**H. Geldiýew, A. Öwezow, J. Töräýew,
B. Kömekow, O. Aşyrow, G. Gurbangulyýew,
G. Şadurdyýew, A. Kaşaňow**

ALGEBRA WE ANALIZIŇ BAŞLANGYÇLARY

Umumy orta bilim berýän mekdepleriň XI synpy
üçin synag okuw kitaby

*Türkmenistanyň Bilim ministrligi
tarapyndan hödürlenildi*

Aşgabat
Türkmen döwlet neşirýat gullugy
2014

UOK 373:512
G 32

Geldiýew H. we başg.

G 32 **Algebra we analiziň başlangyçlary.** Umumy orta bilim berýän mekdepleriň XI synpy üçin synag okuw kitaby. – A.: Türkmen döwlet neşirýat gullugy, 2014.

Türkmenistanyň at gazanan bilim işgäri, dosent A. Narçaýewiň redaksiýasy bilen.

TDKP № 177, 2014 KBK 22.141 ýa 72

TÜRKMENISTANYŇ PREZIDENTI
GURBANGULY BERDIMUHAMEDOW

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET TUGRASY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET BAÝDAGY

TÜRKMENISTANYŇ DÖWLET SENASY

Janym gurban saňa, erkana ýurdum,
Mert pederleň ruhy bardyr köňülde.
Bitarap, garaşsyz topragyň nurdur,
Baýdagyň belentdir dünýäň öňünde.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

Gardaşdyr tireler, amandyr iller,
Owal-ahyr birdir biziň ganymyz.
Harasatlar almaz, syndyrmaz siller,
Nesiller döş gerip gorar şanymyz.

Gaýtalama:

Halkyň guran Baky beýik binasy,
Berkarar döwletim, jigerim-janym.
Başlaryň täji sen, diller senasy,
Dünýä dursun, sen dur, Türkmenistanym!

I bap

Asyl funksiýa we integral

§1. Asyl funksiýanyň kesgitlenilişi

Biz differensirlemegiň kömegi bilen material nokadyň göni çyzyk boýunça hereketiniň kanuny berlende wagtyň t pursadyndaky mgnowen tizligi hasaplap bilýäris. Ýöne, köplenç, ters meseläni çözmeli, ýagny material nokadyň wagtyň her bir pursadyndaky mgnowen tizligi boýunça onuň hereketiniň kanunyny kesgitlemeli bolýar. Bu mesele funksiýanyň berlen önümi boýunça onuň özüni tapmaklyga getirýär. Başdaça aýdanyňda, berlen f funksiýa boýunça $F'(x) = f(x)$ deňligi kanagatlandyrýan F funksiýany tapmak meselesidir. Şeýle meseleler differensirlemäge ters bolan integrirleme operasiýasy bilen çözülýändir.

Kesgitleme. Eger berlen aralygyň ähli x-leri üçin

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

bolsa, onda berlen aralykda F funksiýa f funksiýanyň asyl funksiýasy diýilýär.

1-nji mysal. $(-\infty; \infty)$ aralykda $f(x) = 3x^2$ funksiýa üçin $F(x) = x^3$ funksiýa asyl funksiýadyr, çünki ähli $x \in(-\infty; \infty)$ üçin

$$F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x).$$

$x^3 + 5$ funksiýanyň hem edil şunuň ýaly $3x^2$ önüminiň bardygyny aňsat görmek bolýar. Şonuň üçin $x^3 + 5$ funksiýa hem $3x^2$ funksiýa üçin $(-\infty; \infty)$ aralykda asyl funksiýadyr. 5 sanyň ornuna islendik hemişelik sany goýup boljakdygy düşnüklidir. Şunlukda, asyl funksiýany tapmak meselesiniň tükeniksiz köp çözüwiniň bardygyny görmek bolýar. Bu çözüwleriň ählisiniň nähili tapylýandygyny indiki paragrafda göreris.

2-nji mysal. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiýa üçin $(0; \infty)$ aralykda $F(x) = \ln x$ funksiýa asyl funksiýadyr, çünki bu aralygyň ähli x-i üçin

$$F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} = f(x).$$

Edil 1-nji mysaldaky ýaly, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiýa üçin $(0; \infty)$ aralykda $F(x) = \ln x + C$ funksiýa asyl funksiýadyr, bu ýerde C hemişelik san.

3-nji mysal. $F(x) = \frac{1}{x}$ funksiýa $(-\infty; \infty)$ aralykda $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ funksiýa üçin asyl funksiýa däldir, çünki 0 nokatda $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetmeýär. Emma $(-\infty; 0)$ we $(0; \infty)$ aralyklaryň her birinde f üçin F asyl funksiýa bolýar.

? 1. Asyl funksiýa näme?

Gönükmeler

1. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýadygyny subut ediň.

1) $F(x) = x^5$, $f(x) = 5x^4$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = x^{-3}$, $f(x) = -3x^{-4}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$, $f(x) = x^6$, $x \in (-\infty; \infty)$;

4) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$, $f(x) = x^{-7}$, $x \in (0; \infty)$.

2. Berlen aralykda f funksiýa üçin F funksiýa asyl funksiýa bolup bilýärmi:

1) $F(x) = 4 - x^3$, $f(x) = -3x^2$, $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $F(x) = 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0; \infty)$;

3) $F(x) = \cos x + 10$, $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty; \infty)$;

4) $F(x) = 3 + \sin 2x$, $f(x) = 2\cos 2x$, $x \in (0; \infty)$?

R-de f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapyň (3–5).

3. 1) $f(x) = 4{,}5$; 3) $f(x) = 2x$;
2) $f(x) = \cos x$; 4) $f(x) = \sin x$.

4. 1) $f(x) = -\sin x$; 3) $f(x) = -4$;
2) $f(x) = -x$; 4) $f(x) = -\cos x$.

5. 1) $f(x) = 3^{-x}$; 3) $f(x) = 4x^{-2}$;
2) $f(x) = \frac{3}{x}$; 4) $f(x) = x^{\sqrt{5}-1}$.

6. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin, F funksiýanyň asyl funksiýadygyny subut ediň.

1) $F(x) = \sin 2x$, $f(x) = \sin 2x$, $x \in R$;

2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in R$;

3) $F(x) = \sin 3x$, $f(x) = 3\cos 3x$, $x \in R$;

4) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $f(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, $x \in (-\pi; \pi)$.

