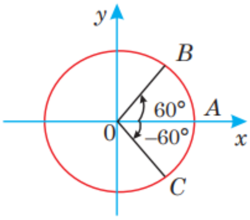
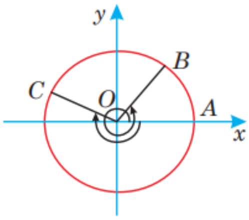
Trigonometrik funksiýalar

Ox okunyň üstünde koordinatalar başlangyjyndan sag tarapda A nokady belläliň we merkezi O nokatda bolan OA radiusly töwerek çyzalyň (1-nji surat). OA radiusa başlangyç radius diýjekdiris.

Başlangyç radiusy O nokadyň töwereginde sagat diliniň (strelkasynyň) hereketiniň garşysyna 60°-a öwreliň. Şonda ol OB radiusyň üstüne düşýän bolsun. Şeýle bolanda, öwrülme burçy 60°-a deň diýilýär. Eger başlangyç radiusy O nokadyň töweregin- den sagat diliniň hereketiniň ugruna 60°-a öwürsek, onda ol OC radiusa geçer. Bu ýagdaýda öwrülme burçy –60°-a deň diýilýär. 60°-a we – 60°-a deň bolan burçlar 1-nji suratda ugurlar arkaly görkezilendir.



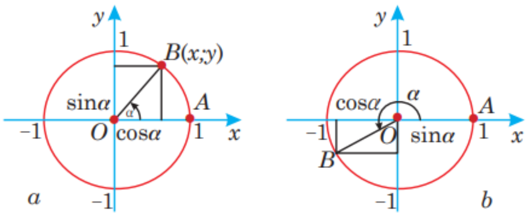
1-nji surat



2-nji surat

Umuman, başlangyç radius sagat diliniň garşysyna öwrü- lende alynýan burçlar položitel, sagat diliniň ugruna öwrülende alynýan burçlar otrisatel hasap edilýär.

OA radius O nokadyň töwereginde a burça öwrülende, OB radiusa geçýän bolsun (3-nji sur. ser.).



3-nji surat

- **α burçuň sinusy diýip, B nokadyň y ordinatasyna aýdylýar.**
- **α burçuň kosinusy diýip, B nokadyň x absissasyna aýdylýar.**
- **α burçuň tangensi diýip, B nokadyň ordinatasynyň onuň absissasyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.**
- **α burçuň kotangensi diýip, B nokadyň absissasynyň onuň ordinatasyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.**

Eger B nokadyň koordinatalary x-a we y-e, töweregiň radiusy 1-e deň bolsa, onda

$$\boldsymbol{sin\alpha = y;\quad cos\alpha = x;\quad tg\alpha = \frac{y}{x}\;;\quad ctg\alpha = \frac{x}{y}.}$$

α burçuň her bir ýolbererli bahasyna $sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ we $ctg\alpha$ aňlatmalaryň diňe bir bahasy degişlidir. Şoňa görä-de sinus, kosinus, tangens we kotangens α burçuň funksiýalarydyr. Bulara **trigonometrik funksiýalar** diýilýär.

Birlik töweregiň üstünde ýatan nokatlaryň (x; y) koordinatalarynyň –1≤y≤1, –1≤x≤1 aralyklara degişli bolanlygyna görä, sinusyň we kosinusyň bahalar ýaýlasy [–1; 1] aralykdyr. Tangensiň we kotangensiň bahalar ýaýlasy bolsa, ähli hakyky sanlaryň köplügidir.

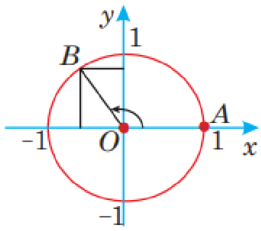
Trigonometrik funksiýalaryň bahalarynyň hasaplanylyşynyň mysallaryna seredeliň.

1-nji mysal. Çyzgynyň kömegi bilen 120°-lyk burçuň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň ýakynlaşan bahalaryny tapalyň.

