{\pi}{4}$ jogap ýazylýar.

2) $\cos(45^\circ - x) = 0$ deňleme çözülende, köplenç, $45^\circ - x = 90^\circ + 180^\circ k$ ýazmagyň ýerine $45^\circ - x = 90^\circ$ ýazylýar.

3) $tgx = \sqrt{3}$ deňleme üçin $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in Z$ ýerine $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$ baha görkezilýär.

4) $\sin x = \frac{1}{2}$ deňlemäniň umumy çözüwini $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + k\pi$ ýa-da $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$ görnüşde ýazmagyň ýerine $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$ ýazylýar.

Şunuň ýaly ýalňyşlyklary goýbermezlik üçin, aşakdaky tablisada getirilen deňlemeleriň çözüwlerini ýatdan bilmelidir.

Deňlemeler	Kökleri
$\sin x = m, \quad -1 < m < 1$	$x = (-1)^k \arcsin m + k\pi, \ k \in Z$
$\cos x = m, \quad -1 < m < 1$	$x = \pm\arccos m + 2k\pi, \ k \in Z$
$tgx = m, \quad -\infty < m < +\infty$	$x = arctgm + k\pi, \ k \in Z$
$ctgx = m, \quad -\infty < m < \infty$	$x = arcctgm + k\pi, \ k \in Z$
$\sin x = 0$	$x = k\pi, \ k \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z$

$cos x = 1$	$x = 2k\pi,\ k \in Z$
$cos x = -1$	$x = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$
$tg x = 0$	$x = k\pi,\ k \in Z$
$ctg x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

Ýene-de umumy çözüwiň nädogry ýazgylaryna mysallar getireliň.

5) $sin^2 x = \frac{3}{4}$, onda $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

6) $cos^2 x = \frac{1}{4}$ deňlemeden taparys $x = \pm arccos\frac{1}{2} + 2k\pi$.

7) eger $tg^2 x = 3$ bolsa, onda $tgx = \sqrt{3}$ we $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Şeýle ýalňyşlyklary goýbermezlik üçin, aşakdaky formulalary ýatda saklamak peýdalydyr:

$$sin^2 x = c,\quad 0 \le c \le 1,\quad x = \pm arcsin\sqrt{c} + k\pi,\ k \in Z;$$

$$cos^2 x = c,\quad 0 \le c \le 1,\quad x = \pm arccos\sqrt{c} + k\pi,\ k \in Z;$$

$$tg^2 x = c,\quad 0 \le c < \infty,\quad x = \pm arctg\sqrt{c} + k\pi,\ k \in Z;$$

$$ctg^2 x = c,\quad 0 \le c < \infty,\quad x = \pm arcctg\sqrt{c} + k\pi,\ k \in Z.$$

Bu formulalary ulanyp, ýokarda getirilen deňlemeleriň nädogry ýazylan umumy çözüwleriniň dogry ýazylyşyny görkezeliň:

5) $sin^2 x = \frac{3}{4};\ sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};\ x = \pm arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z;$

6) $cos^2 x = \frac{1}{4};\ cos x = \pm\frac{1}{2};\ x = \pm arccos\frac{1}{2} + k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z;$

7) $tg^2 x = 3;\ tgx = \pm\sqrt{3};\ x = \pm arctg\sqrt{3} + k\pi = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z.$

18. Trigonometrik deňlemeler çözülende goýberilýän ýalňyşlyklaryň biri-de deňlemäniň ähli agzalaryny üýtgeýän ululyk saklaýan aňlatma gysgaldylanda bolýandyr. Bu bolsa deňlemäniň kökleriniň ýitirilmegine getirýär.

$$cos x(2 sin 2x - 1) = cos x\, sin 2x$$

deňleme çözülende

$$2 sin 2x - 1 = sin 2x$$

deňlemäniň köklerini tapmaklyk bilen çäklenilýär.

Berlen deňlemäni bolsa aşakdaky ýaly çözmelidir.

$\cos x(2\sin 2x - 1) - \cos x \sin 2x = 0;$

$\cos x(2\sin 2x - 1 - \sin 2x) = 0;$

$\cos x(\sin 2x - 1) = 0;$

$\cos x = 0;\qquad \sin 2x - 1 = 0.$

Soňra alnan deňlemeleri çözmelidir.

19. Trigonometrik deňlemeler, köplenç, rasional däl, ýagny uzyn çözülýän usullar bilen çözülýär.

Mysallar.

1) $\sin x + \cos x = 0$ deňlemäni $\sin x + \sin(90^0 - x) = 0$ görnüşe getirýärler.

Sinuslaryň jeminiň formulasy boýunça:

$$2\sin 45^\circ \cos(x - 45^\circ) = 0 \text{ we ş.m.}$$

Berlen deňleme $sin x$ we $cos x$ funksiýalara görä birjynsly bolany üçin, onuň ähli agzalaryny $\cos x$ - a($\cos x \ne 0$) bölüp alarys:

$$tgx + 1 = 0;\quad tgx = -1;\quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$$

2) $\frac{1}{\cos^2 x} - tg^2 x + ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$ deňleme çözülende ony şeýle görnüşde ýazýarlar:

$$\frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} - \frac{sin^2 x}{cos^2 x} + \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{cos^2 x - sin^2 x}{cos^2 x}.$$

Soňra deňlemedäki hemme trigonometrik funksiýalar $sin x$ bilen aňladylýar. Emma berlen deňleme aşakdaky ýaly ýazylsa has amatly bolardy:

$$1 + tg^2 x - tg^2 x - tgx = 1 - tg^2 x$$

ýa-da

$$tg^2 x - tgx = 0.$$

Trigonometrik deňlemeler çözülende biratly trigonometrik funksiýalaryň deňliginiň şertlerini bilmek peýdalydyr.

Biratly trigonometrik funksiýalaryň deň bolmagynyň zerur we ýeterlik şertlerini getireliň:

$sin\alpha = sin\beta$, eger $\alpha - \beta = 2k\pi$ ýa-da $\alpha + \beta = (2k+1)\pi$ bolsa;

$cos\alpha = cos\beta$, eger $\alpha + \beta = 2k\pi$ ýa-da $\alpha - \beta = 2k\pi$ bolsa;

$tg\alpha = tg\beta$, eger $\alpha - \beta = k\pi$ we $\alpha \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\beta \ne (2k+1)\frac{\pi}{2}$ bolsa;

$ctg\alpha = ctg\beta$, eger $\alpha - \beta = k\pi$ we $\alpha \ne k\pi$, $\beta \ne k\pi$. bolsa.

Kim bu formulalary bilmeýän bolsa,onda

$$\frac{tg(5x+5)}{tg(3x+5)} = 1$$

deňlemäni şeýle ýazýar:

$$\frac{tg5x + tg5}{1 - (tg5x\ tg5)} \cdot \frac{1 - tg3xtg5}{tg3x + tg5} = 1 \text{ we ş.m.}$$

Çözüw örän uzyn bolar. Eger tangensleriň deňliginiň şerti ulanylsa, onda deňlemäniň çözüwi gysga bolar. Berlen deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$tg(5x+5) = tg(3x+5),$$

bu ýerden

$$5x + 5 - (3x+5) = k\pi;\quad x = \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$$

20. Trigonometrik deňlemeler çözülende käbir ýagdaýlarda trigonometrik funksiýalaryň köpeltmek hasylyny jeme öwürmekligiň formulalaryny ulanmak amatly bolýar.

1-nji mysal.

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}$$

deňlemäni çözeliň.

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

formuladan peýdalanyp, berlen deňlemäni deňgüýçli deňleme bilen çalşyralyň:

$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{2};$

$\cos 2x - \cos 4x - 1 = 0;$

$\cos 2x - (1 + \cos 4x) = 0;$

$\cos 2x - 2\cos^2 2x = 0;$

$\cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$

Bu ýerden:

1) $cos 2x = 0;\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z;$

2) $cos 2x = \frac{1}{2};\ 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z.$

Jogaby: $x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{4},\ x_2 = (6k \pm 1)\frac{\pi}{6},\ k \in Z.$

2-nji mysal.

$$\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0,5$$

deňlemäni çözeliň.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

formuladan peýdalanyp, deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$\frac{1}{2}(\sin 8x+\sin 2x)=\frac{1}{2}(\sin 8x - 1).$$

Taparys:

$$\sin 2x=-1;\quad 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Jogaby: $x=(4k-1)\frac{\pi}{4}, k\in Z.$

3-nji mysal. $\cos x\cos 2x=\cos 3x$ deňlemäni çözeliň.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

formulany ulanyp, berlen deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)=\cos 3x;$$

$$\cos 3x=\cos x.$$

Bu ýerden alarys:

1) $3x+x=2k\pi;\quad 4x=2k\pi;\quad x_1=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$

2) $3x-x=2n\pi;\quad 2x=2n\pi;\quad x_2=n\pi,\ n\in Z.$

x_1 we x_2 çözüwleri birleşdirip bolýandyr.

Jogaby: $x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z.$

21. Çözmek üçin matematiki «oýlap tapyjylygy» talap edýän trigonometrik deňlemelerde kynçylyk çekilýär.

Mysal.

$$\sin 4x\cos 16x=1 \qquad (1)$$

deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$\sin 20x-\sin 12x=2. \qquad (2)$$

Elbetde, bu ýerden (2) deňligiň diňe

$$\begin{cases}\sin 20x=1,\\ \sin 12x=-1\end{cases} \qquad (3)$$

şertlerde mümkindigini görmek gerekdir. Şeýlelikde (1) deňlemäni çözmeklik (3) deňlemeler ulgamyny çözmeklige getirdi. Taparys:

1) $20x=\frac{\pi}{2}+2m\pi;\quad x=\frac{\pi}{40}+\frac{m\pi}{10},\ m\in Z;$

2) $12x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\quad x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{6},\ n\in Z.$

Deňlemeler sistemasynyň çözüwiniň kesgitlemesi esasynda aşakdaky deňligi düzeliň:

$$\frac{\pi}{40}+\frac{m\pi}{10}=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{6}.$$

$\frac{\pi}{2}$-ä gysgaldyp alarys:

$$\frac{1}{20}+\frac{m}{5}=-\frac{1}{12}+\frac{n}{3}.$$

bu ýerden

$$n=3\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{m}{5}\right)=3\left(\frac{2}{15}+\frac{m}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3m}{5}=1-\frac{3}{5}+\frac{3m}{5}=$$

$$=1+3\cdot\frac{m-1}{5}.$$

n-bitin san, onda $\frac{m-1}{5}$ drob bitin san bolmalydyr.

Diýmek, $m=5k+1$, bu ýerde k-bitin san.

Şunlukda,

$$x=\frac{\pi}{40}+\frac{5k+1}{10}\cdot\pi=\frac{\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}.$$

Jogaby: $x=(4k+1)\frac{\pi}{8}$, bu ýerde $k=0,\pm1,\pm2,...$

22. Alnan çözüwiň barlagy deňlemäniň görnüşine bagly hasap edilýär. Hakykatda bolsa, barlagyň zerurlygy ol deňlemäni çözmek üçin saýlanyp alnan usula baglydyr.

1-nji mysal.

$\sin x+\cos x=1$

deňlemäni çözeliň.

Käte bu deňleme şeýle çözülýär:

$$(\sin x+\cos x)^2=1;$$

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$$

$$\sin 2x=0,\quad 2x=n\pi,\quad x=\frac{n\pi}{2}.$$

Deňleme çözülende onuň iki bölegi-de kwadrata (jübüt derejä) göterildi. Şoňa görä-de alnan çözüwi barlag etmek hökmandyr.

$x=\frac{n\pi}{2}$ çözüwden $n=2(2k+1),\ k=0,\pm1,\pm2,...$ bolanda alynýan bahalary aýyrmak gerekdir.

Berlen deňlemäni başgaça çözeliň. Onuň üçin $\sin x$ we $\cos x$ funksiýalary $tg\frac{x}{2}$ bilen aňladalyň:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=1$$

ýa-da

$$2tg\frac{x}{2}+1-tg^2\frac{x}{2}=1+tg^2\frac{x}{2};$$

$$2tg^2\frac{x}{2}-2tg\frac{x}{2}=0;\quad tg\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2}-1\right)=0.$$

Bu ýerden:

1) $tg\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=k\pi,\ x=2k\pi.$

2) $tg\frac{x}{2}-1=0,\ tg\frac{x}{2}=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$

Özgertmeler geçirilende ähli deňlemeler deňgüýçli deňlemeler bilen çalşyryldy. Kökleri barlamagyň zerurlygy ýokdur.

Jogaby: $x_1=2k\pi,\ x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$

2-nji mysal.

$$\sin 2x+3\cos 2x+3=0 \qquad (1)$$

deňlemäni çözeliň.

Deňlemäni şeýle ýazalyň:

$$2\sin x\cos x+3(\cos 2x+1)=0$$

ýa-da

$$2\sin x\cos x+3\cdot 2\cos^2 x=0;$$

$$\cos x(\sin x+3\cos x)=0.$$

Alarys:

1) $\cos x=0,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi;$

2) $\sin x+3\cos x=0,\ tgx=-3,\ x=arctg(-3)+k\pi.$

Jogaby: $x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x_2=arctg(-3)+k\pi,\ k\in Z.$

§30. Deňsizlikler

1. Deňsizlikler üstünde özgertmeler ýerine ýetirilende:

1) eger deňsizligiň iki bölegi hem položitel bolsa, onda natural görkezijili derejä göterip bolýandyr.

2) eger deňsizligiň iki bölegi hem položitel bolsa, onda iki böleginden hem kwadrat kök alyp bolýar.

3) eger deňsizligiň iki bölegi-de otrisatel bolsa, onda ony täk derejä göterip bolýandyr.

4) eger deňsizligiň iki bölegi-de otrisatel bolsa, onda iki böleginden hem täk derejeli kök alyp bolýar.

5) $a^{\varphi(x)} > a^{\psi(x)}$ deňsizlik $0 < a < 1$ bolanda

$$\varphi(x) < \psi(x)$$

deňsizlige deňgüýçlüdir, eger $a > 1$ bolsa, onda

$$\varphi(x) > \psi(x)$$

deňsizlige deňgüýçlüdir.

6) $\log_a \varphi(x) > \log_a \psi(x)$

deňsizlik $0 < a < 1$ bolanda

$$\begin{cases} \varphi(x) < \psi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ \psi(x) > 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamyna deňgüýçlüdir, eger $a > 1$ bolsa, onda

$$\begin{cases} \varphi(x) > \psi(x), \\ \varphi(x) > 0, \\ \psi(x) > 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ulgamyna deňgüýçlüdir.

2. Deňsizligiň çözüwiniň haçan birnäçe köplükleriň birleşmesi, haçan bolsa olaryň kesişmesi bolýandygyny

anyklamakda kynçylyk çekilýär. Mysal üçin, $x^2 > 1$ deňsizligiň çözüwini käwagtda $x \ge \pm 1$ görnüşde ýazýarlar. Ony şeýle ýazmalydyr:

$$x^2 > 1,\ |x| > 1$$

ýa-da

$$x^2 > 1,\ x < -1 \text{ ýa-da } x > 1.$$

3. Eger deňsizlikde drob aňlatma bolup, onuň maýdalawjysynda üýtgeýän ululykly aňlatma bar bolsa, onda deňsizligiň iki bölegini maýdalawjydaky aňlatmany köpeltmeli däldir, çünki onuň alamaty näbellidir.

Mysal üçin,

$$\frac{2x+3}{x-1} > 1$$

deňsizligi şeýle çözmelidir:

$$\frac{2x+3}{x-1} - 1 > 0;\quad \frac{2x+3-x+1}{x-1} > 0;\quad \frac{x+4}{x-1} > 0.$$

Alnan deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüp alarys $x > 1$ ýa-da $x < -4$.