7. Görkezilen aralykda f funksiýa üçin, F funksiýa asyl funksiýa bolup bilermi:

1) $F(x) = 2x + \cos\frac{x}{2}$, $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x \in R$;

2) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $x \in (-2; 2)$;

3) $F(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 15 - \frac{1}{x}$, $x \in (0; \infty)$;

4) $F(x) = 4x\sqrt{x}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $x \in (0; \infty)$?

8. R-de f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapyň.

1. $f(x) = x - 4$;
2. $f(x) = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;
3. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$;
4. $f(x) = 3x^2 + 1$.

9. Funksiýa üçin asyl funksiýalaryň ikisini tapyň.

1. $f(x) = 2x$;
2. $f(x) = 1 - \sin x$;
3. $f(x) = x^2$;
4. $f(x) = \cos x - 2$.

10. Berlen üç funksiýadan beýleki ikisi, degişlilikde, onuň önümi we asyl funksiýasy bolar ýaly üçünji funksiýany görkeziň.

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $h(x) = -\frac{2}{x^3}$;
2. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$, $g(x) = 1 + \cos x$, $h(x) = x + \sin x$;
3. $f(x) = 1$, $g(x) = x + 2$, $h(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$;
4. $f(x) = 3 - 2\sin x$, $g(x) = 3x + 2\cos x$, $h(x) = -2\cos x$.

§2. Asyl funksiýanyň esasy häsiýeti

1. Asyl funksiýalaryň umumy görnüşi. Integrirleme meselesi berlen funksiýa üçin ähli asyl funksiýalary tapmakdan ybaratdyr. Bu mesele çözülende aşakdaky tassyklama möhüm rol oýnaýar.

Funksiýanyň hemişelik nyşany. Eger käbir $(a; b)$ aralykda $F'(x) = 0$ bolsa, onda F funksiýa bu aralykda hemişelikdir.

Subudy. $(a;\ b)$ aralykda käbir x_0 nokady belläliň. Onda bu aralykdan alnan islendik x san üçin Lagranžyň formulasynyň esasynda

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

bolar ýaly edip, x bilen x_0 arasynda şeýle bir c sany görkezmek bolar. $c \in (a; b)$ bolany üçin. $F'(x) = 0$ şerte görä, $F'(c) = 0$ bolar. Diýmek, $F(x) = F(x_0)$. Şunlukda, islendik $x \in (a; b)$ üçin F funksiýa hemişelik bahasyny saklaýar.

f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň hemmesini **asyl funksiýanyň umumy görnüşi** diýlip atlandyrylýan bir formulanyň kömegi bilen ýazmak mümkin. Aşakdaky teorema (asyl funksiýanyň esasy häsiýeti) dogrudyr:

Teorema. **Eger F funksiýa $(a; b)$ aralykda f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri bolsa, onda f funksiýanyň $(a; b)$ aralykdaky islendik asyl funksiýasyny $F(x) + C$ görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde C erkin hemişelik san.**

Subudy. Teoremanyň şertine görä, islendik $x \in (a; b)$ üçin $F'(x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetýär. Şonuň esasynda C hemişelik san bolanda $[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x)$ bolýandygyna görä, islendik $x \in (a; b)$ üçin, $[F(x) + C]' = f(x)$ deňlik dogrudyr. Bu bolsa $(a; b)$ aralykda $F(x) + C$ funksiýanyň f funksiýanyň asyl funksiýasy bolýandygyny görkezýär.

Diýmek, f funksiýanyň $(a; b)$ aralykda iň bolmanda bir asyl funksiýasy bar bolsa, onda bu funksiýanyň $(a; b)$ aralykda tükeniksiz köp asyl funksiýasy bardyr. Goý, $\Phi(x)$ şol asyl funksiýalaryň biri bolsun, onda $\Phi(x) = F(x) + C$ bolýandygyny subut edeliň.

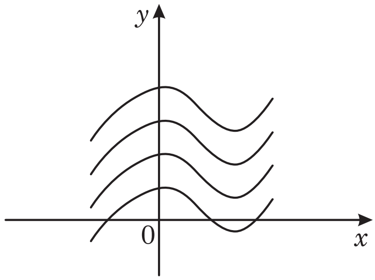
$\Phi'(x) = f(x)$ we $F'(x) = f(x)$ bolandygyna görä islendik $x \in (a; b)$ üçin:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

deňlik dogrudyr. Bu ýerden funksiýanyň hemişelik nyşanyndan $\Phi(x) - F(x) = C$, $\Phi(x) = F(x) + C$.

Asyl funksiýanyň esasy häsiýetine geometrik many bermek mümkindir: **f funksiýanyň islendik iki asyl funk-**

siýasynyň grafigi *Oy* okuň ugruna parallel göçürmek arkaly biri-birinden alynýar (*1-nji surat*).



1-nji surat

2. Asyl funksiýalary tapmaga degişli mysallar.

1-nji mysal. *R*-de $f(x) = -x^5$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapalyň.

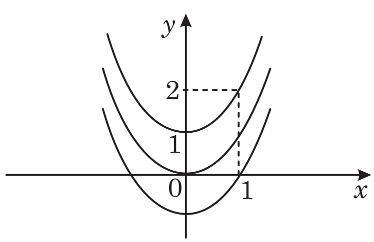
f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $-\frac{x^6}{6}$ bolar, çünki $\left(-\frac{x^6}{6}\right)' = -x^5$. Subut edilen teoremanyň esasynda f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşi şeýle bolar:

$$F(x) = -\frac{x^6}{6} + C.$$

2-nji mysal. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiýanyň $(0; \infty)$ aralykda $x = 1$ bolanda 1-e deň bolan bahany alýan asyl funksiýasyny tapalyň.

f funksiýanyň islendik asyl funksiýasynyň $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ görnüşiniň bardygyny barlamak aňsatdyr. Şerte görä, $F(1) = 1$ bolany sebäpli $\frac{2}{3} + C = 1$ görnüşdäki deňlemäni (C-e görä) alýarys, bu ýerden $C = \frac{1}{3}$. Diýmek, $F_0(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{3}$.

3-nji mysal. $f(x) = 2x$ funksiýanyň grafigi $M(1; 2)$ nokadyň üstünde geçýän asyl funksiýasyny tapalyň.



