Geometrik progressiýa

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; … yzygiderlige garap geçeliň. Şu yzygiderligiň ikinjiden başlap, her bir agzasy öň ýanyndaky agzany 2-ä köpeltmek arkaly alynýar. Şu yzygiderlik geometrik progressiýanyň mysalydyr.

Kesgitleme. **Ikinji agzadan başlap, her bir agzasy öň ýanyndaky agzanyň şol bir sana köpeldilmegi netijesinde alnan, noldan tapawutly sanlaryň yzygiderligine geometrik progressiýa diýilýär.**

Başgaça aýdylanda, eger islendik natural n üçin $b_n \neq 0$ we $b_{n+1} = b_n \cdot q$ (bu ýerde q – käbir san) şert ýerine ýetýän bolsa, onda (b_n) yzygiderlik geometrik progressiýadyr.

Geometrik progressiýanyň kesgitlemesinden, onuň ikinji agzasyndan başlap islendik agzasynyň öň ýanyndaky agza bolan gatnaşygynyň q deň bolýandygy, ýagny islendik natural n-de $\boldsymbol{\frac{b_{n+1}}{b_n} = q}$ deňligiň dogrudygy gelip çykýar.

q sana geometrik **progressiýanyň maýdalawjysy** diýilýär.

Geometrik progressiýanyň maýdalawjysynyň noldan tapawutlydygy aýdyňdyr.

Eger q progressiýanyň maýdalawjysy 1-den uly bolsa, onda b_1>0 bolanda, progressiýa artýandyr, $b_1 < 0$ bolanda, kemelýändir. Eger q=1 bolsa, onda geometrik progressiýanyň ähli agzalary özara deňdir.

Aşakdaky mysallary getireliň:

1. . Eger b_1 = 972 we $q = \frac{1}{3}$ bolsa, 972; 324; 108; 36; 12; 4; $1\frac{1}{3}$; … geometrik progressiýany alarys;
2. Eger b_1 = –5 we q = –1 bolsa, −5; + 5; −5; + 5; −5; … geometrik progressiýany alarys;
3. 3. Eger b_1 = 9 we q = 1 bolsa, 9; 9; 9; 9; 9; … geometrik progressiýany alarys

Geometrik progressiýanyň birinji agzasyny we maýda- lawjysyny bilip, onuň ikinji, üçünji we umuman islendik agzasyny yzygiderlikde tapyp bolar:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q; \\ b_3 &= b_2 q = (b_1 q)q = b_1 q^2; \\ b_4 &= b_3 q = (b_1 q^2)q = b_1 q^3; \\ b_5 &= b_4 q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4. \end{aligned}$$

Umuman, bn-ni tapmak üçin biz b_1 -i, q^{n-1} -e köpeltmelidiris, ýagny:

$$\boldsymbol{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

1-nji mysal . Geometrik progressiýada b_1 =1 we q= 3. b_8 -i tapmaly

Çözülişi. Geometrik progressiýanyň п-nji agzasynyň for- mulasy boýunça taparys:

$$b_8 = 1 \cdot 3^7 = 2187.$$

2-nji mysal. Eger b_1 = 2 we b_3 = 1 bolsa, (b_n) geometrik progressiýanyň 10-njy agzasyny tapalyň.

Çözülişi. Geometrik progressiýanyň birinji we üçünji agzalaryny bilip, onuň maýdalawjysyny tapyp bolýar. $b_3 = b_1 q^2$ bolany üçin, $q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{1}{2}$, $q^2 = \frac{1}{2}$ deňlemäni çözüp taparys:

$$q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Şeýlelikde, meseläniň şertini kanagatlandyrýan iki progressiýa bar

Eger $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolsa, onda

$$b_{10} = b_1 q^9 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = 2 \cdot \frac{2^4\sqrt{2}}{2^9} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Eger $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bolsa, onda

$$b_{10} = b_1 q^9 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9 = -2 \cdot \frac{2^4\sqrt{2}}{2^9} = -\frac{\sqrt{2}}{16}$$

Meseläniň iki çözüwi bar:

Jogaby: $b_{10} = \frac{\sqrt{2}}{16}$ ýa-da $b_{10} = -\frac{\sqrt{2}}{16}$

geometrik progressiýanyň ilkinji n agzasynyň jemi:

$$\mathbf{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\ \ q \neq 1}$$

3-nji mysal. b1 = 3 we q = $\frac{1}{3}$ bolan (b_n) geometrik progressiýanyň ilkinji sekiz agzasynyň jemini tapmaly.

Çözülişi. Geometrik progressiýanyň n-nji agzasynyň formulasy boýunça taparys:

$$b_8 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7;\ \ S_8 = \frac{b_8 \cdot \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right)}{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{6561} - 1\right)}{-\frac{2}{3}} = -\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{6561} - 1\right) = \frac{3280}{729}$$

Eger $q = 1$ bolsa, onda progressiýanyň ähli agzalary birinji agza deň we

$$S_n = nb_1$$

$\mathbf{S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1},\ \ q \neq 1}$ formulada b_n-e derek $b_1\, q^{n-1}$ aňlatmany goýalyň.

Alarys:

$$S_n = \frac{b_1\, q^{n-1} q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \qquad q \neq 1$$

Geometrik progressiýanyň ilkinji n agzalarynyň jemini tapmaga degişli köp meseleler çözülende, sonky getirip çykarlan formulany ulanmak amatlydyr.

2-nji mysal. $b_1 = 1$ we $q = 2$ bolan (b_n) geometrik progressiýanyň ilkinji otuz iki agzasynyň jemini tapalyň.

Çözülişi. Progressiýanyň birinji agzasynyň we maýdalawjysynyň belli bolany üçin, $S_n = \frac{b_1\, q^{n-1}q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$, $q \neq 1$ formuladan peýdalanmak amatly bolar.

Alarys:

$$S_{32} = \frac{1 \cdot (2^{32} - 1)}{2 - 1} = 2^{32} - 1 = 4\ 294\ 967\ 295$$