4. Hakyky sanyň absolýut ululygy düşünjesi bilen baglanyşykly deňsizlikleri çözmeklige garalyň.

1-nji mysal. $|3x-1| + |x| > 1$ deňsizligi çözeliň. Absolýut ululygyň belgisiniň içindäki aňlatmanyň köklerini tapalyň we olary artýan tertipde ýerleşdireliň: $x = 0,\ x = \frac{1}{3}$. Bu nokatlar san okuny:

$$x < 0,\ 0 \le x < \frac{1}{3},\ x \ge \frac{1}{3}$$

aralyklara bölýär. Bu aralyklaryň her birinde berlen deňsizligi aýratynlykda çözeliň.

1) $x < 0$. Bu aralykdaky x-iň bahalary üçin

$$|3x-1| = -3x+1,\ |x| = -x$$

bolar. Şoňa görä-de berlen deňsizlik şeýle görnüşe getirilýär:

$$-3x+1-x > 1,\ -4x > 0,\ x < 0.$$

2) $0 \le x < \frac{1}{3}$. Görkezilen aralykda

$$|3x-1| = -3x+1,\ |x| = x.$$

Berlen deňsizlik şeýle ýazylýar:

$-3x+1+x > 1$, $-2x > 0$, $x < 0$ – bu aralyk garalýan aralyk bilen kesişmeýär.

3) $x \ge \frac{1}{3}$. Bu aralykda

$|3x-1| = 3x-1,\ |x| = x.$

Berlen deňsizlik aşakdaky görnüşi alar:

$3x-1+x > 1,\ 4x > 0,\ x > \frac{1}{2}.$

Jogaby: $x < 0,\ x > \frac{1}{2}$.

2-nji mysal. $|4-3x| < 2x$ deňsizligi çözeliň.

Deňsizligiň sag bölegi onuň çep böleginden diňe $x > 0$ bolanda uly bolup biler. Berlen deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$-2x < 4-3x < 2x.$$

Onda aşakdaky ulgama geleris:

$$\begin{cases} -2x < 4-3x, \\ 4-3x < 2x. \end{cases}$$

Ulgamyň birinji deňsizliginden $x < 4$, ikinji deňsizliginden $x > \frac{4}{5}$ taparys.

Jogady: $\frac{4}{5} < x < 4$.

3-nji mysal. $\left|\frac{2x+1}{x+1}\right| > 3$ deňsizligi çözeliň.

Berlen deňsizlik aşakdaky iki deňsizlige deňgüýçlüdir:

$$\frac{2x+1}{x+1} < -3 \text{ we } \frac{2x+1}{x+1} > 3.$$

Bu deňsizlikleriň her birini aýratynlykda çözeliň:

1) $\frac{2x+1}{x+1} < -3,\quad \frac{2x+1}{x+1} + 3 < 0,\quad \frac{5x+4}{x+1} < 0.$

Soňky deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüp alarys:

$$-1 < x < -\frac{4}{5}.$$

2) $\frac{2x+1}{x+1} > 3,\quad \frac{2x+1}{x+1} - 3 > 0,\quad \frac{-x-2}{x+1} > 0,\quad \frac{x+2}{x+1} < 0.$

Bu ýerden $-2 < x < -1$.

$-2 < x < -1$.

Jogaby: $-2 < x < -1,\ -1 < x < -\frac{4}{5}$.

5. Kwadrat kök belgisiniň aşagynda üýtgeýän ululyk saklaýan aňlatmaly deňsizlikler çözülende kwadrat köküň aşagyndaky aňlatma çäklendirmeler goýulmalydyr. Mysal üçin, $4 + \sqrt{x-5} < 2$ deňsizlik üçin hökman $x - 5 \ge 0$ şert goýulmalydyr.

$$\sqrt{4x+21} < x+4$$

deňsizligi çözeliň.

Berlen deňsizlik aşakdaky ulgama deňgüýçlüdir.

18. Sargyt № 2629

$$\begin{cases} 4x+21 \ge 0, \\ x+4>0, \\ 4x+21<(x+4)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x \ge -21, \\ x>-4, \\ x^2+4x-5>0; \end{cases}$$

ýa-da
$$\begin{cases} x \ge -\dfrac{21}{4}; \\ x>-4; \\ (x-1)(x+5)>0. \end{cases}$$

Jogaby: $x>1$.

6. Käbir logarifmik deňsizlikleriň çözülişine garalyň.

1-nji mysal. $\log_{\frac{2}{2+x^2}}(x+5)<-1$ deňsizligi çözeliň.

Kesgitleniş ýaýlasyny tapalyň.

$$\begin{cases} x+5>0, \\ \dfrac{2}{2+x^2} \ne 1; \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} x>-5, \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$x \ne 0$ bolanda logarifmiň esasy $\dfrac{2}{2+x^2}<1$ bolýar, şoňa görä-de berlen deňsizligiň çep böleginde duran logarifmik funksiýa kemelýän funksiýadyr.

Deňsizligi aşakdaky görnüşde ýazalyň:

$$\log_{\frac{2}{2+x^2}}(x+5)<-\log_{\frac{2}{2+x^2}}\frac{2}{2+x^2}.$$

Potensirläp alarys:

$$x+5>\frac{2+x^2}{2}.$$

Bu ýerden

$$x^2-2x-8<0;$$
$$(x+2)(x-4)<0.$$

Jogaby: $-2<x<0,\ 0<x<4$.

2-nji mysal. $\log_x(x^2+3x-3)>1$ deňsizligi çözeliň. Deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyny anyklalyň. Berlen deňsizligiň aşakdaky şertlerde manysy bardyr:

$$\begin{cases} x>0,\ x \ne 1; \\ x^2+3x-3>0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) deňsizligi çözüp taparys:

$$x<\frac{-3-\sqrt{21}}{2} \quad \text{we} \quad x>\frac{-3+\sqrt{21}}{2}.$$

Şunlukda kesgitleniş ýaýla şeýle bolar:

$$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1,\ x>1.$$

Logarifmiň esasy x-üýtgeýän ululygy saklaýar, şoňa görä-de aşakdaky ýagdaýlara garalyň:

1) $0<x<1$. Berlen deňsizligi potensirläp alarys:

$$x^2+3x-3<x,\quad x^2+2x-3<0$$

ýa-da

$$(x-1)(x+3)<0.$$

Bu ýerden

$$-3<x<1.$$

Deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyny göz öňünde tutup alarys:

$$\frac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1.$$

2) $x>1$. Berlen deňsizligi potensirläp alarys:

$$x^2+3x-3>x,\quad x^2+2x-3>0$$

ýa-da

$$(x-1)(x+3)>0.$$

Bu ýerden

$$x<-3,\ x>1$$

$x<-3$ bahalar berlen deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyna degişli däldir.

Jogaby: $x>1,\ \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}<x<1$.

Şu görnüşdäki deňsizlikler çözülende şeýle ýalňyşlyklara ýol berilýär:

a) berlen deňsizlikde logarifmiň esasy $x>0$ bolan ýagdaýda $x=1$ baha aýrylmaýar;

b) deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasy anyklanmaýar.

3-nji mysal. $5^{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)}<1$ deňsizligi çözeliň.

Berlen deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasy ähli hakyky sanlaryň köplügidir. Sebäbi x-iň islendik bahasynda $x^2-5x+7>0$. Berlen deňsizlik aşakdaky deňsizlige deňgüýçlüdir:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)<0.$$

$a<1$ bolanda logarifmik funksiýanyň kemelýändigini göz öňünde tutup alarys

$$x^2-5x+7>1$$

ýa-da

$$(x-2)(x-3)>0.$$

Jogaby: $x<2,\ x>3$.

Gönükmeler

586. Deňlemäni çözüň:

1) $-5=x$; 3) $x=x+1$; 5) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}+1$;

2) $x=x$; 4) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$; 6) $\dfrac{1}{1/x}=0$;

587. Deňlemäni çözüň:

1) $\dfrac{0}{x}=0$; 3) $tgx=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; 5) $\log_2 x=1$;

2) $\dfrac{x^2}{x}=0$; 4) $2^{\log_2 x}=x$; 6) $\sqrt{x}-\sqrt{x}=0$.

588. Deňlemäni çözüň:

1) $\dfrac{x}{x}=1$; 4) $\sqrt{-x}=1$;

2) $\dfrac{x}{x}=0$; 5) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x-x^2}$;

3) $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-1$; 6) $\sqrt{-x^2}=1$.

589. Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$; 2) $2\sqrt{x+5}=x+2$;

3) $\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$; 4) $\sqrt{x-2\sqrt{x+4}}=\sqrt{7}$;

5) $\sqrt{x^2+8}=2x+1$.

590. Deňlemäni çözüň:

1) $2\lg x=\lg(x+6)$; 3) $\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1$;

2) $\log_x(2x^2-3x-4)=2$; 4) $\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2$.

591. Deňlemäni çözüň:

1) $x+1=2^{-x}$; 5) $x^2+1=\cos x$;

2) $2x-1=\dfrac{1}{x^6}$; 6) $\sin x+x=0$;

3) $2^x+3^x=5$; 7) $\log_3(3^x-8)=2-x$;

4) $3^x+4^x=5^x$; 8) $\log_7(6+7^{-x})=1+x$.

592. Deňlemäni çözüň:

1) $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0;$

2) $(x^2-5x+6)\sqrt{2-x}=0;$

3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+5}=0;$

4) $\dfrac{(x^2+3x-4)(x^2+2x-3)}{\sqrt{9-x^2}(x^2+2x+3)}=0.$

593. Deňlemeler deňgüýçlümi:

1) $\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}=1$ we $x-2=1;$

2) $\dfrac{1}{ctgx}=0$ we $tgx=0;$

3) $\lg((x+3)(x-1))=\lg(x-1)$ we $\lg(x+3)=0;$

4) $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ we $x+2=1;$

5) $\sin 5x=\sin 2x$ we $5x=2x+\pi n,\ \ n\in z;$

6) $2^{\log_2(2x+1)}=\log_2 2^x$ we $2x+1=x?$

594. Deňlemäni çözüň:

1) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23);$

2) $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2;$

3) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4x-6}{(x+1)(x+3)}=3;$

4) $\sin^2 x+\cos^2 3x=1.$

595. Deňlemäni çözüň:

1) $\sin 2x=2\sqrt{3}\cos^2 x;$ 3) $\dfrac{|x-2|}{|x-1|-1}=1;$

2) $x^2+3x+|x+3|=0;$ 4) $(x-2)^2|\cos x|=\cos x.$

596. Deňlemäni çözüň:

1) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4;$ 3) $|5x^2-3|=2;$

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2};$ 4) $|3x-5|=|5-2x|.$

597. Ornuna goýma usuly bilen deňlemäni çözüň:

1) $8^x-4^x=2^x;$

2) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42;$

3) $4|\sin x|+2\cos 2x=3;$

4) $\dfrac{4}{3}\log_3^2(5x-6)^2-\log_3(5x-6)^3\cdot\log_3 x^6=-6\log_3^2\dfrac{1}{x}.$

598. Deňsizligi çözüň:

1) $4x^2-12x+11>0;$ 3) $3x<3+x^2;$

2) $\dfrac{4x-1}{2-3x}\ge-\dfrac{5}{8};$ 4) $\log_5(26-3^x)>2.$

599. Deňsizligi çözüň:

1) $(2^2-4)(x^2-2x-3)>0;$ 3) $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\ge 0;$

2) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0;$ 4) $\dfrac{\cos^2 x-4\cos x+3}{3-x}\le 0.$

600. Deňsizligi çözüň:

1) $(x+3)^2(x-2)(5+x)^3<0;$

2) $x\le 3-\dfrac{1}{x-1};$

3) $(4x^2-16x+7)\log_2(x-3)>0;$

4) $2(x-4)+|3x+5|\ge 16.$

601. Deňsizligi çözüň:

1) $\dfrac{1}{\log_3(x^2-7x+12)}<\dfrac{1}{\log_3};$

2) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{|x|-1}\ge\dfrac{2}{x-1};$

3) $\log_3((x+2)(x+4))+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7;$

4) $\dfrac{2x-3}{4-x}>\dfrac{1}{x};$

5) $(\log_2 x^2)^2<4.$

602. Deňsizligi çözüň:

1) $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x;$ 3) $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1;$

2) $4x-6>\sqrt{6x-2x^2};$ 4) $\dfrac{\sqrt{27-2x-x^2}}{3-x}<1.$

603. Deňsizligi çözüň:

1) $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le(\sqrt{2}-1)^{-x};$

2) $5^{\log_3\frac{2}{x+2}}<1;$

3) $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x+1}{x+1}\ge-1;$

4) $\log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0.$

604. Deňsizligi çözüň:

1) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2\ge 4;$ 3) $2\cdot x^{2\lg(x-1)}\ge 1+(x-1)^{\lg x};$

2) $\log_7 x-\log_x\dfrac{1}{7}\ge 2;$ 4) $\log_{9x^2}(6+2x-x^2)\le\dfrac{1}{2}.$

§31. Iki üýtgeýän ululykly deňlemeler we deňsizlikler

1. Deňlemeler ulgamyny çözmegiň esasy usullary. Goý, iki üýtgeýän ululykly iki deňleme berlen bolsun: $f(x,y)=0$ we $g(x,y)=0$. Eger $f(a,b)=0$ we $g(a,b)=0$ şertleri kanagatlandyrýan ähli $(a;\ b)$ sanlaryň jübütini tapmak meselesi goýulsa, onda *deňlemeler ulgamy* berlipdir diýilýär. Iki üýtgeýän ululykly *deňlemeler ulgamynyň çözüwi* diýip, üýtgeýän ululyklaryň ulgamyň her bir deňlemesini dogry san deňligine öwürýän bahalar jübütine aýdylýar.

Deňlemeler ulgamyny çözmek – onuň hemme çözüwini tapmak ýa-da çözüwleriniň ýokdugyny subut etmek diýmekdir. Şol bir çözüwleri bolan deňlemeler ulgamlaryna *deňgüýçli deňlemeler ulgamlary* diýilýär. Çözüwleri ýok bolan deňlemeler ulgamlary hem deňgüýçli deňlemeler ulgamlary hasaplanylýar.

Iki üýtgeýän ululykly deňlemeler ulgamlaryny çözmek üçin ornuna goýmak, goşmak we grafik usullaryndan peýdalanylýar.

1-nji mysal. $\begin{cases} y-3x=10, \\ y^2-24x=100 \end{cases}$

deňlemeler ulgamyny çözeliň.

Birinji deňlemeden y-i x arkaly aňladalyň: $y=3x+10$. Ulgamyň ikinji deňlemesinde y-iň ýerine $3x+10$ goýup alarys:

$$(3x+10)^2-24x=100,$$

$$9x^2+60x+100-24x=100,$$

$$9x^2+36x=0,$$

$$x(x+4)=0,$$
$$x_1=0,\quad x_2=-4.$$

y-iň degişli bahasyny $y=3x+10$ deňlemeden taparys.

Eger $x_1=0$ bolsa, onda $y_1=10$; eger $x_2=-4$ bolsa, onda $y_2=-2$ bolar.

Diýmek, ulgamyň iki çözüwi bardyr: (0; 10) we (−4; −2).

2-nji mysal. $\begin{cases} x^2+y^2-2x+y=0 \\ 2x^2+2y^2+x-3y-5=0 \end{cases}$

deňlemeler ulgamyny çözeliň.

Eger ulgamyň birinji deňlemesiniň iki bölegini-de 2-ä köpeldip, alnan deňlemäni ulgamyň ikinji deňlemesinden aýyrsak, onda ikinji derejeli agzalary saklamaýan deňleme alarys:

$$(2x^2+2y^2+x-3y-5)-(2x^2+2y^2-4x+2y)=0,$$
$$5x-5y-5=0,$$
$$x-y-1=0.$$

Şunlukda, biz berlen ulgama deňgüýçli bolan ýönekeý deňlemeler ulgamyny aldyk:

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ x^2+y^2-2x+y=0 \end{cases}$$

Bu ulgamy ornuna goýma usuly bilen aňsat çözüp bolýar. Ulgamyň birinji deňlemesinden $y=x-1$. Ony ikinji deňlemede ornuna goýup alarys:

$$x^2+(x-1)^2-2x+(x-1)=0,$$
$$2x^2-3x=0,\quad x_1=0,\quad x_2=1{,}5.$$

Eger $x_1=0$ bolsa, onda $y_1=x_1-1=-1$; eger $x_2=1{,}5$ bolsa, onda $y_2=x_2-1=1{,}5-1=0{,}5$.