2-nji surat

$f(x) = 2x$ funksiýanyň islendik asyl funksiýasy $x^2 + C$ görnüşde ýazylýar. Bu asyl funksiýalaryň grafikleri 2-nji suratda şekillendirilendir. Gözlenilýän asyl funksiýanyň grafiginiň $M(1; 2)$ nokadynyň koordinatalary $1+C = 2$ deňlemäni kanagatlandyrmalydyr. Bu ýerden $C=1$. Diýmek, $F(x) = x^2 + 1$.

Käbir funksiýalaryň asyl funksiýalarynyň tablisasy

f funksiýa	k (hemişelik)	x^α ($\alpha \in R$, $\alpha \neq -1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
f üçin asyl funksiýalarynyň umumy görnüşi	$kx + C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$

f funksiýa	$\frac{1}{\sin^2 x}$	a^x	e^x	e^{kx}	$\frac{1}{x}$
f üçin asyl funksiýalarynyň umumy görnüşi	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$e^x + C$	$\frac{1}{k}e^{kx} + C$	$\ln x + C$, $x > 0$

Bu tablisanyň doldurylyşynyň dogrulygyny özbaşdak barlaň.

?
1. Funksiýanyň hemişelik nyşany näme?
2. Asyl funksiýanyň umumy görnüşi nähili ýazylýar?

Gönükmeler

f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (11–12).

11. 1) $f(x) = 2 - x^4$; 3) $f(x) = 4x$;
2) $f(x) = x + \cos x$; 4) $f(x) = -5$.

12. 1) $f(x) = x^8$;

2) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 7$;

3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$;

4) $f(x) = x^{13}$.

13. f funksiýa üçin görkezilen nokatda berlen bahany alýan asyl funksiýany tapyň.

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

3) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$;

4) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

14. f funksiýa üçin F funksiýanyň asyl funksiýadygyny barlaň we f funksiýanyň asyl funksiýasyny umumy görnüşde ýazyň.

1) $F(x) = \sin x - x\cos x$, $f(x) = x\sin x$;

2) $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

3) $F(x) = \cos x + x\sin x$, $f(x) = x\cos x$;

4) $F(x) = x - \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2}$.

f funksiýanyň grafigi berlen M nokat arkaly geçýän asyl funksiýasyny tapyň (15–18).

15. 1) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$;

2) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$;

3) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

16. 1) $f(x) = 2x - 4x^3$, $M(2; -8)$;
2) $f(x) = 2x + 6x^5$, $M(1; 3)$;
3) $f(x) = 4x^3 + 2x$, $M(1; -2)$;
4) $f(x) = 3x^2 - 2$, $M(2; 4)$.

17. 1) $f(x) = 2 - \sin 2x$, $M(0; 2{,}5)$;
2) $f(x) = 2 + \cos 2x$, $M(0; 3)$;
3) $f(x) = \cos x + \sin x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 4\right)$;
4) $f(x) = \sin x - \cos x$, $M(\pi; 6)$.

18. 1) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $M(1; 3e)$;
2) $f(x) = x^{-1} + e^x$, $M(1; 2e)$;
3) $f(x) = x^{-2} + \cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; -\frac{2}{\pi}\right)$;
4) $f(x) = x^{-1} - \sin x$, $M(\pi; \ln\pi)$.

19. f funksiýa üçin grafikleriniň degişli (abssissalary deň bolan) nokatlarynyň arasyndaky uzaklyk a deň bolan iki asyl funksiýasyny tapyň.
1) $f(x) = 2 - \sin x$, $a = 4$;
2) $f(x) = 1 + \mathrm{tg}^2 x$, $a = 1$;
3) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$, $a = 0{,}5$;
4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 2$.

20. Nokat $a(t)$ tizlenme bilen göni çyzyk boýunça hereket edýär. Wagtyň başlangyç t_0 pursadynda onuň koordinatasy x_0, tizligi bolsa υ_0. Nokadyň $x(t)$ koordinatasyny wagtyň funksiýasy hökmünde tapyň.
1) $a(t) = -2t$, $t_0 = 1$, $x_0 = 4$, $\upsilon_0 = 2$;

2) $a(t) = \sin t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_0 = 2$, $\upsilon_0 = 1$;

3) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $x_0 = 3$, $\upsilon_0 = 1$;

4) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \pi$, $x_0 = 1$, $\upsilon_0 = 0$.

§3. Asyl funksiýalary tapmagyň üç düzgüni

Asyl funksiýalary tapmagyň düzgünleri differensirlemegiň degişli düzgünlerine meňzeşdir.

1-nji düzgün. Eger f üçin F asyl funksiýa, g üçin G asyl funksiýa bolsa, onda $f + g$ funksiýanyň asyl funksiýasy $F + G$-e deňdir.

Hakykatdan-da, şert boýunça $F' = f$ we $G' = g$ bolany üçin jemiň önümini hasaplamagyň düzgüni boýunça

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

2-nji düzgün. Eger f üçin F asyl funksiýa, k – hemişelik san bolsa, onda kf funksiýanyň asyl funksiýasy kF-e deňdir.

Hakykatdan-da, k hemişelik köpeldijini önüm belgisiniň daşyna çykarmak mümkin, şoňa görä-de:

$$(kF)' = kF' = kf.$$

3-nji düzgün. Eger $f(x)$ üçin $F(x)$ asyl funksiýa bolup, k we b hemişelik san we $k \neq 0$ bolsa, onda $f(kx + b)$ funksiýanyň asyl funksiýasy $\frac{1}{k}F(kx + b)$ deňdir.

Hakykatdan-da, çylşyrymly funksiýanyň önümini hasaplamagyň düzgüni boýunça

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b)\cdot k = f(kx + b) \text{ bolar.}$$

Bu düzgünleriň ulanylyşyna mysallar getireliň.

1-nji mysal.

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$$

funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapalyň.

x^2 üçin asyl funksiýalaryň biri $\frac{x^3}{3}$, $\frac{1}{x^3}$ üçin bolsa, asyl funksiýalaryň biri $-\frac{1}{2x^2}$ bolany üçin 1-nji düzgün boýunça $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^3}$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň biri $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x^2}$ bolar.

Jogaby: $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2x^2} + C.$

2-nji mysal. $f(x) = \frac{4}{x}$ funksiýanyň asyl funksiýalarynyň birini tapalyň.

$\frac{1}{x}$ üçin asyl funksiýalaryň biri $\ln x$ bolany sebäpli, 2-nji düzgüni ulanyp, aşakdaky jogaby alarys:

$$F(x) = 4\ln x.$$

3-nji mysal. $y = \cos(4x - 3)$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapalyň.