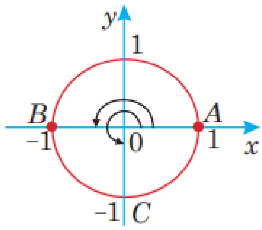
Merkezi koordinatalar başlangyjynda ýerleşen radiusy $R = OA = 1$ bolan töwerek çyzalyň (4-nji surat). OA radiusy O nokadyň töwereginde 120°-a öwreliň. OB radiusy alarys. Çyzgy boýunça B nokadyň koordinatalaryny tapalyň:

$x \approx -0{,}5$; $y \approx 0{,}8$ bolar. Bu ýerden $sin120° \approx 0{,}8$; $cos120° \approx -\ 0{,}5$;

$$tg120° = \frac{y}{x} \approx \frac{0{,}8}{-0{,}5} = 1{,}6; \quad ctg120° = \frac{x}{y} \approx -\frac{0{,}5}{0{,}8} \approx -0{,}6$$



4-nji surat



5-nji surat

2-nji mysal. 180° we 270° burçlar üçin sinusyň, kosinusyň, tangensiň we kotangensiň bahalaryny tapalyň.

OA radius O nokadynyň töwereginde 180° $-$a öwrülende, OB radiusa, 270°-a öwrülende bolsa, OC radiusa geçýär (5-nji su- rat). B nokadyň koordinatalarynyň $x =-1$ we $y = 0$, C nokadyň koordinatalarynyň $x = 0$ we $y =-1$ bolanlygyna görä, $sin180° = 0$, $cos180° =-1, tg180° = -\frac{0}{1} = 0$

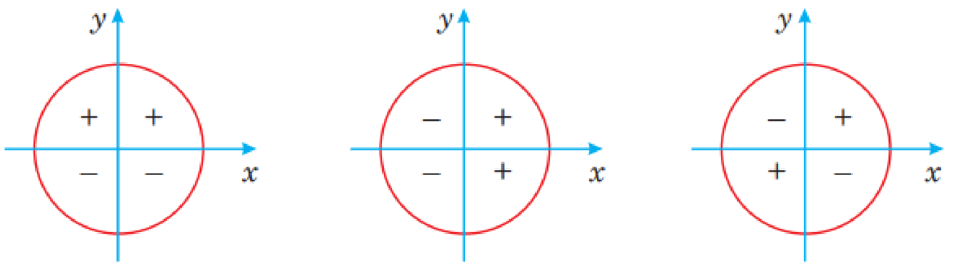
$sin270° = -1, \quad cos270° = 0, \quad ctg270° = \frac{0}{-1} = 0$

$ctg180°$ we $tg270°$ aňlatmalaryň manysy ýokdur.

Sinusyň, kosinusyň, tangensiň we kotangensiň häsiýetleri

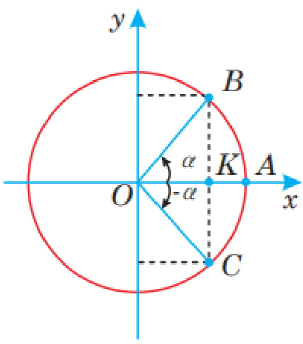
Trigonometrik funksiýalaryň käbir häsiýetlerine seredeliň.

Sinusyň, kosinusyň, tangensiň we kotangensiň koordinata çärýekleriniň her birindäki alamatlary 6-njy suratda görkezilendir.



Sinusyň alamatlary *Kosinusyň alamatlary* *Tangensiň we kotangensiň alamatlary*

6-nji surat



Indi bolsa trigonometrik funksiýalaryň haýsylarynyň jübüt we haýsylarynyň täkdigini anyklalyň.

Goý, α burça öwrülende OA radius OB radiusa, $-\alpha$ burça öwrülende bolsa, OC radiusa geçýän bolsun (7-njy surat). B we C nokatlary birleşdirip, BOC deňýanly üçburçluk alarys. OA şöhle BOC burçuň bissektrisasydyr. Şoňa göräde OK kesim BOC üçburçlugyň medianasy hem beýikligi bolar. Bu ýerden B we C

nokatlaryň absissa okuna görä simmetrikligi gelip çykýar.

Goý, B nokadyň koordinatalary $x - a$ we $y - e$ deň bolsun. Onda, C nokadyň koordinatalary x we $-y$ bolar:

$$sin(-\alpha) = -y = -sin\alpha; \qquad tg(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -tg\alpha$$

$$cos(-\alpha) = x = cos\alpha; \qquad ctg(-\alpha) = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y} = -ctg\alpha$$

Biz garşylykly burçlaryň sinuslary, kosinuslary, tangensleri we kotangensleri arasyndaky baglanyşyklary aňladýan formulalary aldyk:

$$sin(-\alpha) = -sin\alpha; \qquad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

$$cos(-\alpha) = cos\alpha; \qquad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

Diýmek, sinus, tangens we kotangens täk funksiýalardyr, kosinus bolsa jübüt funksiýadyr.