Diýmek, berlen ulgamyň çözüwi şeýledir: (0;−1); (1,5; 0,5).

3-nji mysal. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5 \end{cases}$

ulgamy çözeliň.

Täze üýtgeýän ululyk girizmek usulyny ulanalyň.

$\frac{x}{y}=z$ bolsun, onda $\frac{y}{x}=\frac{1}{z}$ bolar we ulgamyň birinji deňlemesi şeýle görnüşi alar: $z+\frac{1}{z}=\frac{13}{6}$.

Alnan deňlemäni z-e görä çözeliň:

$$6z^2+6=13z,$$
$$6z^2-13z+6=0,$$
$$z_1=\frac{2}{3},\quad z_2=\frac{3}{2}.$$

Şeýlelikde ýa-ha $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, ýagny $y=\frac{3}{2}x$ ýa-da $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, ýagny $y=\frac{2}{3}x$ bolar.

Diýmek, berlen ulgamyň birinji deňlemesi $y=\frac{3}{2}x$ we $y=\frac{2}{3}x$ iki deňlemä deňgüýçlüdir.

Şoňa görä-de biz aşakdaky iki ulgamy çözmeli bolarys:

$$\begin{cases} y=\dfrac{3}{2}x, \\ x+y=5; \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x, \\ x+y=5. \end{cases}$$

Birinji ulgamdan $x=2,\ y=3$, ikinji ulgamdan bolsa $x=3,\ y=2$ taparys. Şeýlelikde, berlen deňlemeler ulgamynyň çözüwi (2; 3) we (3; 2) bolar.

2. Iki üýtgeýän ululykly deňsizlikler we deňsizlikler ulgamy. Bir üýtgeýän ululykly deňsizligi çözmegiň deňleme çözmeklige getirilişine meňzeşlikde iki üýtgeýän ululykly deňsizlik iki üýtgeýän ululykly deňlemäniň grafigini gurmaklyga syrykdyrylýar. Biz $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\ge 0$ $\left(\text{ýa-da } \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\le 0\right)$ görnüşli deňsizlige garamak bilen çäklenjekdiris, bu ýerde $P(x,y)$ we $Q(x,y)$ – köpagzalar. Şeýle deňsizligi çözmek üçin $P(x,y)=0$ we $Q(x,y)=0$ deňlemeleriň grafiklerini gurmalydyr. Bu grafikler tekizligi birnäçe böleklere böler. Ol bölekleriň her biriniň içinde $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ aňlatma şol bir alamata eýedir. Şoňa görä-de, böleklerde aňlatmanyň alamatyny kesgitlemek üçin bölegiň haýsy hem bolsa bir nokadynda bu aňlatmanyň alamatyny kesgitlemek ýeterlikdir. Soňra berlen deňsizlikleriň ýerine ýetýän böleklerini almaly, olaryň birleşmesi gözlenýän çözüw bolýandyr.

1-nji mysal.

$$(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-25)>0 \qquad (1)$$

deňsizligi çözeliň.

Ilkibaşda $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-25)=0$ deňlemäniň grafigini guralyň. Ol iki töwerekden ybaratdyr: $x^2+y^2-4=0$ we $x^2+y^2-25=0$ (44-nji *a* sur.). Bu töwerekler tekizligi üç bölege bölýär. $x^2+y^2=4$

töweregiň içinden $O(0;0)$ nokat alalyň. Onuň koordinatasyny (1) deňsizlikde goýup, $(-4)(-25)>0$ dogry san deňsizligi alarys. Diýmek, görkezilen töweregiň içinde ýatýan bölegiň hemme nokatlary (1) deňsizligiň çözüwidir. Iki töweregiň arasyndaky halkadan $A(3;0)$ nokady alalyň. Onuň koordinatasy (1) deňsizligi kanagatlandyrmaýar, çünki $(3^2-4)(3^2-25)<0$. Diýmek, görkezilen halkanyň (onuň araçägi hem girýär) nokatlary (1) deňsizligiň çözüwi däldir. Ahyrynda, $B(6;0)$ nokady alyp, $x^2+y^2=25$ töweregiň daşynda ýatan ähli nokatlaryň gözlenilýän çözüwe degişlidigine göz ýetirýäris. Şeýlelikde bu çözüw 44-nji *b* suratda ştrihlenen nokatlaryň köplüginden durýandyr.

2-nji mysal. $\dfrac{x^2+y^2-9}{y-x^2}\ge 0$

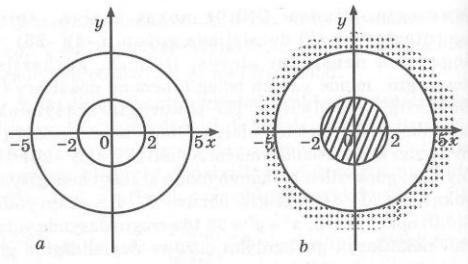
deňsizligi çözeliň.

$x^2+y^2-9=0$ we $y-x^2=0$ çyzyklar tekizligi 4 bölege bölýär (45-nji sur.). Ýokarda görkezilen usul bilen deňsizligiň 45-nji suratda ştrihlenen böleklerde ýerine ýetýändigine göz ýetirmek bolýar. Ondan başga-da berlen deňsizlik $y=x^2$ parabola bilen $x^2+y^2=9$ töweregiň kesişme nokadyndan başga, bu töweregiň ähli nokatlarynda ýerine ýetýändir (çünki kesişme nokatlarda $\dfrac{x^2+y^2-9}{y-x^2}$ aňlatmanyň san bahasy ýokdur).

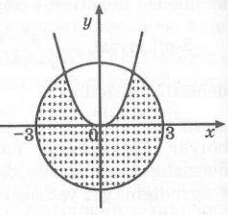
3-nji mysal. $\begin{cases} x^2+y^2-25>0 \\ x+y-7<0 \end{cases}$

deňsizligi çözeliň.

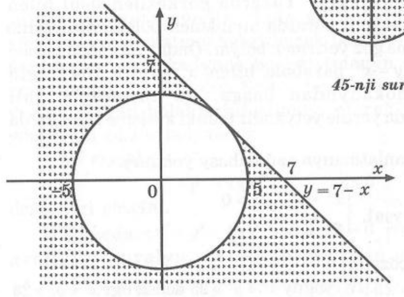
$x^2+y^2-25>0$, ýagny $x^2+y^2>25$ deňsizligi $x^2+y^2=25$ töweregiň daşynda ýatan nokatlar kanagatlandyrýar



44-nji surat



45-nji surat

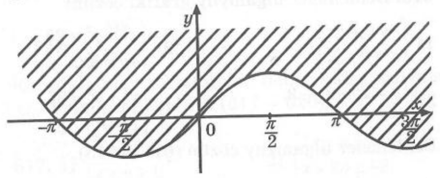


46-njy surat

(46-njy sur.). $x+y-7<0$, ýagny $y<7-x$ deňsizligi $y=7-x$ göni çyzykdan aşakda ýatan nokatlar kanagatlandyrýar.

Görkezilen ýaýlaryň kesişmesi (ol 46-njy suratda ştrihlenendir) berlen deňsizlikler sistemasynyň çözüwleriniň köplügi bolýar.

Beýan edilen usuly has umumy görnüşdäki deňsizliklere hem ulanmak bolýandyr. Mysal üçin, $y>\sin x$ deňsizligiň çözüwi tekizligiň $y=\sin x$ sinusoidanyň (47-nji sur.) ýokarsynda ýerleşen tekizligiň bölegi bolýar.



47-nji surat

Gönükmeler

Deňlemeler ulgamyny çözüň (605 – 609).

605. 1) $\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 4x+y=11; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y=5, \\ 5x+2y=3. \end{cases}$

606. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+5y=-2, \\ 5xy=-8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ xy=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=8, \\ xy=20. \end{cases}$

607. 1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=41; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=8. \end{cases}$

608. 1) $\begin{cases} x+xy+y=-1, \\ x-xy+x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy+x+y=-1, \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$

609. 1) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}. \end{cases}$

610. Deňlemeler ulgamyny grafiki çözüň:

1) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4y=3x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=x^2-2x-3, \\ x-y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ x+y^2=13. \end{cases}$

Deňlemeler ulgamyny çözüň (611 – 613).

611. 1) $\begin{cases} 8^{2x+1}=8\cdot 2^{4y+1}, \\ 5^{x-y+1}=\sqrt{25^{2y+1}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=65, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=5. \end{cases}$

612. 1) $\begin{cases} \lg x+2\lg y+3=0, \\ \lg x^3-\lg y^2=7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 3, \\ \lg(x+y)-3\lg 2=\lg(x-y). \end{cases}$

613. 1) $\begin{cases} \sin x-\sin y=\frac{1}{2}, \\ x-y=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{1}{4}, \\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x+\sin y=\frac{1}{2}, \\ x+y=\frac{\pi}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{3}{4}, \\ tgx\,tgy=3. \end{cases}$

Koordinatalar tekizliginde deňsizlikleriň çözüwini şekillendiriň (614 – 616).

614. 1) $2x-y<5$; 2) $4x+2y\geq 5$.

615. 1) $xy<4$; 2) $x^2+y^2\leq 9$.

616. 1) $(x^2+y^2-3)(x^2+y-6^2)\leq 0$;

2) $\frac{xy}{x-y+1}<0$.

Koordinatalar tekizliginde deňsizlikler sistemasynyň çözüwini şekillendiriň (617 – 620).

617. 1) $\begin{cases} x-y\geq 1, \\ x+y\geq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y\leq 1, \\ x+2y\geq -2. \end{cases}$

618. 1) $\begin{cases} y\geq x^2-1, \\ x+y\leq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leq 4, \\ y\geq x^2. \end{cases}$

619. 1) $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y\leq \cos x, \\ y\geq x^2, \\ x\geq 0. \end{cases}$

620. 1) $\begin{cases} x+y-2\leq 0, \\ x-y+2\geq 0, \\ x-y-1\leq 0, \\ x+y+2\geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y\leq 2^x, \\ y\leq x^2+4x-12, \\ y\geq 0. \end{cases}$

19. Sargyt № 2629

VI BAP. GAÝTALAMAGA DEGIŞLI MESELELER

§32. Hakyky sanlar

1. Rasional we irrasional sanlar

621. Aşakdaky tassyklama dogrumy:

a) eger natural san 6-a bölünse, onda ol 3-e bölünýär;

b) eger iki sanyň jemi jübüt bolsa, onda goşulyjynyň her biri jübütdir;

ç) eger iki sanyň köpeltmek hasyly nola deň bolsa, onda köpeldijiniň her biri nola deňdir;

d) eger käbir sanyň kuby 8-e bölünýän bolsa, onda bu san jübüt sandyr?

622. Üç yzygider natural sanlaryň jeminiň 3-e, olaryň köpeltmek hasylynyň bolsa 6-a bölünýändigini subut ediň.

623. Alnan bäş belgili san a) 3-e we 5-e, b) 8-e we 9-a bölüner ýaly 523 sana sagdan iki sifri ýazyň.

624. 10^{56} sanyň 3 we 11-e bölünmeýändigini subut ediň.

625. Iki belgili sandaky birliklerdäki sifr onlukdaky sifrden 2 san köp. Şol sanyň özi 30-dan uly we 40-dan kiçi. Bu sany tapyň.

626. Eger $\frac{a}{b}$ drob gysgalmaýan bolsa, onda $\frac{ab}{a+b}$ drobuň hem gysgalmaýandygyny subut ediň.

627. a) $|a|=|-a|$; b) $x \le |x|$; ç) $|x|^2 = x^2$ bolýandygyny subut ediň.

Aňlatmalaryň bahalaryny tapyň (628 – 629).

628. a) $\dfrac{2,57:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)}$;

b) $\dfrac{3\frac{1}{3}:10+0,175:\frac{7}{20}}{1\frac{3}{4}-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}$;

ç) $\left(1,4-3,5:1\frac{1}{4}\right):2,4+3,4:2\frac{1}{8}$;

d) $\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0,25}}{6-\frac{46}{1+2,2\cdot10}}$.

629. a) $\dfrac{0,5^2-0,5}{0,4^2+0,1^2+2\cdot0,4\cdot0,1}$;

b) $\dfrac{1,2^2-1,8^2}{1,2\cdot0,2-1,2\cdot0,8}$;

ç) $\dfrac{0,6^2+0,1^2-2\cdot0,6\cdot0,1}{1,5-1,5^2}$;

d) $\left(1\frac{3}{5}\right)^2-\left(4\frac{5}{8}-2,4\right):\frac{5}{8}$.

630. Sanlaryň ýakynlaşan bahalarynyň ýazgysynda dogry sifrleri görkeziň:

a) $3,82\pm0,1$;

b) $1,980\cdot10^4\pm0,001\cdot10^4$;

ç) $7,891\pm0,1$;

d) $2,8\cdot10^{-4}\pm0,3\cdot10^{-4}$.

631. $(1+x)^n \approx 1+nx$ formuladan peýdalanyp, takmynan, hasaplaň:

a) $1,002^5$; b) $0,997^4$; ç) $2,004^3$; d) $3,0^5$;

632. $a\approx11,5$; $b\approx3,8$ bolýandygy mälim. Aňlatmalaryň ýakynlaşan bahalaryny tapyň:

a) $a+b$; b) $3a-b$; ç) ab; d) $\frac{a}{b}$.

633. Ady droblar görnüşinde ýazyň:

a) 2,(3); b) 0,(66); ç) 1,0(8); d) 1,(33).

634. Aşakdaky sanlaryň her biriniň rasional san bolup bilmeýändigini subut ediň:

a) $\sqrt{5}$; b) $2\sqrt{7}$; ç) $\sqrt{5}+1$; d) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

635. Eger, a) a we b – rasional san,

b) a we b – irrasional san,

ç) a – rasional, b bolsa – irrasional san bolsa,

a we b sanlaryň jeminiň (köpeltmek) hasylynyň rasional (irrasional) san bolýandygy dogrumy?

636. 0,01 takyklyga çenli tapyň:

a) $\sqrt{2}+\frac{5}{9}$; b) $\sqrt{5}-\frac{2}{7}$; ç) $\sqrt{3}+\frac{5}{6}$; d) $\sqrt{6}-\frac{1}{11}$.

637. Sanlary artýan tertipde goýuň. Olaryň haýsysynyň rasional, haýsysynyň bolsa irrasional san bolýandygyny görkeziň.

a) $\sqrt{3}$; -2; $-1,7$; $\frac{\pi}{3}$;

b) $log_2 3$; -1; $\frac{5}{6}$; $-\sqrt{5}$;

ç) 0,(2); $\frac{7}{6}$; $-\frac{\sqrt{5}}{2}$;

d) e, $-1,(6)$; $\sqrt{10}$; $\lg 100$.

Sanlary deňeşdiriň (638-639):

638. a) $\dfrac{4}{lg\frac{1}{2}}$ we $\dfrac{7}{lg\frac{1}{2}}$; ç) $log_3 7$ we $log_7 3$;

b) $(\sqrt{5}+2)$ we $\sqrt{17}$; d) $(\sqrt{7}+3)$ we $\sqrt{13}$.

639. a) $15^{log_3 10}$ we $10^{log_3 15}$;

b) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ we $(\sqrt{30}-\sqrt{3})$;

ç) $\sin 2,1$ we $\sin 7,98$;

d) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})$ we $(\sqrt{3}+\sqrt{10})$.

640. Sanlaryň rasionaldygyny subut ediň:

a) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$;

b) $(\sqrt{2}+1)^2+(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)$;

ç) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}$;

d) $(3\sqrt{18}+2\sqrt{8}+4\sqrt{50}):\sqrt{2}$.