$\cos x$ üçin asyl funksiýalaryň biri $\sin x$ bolany üçin, 3-nji düzgün boýunça gözlenilýän asyl funksiýa $F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x - 3)$ deňdir.

4-nji mysal.

$$f(x) = \frac{1}{(5 - 2x)^7}$$

funksiýa üçin asyl funksiýalaryň birini tapalyň.

$\frac{1}{x^7}$ üçin asyl funksiýalaryň biri $-\frac{1}{6x^6}$ bolany üçin, 3-nji düzgün boýunça gözlenilýän asyl funksiýa

$$F(x) = \frac{1}{-2} \cdot \frac{-1}{6(5 - 2x)^6} = \frac{1}{12(5 - 2x)^6} \text{ deňdir.}$$

5-nji mysal. Massasy 4 *kg* bolan material nokat Ox oky boýunça şu okuň ugruna ugrukdyrylan güýjüň täsiri astynda hereket edýär. Wagtyň t pursadynda bu güýç $F(t) =$

$= 8t + 8$. Eger $t = 2s$ bolanda nokadyň tizligi 9 m/s koordinatasy 7-ä deň bolan bolsa, hereketiň $x(t)$ kanunyny tapyň (F – nýutonlardaky güýç, t – sekuntlardaky wagt, x – metrlerdäki ýol).

Çözülişi. Nýutonyň 2-nji kanunyna laýyklykda $F = ma$, bu ýerde a tizlenme.

$$a = \frac{F}{m} \quad \text{we} \quad a(t) = \frac{F(t)}{m} = 2t + 2 \text{ bolar.}$$

Nokadyň $\upsilon(t)$ tizligi onuň $a(t)$ tizlenmesi üçin asyl funksiýadyr, şoňa görä-de

$$\upsilon(t) = t^2 + 2t + C_1.$$

C_1 – hemişelik sany $\upsilon(2) = 9$ şertden peýdalanyp taparys:

$2^2 + 2 \cdot 2 + C_1 = 9$, ýagny $C_1 = 1$ we $\upsilon = t^2 + 2t + 1$.

$x(t)$ koordinata bolsa $\upsilon(t)$ tizlik üçin asyl funksiýadyr, şoňa görä-de

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t + C_2.$$

C_2 hemişeligi $x(2) = 7$ şertden tapýarys:

$$\frac{1}{3} \cdot 8 + 4 + 2 + C_2 = 7,\ C_2 = -\frac{5}{3}.$$

Şeýlelikde, nokadyň hereket kanuny aşakdaky ýaly bolar:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + t^2 + t - \frac{5}{3}.$$

?

1. Asyl funksiýany tapmagyň birinji düzgüni nähili kesgitlenýär?
2. Asyl funksiýany tapmagyň ikinji düzgüni nähili kesgitlenýär?
3. Asyl funksiýany tapmagyň üçünji düzgüni nähili kesgitlenýär?

Gönükmeler

f funksiýa üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (21–23).

21. 1) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^2}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;

2) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

4) $f(x) = 5x^2 - 1$.

22. 1) $f(x) = (2x - 3)^5$;

3) $f(x) = (4 - 5x)^7$;

2) $f(x) = 3\sin 2x$;

4) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$.

23. 1) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$;

2) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

3) $f(x) = \frac{4}{(3x - 1)^2}$;

4) $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$.

f funksiýa üçin grafigi *M* nokat arkaly geçýän asyl funksiýany tapyň (24–26).

24. 1) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$; $M(-1; 4)$;

2) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2; 15)$;

3) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3; 2)$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$, $M(1;5)$.

25. 1) $f(x) = e^{-2x} + 1$, $M(0; 2{,}5)$;

2) $f(x) = \frac{2}{x + 1}$, $M(0; 5)$;

3) $f(x) = e^{2x} + \cos x$, $M(0; -4)$;

4) $f(x) = \sin 2x - e^{-x}$, $M(0; 6)$.

26. 1) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 2x}+\cos x,\quad M\left(\dfrac{\pi}{2};-3\right)$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}+\sin 2x,\quad M\left(\dfrac{\pi}{4};-3\right)$;

3) $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt[3]{x}},\quad M(8;\ 15)$;

4) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x}},\quad M(4;\ 12)$.

Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (27–31).

27. 1) $f(x)=1-\cos 3x+2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 4x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}-3x^2$;

3) $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2(3x+1)}-3\sin(4-x)+2x$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{(3-2x)^2}+\dfrac{3}{\sqrt{5-x}}-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

28. 1) $f(x)=5e^x$; 3) $f(x)=4^x$;

2) $f(x)=2\cdot 3x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+1$.

29. 1) $f(x)=e^{3-2x}$; 3) $f(x)=2^{-10x}$;

2) $f(x)=2\cdot 0{,}9^x-5{,}6^{-x}$; 4) $f(x)=e^{3x}+2{,}3^{1+x}$.

30. 1) $f(x)=\dfrac{3}{7x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+5}$; 4) $f(x)=\dfrac{4}{x}$.

31. 1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}$; 3) $f(x)=3x^{-1}$;

2) $f(x)=x^{2\sqrt{3}}$; 4) $f(x)=x^e$.

32. Eger F-iň grafiginiň M nokadynyň koordinatalary belli bolsa, onda f funksiýa üçin F asyl funksiýany görkezeliň.

1) $f(x) = 2x + 1$, $M(0; 0)$;
3) $f(x) = x + 2$, $M(1; 3)$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1; 4)$;
4) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2; -1)$.

33. Göni çyzyk boýunça hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t) = t^2 + 2t - 1$ formula bilen berlen. Eger wagtyň başlangyç ($t = 0$) pursadynda nokadyň koordinatalar başlangyjynda bolandygy belli bolsa, onda nokadyň x koordinatasynyň t wagta baglylykdaky formulasyny ýazyň.

34. Göni çyzyk boýunça hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t) = 2\cos\frac{t}{2}$ formula bilen berlen. Eger wagtyň $t = \frac{\pi}{3}s$ pursadynda nokadyň koordinatalar başlangyjyndan $4\,m$ uzaklykda bolandygy belli bolsa, onda nokadyň koordinatasynyň wagta baglylygynyň formulasyny tapyň.