Mysal üçin :

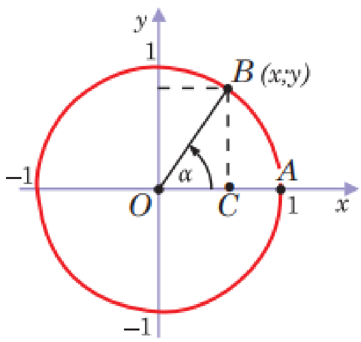
$$\sin(-30°) = -sin30° = \frac{1}{2} \qquad \cos(-60°) = cos60° = \frac{1}{2}$$

Şol bir argumentli trigonometrik funksiýalaryň arasyndaky baglanyşyklar

Merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan birlik töwerege seredeliň (10-njy surat). OA başlangyç radius a burça öwrülende, OB radiusa geçýän bolsun. Pifagoryň teoremasyna görä, $BC^2 + OC^2 = OB^2$.

$BC = y = sina, OC = x = cosa, OB = R = 1$ bolandygyna görä:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \textbf{(1)}$$



7-nji surat

(1) deňlik α -nyň islendik bahasynda dogrudyr. Şol bir argumentiň sinusy we kosinusy arasyndaky baglanyşygy görkezýän bu deňlige esasy trigonometrik toždestwo, deňligiň çep bölegindäki $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ aňlatma bolsa, **trigonometrik birlik** diýilýär.

Indi, şol bir burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi arasyndaky başgada birnäçe baglanyşyklara seredeliň. Tangensiň we kotangensiň kesgitlemesine laýyklykda:

$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \quad (2) \qquad we \quad ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \quad (3)$$

deňlikler alnar. Bu deňlikler a-nyň ähli ýolbererli bahalarynda dogrudyr. (2) we (3) deňlikleriň sag taraplarynda özara ters aňlatmalar dur. Şoňa görä-de:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = 1$$

Soňky deňlik şol bir burçuň tangensi bilen kotangensiniň arasyndaky baglanyşygy görkezýär we α -nyň $tg\alpha$-ny we $ctg\alpha$-ny manyly edýän ähli bahalarynda dogrudyr.

Indi şol bir burçuň tangensi bilen kosinusynyň we kotangensi bilen sinusynyň arasyndaky baglanyşygy görkezýän formulalary getirip çykaralyň. (1) deňligiň iki bölegini hem $cos2\alpha$ bölüp, alarys:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad ýa-da \quad 1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (4)$$

Eger (1) deňligiň iki bölegini hem $\sin^2\alpha$ bölsek, onda

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad ýa-da \quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

deňligi alarys. (4) we (5) deňlikler degişlilikde, cosa ≠ 0 we sina ≠ 0 bolanda dogrudyr. (1), (5) deňlikler toždestwolardyr. Olara esasy trigonometrik toždestwolar hem diýilýär. Bu toždestwolaryň ulanylyşyna seredeliň.

3-nji mysal. Eger $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ we 90° < a < 180° bolsa, $cos\alpha$, $tg\alpha$ we $ctg\alpha$-ny tapalyň.

$\sin^2 a \;+\cos^2 a \;=\; 1$ formuladan $\cos^2 a$ = 1 – $\sin^2 a$ deňligi alarys. α ikinji çärýegiň burçy bolandygyna görä onuň kosinusy otrisateldir. Diýmek:

$$cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{3}{5}:\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$$

αburçuň kotangensini tapmak üçin, $tg\ \alpha\cdot ctg\ \alpha$ = 1 formuladan peýdalanmak amatlydyr:

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$$

Şeýlelikde:

$$cos\alpha=-\frac{4}{5}, \quad tg\alpha=-\frac{3}{4}, \quad ctg\alpha=-1\frac{1}{3}$$

2-nji mysal. Eger $tg\alpha$ = 3 we 180° < α < 270° bolsa, $sin\alpha$, $cos\alpha$ we $ctg\alpha$-ny tapmaly.

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ formuladan cosα-ny tapalyň. α III çärýegiň burçy bolandygyna görä, onuň kosinusyny otrisatel alamat bilen alarys:

$$cos=-\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=-\sqrt{\frac{1}{1+3}}=-1/2$$

$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ formuladan:

$$sin\alpha=tg\alpha\cdot cos\alpha=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$