2. Göterimler. Proporsiýalar

641. Eger: a) x san 320-niň 2,5 göterimini düzýän bolsa; b) x sanyň 2,5 göterimi 75-e deň bolsa; ç) x san 84-üň 2,8 göterimini düzýän göteriminiň sanyna deň bolsa, d) x san 35-iň 140 göterimini düzýän bolsa, x sany tapyň.

642. 2007-nji ýylda edaralaryň önüm öndürişi 4 göterim, soňky ýyl bolsa 8 göterim artdy. Iki ýylyň dowamynda önüm öndürmegiň ortaça ýyllyk ösüşini tapyň.

643. Berlen dört sanyň birinji üçüsi 5,3, 20 sanlara proporsional, dördünji san bolsa üçünjiniň 15 göterimini düzýär. Eger ikinji san beýleki sanlaryň jeminden 375 san az bolsa, bu sanlary tapyň.

644. Güýz-gyş döwründe gök önümleriň bahasy 25 göterim artdy. Tomus önümleriň bahasy ozalky bahasy ýaly bolmagy üçin baharda bahany näçe göterim aşaklatmaly bolar?

645. Proporsiýalaryň näbelli agzasyny tapyň:

a) $12 : \frac{1}{8} = x : \frac{5}{36}$; ç) $\frac{0,13}{x} = \frac{26}{3\frac{1}{3}}$;

b) $x : (-0,3) = 0,15 : 1,5$; d) $\frac{x}{2,5} = \frac{-6,2}{15}$.

646. Deňlemeleri çözüň:

a) $\frac{x-2}{2,5} = \frac{6}{x}$; ç) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{6,5}{1,5}$;

b) $\frac{x}{x+5} = \frac{4,8}{1,2}$; d) $\frac{4-x}{1,2} = \frac{5}{x+3}$.

647. ABC üçburçlugyň AB tarapyna E nokat arkaly AC tarapa parallel bolan göni çyzyk geçireliň. a) eger $AB = 22,5$ *sm*; $AE = 18$ *sm*; $BC = 15$ *sm* bolsa, göni çyzygyň BC tarapy bölýän kesimlerini, b) eger $AB = 7 : 5$ *sm*, $AE = 5$ *sm*, ABC üçburçlugyň meýdany bolsa 72 *sm* bolsa, ABC üçburçlugyň bölünýän figuralarynyň meýdanlaryny tapyň.

3. Progressiýalar

648. Eger arifmetik progressiýanyň birinji agzasy 2-ä, ýedinji agzasy bolsa 20-ä deň bolsa, onda onuň 20-nji agzasynyň jemini tapyň.

649. Berlen 4 we 40 sanlar bilen bilelikde arifmetik progressiýany emele getirýän we olaryň arasynda ýerleşýän dört sany tapyň.

650. $\frac{1}{log_3 2}$, $\frac{1}{log_6 2}$, $\frac{1}{log_{12} 2}$ sanyň arifmetiki progressiýanyň üç yzygider agzasy bolýandygyny subut ediň.

651. Arifmetiki progressiýanyň birinji we bäşinji agzalarynyň jemi 26, onuň ikinji we dördünji agzalarynyň köpeltmek hasyly bolsa 160. Progressiýanyň birinji alty agzalarynyň jemini tapyň.

652. Eger görkezilen tertipde alnan a, b, c, d sanlaryň geometrik progressiýany düzýändikleri belli bolsa $(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$ aňlatmany ýönekeýleşdiriň.

653. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ we $\frac{1}{2}$ sanlaryň geometrik progressiýany emele getirýändigini subut ediň.

654. Geometrik progressiýanyň dördünji agzasy ikinji agzasyndan 24 san köp, ikinji we üçünji agzalarynyň jemi bolsa 6. Progressiýanyň birinji agzasyny we maýdalawjysyny tapyň.

655. Birinji, ikinji we soňky agzalary degişlilikde 3, 12 we 3072 bolan geometrik progressiýanyň agzalarynyň sanyny tapyň.

656. Geometrik progressiýanyň maýdalawjysy $\frac{1}{3}$, onuň dördünji agzasy $\frac{1}{54}$, ähli agzalarynyň jemi bolsa $\frac{121}{162}$. Şu progressiýanyň näçe agzasy bar?

657. Eger gyraky sanlaryň jemi 14, ortaky sanlaryň jemi bolsa 12, birinji üçüsi geometrik progressiýany, soňky üçüsi bolsa, arifmetik progressiýany düzýän dört sany tapyň.

658. $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ bolan tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň maýdalawjysyny we jemini tapyň.

659. Tükeniksiz kemelýän geometrik progressiýanyň ilkinji üç agzalarynyň jemi 10,5-e, progressiýanyň jemi bolsa 12-ä deň. Onuň birinji agzasyny we maýdalawjysyny tapyň.

660. Her biri $a (a > 0,\ a \neq 1)$ esasly dereje bolýan üç san geometrik progressiýany düzýär. Şu sanlaryň logarifmleriniň arifmetik progressiýany düzýändiklerini subut ediň.

§33. Toždestwolaýyn özgertmeler

4. Algebraik aňlatmalary özgertmek

661. Köpeldijilere dagydyň:

a) $a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab$; ç) $a^6 - 8$;

b) $x^3 + (y-1)x + y$; d) $x^4 - x^2(y^2+1) + y^2$.

662. a) eger $n \in N$ bolsa, $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ aňlatmanyň 24-e bölünýändigini,

b) eger $n \in N$ bolsa, $(n^2+4n+3)(n^2+6n+8)$ aňlatmanyň 24-e bölünýändigini,

ç) eger $n \in N$ bolsa, $n^3 - n$ aňlatmanyň 6-a bölünýändigini,

d) eger $n \in N$ bolsa, (n – jübüt san), $n^3 - 4n$ aňlatmanyň bolsa 48-e bölünýändigini subut ediň.

663. Droblary gysgaldyň:

a) $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$; b) $\frac{x^2+x-12}{x^2+8x+16}$;

ç) $\frac{2a^2-5a+2}{ab-2b-3a+6}$; d) $\frac{x^3-27}{x^2y+3xy+9y}$.

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň (664 – 665).

664. a) $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

b) $\frac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\frac{2b}{a+b}-\frac{ab}{a^2-b^2}$;

ç) $\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{x^2-2x}{4-x}+\frac{x+8}{x+2}$;

d) $\left(\frac{1}{c^2+3c+2}+\frac{2c}{c^2+4c+3}+\frac{1}{c^2+5c+6}\right)^2\cdot\frac{(c-3)^2+12c}{2}$.

665. a) $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{4y^2}{4x^2-y^2}$;

b) $\left(\frac{3}{a-3}-\frac{4}{a^2-5a+6}+\frac{2a}{a-2}\right)^{-1}:\left(\frac{3}{2a+1}\right)-\frac{a-12}{3(3-a)}$;

ç) $\left(\frac{x^3-8}{x-2}+2x\right)\cdot(4-x^2)^{-1}-\frac{x-1}{2-x}$;

d) $\frac{k^2}{3+k}\cdot\frac{9-k^2}{k^2-3k}+\frac{27+k^2}{3-k}:\left(3+\frac{k^2}{3-k}\right)$.

5. Kökli we drob görkezijili derejeli aňlatmalary özgertmek

666. Maýdalawjyny irrasionallykdan boşadyň.

a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$;

ç) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; d) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

667. Hasaplaň:

a) $\sqrt{(\sqrt{5}-2{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1{,}5-\sqrt{5})^3}-1$;

b) $\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

ç) $\left(\sqrt{(\sqrt{2}-1{,}5)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2+0{,}75$;

d) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot\left(11+2\sqrt{30}\right)$.

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň (668 – 671).

668. a) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+b}$;

b) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$

c) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$;

d) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

669. a) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

b) $\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

ç) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$;

d) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{5^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}}$.

670. a) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$;

b) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

ç) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

d) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

671. a) $\frac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$

b) $\left(\frac{2\left(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}-x-y\right):\frac{y-x}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$;

ç) $\frac{c-1}{c^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{c^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{2}}+1}\cdot c^{\frac{1}{4}}+1$;

d) $\frac{3(ab)^{\frac{1}{2}}-3b}{a-b}+\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^3+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}$.

6. Trigonometrik aňlatmalary özgertmek

Aňlatmalary ýönekeýleşdiriň (672-673).

672. a) $tg^2\alpha-\sin^2\alpha-tg^2\alpha\sin^2\alpha$;

b) $\sqrt{\sin^2\beta(1+\mathrm{ctg}\beta)+\cos^2\beta(1+\mathrm{tg}\beta)}$;

ç) $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-3\cos\alpha)^2$;

d) $\frac{\cos\beta\,\mathrm{tg}\beta}{\sin^2\beta}-\mathrm{ctg}\beta\cos\beta$.

673. a) $2\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}(\alpha-\pi)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

b) $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}-\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}-\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

ç) $\frac{tg(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

d) $\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin^3\frac{\pi}{2}\sin\frac{16\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{18}}{ctg(\pi-\alpha)\cos\frac{5\pi}{18}\sin\frac{11\pi}{9}\cos2\pi}$.

Toždestwony subut ediň (674-675).

674. a) $\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=\mathrm{tg}\beta$;

b) $\frac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$;

ç) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}=\mathrm{ctg}\alpha$;

d) $\frac{\sin\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha}=-\mathrm{ctg}2\alpha$.

675. a) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\frac{\alpha}{4}$ ($\pi < \alpha < 2\pi$ bolanda);

b) $\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolanda);

ç) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha}} = -\cos\frac{\alpha}{2}$ ($\frac{3\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolanda);

d) $\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$ $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolanda).

676. Deňligiň dogrulygyny subut ediň:

a) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

b) $\mathrm{tg}20^\circ - 4\sin 20^\circ \sin 50^\circ = -2\sin 20^\circ$;

ç) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2$;

d) $\cos 20^\circ + 2\sin^2 55^\circ \sqrt{2}\sin 65^\circ = 1$.

677. Deňsizligiň dogrulygyny subut ediň:

a) eger $0 < 0 < \frac{\pi}{2}$ bolsa, $\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x \geq 2$;

b) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)} + 2\sin\frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3}$;

ç) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)$ $(\sin\varphi+\cos\varphi-1) \leq 1$;

d) $2\sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 6\alpha \geq -1$.

Hasaplaň (678-679).

678. a) eger $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$ bolsa, $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$;

b) eger $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = m$ bolsa, $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$

ç) eger $\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ bolsa, $\cos\alpha$;

d) eger $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\sin\alpha$, $\cos 2\pi\cos\frac{\alpha}{2}$.

679. a) $\lg \mathrm{tg}1^\circ + \lg \mathrm{tg}2^\circ + \ldots + \lg \mathrm{tg}89^\circ$;

b) $\lg \mathrm{tg}1^\circ + \lg \mathrm{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \lg \mathrm{tg}89^\circ$;

680. Aňlatmany nol bilen deňeşdiriň:

a) $\lg \mathrm{tg}32^\circ + \lg\cos 7^\circ \cdot \lg \mathrm{tg}40^\circ \cdot \lg \mathrm{ctg}20^\circ$;

b) $\lg \mathrm{tg}2^\circ + \lg \mathrm{tg}4^\circ + \lg \mathrm{ctg}2^\circ + \mathrm{tg}\,\mathrm{ctg}4^\circ$.

681. Eger $\cos x = \frac{a}{b+c}$ $\cos y = \frac{b}{c+a}$ $\cos \check{z} = \frac{c}{a+b}$, $a+b+c \neq 0$ bolsa, $\mathrm{tg}\frac{2x}{2} + \mathrm{tgctg}\frac{2y}{2} + \mathrm{tg}\frac{2z}{2}$ jemi tapyň.

7. Derejeleri we logarifmleri bolan aňlatmalary özgertmek

Sanlary deňeşdiriň (682-683).

682. a) 3^{400} we 4^{300}; ç) 5^{200} we 2^{500};

b) $-\log_5\frac{1}{5}$ we $7^{\lg_3 1}$; d) $\log_3\sqrt{2}$ we $\lg_3\frac{1}{81}$.

683. a) $\log_3 2 + \log_3 7$ we $\log_3(2+7)$;

b) $\log_4 5 - \log_4 3$ we $\log_3(5-3)$;

ç) $3\log_4 2$ we $\log_7(3-2)$;

d) $\log_3 1{,}5 + \log_3 2$ we $\log_3 1{,}5^2$.

684. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň:

a) $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}$; b) $2^{4\log_4 a} - 5^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}} - a^0$.

685. Sanlary onluk drob görnüşinde ýazyň:

a) $49^{1-\log_7 2} + 5$; b) $36^{\frac{1}{2}-\log_6 5} + 2^{-\log_2 10}$.

686. Aňlatmalaryň bahasyny tapyň:

a) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \mathrm{tg}3}$; b) $2\log_{0,3} 3 - 2\log_{0,3} 10$;

ç) $\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 13 - \lg 130}$;

d) $(2\log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2\log_{12} 6 - \log_{12} 3)$.

687. a esasa görä aşakdaky aňlatmalary logarifmirläň:

a) $a=5$ bolanda $25b^3\sqrt[4]{c^7}$; b) $a=0{,}2$, $b>0$, $c>0$ bolanda $\frac{0{,}0016b^4}{c\sqrt[7]{c^2}}$.

688. Eger:

a) $\log_4 x = 2\log_4 10 + \frac{3}{4}\log_4 81 - \frac{2}{3}\log_4 125$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 16 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28$

bolsa, x-i tapyň.

689. Tablisanyň kömegi bilen hasaplaň:

a) $\frac{7{,}832\cdot\sqrt[4]{12{,}98}}{5{,}256^2}$; b) $\frac{102{,}3^2}{\sqrt[3]{92{,}14\cdot 6{,}341}}$.

690. Aňlatmalaryň ýakynlaşan bahalaryny ýönekeýleşdiriň we tapyň:

$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9.$$

691. $\log_2(\sqrt{3}+1)+\log_2(\sqrt{6}-2)=A$ bolýandygy belli; $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)$ jemi tapyň.

§34. Funksiýalar

8. Rasional funksiýalar

692. Funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň:

a) $y = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$; ç) $y = \frac{x^2-1}{x^4-9x^2+20}$;

b) $y = \frac{x^2}{x^4-1}$; d) $y = \frac{x}{3x^2-5x+4}$.

693. Funksiýalaryň üznüksizlik aralygyny tapyň:

a) $y = \frac{x-4}{x^3-x}$; b) $y = x^2 + \frac{4}{x-1}$;

ç) $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$; d) $y = \frac{1}{3x^3-2x^2+5}$.

694. Funksiýalaryň jübütdigini (täkdigini) subut ediň:

a) $y = x^3 - 3x$; ç) $y = x^4(x^2+2)$;

b) $y = \frac{5x^2}{1-x^2}$; d) $y = \frac{|x|+2}{x^2}$.

20. Sargyt № 2629

695. Funksiýalaryň alamatynyň hemişelik aralygyny tapyň:

a) $y=\frac{x-1}{3x}$; b) $y=\frac{x^4-4x-5}{9-x^2}$;

ç) $y=1-\frac{2x-3}{5-x}$; d) $y=2x^2-5x+2$;

696. Funksiýalaryň artýan (kemelýän) aralyklaryny, maksimum nokatlaryny we minimum nokatlaryny tapyň.

a) $y=4x^2+3x-1$; ç) $y=(x-1)^4-2$;

b) $y=1-\frac{2}{x}$; d) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň (697-698):

697. a) $y=3x-5$; ç) $y=2-\frac{1}{4}x$;

b) $y=2x^2-7x+3$; d) $y=12-4x-x^2$;

698. a) $y=2-\frac{3}{x+1}$; ç) $y=\frac{x^4+1}{x^4}$;

b) $y=(x-2)^3-1$; d) $y=4-(x+2)^4$;

Funksiýalaryň her biriniň grafigini guruň (699-700).