35. Nokat $a(t) = 12t^2 + 4$ tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Eger wagtyň $t = 1s$ pursadynda onuň tizligi $10\,m/s$ bolup, koordinatasy 12-ä (a-nyň ölçeg birligi $1\,m/s^2$) deň bolsa, onda nokadyň hereketiniň kanunyny tapyň.

36. Massasy m bolan material nokat Ox ok boýunça, şu okuň ugruna ugrukdyrylan güýjüň täsiri astynda hereket edýär. Wagtyň t pursadynda güýç $F(t)$ deň. Eger $t = t_0$ bolanda nokadyň tizliginiň υ_0 koordinatasynyň x_0 deňligi belli bolsa, ($F(t)$ – nýutonlarda, t – sekuntlarda, υ – sekuntda metrlerde, m – kilogramlarda ölçelýär) onda $x(t)$-niň t wagt bilen baglylygynyň formulasyny tapyň.

1) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $\upsilon_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
2) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $\upsilon_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;

3) $F(t) = 25\cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\upsilon_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;

4) $F(t) = 3t - 2$, $t_0 = 2$, $\upsilon_0 = 3$, $x_0 = 1$, $m = 2$.

37. f funksiýanyň F_1 asyl funksiýasynyň grafigi M nokat arkaly, F_2 asyl funksiýasynyň grafigi bolsa N nokat arkaly geçýär. Şu asyl funksiýalaryň tapawudy näçä deň?

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, $M(-1; 1)$, $N(0; 3)$;

2) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$, $M(0; 2)$, $N(1; 3)$;

3) $f(x) = 4x - x^3$, $M(2; 1)$, $N(-2; 3)$;

4) $f(x) = (2x + 1)^2$, $M(-3; -1)$, $N\left(-1;\ 6\frac{1}{3}\right)$.

F_1 we F_2 grafikleriň haýsysy ýokarda ýerleşýär?

§4. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany

Goý, $[a; b]$ kesimde alamatyny üýtgetmeýän f üznüksiz funksiýa berlen bolsun. f funksiýanyň grafigi, $[a; b]$ kesim we $x = a$ hem $x = b$ göni çyzyklar bilen çäklenen figura **egriçyzykly trapesiýa** diýilýär. Egriçyzykly trapesiýanyň dürli mysallary 3-nji *a*-e suratlarda görkezilendir.

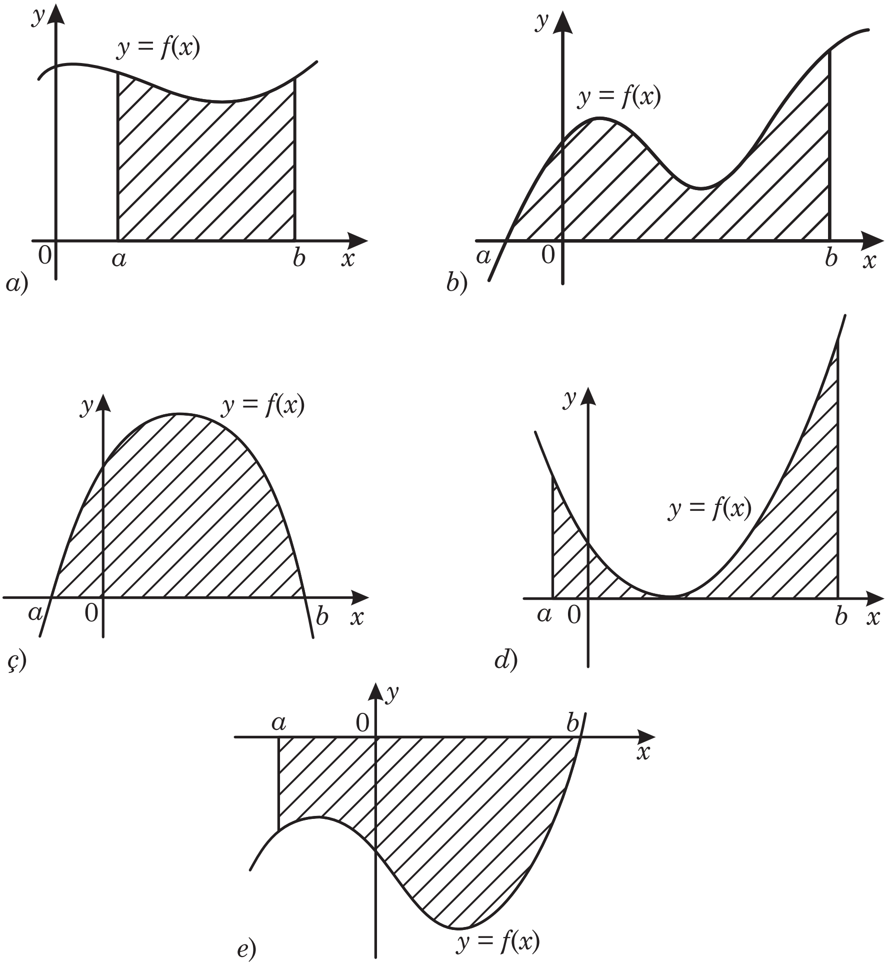
Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin aşakdaky teoremadan peýdalanylýar:

Teorema. Eger f funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl, F berlen kesimde onuň asyl funksiýasy bolsa, onda degişli egriçyzykly trapesiýanyň meýdany

$$S = F(b) - F(a) \tag{1}$$

formula bilen hasaplanýar.

Subudy. $[a; b]$ kesimde kesgitlenen $S(x)$ funksiýa garalyň. Eger $a < x \le b$ bolsa, onda $S(x)$ egriçyzykly trapesiýanyň $(x; 0)$ nokadyň üstünden geçýän wertikal göni çyzykdan çepde ýerleşen böleginiň meýdany bolsun (*4-nji a surat*). Eger



3-nji surat

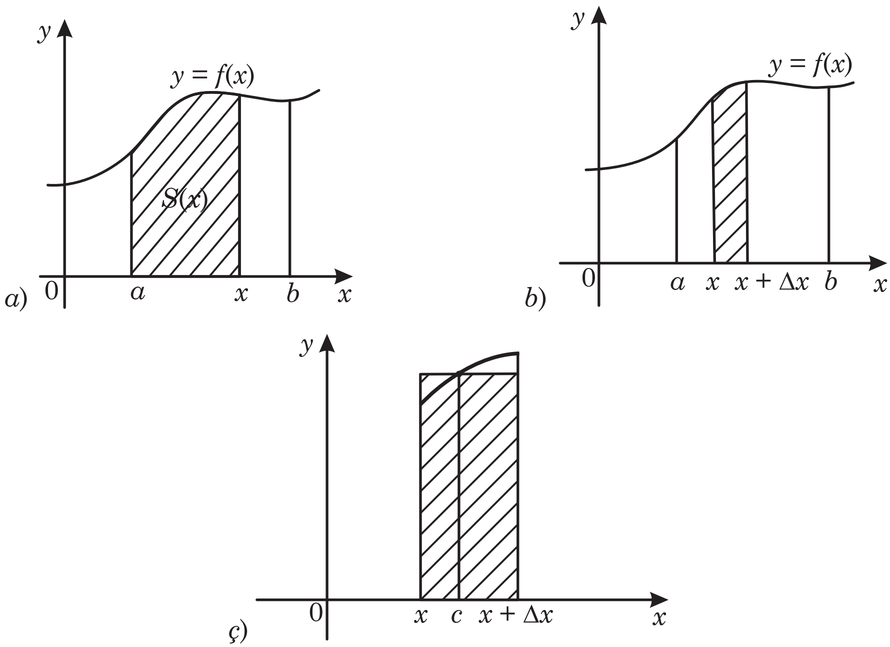
$x = a$ bolsa, onda $S(a) = 0$ bolar. Eger $x = b$ bolsa, onda $S(b) = S$ (S–egriçyzykly trapesiýanyň meýdany) bolýandygyny belläliň.

$$S'(x) = f(x) \qquad (2)$$

deňligi subut edeliň.

Önümiň kesgitlemesi boýunça

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x). \qquad (3)$$



4-nji surat

Sanawjydaky $\Delta S(x)$ aňlatmanyň geometrik manysyny aýdyňlaşdyralyň. Düşnüklilik üçin, $\Delta x > 0$ hala garalyň. $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ bolany üçin, $\Delta S(x)$ 4-nji *b* suratda ştrihlenen figuranyň meýdanydyr. Indi şonuň ýaly meýdany bolan, $[x; x + \Delta x]$ kesime daýanýan (*4-nji ç surat*) gönüburçluk alalyň. Şert boýunça f üznüksiz funksiýadyr. Onda gönüburçlugyň ýokarky tarapy funksiýanyň grafigini abssissasy $c \in [x; x + \Delta x]$ bolan käbir nokatda keser (şeýle bolmasa bu gönüburçlugyň meýdany $\Delta S(x)$ meýdandan ýa kiçi ýa-da uly bolar). Gönüburçlugyň beýikligi $f(c)$ deň. Onda onuň meýdany $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$ bolar, bu ýerden $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$ deňligi alarys. (Bu formula $\Delta x < 0$ bolanda-da dogrudyr). c nokat x bilen $x + \Delta x$ nokatlaryň arasynda ýatýar, şoňa görä-de, $\Delta x \to 0$ bolanda c nokat x nokada ymtylýar. f funksiýa üznüksiz bolany üçin $\Delta x \to 0$ bolanda, $f(c) \to f(x)$ bolar.

Şeýlelikde, $\Delta x \to 0$ bolanda $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} \to f(x)$ bolýar. Biz (3) formulany subut etdik.

Biz f funksiýa üçin $S(x)$ funksiýanyň asyl funksiýasydygyny görkezdik. Şoňa görä-de, asyl funksiýalaryň esasy häsiýeti boýunça ähli $x \in [a; b]$ üçin

$$S(x) = F(x) + C$$

bolar, bu ýerde C – käbir hemişelik san, F bolsa f funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biridir. C-ni tapmak üçin $x = a$-ny goýup alarys:

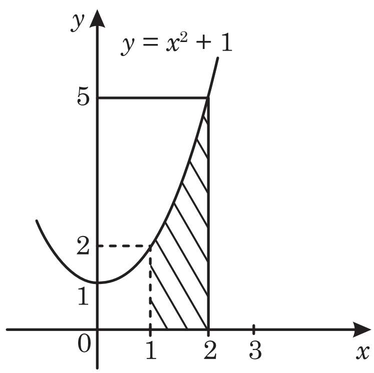
$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

bu ýerden $C = -F(a)$. Diýmek, $S(x) = F(x) - F(a)$ (4) bolar.

Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany $S(b)$ bolany üçin (4) formuladan $x = b$ goýup alarys:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Mysal. $f(x) = x^2 + 1$ funksiýanyň grafigi, $y = 0$, $x = 1$ we $x = 2$ göni çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyny hasaplalyň (*5-nji surat*).



5-nji surat

$f(x) = x^2 + 1$ funksiýa üçin asyl funksiýalaryň biri $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ bolar. Diýmek,

$$S = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1\right) = 3\frac{1}{3}.$$

?
1. Egriçyzykly trapesiýa nähili kesgitlenýär?
2. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdany nähili hasaplanýar?

Gönükmeler

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (38–39).

38. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$;

2) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$;

4) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

39. 1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) $y = 1 + 2\sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

4) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (40–41).

40. 1) $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$;

2) $y = \frac{1}{(x+1)^2} + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

3) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

4) $y = -(x - 1)^3$, $y = 0$, $x = 0$.

41. 1) $y = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$, $y = 0$, $x = -\frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;

2) $y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

3) $y = \sin x - \frac{1}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

4) $y = 1 - \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

§5. Integral

1. Integral barada düşünje. Goý, f funksiýa $[a; b]$ kesimde otrisatel däl we üznüksiz bolsun. Bu funksiýanyň grafigi, abssissa oky, $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ göni çyzyklar bilen çäklenen (*6-njy surat*) egriçyzykly trapesiýanyň S meýdanyny aşakdaky ýaly edip takmyny hasaplap bolýandyr.