699. 1) a) $y=3x-2$; ç) $y=\frac{1}{x}-1$;

b) $y=x^2-4x-5$; d) $y=x^3+2$.

2) a) $y=3x+|x|$; ç) $y=2x-|x-3|$;

b) $y=|-x^2-x+2|$; d) $y=x^2-4|x|+3$.

700. a) $y=\frac{x+1}{|x|}$; ç) $y=\frac{|x|-2}{x}$;

b) $y=\frac{1}{x^2}+2$; d) $y=\frac{2x^3-1}{x^3}$;

701. Funksiýalaryň grafikleriniň umumy nokatlary barmy?

a) $y=x^2$ we $y=x+6$; ç) $y=x^4$ we $y=2x^2+1$;

b) $y=\frac{3}{x}$ we $y=4(x+1)$; d) $y=\frac{1}{x^2}$.

702. Deňlemäniň berlen l aralyga degişli köküniň bardygyny subut ediň:

a) $x^3-5x+2=0, l=[0;1]$; ç) $x^5+3x=4, l=[1;2]$;

b) $x^4-3x^2+\frac{2}{9}=0, l=[1;2]$; d) $4+2x^3-x^5=0, l=[-1;2]$.

Deňlemeleri (deňsizlikleri) grafiki usulda çözüň (703-704).

703. a) $4-3x\le x+2$; ç) $\frac{1}{x}=4x$;

b) $x^2-2x=-x$; d) $x^2+2x+2\ge x+1$;

704. a) $x^3=\frac{8}{x-1}$; ç) $x^3=\frac{1}{x}$;

b) $|1-x|=2-|x|$; d) $|x-1|=3-|x|$;

705. $y=ax+b$ funksiýanyň grafigi $A(2;1)$, $B(5;10)$ nokatlar arkaly geçýär. a-ny we b-ni tapyň.

706. Çyzykly ýa-da kwadratik funksiýa: a) jübüt; b) täk; ç) periodik bolup bilermi?

707. Funksiýany jübüt we täk funksiýalaryň jemi görnüşinde beriň:

a) $y=\frac{x+1}{|x|}$; b) $y=x^3-x|x|+3$;

ç) $\frac{x^3+x^2-x}{x^4-1}$; d) $y=2x^5+x^4-3x+8$.

708. Funksiýalar jübüt ýa-da täk funksiýa bolup bilermi:

a) $y=5x^6-2x^2-3$; ç) $y=\frac{3}{x^2}+1$;

b) $4x^5-2x^3+x$; d) $y=-\frac{2}{x^3}$?

9. Trigonometrik funksiýalar

Funksiýalaryň her biriniň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň (709-710).

709. a) $y=\frac{2}{\cos^2 x}$; b) $y=\frac{1}{1+2\sin 2x}$;

ç) $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{2}}$; d) $y=\frac{x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$.

710. a) $y=\sqrt{\sin x\cos x}$; ç) $y=\sqrt{\sin^2 x-\cos^2 x}$;

b) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,x$; d) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$.

Funksiýalaryň her biriniň bahalar ýaýlasyny tapyň (711-712).

711. a) $y=1-3\sin\frac{x}{2}$; ç) $y=2+3\cos 5x$;

b) $y=2\cos x\,\mathrm{tg}\,x$; d) $y=2|\sin x|-1$.

712. a) $y=\frac{1}{1+\sin 2x}$; ç) $y=\frac{3}{\cos x-1}$;

b) $y=\sqrt{1-\cos 4x}$; d) $y=\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x$;

713. Funksiýalaryň alamatlarynyň hemişelik aralygyny tapyň:

a) $y=3\cos(x+\frac{\pi}{4})$; ç) $y=1-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$;

b) $y=1-\mathrm{tg}\,3x$; d) $y=1+2\cos 2x$.

714. Berlen funksiýalaryň haýsysy jübüt, haýsysy täk funksiýa:

a) $y=\mathrm{tg}\,3x-\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$. ç) $y=\sin\frac{x^3-x}{x^2-1}$;

b) $y=\frac{\sin x\cos^2 x}{x}$; d) $y=\frac{\sin x}{x}-\cos x$?

715. Berlen funksiýalaryň arasyndan periodiki funksiýany görkeziň we olaryň iň kiçi položitel periodlaryny tapyň:

a) $y=1-\sin 5x$; ç) $y=3\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\right)$;

b) $y=x\sin^2 x-x\cos^2 x$; d) $y=(\sin x+\cos x)^2$.

716. Funksiýalaryň artýan (kemelýän) aralyklaryny, maksimum nokadyny, minimum nokadyny tapyň:

a) $y=1+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; ç) $y=0{,}5\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$;

b) $y=\frac{2}{1-\cos x}$; d) $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

717. Funksiýalaryň iň uly we iň kiçi bahalaryny (eger olar bar bolsa) tapyň:

a) $y=\cos 2x+\sin^2 x$; ç) $y=\sin x-\cos x$;

b) $y=1-\sin 3x$; d) $y=1+|\mathrm{tg}x|$.

Funksiýalaryň grafigini guruň (718-719).

718. a) $y=2\sin^2\frac{x}{2}$; ç) $y=1+2\cos 2x$;

b) $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$; d) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-2$.

719. a) $y=\frac{|x|\sin x}{x}$; ç) $y=\cos x+|\cos x|$;

b) $y=(\sin x-\cos x)^2$; d) $y=\sin x\,\mathrm{ctg}x$.

720. Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň:

a) $y=\frac{1}{2}+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$; ç) $y=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

b) $y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{\alpha}\right)$; d) $y=1-\mathrm{tg}2x$.

721. x_0 sanyň $\sin\frac{x}{10}=x^3$ deňlemäniň kökudigi belli. Bu ýerden $(-x_0)$ sanyň şu deňlemäniň köki bolýandygy gelip çykýarmy?

722. Sanlary deňeşdiriň:

a) $\sin\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$ we $\cos\left(\pi+\frac{1}{\pi}\right)$; b) $\mathrm{tg}\pi^2$ we $\mathrm{ctg}\pi^2$;

ç) tg2 we ctg2; d) sin1 we cos1.

723. Subut ediň: a) eger $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ bolsa $\sin\alpha+\cos\alpha>1$;

b) $\cos(\sin\alpha)>0,\ \alpha\in R$.

724. Deňlemeleri grafiki çözüň:

a) $\sin x=-x$;

b) $\mathrm{tg}x=\sqrt{2}\cos x$, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

ç) $\mathrm{tg}x=x$; $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$;

d) $\cos x=1-x^2$.

10. Derejeli, görkezijili we logarifmik funksiýalar

Funksiýalaryň her biriniň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň (725-727).

725. a) $y=\sqrt{16x-x^3}$; ç) $y=\sqrt[6]{5-x-\frac{4}{x}}$;

b) $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^3+8}}$; d) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+x-20}}$.

726. a) $y=\sqrt{x^2\cdot 3^x-3^{x+1}}$; ç) $y=\log_3(4-3x+x^2)$;

b) $y=\sqrt[8]{2^{\sin x}-1}$; d) $y=\log_2\sin x$.

727. a) $y=\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+10)^2}$; ç) $y=\frac{\ln(3x-2)}{x^2-x-2}$;

b) $y=\sqrt{\log_5\cos x}$; d) $y=\sqrt[4]{\lg(3x^2-2x)}$.

Funksiýalaryň her biriniň bahalar ýaýlasyny tapyň (728-729).

728. a) $y=2\sqrt{x+1}$; ç) $y=2\lg x+1$;

b) $y=5^{2-x}-1$; d) $y=3x^{-2}$.

729. a) $y=2^{\cos x}$; ç) $y=1+|\log_2 x|$;

b) $y=2-\sqrt[4]{x}$; d) $y=1+|\sqrt[3]{x}|$.

Funksiýalaryň her biriniň alamatynyň hemişelik aralyklaryny tapyň (730-731).

730. a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-4$; ç) $y=2-3^x$;

b) $y=\log_4(x+3)$; d) $y=\sqrt{x}-4$.

731. a) $y=4^{x+2}-4^x$; ç) $y=\sqrt{x}+3$;

b) $y=\lg(x-2)-1$; d) $y=2-\sqrt[3]{x}$.

Berlen funksiýalaryň arasyndan jübüt we täk funksiýalary tapyň (732-733).

732. a) $y=5^x+5^{-x}$; ç) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$;

b) $y=\lg(1-x^2)$; d) $y=x\sqrt[3]{x}$.

733. a) $y=x^{\frac{2}{3}}$; ç) $y=2^{\cos x}$;

b) $y=3^x-3^{-x}$; d) $y=\sqrt[5]{x^4}+1$.

734. Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň:

a) $y=2\sqrt{x}-1$; b) $y=4^{x-1}-2$;

ç) $y=\frac{1}{2}\log_2(x+1)$; d) $y=\sqrt[3]{x-2}+1$.

Funksiýalaryň grafiklerini guruň (735-736).

735. a) $y=\sqrt{x-2}+1$; ç) $y=2-\sqrt[3]{x+1}$;

b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$; d) $y=1+\log_2(x+2)$.

736. a) $y=5^{\log 5(x-1)}$; ç) $y=2^{|x|}$;

b) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}}x\right|-1$; d) $y=\log_2 x^2$.

737. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny (eger olar bar bolsa) tapyň:

a) $y=\sqrt{36-x^2}$;

b) $y=\begin{cases}0\le x\le 7 \text{ bolanda } \frac{1}{x+1};\\ -2<x<0 \text{ bolanda } x^3=1;\end{cases}$

ç) $y=\begin{cases}-1\le x\le 1 \text{ bolanda } (x-1)^2;\\ 1\le x\le 8 \text{ bolanda } \log_2 x;\end{cases}$

d) $y+3^{\sin x}$;

738. Deňlemäni grafiki çözüň:

a) $\log_{\frac{1}{2}}x=x-3$; ç) $\log_2 x=2^{5-x}$;

b) $\sqrt{x-2}=\frac{3}{x}$; d) $2^{|x|}=11-|x|$.

739. Deňsizligi grafiki çözüň:

a) $\log_{\frac{1}{2}} x > x-3$; ç) $2^{-|x|} \ge x^2+1$;

b) $\sqrt{x-2} \le \frac{3}{x}$; d) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2x-7$.

740. $y=(\log_2 3)^{\sin x}$ we $y=(\log_3 2)^{\cos x}$ funksiýalaryň iň uly bahalarynyň deňdigini subut ediň.

741. Eger:

a) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}-\sqrt{1-x^2}, f(x_0)=0$;

b) $f(x)=\lg(x+15)+\lg x, f(x_0)=2$

bolsa x_0 argumentiň bahasyny tapyň.

742. a) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ funksiýanyň R köplükde kemelýändigini;

b) $f(x)=\log_2 3x$ funksiýanyň $(0;\infty)$ aralykda artýandygyny subut ediň.

§35. Deňlemeler, deňsizlikler we deňsizlikler ulgamlary

11. Rasional deňlemeler we deňsizlikler

Deňlemeleri çözüň.

743. a) $3(x-2)-5=4-(5x-1)$;

b) $|2x-3|=5$;

ç) $7-2(3-x)=4(x-1)+5$;

d) $|4-3x|=2$.

744. a) $\frac{3x+1}{5}=2-\frac{4(x-3)}{15}$;

b) $\left|\frac{x-3}{2}+5\right|=4$;

ç) $1-\frac{x-3}{2}=x-\frac{3(5-2x)}{7}$;

d) $\left|1-\frac{x+2}{3}\right|=5$.

745. a-nyň haýsy bahalarynda berlen deňlemeleriň

a) $ax-2x=3(x-1)$; ç) $x(2-\alpha)-x=5+x$;

b) $a(1-x)=2-3x-\alpha x$; d) $5+3(\pi+3)=9a+3$.

ýeke-täk çözüwi bolar, çözüwleri ýok, tükeniksiz köp çözüwi bolar.

Deňsizligi çözüň.

746. a) $\frac{x-1}{2}+x<1{,}5x+3{,}5$; b) $\frac{5x-2}{3}-\frac{3-x}{2}>1$;

ç) $x-4(3-x)\ge 2x+7$; d) $3+\frac{2-3x}{4}\le 2x$.

747. a) $|4x-3|<5$; ç) $\frac{|x-7|}{3}\le 2$;

b) $|2x+5|\ge 1$; d) $4|2-x|\le 12$.

748. a) $\frac{|2x-3|}{x}>0$; ç) $(x-4)|5-3x|<0$;

b) $\frac{x+2}{|x+4|}\le 0$; d) $|2x+7|(3-x)\le 0$.

749. Deňlemeleri çözüň:

a) $x^2+2x-15=0$; ç) $(x-3)(x-2)=6(x-3)$;

b) $7x^2+5x=0$; d) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0$.

750. a-nyň haýsy bahasynda deňlemeleriň umumy köki bar?

a) $x^2-ax=0$ we $x^2-x-3a=0$;

b) $x^2-(a-1)x=3$ we $4x^2-(4a+3)x+9=0$;

ç) $x^2+ax+8=0$ we $x^2+x+a=0$;

d) $2x^2+(3a-1)x=3$ we $6x^2-(2a-3)x=1$?

751. Deňlemäniň bir köki bolar ýaly k-nyň bahasyny tapyň.

a) $(k-1)x^2+(k+4)x+k+7=0$;

b) $9x^2-2x+k=6-kx$;

ç) $(2k-5)x^2-2(k-1)x+3=0$;

d) $3kx^2-6x+k-2=0$.

752. $3x^2-5x-2=0$ deňlemäni çözmän:

a) onuň kökleriniň jemini, b) onuň kökleriniň köpeltmek hasylyny, ç) onuň kökleriniň kwadratlarynyň jemini, d) onuň kökleriniň kublarynyň jemini tapyň:

Deňlemeleri çözüň (753-754).

753. a) $\frac{6x-x^2-6}{x-1}-\frac{2x-3}{x-1}=1$;

b) $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$;

ç) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$;

d) $\frac{14}{x^2-4}+\frac{3}{(2-x)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$.

754. a) $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$; b) $2x^4-5x^2+2=0$;

ç) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+2=0$; d) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}5$.

Deňsizlikleri çözüň (755-757).

755. a) $2x^2+6x+17>0$;

b) $x^2-3{,}2x<0$;

ç) $(3x-2)^2-4x(2x-3)\ge 0$;

d) $(6x-1)(1+6x)+14<7x(2+5x)$.

756. a) $\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}\ge 0$; ç) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)}<0$;

b) $\frac{x^2+2x-5}{x^2+2x+8}\le 0$; d) $\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6}>0$.

757. a) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)\le 0$;

b) $x^4-3x^29+3\le 0$;

ç) $\frac{4-x}{x-5}>\frac{1}{1-x}$;

d) $1+\frac{12}{x^2}<\frac{7}{x}$.

758. Deňsizligiň dogrulygyny subut ediň:

a) $m+\dfrac{4}{m}\geq 4$ ($m>0$ bolanda);

b) $\dfrac{2m}{1+m^2}\leq 1$;

c) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2$ ($a>0, b>0$ bolanda);

d) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+c}$ ($a>0, b>0, c>0, a<b$ bolanda).

12. Irrasional deňlemeler we deňsizlikler

Deňlemeleri çözüň (759-761).

759. a) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$; ç) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$;

b) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22$; d) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$.

760. a) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$; ç) $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$;

b) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3$; d) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

761. a) $\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{2+x}}+\sqrt{2+x}=0$;

b) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-2=0$;

ç) $\dfrac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\dfrac{1}{7}$;

d) $\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt{3x+1}=0$.

Deňsizlikleri çözüň (762-763).

762. a) $\sqrt{x^2-5}\geq 2$; ç) $\sqrt{x^2-16}\geq 1$;

b) $\sqrt{(x-2)(1-2x)}\geq -1$; d) $(\sqrt{x}-3)(x^2+1)>0$.

763. a) $\sqrt{x^2-6x+9}>3$; ç) $\sqrt{25-20x+4x^2}\leq 1$;

b) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x^2+x+1}\geq 0$; d) $\sqrt{2x-x^2+15}\,(3x-x^2-4)\leq 0$.

13. Trigonometrik deňlemeler we deňsizlikler

Deňlemeleri çözüň (764-770).

764. a) $\cos x+2\cos 2x=1$;

b) $4\sin 2x-3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=5$;

ç) $2\cos^2 x+4\cos x=3\sin^2 x$;

d) $\cos^2 x+4\sin^2 x=2\sin 2x$;

765. a) $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\dfrac{\sin 2x}{2}$;

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1$;

ç) $\cos^4 x-\sin^4 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

d) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=1$.

766. a) $\cos 4x=2\cos^2 x=1$;

b) $4(1+\cos x)=3\sin^2\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$;

ç) $\cos 3x+\sin x\sin 2x=0$;

d) $4(1-\cos x)=3\sin\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}$;

767. a) $\cos 2x-\cos 6x=0$;

b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;

ç) $\sin x+\sin 3x=0$;

d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$.

768. a) $\dfrac{6}{\text{ctg}x+2}=3-\text{ctg}x$;

b) $1+2\cos 3x\cos x-\cos 2x=0$;

ç) $\dfrac{15}{\sin x+1}=11-2\sin x$;

d) $\text{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=2$.

769. a) $\text{tg}3x-\text{tg}x=0$; ç) $\sin x\,\text{tg}x=\cos x+\text{tg}x$;

b) $\text{tg}x-\sin x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$; d) $\sin x+\sin 2x=\text{tg}x$.

770. a) $\arccos\dfrac{1+2x}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$; ç) $\arcsin\dfrac{x+2}{4}=-\dfrac{\pi}{3}$;

b) $\text{arctg}(2x-1)=-\dfrac{\pi}{4}$; d) $\text{arctg}\ 92-3x0=\dfrac{3\pi}{4}$;

Deňsizlikleri çözüň (771-774).

771. a) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\sqrt{3}\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\geq -1$;

ç) $\sin 2x\sin\dfrac{x}{2}-\cos 2x\cos\dfrac{x}{2}>\dfrac{1}{2}$;

d) $\sin 3x\cos x+\sin x\cos 3x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

772. a) $2\sin^2 x\leq 1$; ç) $4\cos^2 x\leq 3$;

b) $3\text{tg}^2 2x\leq 1$; d) $\text{tg}^2\dfrac{x}{2}-1\geq 0$.

773. a) $|\cos x-1|\leq 0{,}5$; ç) $\left|\sin 2x+\dfrac{1}{2}\right|\leq\dfrac{1}{2}$;

b) $\sin x<\cos x$; d) $\text{tg}x+\text{ctg}x>0$.

774. a) $\sin x-\sqrt{3}\cos x>\sqrt{3}$; ç) $\sin x+\cos x<1$;

b) $\log_{0,5}\sin x>1$; d) $\log_{\sqrt{2}}\cos x>-1$.

14. Görkezijili deňlemeler we deňsizlikler

Deňlemeleri çözüň (775-779).

775. a) $(0{,}2)^{x^2-16x-37{,}5}=5\sqrt{5}$;

b) $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3$;

ç) $2^{x^2-6x+0{,}5}=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}$;

d) $\dfrac{6^{x^2}}{2^{-15}}=\dfrac{3^{-15}}{6^{12-12x}}$.

776. a) $5^{3x}-2\cdot 5^{3x-1}-3\cdot 5^{3x-2}=60$;

b) $4^x-3^{x-0{,}5}=3^{x+0{,}5}-2^{2x-1}$;

ç) $2^{5x-1}+2^{5x-2}+2^{5x-3}=896$;

d) $5^{2x-1}+2^{2x}=5^{2x}-2^{2x+2}$.

21. Sargyt № 2629

777. a) $9^{x^2-1}36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$; b) $5^{3x+1}+34\cdot 5^{2x}=7\cdot 5^x$;

ç) $16^x-50\cdot 2^{2x}=896$; d) $7^{\sqrt[4]{x}}-8\cdot 7^{\sqrt{4x}}+7=0$.

778. a) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$; ç) $2\cdot 25^x+2\cdot 4^x=0$;

b) $8^x\cdot 18^x=2\cdot 27^x$; d) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$.

779. a) $3^{2\sqrt{x}}+3^{2\sqrt{x}-1}-3^{2\sqrt{x}-2}=11$; ç) $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$;

b) $5^{\sin^2 x}-25^{\cos x}=0$; d) $3\cdot 9^{\frac{1}{x}}+6^{\frac{1}{x}}=2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

Deňsizlikleri çözüň (780-782).

780. a) $\frac{16}{\sqrt{32}}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}$; ç) $3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x}<\frac{1}{9}$;

b) $3^{x^2+x}<10^{\lg 9}$; d) $4^{x^2+x-11}>5^{\log_5}$.

781. a) $0,04^x-26\cdot 0,2^x+25\leq 0$;

b) $9^x-84\cdot 3^{-2x}+\frac{1}{3}\geq 0$;

ç) $4^x-10\cdot 2^x+16<0$;

d) $2^{x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}-\frac{5}{2}\geq 0$.

782. a) $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leq 0$;

b) $3,4^{\frac{x^2+2x-15}{x-4}}>1$;

ç) $x^2\cdot 5^x-5^{2+x}<0$;

d) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

15. Logarifmik deňlemeler we deňsizlikler

Deňlemeleri çözüň(783-787).

783. a) $\log^{\frac{2}{3}} x=4-3\log_3 x$;

b) $\frac{1}{2}\lg(2x-1)=1-\lg\sqrt{x-9}$;

ç) $\log_3\sqrt{x-5}+\log_3\sqrt{2x-3}=1$;

d) $3\lg^2(x-1)-10\lg(x-1)+3=0$.

784. a) $2\log_5(\lg x)=\log_5(10-9\lg x)$;

b) $\lg(3^x+x-17)=x\lg 30-x$;

ç) $2\lg(\lg x)=\lg(3-2\lg x)$;

d) $x-x\lg 5=\lg(2^x+x-3)$.

785. a) $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$;

b) $\log_3 x+\log_{\sqrt{x}} x-\log_{\frac{1}{3}} x=6$;

ç) $2\log_{\sqrt{3}} x+\log_x\frac{1}{3}=3$;

d) $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_{x^2} x+\log_8 x=16$.

786. a) $x^{\log_2^{(x-2)}}=8$; ç) $x^{\lg x}=10\ 000$;

b) $x^{\log_5^x}=125x^2$; d) $x^{\log_2 x-3}=\frac{1}{9}$.

787. a) $3\log^{\frac{2}{2}}\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2$;

b) $\log_{0,5}\sin 2x+\lg\cos x=\lg 7$;

ç) $\log_7 5^{\sqrt{x+2}}=(9x-4)\log_7 5$;

d) $\lg(3\cdot 5^x+24\cdot 20^x)=x+\lg 18$.

Deňsizlikleri çözüň (788-791).

788. a) $\log_2(x^2-x-4)<3$; ç) $\lg(x^2-x+8)\geq 1$;

b) $\log_{\sqrt{3}-1}(5-2x)>2$; d) $\log_{\sqrt{7}-1}(3-2x)<2$.

789. a) $2\log_2 x<2+\log_2(x+3)$;

b) $\log_{\frac{1}{6}}(10-x)+\log_{\frac{1}{6}}(12-x)\geq -2$;

ç) $\log_{\frac{1}{3}}(x-2)+\log_{\frac{1}{3}}(12-x)\geq -2$;

d) $\log_{0,5}(4-x)\geq\log_{0,5}2-\log_{0,5}(x-1)$.

790. a) $\lg(x^2+x-6)-\lg(x+2)\leq\lg 3$;

b) $\log_2\frac{3x-1}{2-x}<1$;

ç) $\ln(x^2+3x-10)-\ln(x-2)\geq\ln 4$;

d) $\log_3\frac{3x-5}{x+1}\leq 1$.

791. a) $\log_2(4^x-5\cdot 2^x+8)>2$; ç) $\log^2 x\geq\lg x+2$;

b) $\log_{0,5}^2 x+6\geq 5\log_{0,5} x$; d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\geq -2$.

16. Rasional deňlemeler we deňsizlikler ulgamlary

Deňlemeler ulgamlaryny çözüň (792-795).

792. a) $\begin{cases}2x+3y=-1,\\5x+4y=1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-9y=12,\\4x-12y=16;\end{cases}$

ç) $\begin{cases}x+2y=7,\\2x-3y=5;\end{cases}$ d) $\begin{cases}5x-8y=0,\\x-1,6y=1.\end{cases}$

793. a) $\begin{cases}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{13}{6},\\x+y=5;\end{cases}$ ç) $\begin{cases}\frac{y}{x}=2,\\(x-1)^2+y^2=1;\end{cases}$

b) $\begin{cases}x-y=1,\\x^3-y^3=7;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x^3+y^3=35,\\x+y=5.\end{cases}$

794. a) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\x+y=5;\end{cases}$ ç) $\begin{cases}x^2y^3=16,\\x^3y^2=2;\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2y^2+x^3y^3=12,\\x^2y^3-x^3y^2=4;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x^2-xy=28,\\y^2-xy=-12.\end{cases}$

795. a) $\begin{cases}x^3+y^2=7,\\x^3y^3=-8;\end{cases}$ ç) $\begin{cases}x^3+y^3=9,\\xy=2;\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^2+y^4=5,\\xy^2=2;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5,\\\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=13.\end{cases}$

796. a-nyň haýsy bahalarynda

a) $\begin{cases}x-5y=7,\\ax-y=-3;\end{cases}$ ç) $\begin{cases}x+ay=2,\\3x-2y=-6;\end{cases}$

b) $\begin{cases}x+2y=a,\\2x+4y=5;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-y=2,\\2x-2y=-2a;\end{cases}$

deňlemeler ulgamynyň ýeke-täk çözüwi bar, haýsysynda çözüwi ýok, haýsysynda tükeniksiz köp çözüwi bar?

797. Deňsizlikler ulgamyny çözüň:

a) $\begin{cases} 2x > 3 - \dfrac{13x-2}{11}, \\ \dfrac{x}{6} + \dfrac{2}{3}(x-7) < \dfrac{3x-20}{9}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+4}{3} \le \dfrac{x-1}{4} - 2, \\ 1{,}5x - 2{,}5 < x; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}\dfrac{x}{3} \ge \dfrac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0{,}5x < 2 - x; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16, \\ 4(2+x) < 3x+8. \end{cases}$

17. Irrasional deňlemeler ulgamlary

Deňlemeler ulgamyny çözüň (798-800).

798. a) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{xy} = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7. \end{cases}$

799. a) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ xy = 9; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12; \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = 64, \\ x - y + \sqrt{xy} = 20. \end{cases}$

800. a) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} 3\dfrac{3}{4}, \\ xy = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8. \end{cases}$

18. Trigonometrik deňlemeler ulgamlary

Deňlemeler ulgamyny çözüň (801-802).

801. a) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) = 0; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} 4 \sin x \sin y = 3, \\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y = 3; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

802. a) $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = 2, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 4 \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ \mathrm{ctg}x\mathrm{ctg}y = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

19. Görkezijili we logarifmik deňlemeler ulgamlary

Deňlemeler ulgamyny çözüň (803-808).

803. a) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} (\sqrt{5})^{x-y} = 25, \\ 2^{6y-x-1} = 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x - y = 3. \end{cases}$

804. a) $\begin{cases} 4^{\log_4 2x} - y = -1, \\ 5^{2x-y} + 5^x = 5{,}2; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 3^{\log_3(y+x)} = 2, \\ 2^{2x+y} = 16; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 2^{x+2}3^{y+1} = 5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4, \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 17. \end{cases}$

805. a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5. \end{cases}$

806. a) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \dfrac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2\log_2\left(y - \dfrac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$

807. a) $\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)} = 15, \\ \log_3(x^2 - y^2) - \log_3(x - y) = 0; \end{cases}$

ç) $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)} = 25, \\ \log_5(x^2 - y^2) = \log_5(x + y). \end{cases}$

808. a) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \end{cases}$ ç) $\begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$

20. Deňlemeleri we deňlemeler ulgamlaryny düzmäge degişli meseleler

809. 325 *km* aralygy geçmäge awtobusyň sarp edýän wagty, awtobuslaryň hereket edişleriniň täze tertibi düzülende 40 *min* gysgaldyldy. Eger köne tertipde göz öňünde tutulan ortaça tizlikden 10 *km/sag* köp bolsa, täze tertip boýunça awtobusyň hereket edişiniň ortaça tizligini tapyň.

810. Ýata suwda tizligi 15 *km/sag* bolan motorly gaýyk derýanyň akymy boýunça aşaklygyna $139\frac{1}{3}$ *km* geçdi we dolanyp geldi. Eger ýoluň hemmesine 20 *sag* sarp edilen bolsa, derýanyň akyş tizligini tapyň.

811. Otly belli bir wagtda 220 *km* ýol geçmelidi. Ýöräp ugrandan 2 *sag* geçenden soň ol 10 min saklandy we barmaly punktuna wagtynda barar ýaly tizligini 5 *km/sag* artdyrdy. Otlynyň başlangyç tizligini tapyň.

812. Iki teplohod duşuşanlaryndan soň olaryň biri günorta, beýlekisi bolsa günbatara gitdi. Duşuşanlaryndan 2 *sag* soň olaryň arasyndaky uzaklyk 60 *km* boldy. Eger teplohodlaryň biriniň tizligi beýlekisiniň tizliginden 6 *km/sag* köp bolsa, onda olaryň her biriniň tizligini tapyň.

813. Aralygyndaky uzaklyk 390 *m* bolan iki nokatdan biri-biriniň garşysyna iki jisim hereket edýär. Birinji jisim ilkinji sekuntda 6 *m*, soňky sekuntlaryň her birinde ozalkydan 6 *m* köp geçdi. Ikinji jisim 12 *m/s* bilen deňölçegli hereket etdi we birinjiden 5 *s* soň hereket edip başlady. Birinji jisim hereket edip ugrandan, näçe sekuntdan soň olar duşuşarlar?

814. Demir ýol magistralynyň gurluşygyna gurluşykçylar topary birnäçe günüň dowamynda maksatnama boýunça 2160 m^3 topragy ýerleşdirmelidiler. Birinji üç günüň dowamynda topar her gün berlen normany ýerine ýetiripdir, soňra bolsa her gün normany 80 m^3 artygy bilen ýerine ýetirdi, şoňa görä topar möhletinden öň 2320 m^3 ýerleşdirdi. Toparyň maksatnama boýunça gündelik normasy nähili?

815. Okuwçylaryň iki topary bilelikde işläp, okuw-tejribe meýdançasynda agaç oturtmagy dört günde gutardy. Eger toparyň biri agaç oturtmagy beýleki topardan 6 gün öň gutaryp bilýän bolsa, onda toparlaryň hersi aýry-aýrylykda bu işi ýerine ýetirmekleri üçin näçe wagt gerek bolardy?

816. 60 *t* ýüki çekmek üçin käbir mukdarda maşyn gerekdi. Her bir maşyna ýüklenmelisinden 0,55 *t* kem ýüklenendigi sebäpli, ýene-de 4 maşyn goşmaça almaly boldy. Ilkibaşda näçe maşyn meýilnamalaşdyrylypdyr?

817. Iki bölek latunyň massasy 30 *kg*. Birinji bölekde 5 *kg* arassa mis, ikinji bölekde 4 *kg* mis bardy. Eger ikinji bölekde birinji bölekdäkiden 15 % mis köp bolsa, latunyň birinji böleginde näçe % mis bar eken?

818. 40 *g* duzy bolan ergine 200 *g* suw goşdular, ondan soňra erginde duzuň massa ülşi 10% kemeldi. Erginde näçe suw bardy we onda duzuň näçe massa ülşi bar eken?