$[a; b]$ kesimi $x_0 = a < x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n = b$ nokatlar bilen birmeňzeş uzynlyklary bolan n kesime böleliň. Goý, $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$ bolsun, bu ýerde $k = 1, 2, ..., n$. $[x_{k-1}; x_k]$ kesimleriň her birini esasy hökmünde kabul edip $f(x_{k-1})$ beýikligi bolan gönüburçluk guralyň. Bu gönüburçlugyň meýdany

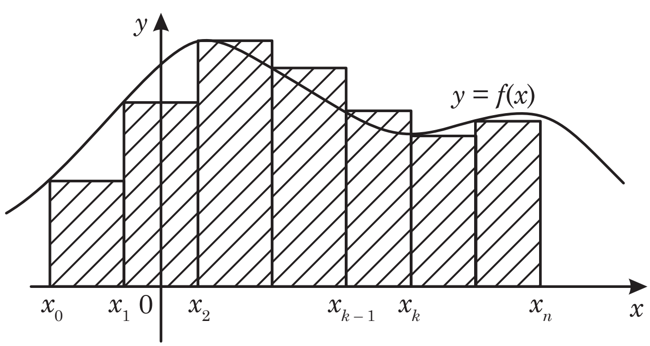
$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

deňdir. Şeýle gönüburçluklaryň hemmesiniň meýdanlarynyň jemi bolsa

$$S_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

deň bolar (*6-njy surat*).

f funksiýa üznüksizdir. Şoňa görä-de, n uly bolanda, ýagny Δx kiçi bolanda, onda gurlan gönüburçluklaryň meýdanlarynyň jemi egriçyzykly trapesiýanyň meýdany bi-



6-njy surat

len «gabat gelýär» diýen ýalydyr. Şonuň üçin, n uly bolanda $S_n \approx S$ diýip güman etmek bolar. Gysgaça şeýle diýilýär: n tükeniksize ymtylanda S_n jem S-e ymtylýar we şeýle ýazylýar: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Şeýle güman etme dogrudyr. $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolan (otrisatel däl bolmagy hökman däl), islendik f funksiýa üçin $n \to \infty$ bolanda S_n ululyk käbir sana ymtylýar. Şu sana **f funksiýanyň a-dan b çenli aralykdaky integraly diýilýär we $\int\limits_a^b f(x)dx$ bilen belgilenýär, ýagny**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

(okalyşy: a-dan b-e çenli integral ef iks de iks). a we b sanlara **integrirlemegiň predelleri** diýilýär: **a – aşaky**, b – ýokarky predeli, $\int$ belgä **integral belgisi** diýilýär. f funksiýa **integral aşagyndaky funksiýa,** x – üýtgeýän ululyga bolsa **integrirlemegiň üýtgeýän ululygy** diýilýär.

Şeýlelikde, eger $[a; b]$ kesimde $f(x) \geq 0$ bolsa, onda degişli egriçyzykly trapesiýanyň S meýdany aşakdaky formula bilen aňladylýar:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

2. Nýuton-Leýbnisiň formulasy. Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanynyň

$$S = F(b) - F(a) \quad \text{we} \quad S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

formulalaryny deňeşdirip, şeýle netijäni alarys:

Eger $[a; b]$ kesime f üçin F asyl funksiýa bolsa, onda

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

deňlik dogrudyr. Bu formula Nýuton-Leýbnisiň formulasy diýilýär. Ol $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolan islendik f funksiýa üçin dogrudyr. Nýuton-Leýbnisiň formulasynyň ulanylyşynyň mysallaryna garalyň.

1-nji mysal. $\int_2^3 x^3 dx$ integraly hasaplalyň.

x^3 funksiýanyň asyl funksiýalarynyň biri $\frac{x^4}{4}$ bolany sebäpli

$$\int_2^3 x^3 dx = \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}.$$

Ýazgynyň amatly bolmagy üçin $F(b) - F(a)$ tapawudy (F funksiýanyň $[a; b]$ kesimdäki artdyrmasy) gysgaça şeýle belgilemek $F(x)\big|_a^b$, ýagny

$$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$$

kabul edilendir.

Şu belgilemelerden peýdalanyp, Nýuton-Leýbnisiň formulasyny, adatça, aşakdaky görnüşde ýazýarlar:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2-nji mysal. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ integraly hasaplalyň.

Girizilen belgilemelerden peýdalanyp alarys:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

1-nji bellik. Integrala berlen kesgitleme $\frac{1}{x^3}$ funksiýanyň – 1-den 2-ä çenli integraly barada gürrüň açmaga mümkinçilik bermeýär, çünki [–1; 2] kesimde bu funksiýa üznüksiz däldir. Şonuň ýaly-da bu kesimde $\frac{1}{x^3}$ funksiýa üçin $-\frac{1}{2x^2}$ funksiýanyň asyl funksiýa bolmaýandygyny belläliň, çünki bu kesime degişli 0 san funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna girmeýär.

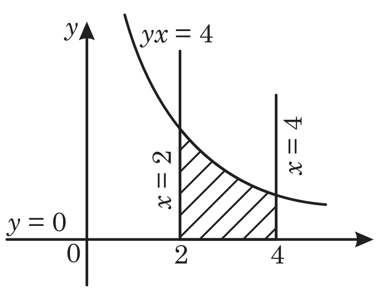
3-nji mysal. $xy = 4$ we $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň.

Gözlenýän meýdany $S = \int_a^b f(x)dx$ formula boýunça hasaplarys, $xy = 4$ giperbolanyň deňlemesinden $y = \frac{4}{x}$ tapalyň. 7-nji suratdan görnüşi ýaly, $a = 2$ we $b = 4$. Onda alarys:

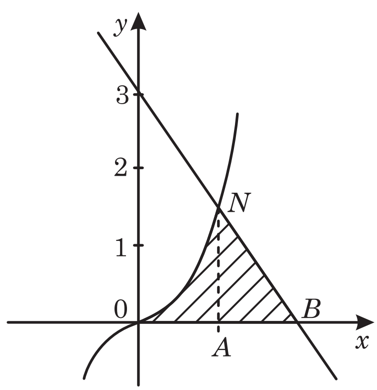
$$S = \int_2^4 \frac{4}{x}dx = 4\ln x \Big|_2^4 = 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln\frac{4}{2} = 4\ln 2.$$

4-nji mysal. $y = 3 - 1{,}5x$, $y = 1{,}5x^3$ we $y = 0$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplalyň (*8-nji surat*).

Gözlenýän meýdany *ONA* egriçyzykly trapesiýanyň we *ANB* üçburçlugyň meýdanlarynyň jemi hökmünde almak mümkin. S_1 egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny kesgitlemek üçin *N* nokadyň abssissasyny (integrirlemegiň ýokarky



7-nji surat



8-nji surat

predelini) bilmek zerurdyr. Berlen çyzyklaryň deňlemelerini bilelikde çözüp, N nokadyň abssissasyny tapalyň:

$$\begin{cases} y = 3 - 1,5x, \\ y = 1,5x^3, \end{cases}$$

$3 - 1{,}5x = 1{,}5x^3$, $x^3 + x - 2 = 0$. Alnan deňlemäniň ýeke-täk $x = 1$ hakyky köki bardyr.