819. Iki awtomaşyn bir wagtda bir punktdan şol bir ugra çykyp ugradylar. Maşynyň biri 50 *km/sag* tizlik bilen, beýlekisi 40 *km/sag* tizlik bilen hereket edýär. Ýarym sagat soň şol punktdan şol ugra tarap üçünji maşyn çykyp ugrady. Ol birinji maşynyň yzyndan ikinji maşyna garanda 1 *sag* 30 min soň ýetip ötdi. Üçünji maşynyň tizligini tapyň.

820. Otlynyň hemişelik tizlik bilen gozganmaýan gözegçiniň ýanyndan 7 sekuntda geçendigini we şol bir tizlik bilen 378 *m* platformadan geçmek üçin 25 *s* sarp edendigini bilip, onuň tizligini we uzynlygyny tapyň.

821. 50 km aralykda ýerleşen A we B punktlardan bir wagtda bir-biriniň garşysyna iki sany pyýada çykyp ugradylar. 5 sagatdan soň olar duşuşdylar. Duşuşan-

laryndan soň, A puntkdan B punkta barýan adam tizligini 1 *km/sag* peseltdi, ikinji adam bolsa tizligini 1 *km/sag* artdyrdy. Birinji pyýada B punkta ikinjiniň A punkta baranyndan 2 *sag* öň bardy. Pyýadalaryň başdaky tizligini tapyň.

822. Zawodda A tipli elektrik dwigateliniň birini ýasamak üçin 2 *kg* mis, 1 *kg* gurşun sarp edilýär, B tipli elektrik dwigatelini ýasamaga 3 *kg* mis we 2 *kg* gurşun gidýär. Eger jemi 130 *kg* mis we 80 *kg* gurşun sarp edilen bolsa, her tipden näçe elektrik dwigatelini ýasap bolardy?

823. Iki işçi bilelikde etmeli işlerini 12 günde ýerine ýetirip biler. Eger ýumşuň ýarysyny 1 işçi ýerine ýetirse, soňra bolsa ikinji ýarysyny ikinji işçi ýerine ýetirse, onda ýumşuň hemmesi 25 günde ýerine ýetiriler. Işçileriň her biri ýumşy näçe günde ýerine ýetirip biler?

824. Dykyzlygy 1,2 g/sm^3 we 1,6 g/sm^3 laýyk bolan 2 suwuklykdan 60 *g* massaly garyndy alyndy. Garyndyda her bir suwuklygyň näçe gramy bar we eger garyndynyň 8 sm^3 şonuň massasy ýaly garylan suwuklykdan azrak agyr bolsa, onuň dykyzlygy näçe bolar?

825. Misi 3 *kg* arassa kümüş bilen eredip, kümşüň 90 göterimli garyndysynyň alynýandygyny, ony 90 göterimli kümşüň 2 *kg* garyndysy bilen eredip, kümşüň massa ülşüniň 84 göterimli ergininiň alynýandygyny bilip, misli garyndydaky gurluşyň massasyny we massa ülşüni (göterim) hasabynda hasaplaň.

826. Uzynlygy 60 *m* bolan töwerek boýunça iki nokat deňölçegli we bir ugur boýunça hereket edýär. Biri beýlekisinden 5 *s* tizlik bilen doly öwrüm edýär we şonda her minutda ikinji nokadyň yzyndan ýetýär. Her bir nokadyň tizligini tapyň.

827. Položitel iki belgili sanyň sifrleriniň kwadratlarynyň jemi 13-e deň. Eger bu sanlardan 9-y aýyrsaň, onda ters tertipde sifrler bilen ýazylan san alynýar. Bu sany tapyň.

828. Kwadratlarynyň tapawudy 55 bolan natural sanlaryň ähli jübütlerini tapyň.

§36. Önüm, asyl funksiýa, integral we olaryň ulanylyşy

21. Önüm

829. Eger:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2,\ \ x_0=1,\ \ \Delta x=0{,}1;$

b) $f(x)=\sqrt{x-1},\ \ x_0=2,\ \ \Delta x=0{,}21;$

ç) $f(x)=3-2x,\ \ x_0=2,\ \ \Delta x=0{,}2;$

d) $f(x)=\frac{1}{x+1},\ \ x_0=1,\ \ \Delta x=0{,}1.$

bolsa, f funksiýa üçin $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gatnaşygy tapyň,

830. Eger:

a) $f(x)=1-4x,\ \ x_0=3;$ ç) $f(x)=3x+2,\ \ x_0=5;$

b) $f(x)=1{,}5x^2,\ \ x_0=2;$ d) $f(x)=x^3+1,\ \ x_0=-1$

bolsa kesgitlemeden peýdalanyp, x_0 nokatda f funksiýanyň önümini tapyň.

Funksiýalaryň önümini tapyň (831-834).

831. a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+5;$

b) $f(x)=(4-x^2)\sin x$;

ç) $f(x)=(x^2+5)(x^3-2x+2)$;

d) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2-x^3}$.

832. a) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}-\sqrt[5]{x}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$; ç) $f(x)=\dfrac{x^3-3x}{1-2x}$;

b) $f(x)=\left(2-\sqrt{x}\right)tgx$; d) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1-2\cos x}$.

833. a) $f(x)=2^x+\lg x$; ç) $f(x)=x^2 5^{2x}$;

b) $f(x)=e^{-3x}+2\log_3 2x$; d) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^x+e^{-x}}$.

834. a) $f(x)=\sin 3x+\cos 5x$;

b) $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{(2x-1)^3}$;

ç) $f(x)=(3-2x^3)^3$;

d) $f(x)=\lg(3x)-3tg\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

835. Eger:

a) $f(x)=x^4-2x^2+1$;

b) $f(x)=1{,}5\sin 2x-5\sin x-x$;

ç) $f(x)=-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{10x^3}{3}-9x$;

d) $f(x)=x+\cos 2x$

bolsa, $f'(x)=0$ deňlemäni çözüň.

836. Funksiýa grafik bilen berlen (48-nji sur.).

1) bellenilen nokatlaryň haýsysynda:

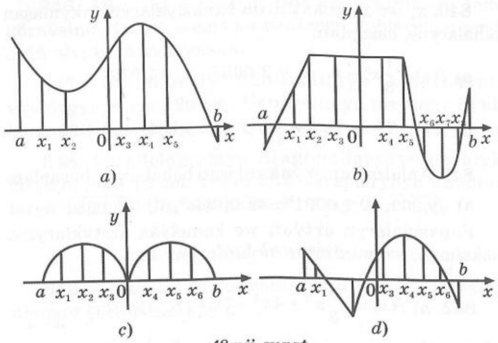
a) $f(x)>0$; b) $f'(x)<0$; ç) $f'(x)=0$ bolýandygyny görkeziň:

2) aşakdaky ýaly bolýan aralyklary görkeziň:

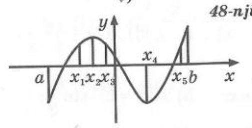
a) $f(x)>0$; b) $f'(x)<0$; ç) $f'(x)=0$

3) (a, b) interwalyň haýsy nokatlarynda f funksiýanyň önümi bolmaýar?

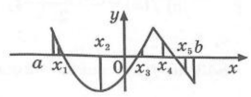
Berlen nokatlardaky önümiň bahalaryny deňeşdiriň (837-838).



48-nji surat



49-njy surat



50-nji surat

837. a) x_1 we x_2; b) x_1 we x_2; ç) x_2 we x_4; d) x_3 we x_5 (49-njy sur.).

838. a) x_1 we x_2; b) x_3 we x_5; ç) x_3 we x_5; d) x_2 we x_4 (52-nji sur.).

839. $u.\ v.\ \omega.$ funksiýalar x_0 nokatda differensirlenýändir.

$(uv\omega)'=u'v\omega+uv'\omega+uv\omega'$ bolýandygyny subut ediň.

22. Funksiýalary derňemekde önümiň ulanylyşy

840. x_1 we x_2 nokatlarda funksiýalaryň ýakynlaşan bahalaryny hasaplaň:

a) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x,\ x_1=2{,}0057,\ x_2=1{,}979$;

b) $f(x)=2+4x-x^2+\dfrac{1}{4}x^4,\ x_1=3{,}005;\ x_2=1{,}98$.

841. Aňlatmalaryň ýakynlaşan bahalaryny hasaplaň:

a) $\sqrt{9{,}009}$; b) $1{,}0001^{15}$; ç) $0{,}999^{-5}$; d) $\sqrt[3]{8{,}008}$.

Funksiýalaryň artýan we kemelýän aralyklaryny, maksimum we minimum nokatlaryny tapyň.

842. a) $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-7x+18$; b) $f(x)=\dfrac{2x^2}{3-x}$;

ç) $f(x)=\dfrac{x(x^3-4)}{2}$; d) $f(x)=\dfrac{x}{4-x}$.

843. a) $f(x)=\cos 2x-2\cos x$; b) $f(x)=2-\sin\dfrac{x}{2}$;

ç) $f(x)=2\sin x+\cos 3x$; d) $f(x)=10x-\cos 7x$.

844. Funksiýany derňäň we onuň grafigini guruň:

a) $f(x)=x^2(x-2)^2$; b) $f(x)=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{2}$;

ç) $f(x)=x^3-3x^2-9x$; d) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$.

845. Berlen aralykda f funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahalaryny tapyň:

1) $f(x)=18x^2+8x^3-3x^4$, $[1;3]$;

2) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$, $[0;\pi]$.

846. 10-y iki otrisatel däl goşulyjylaryň jemi görnüşinde ýazyň, şonda şu sanlaryň kublarynyň jemi: a) iň uly; b) iň kiçi bolsun.

847. Gönüburçly üçburçlugyň katetleriniň uzynlygynyň jemi 20 *sm*. Üçburçlugyň meýdany iň uly bolar ýaly katetleriň uzynlygy näçe?

848. Parallelogramyň diagonallarynyň uzynlyklarynyň jemi 12 *sm*. Onuň ähli taraplarynyň kwadratlarynyň jeminiň iň kiçi bahasyny tapyň.

23. Asyl funksiýa

849. Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýanyň umumy görnüşini tapyň:

a) $f(x)=x^2\left(\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$; ç) $f(x)=4\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$;

b) $f(x)=-\sin 2x$; d) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

22. Sargyt № 2629

24. Integral

850. Integraly hasaplaň:

a) $\int\limits_{-1}^{2} e^{-x}dx$; b) $\int\limits_{-1}^{0} e^{-\frac{1}{2}x}dx$; ç) $\int\limits_{1}^{4} \frac{x+\sqrt{x^5}}{x^2}dx$; d) $\int\limits_{1}^{9} \frac{dx}{x\ln 3}$.

851. Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň:

a) $y=\frac{2}{x}$, $x+y=3$;

b) $y=\frac{1}{x+1}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$;

ç) $y=\frac{4}{x}$, $x+y=5$;

d) $y=\frac{1}{x-1}$, $y=0$, $x=2$, $x=e+1$.

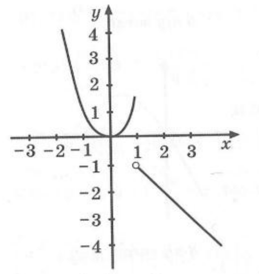
GÖNÜKMELERE DEGIŞLI JOGAPLAR WE GÖRKEZMELER

I BAP

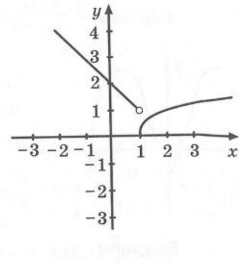
3. 1) $\delta \le \sqrt{4,001}-2 \approx 0,00025$. 2) $\delta \le 4/51$. 3) $\delta \le \frac{\pi}{4} - \arcsin 0,99 \approx 0,14$. **4.** $\delta \le \varepsilon/3$. **5.** 1) -10. 2) 0. 3) 20. 4) 2. 5) 2. 6) $\frac{1}{3}$. 7) 0. 8) $-0,72$. 9) -1. 10) $\frac{2}{7}$. **6.** 1) Predeli ýok. 2) Predeli ýok. 3) $\frac{3}{4}$. 4) Predeli ýok. 5) $-\frac{1}{4}$. 6) $\frac{4}{3}$. 7) $\frac{1}{4}$. 8) 2. 9) $\frac{1}{12}$. 10) 3. **7.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 2) Predeli ýok. 3) 3. 4) 12. 5) -3. 6) $\frac{2}{3}$. 7) $\frac{5}{3}$. 8) $\frac{n}{m}$. **11.** 1) $-\frac{1}{1359}$. 2) $-\frac{1}{804}$. 3) $\frac{375}{30107}$. 4) $\frac{1}{1806}$. **12.** 1) $3\Delta x$. 2) $\frac{2\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$. 3) $6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2$. 4) $\Delta x(2-2x_0-\Delta x)$. **13.** 1) $x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$; $2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$; $2x_0+\Delta x$. 2) $ax_0+a\Delta x+b$; $a\Delta x$; a. 4) $x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; **14.** 1) 2,1. 2) 1,9. 3) 2,001. 4) 1,9999. **15.** 1) 12,61. 2) 12,0601. 3) 12,006001. 4) 12,00060001. **16.** $\Delta x=999$; $\Delta y=3$. **17.** $\Delta x=-0,009$; $\Delta y=990000$. **24.** 1) $y(0)=0$. 2) $y(0)=-1$. **25.** 1) $y(1)=2$ (1-nji sur.) 2) $y(-1)=1$. **26.** 1) Funksiýa üznüksizdir. 2) $y(0,5)=1$.

27. 1) $y(1)=0$ (2-nji sur.). 2) Funksiýa üznüksizdir (3-nji sur.). **29.** 3) R; 4) $(-\infty;2)$, $(2,\infty)$. **30.** 0,7. **31.** 4) $(-\infty;1)$, $(2,6)$. **36.** 1) a; a. 2) $-1;-\frac{1}{25}$. 3) -2. 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 5) 3. **37.** 4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **38.** 1) -2. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $2x$. 4) $-2-2x$. **39.** 1) $2ax+b$. 2) $3x^2$. 3) $3x^2-1$. 4) $3x^2+2$. **52.** 1) $y'=\frac{2x}{a+b}+\frac{1}{a-b}$; 2) $y'=91(x^{12}-x^{-8})$, $x\ne 0$. 3) $y'=-\frac{\ln 3}{x^2}$, $x\ne 0$. 4) $y'=-2ax^{-3}-3bx^{-4}-4cx^{-5}$, $x\ne 0$. 5) $y'=(ad-bc)/(cx+d)^2$, $x\ne -d/c$. **53.** 1) 1. 2) 6. **54.** 1) $32x^3+6x^2-10x+3$. 2) $-4x^3+15x^2-18x+23$. 3) $12x^3-24x^2+18x+34$. 7) $\frac{1-3x^2}{2(x^2+1)^2\sqrt{x}}$. **57.** 4) $f(x)=3x+\frac{\pi}{4}$, $g(x)=\cos x$. **58.** 3) $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^7$. **59.** 3) $[-0,5;0,5]$. **52.** 4) $[2\pi n;\pi+2\pi n], n\in Z$. **61.** 4) $-\frac{30}{(6x-1)^6}$. **54.** 4) $65(5x-2)^{12}+24(4x+7)^{-7}$. **63.** 1) $14(x+1)(x^2+2x-6)^6$; 2) $\frac{\sqrt{x(1-x)}}{2x^2(x-1)}$. 3) $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x(x-1)^2}$. 4) $\frac{(x^2+1)^4(9x^2-40x-1)}{(x-4)^2}$. **67.** 1) $3-2x^2$; 3) $(3-2x)^2$. **68.** 2) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$, $[0;1)\cup(1;\infty)$; 3) $\sqrt{\cos x}$, $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. **69.** 2) $f(x)=x^2$, $D(f)=[0;+\infty)$. 4) $f(x)=-\sqrt{x-1}$. **71.** 4) $2\cos x-1,5\sin x$. 2) $\frac{1}{2\cos^2 x}$. **74.** 2) $-\frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **84.** 3) $-\frac{1}{2}e^x$. 4) $-5e^{-x}-2x$.

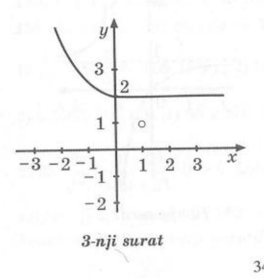
88. 4) $24^x\ln 24$. **90.** 2) $\frac{2^{x\ln\frac{2x}{e}}}{(x+2^x)^2}$. 3) $C^{\frac{bx}{a\ln c}}$. **91.** 4) $a^x\cdot x^{a-1}(x\ln a+a)$. **93.** 2) $2x(\sin\alpha)^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\ln\sin\alpha$. **99.** 2) $\frac{2\lg e}{x}-\lg x-1$. **104.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^2}}$, $x>0$. 2) $\sqrt[3]{x^2}-2x^{-3}-2x^{-2}$, $x\ne 0$. 3) $(11x^2\sqrt[3]{x^2}+22x^6\sqrt[3]{x})/3$, $x\in R$.



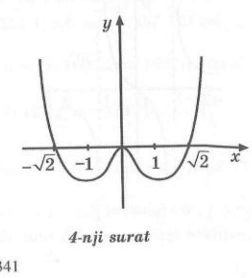
1-nji surat



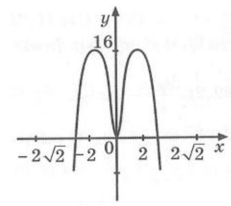
2-nji surat



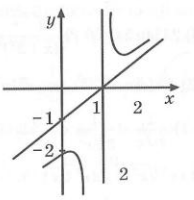
3-nji surat



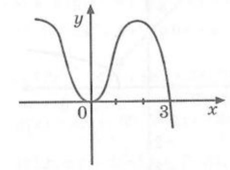
4-nji surat



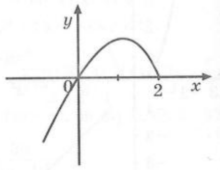
5-nji surat



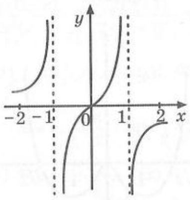
6-njy surat



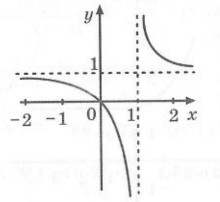
7-nji surat



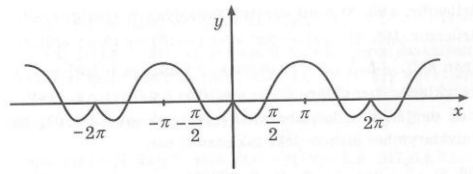
8-nji surat



9-njy surat



10-njy surat



11-nji surat

107. 1) $e^{x\ln(2+\cos x)}(\ln(2+\cos x) - x\frac{\sin x}{2+\cos x})$, $x \in R$.

2) $2^x x^{2^x}\left(\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x\right)$, $x > 0$.

II BAP

128 . 3) 3. **129.** 4) 0. **137.** 4) $y = 3x + 1$, $y = 12x - 17$. **138.** 3) $y = 2$, $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$. **145.** 3) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k - 1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2}\left(2\pi k - 1 - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, $k \in Z$. **147.** 1) $\frac{\pi}{4}$· 4) $\frac{5\pi}{6}$.

153. 1) $(-t^2 + 4t + 5)m/s$. 2) $5s$. **154.** 35 m/s^2; 22 m/s^2. **155.** $(6t-4)$ rad/s; 20 rad/s. **156.** 1) 2,8 rad/s. **157.** $12t$ sm/s; 1) $\frac{1}{12}$ s; 2) $\frac{1}{6}$ s. **158.** 1) 6 s; 2) 18 m/s; **160.** 22 m. **169.** 1) 0,04 N; 2) 0,0025 $Dž$. **170.** 1) 65 g/sm; 2) 125 g/sm. **171.** $0 < t < 2\frac{2}{3}$.

172. $\frac{8t^2 - 9t + 21}{\sqrt{4t^2 - 6t + 21}}$ ($t > 0$ bolanda). **181.** 4) $(-\infty;-3]$, $[3;\infty)$ artýar; $[-3;3]$ kemelýär. **182.** 3) $(-\infty;-2]$, $[2;\infty)$ artýar; $[-2;2]$ kemelýär. **189.** 4) 4-nji suratda funksiýanyň grafigi şekillen-

dirilendir. **190.** 3) 5-nji suratda funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. **198.** 4) $f'(x) = -3x^2 + 6x$, $(-\infty;0)$ we $(2;\infty)$ aralykdan alnan ähli, x-de $f'(x) < 0$, diýmek, f funksiýa $[-2;0]$ we $[2;3]$ aralyklarda kemelýär, $f(-2) > 0$, $f(0) < 0$, $f(2) > 0$, $f(3) < 0$, onda deňlemäniň köki baradaky teorema görä $[-2;0]$, $[2;3]$ aralyklaryň her birinde ýeke-täk çözüwi bar.

199. 3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. 4) ±2. **200.** 3) $x_{max} = -1$, $x_{min} = 0$.

4) $x_{min} = \pm 1$, $x_{max} = 0$. **201.** 1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(x) \neq 0$, bir x-da hem, $f'(x)$ funksiýa $x = 0$ bolanda bolmaýar, ýöne bu nokat içini nokat däldir. **202.** 3) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. 4) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$· **203.** 3) ± 3. 4) 0;±2. **205.** 4) 6-njy suratda funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. **217.** 4) 7-nji suratda funksiýanyň grafigi şekillendirilendir. **218.** 4) $(-\infty;-1]$, $[5;\infty)$ aralykda artýar, $[-1;5]$ aralykda kemelýär. **220.** 3) $D(f) = E(f) = R$; f täk funksiýa, $x = 0$ bolanda $f(x) = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$; eger $x \in \left(-\sqrt{\frac{20}{3}};0\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{20}{3}};\infty\right)$ bolsa, $f(x) > 0$; eger $x \in \left(-\infty;-\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$, $x \in \left(0;\sqrt{\frac{20}{3}}\right)$ bolsa, $f(x) < 0$; f funksiýa $(-\infty;-2]$, $[2;\infty)$ aralyklarda artýar; f funksiýa $[-2;2]$ aralykda kemelýär; $x_{max} = -2$, $f(-2) - 4\frac{4}{15}$, $x_{min} = 2$, $f(2) = -4\frac{4}{15}$.

4) $D(f) = E(f) = R$; f täk funksiýa; $f(x) = 0$, eger $x = 0$ bolsa, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$; eger $x \in \left(-\infty;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $x \in \left(0;-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ bolsa, $f(x) > 0$, eger $x \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$, $x \in \left(\sqrt{\frac{5}{3}};\infty\right)$ bolsa, $f(x) < 0$; aralykda f funksiýa

artýar, $(-\infty;-1], [1;\infty)$ aralykda kemelýär. $x_{min} = -1$, $f(-1) = 2$; $x_{max} = 1$, $f(1) = 2$. **221.** 3), 4) 8-nji, 9-njy suratlarda funksiýanyň grafikleri şekillendirilendir. **222.** 3), 4) 10-njy suratlarda funksiýanyň grafikleri şekillendirilendir. **227.** 4) 2. **228.** 1) 3.

242. 1) $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(x) = f(2) = 56$, $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 2$.

2) $\max\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-2) = 2$, $\min\limits_{[-3;-2]} f(x) = f(-3) = 1{,}5$. **247.** 6 s; 72 m/s.

248. $\min\limits_{[-2;5]} f(x) = f(-2) = 9$; $\max\limits_{[-2;5]} f(x) = f(2) = 25$. **249.** 10 s. 4=2+2.

258. 12 m. **259.** $16 = 4 \cdot 4$. **260.** 8 sm; 8 sm. **261.** Beýikligi 1,5 dm, esasyň tarapy 3 dm. **262.** 30 sm, 20 sm. **263.** $20\sqrt{2}$ sm, $20\sqrt{2}$ sm. **265.** B-den 1 km daşlaşan AB kesimiň nokadyna. **266.** −0,5. **268.** Inedördül.

III BAP

375. 4) 1. **376.** 3) 0,9. **382.** 3) $\frac{7}{4\ln 2} \approx 2{,}5247$. **386.** 4) $10\frac{2}{3}$.

387. 4) $5\frac{1}{3}$. **388.** 4) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$· **389.** 4) 4,5. **390.** 4) $\frac{1}{12}$· **403.** $5\frac{1}{3}$. **404.** 4,5.

421. 4) $\frac{16\pi}{15}$· **422.** 4) $\frac{\pi}{6}$· **423.** $\frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$. **424.** $\frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

428. 0,16 j. **429.** 0,16 j. **431.** $Vq\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$. **432.** $\frac{(a+2b)h^2}{6}qg$.

434. $\frac{\pi r^2 h^2 pq}{2}$· **435.** $\frac{1}{3}\pi R^3 pq$. **436.** $\frac{pSw^2 l^3}{6}$· **457.** 4) $y = 2\cos\frac{x}{2}$·

459. 3) $x^4 = -9x$. **461.** $\frac{t\ln 2}{\ln m - \ln n}$· **462.** 9 min. **463.** $\frac{1}{\ln 2}S \approx 3{,}322$ s; 0,6394 s. **464.** $\frac{10\lg 2}{\lg 1{,}6}min \approx 14{,}75$ min.

466. $50e^{-5}m/min \approx 3{,}37$ m/min.

IV BAP

526. 52360. **527.** 10. **528.** 26. **529.** 10000. **530.** 20. **531.** 30. **532.** 134. **533.** 3^m.

V BAP

587. 1) -5. 2) $(-\infty;\infty)$. 3) $\varnothing$ 4) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. 5) $\varnothing$. 6) $(0;1)\cup(1;\infty)$. **588.** 1) $(-\infty;0)\cup(0;-\infty)$. 2) $\varnothing$. 3) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. 4) $(0;\infty)$. 5) $(0;1)\cup(1;\infty)$. 6) $[0;\infty)$. **589.** 1) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. 2) $\varnothing$. 3) $\varnothing$. 4) -1. 5) 1. 6) $\varnothing$. **590.** 1) -1. 2) 4. 3) $\varnothing$. 4) 3. 5) 1. **591.** 1) 3. 2) 4. 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. 4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **592.** 1) 0. 2) 1. 3) 1. 4) 2. 5) 0. 6) 0. 7) 2. 8) 0. **593.** 1) -1; 2. 2) 2. 3) -2; -1. 4) 1. **594.** 1) – 6) ýok. **595.** 1) -1; 4. 2) -3;2. 3) 0. 4) $\frac{\pi}{4}k$, $k\in Z$. **596.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi m$, $k,m\in Z$. 2) -3; -1. 3) $(2;\infty)$ 4) 1; $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. **597.** 1) -1. 2) 3. 3) -1; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 1. 4) 1. **598.** 1) $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 2) -5; 5. 3) $\pm\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. 4) $\frac{3}{2}$; $\frac{36}{25}$. **599.** 1) $(-\infty;\infty)$. 2) $\left[-\frac{2}{17};\frac{2}{3}\right]$. 3) $(-\infty;\infty)$. 4) $(-\infty;0)$. **600.** 1) $(-1;2)\cup(3;\infty)$. 2) $\{-1\}\cup[2;\infty)$. 3) $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};\infty\right)$. 4) $x>3$; $x=2\pi k$, $k\in Z\cap(-\infty;0]$. **601.** 1) $(-5;-3)\cup(-3;2)$. 2) $(-\infty;1)\cup\{2\}$. 3) $(3;3,5)\cup(4;\infty)$. 4). $\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right)\cup[3;\infty)$. **602.** 1) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$; 3) $\cup\left(4;\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(8;\infty)$. 2) $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};1\right)\cup(1;\infty)$. 3) $(-2;3)$. 4) $(-1;0)\cup(2;4)$.

5) $(-5;-\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{5};5)$. **603.** 1) $(3;5]$. 2) $(2;3]$. 3) $\left[-1-\sqrt{52};-5\right)\cup\left(1;-1+\sqrt{52}\right]$. 4) $\left[-1-\sqrt{28};1-\sqrt{10}\right)\cup\left(3;-1+\sqrt{28}\right]$. **604.** 1) $(-1;2]\cup[3;\infty)$. 2) $(0;\infty)$. 3) $\left(-\frac{1}{3};1\right]$. 4) $\left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$. **605.** 1) $(0;1]$. 2) $(1;\infty)$. 3) $[2;\infty)$ 4) $\left(1-\sqrt{7};-1\right]\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left[2;1+\sqrt{7}\right)$.

607. 1) $(1;4)$, $(4;1)$, 2) $(2;1)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{4}{3}\right)$. 3) $\left(-4;\frac{2}{5}\right)$, $\left(2;-\frac{4}{5}\right)$. 4) $(10;2)$, $(-2;-10)$. **608.** 1) $(-4;-5)$, $(5;4)$. 2) $(0;-2)$, $(2;0)$. **609.** 1) $(-1;2)$, $(2;-1)$. 2) $(-1;2)$, $(-1;-1)$, $(2;-1)$. **610.** 1) $(-3;-1)$, $(3;1)$. 2) $(2;1)$, $(1;2)$. **612.** 1) $\left(\frac{3}{14};\frac{1}{14}\right)$. 2) $(4;2)$. **613.** 1) $(10;0,01)$. 2) $(9;7)$. **614.** 1) $x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $y_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$. 3) $x_1=\pi(n+k)+\frac{\pi}{6}$, $y_1=\pi(k-n)+\frac{\pi}{6}$, $x_2=\pi(n+k)-\frac{\pi}{6}$, $y_2=\pi(k-n)-\frac{\pi}{6}$, $k\in Z$.

Barlaglaryň jogaplary

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I BAP	I	a	d	d	b	ç	a	ç	b	a	a
	II	b	ç	ç	b	d	ç	b	a	b	b
II BAP	I	a	a	a	a	a	ç	a	a	b	b
	II	b	a	b	a	ç	ç	a	a	a	ç
III BAP	I	b	a	b	a	b	d	d	a	ç	ç
	II	b	ç	d	a	b	ç	d	ç	ç	d

VI BAP

622. a) hawa. b) ýok. ç) ýok. d) hawa. **624.** a) 52305; 52335; 52365; 52395; 52320; 52350; 52380. b) 52344. **634.** ç) $1\frac{8}{90}$. **655.** $b_1=0,2$; $q=5$. **657.** 5. **659.** $q=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $s=6$. **664.** d) $\frac{x-3}{y}$. **665.** d) 2. **666.** d) 3. **679.** b) $\frac{1-m}{1+m}$. d) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos2\alpha=-\frac{7}{9}$.

MAZMUNY

Jumabaý Töräýew, Azatgeldi Öwezow,
Hajymuhammet Geldiýew,
Baba Kömekow, Orazmuhammet Aşyrow,
Gurbannazar Gurbangulyýew

ALGEBRA WE ANALIZIŇ BAŞLANGYÇLARY

Orta mekdepleriň X synpy üçin synag okuw kitaby

Dosent A. Narcaýewiň redaksiýasy bilen

Redaktor	*J. Amanowa*
Surat redaktory	*G. Orazmyradow*
Teh.redaktory	*O. Nurýagdyýewa*
Suratçy	*T. Aslanowa*
Neşir üçin jogapkär	*A. Çaryýew*

Ýygnamaga berildi 21.09.2007.
Çap etmäge rugsat edildi 4.04.2008.
Möçberi 60x90 $^1/_{16}$. Ofset kagyzy. Mekdep garniturasy.
Ofset çap ediliş usuly. Şertli çap listi 22.0.
Şertli-reňkli ottiski 44.29. Hasap-neşir listi 17.08.
Çap listi 22.0. Sany 126 500. Sargyt № 2629.

Türkmen döwlet neşirýat gullugy.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.

Türkmen döwlet neşirýat gullugynyň Metbugat merkezi.
744004. Aşgabat, 1995-nji köçe, 20.