Şeýlelikde,

$$S_1 = \int_0^1 1,5x^3 dx = 1,5 \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{3}{8}.$$

S_2 üçburçlugyň meýdanyny hem kesgitli integralyň kömegi bilen tapmak bolýandyr, ýöne ony $S_2 = \frac{AB \cdot AN}{2}$ formula boýunça hasaplamak aňsatdyr.

$AB = 1,\ AN = \frac{3}{2},\ S_2 = \frac{3}{4}$. Diýmek, ştrihlenen figuranyň meýdany

$$S = S_1 + S_2 = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$$

bolýar.

2-nji bellik. $a \geq b$ bolsa, onda $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, hususy halda $\int_a^a f(x)dx = 0$.

? 1. Nýuton – Leýbnisiň formulasy nähili?

Gönükmeler

Integraly hasaplaň (42–51).

42. 1) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$; 2) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int_1^3 x^3 dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

43. 1) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 3) $\int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

44. 1) $\int\limits_{-2}^{2} (x-3)^2 dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$;

2) $\int\limits_{-1}^{1} (x+3)^3 dx$; 5) $\int\limits_{0}^{2} (x-2)(x^2+2x+4)dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \cos 3x dx$; 6) $\int\limits_{-1}^{2} (x-1)^2 dx$;

45. 1) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}dx$; 3) $\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$;

2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 4) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$.

46. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx$;

2) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3 dx$; 4) $\int\limits_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)dx$;

5) $\int\limits_{0}^{2} (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)dx$.

47. 1) $\int\limits_{1}^{4} \frac{3\sqrt{x^3}+3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}dx$;

2) $\int\limits_{4}^{9} \frac{3x^3-\sqrt{x^5}}{x^2}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

48. 1) $\int\limits_{0,5\pi}^{1,5\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$; 3) $\frac{2}{8}\int\limits_{1}^{8} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1,5\pi} \cos^2\frac{x}{2}dx$; 4) $\int\limits_{1}^{16} \frac{\sqrt[4]{x}}{28\sqrt{x}}dx$;

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2x-\sin^2x)dx$.

49. 1) $\int\limits_{0}^{1} 0,5^x dx$; 3) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{1} 2^x dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} e^{2x} dx$; 4) $\int\limits_{-\frac{2}{1}}^{2} 3^x dx$.

50. 1) $\int\limits_{1}^{7} \frac{2dx}{x}$; 3) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$; 4) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{3x+1}$.

51. 1) $\int\limits_{1}^{4} x^{\frac{5}{2}} dx$; 3) $\int\limits_{e}^{e^2} 2x^{-1} dx$;

2) $\int\limits_{1}^{8} \frac{4dx}{x^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\int\limits_{0}^{1} 5x^{\frac{3}{4}} dx$.

52. Deňligiň dogrudygyny subut ediň.

1) $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx;$

2) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x dx = \int\limits_{1/16}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx;$

4) $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3 - 1)dx.$

Çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (53–69).

53. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
2) $y = x^4$, $y = 1$;
3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$;
4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

54. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$;
2) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;
3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
4) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $y = -3$, $x = -1$.

55. 1) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$;
2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
3) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$; $x = -1$;
4) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

56. 1) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$;

2) $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;

3) $y = x^2$, $y = 2x$;

4) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

57. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$;

2) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;

3) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$;

4) $y = x^2$, $y = x^3$.

58. 1) $y = 4x - x^2$, $y = 0$;

2) $y = x - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

4) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$.

59. 1) $y = x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{3}{2}$, $x = -\dfrac{1}{2}$;

2) $y = 3x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x^2$, $y = x$;

4) $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $x = 0$.

60. 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x = -\dfrac{3}{4}$, $x = 0$, $y = 1$;

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $y = 2$, $x = 0$;

3) $y = x$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 2$;

4) $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2x$, $y = \dfrac{2}{x^2}$.

61. 1) $y = x^2 + 4x + 5$, $y = 11 - x^2$;

2) $y = e^x$, $y + x = 1$, $x = 1$;

3) $y = 1 - 4x - x^2$, $y + x = 1$;
4) $y = 3 + 2x - x^2$, $y - x = 1$.

62. 1) $y = \dfrac{4}{x}$, $x + y = 5$;

2) $y = x^2 - 2x + 1$, $x + y = 3$;

3) $y = \dfrac{4}{x+1}$, $x = 0$, $y = 1$;

4) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$, $y = 1$, $x = 1$.

63. 1) $y = 4{,}5 - 0{,}5x^2$, $y = -x^2 + x + 6$;
2) $y = 0{,}8 + 0{,}2x^2$, $y = x^2 + 4x + 4$;

3) $y = \sin\dfrac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$;

4) $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

64. 1) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;
2) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$;
3) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;
4) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$.

65. 1) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, $y = 3$, $x = 1$;

2) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$;

3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y = 1$, $x = -2$;

4) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y = 4^x$, $x = 4$.

66. 1) $y = \dfrac{4}{x} + 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$;

2) $y = -\dfrac{2}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -1$;

3) $y = \dfrac{1}{2x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{4}$, $x = 2$;

4) $y = 3 - \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = -6$, $x = -3$.

67. 1) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $x = 1$;

2) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = \dfrac{1}{2}$;

3) $y = x^{0,8}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 32$;

4) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$.

68. 1) $y = 1 - |x - 1|$, $y = 1 - \dfrac{x}{2}$;

2) $y = 2 - |x|$, $y = x^2$;

3) $y = x^2 + 2|x| - 8$, $y = 4 - x^2$;

4) $y = x^2 - 2|x| - 3$, $y = 9 - x^2$.

69. 1) $y = |x^2 - 3x| + x$, $y = x + 4$;

2) $y = |x^2 + 4x| + 2x$, $y = 10 - x$;

3) $|x^2 - 4| + y = 5$, $y = -7$;

4) $|4 - x^2| - y = 5$, $y = 7$;

70. $y = 8x - 2x^2$ funksiýanyň grafigi, bu parabola onuň depesinde galtaşýan göni çyzyk we $x = 0$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

71. $f(x) = 8 - 0,5x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x = -2$ abssissaly nokatda galtaşýan göni çyzyk we $x = 1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

72. Ox oky, $y = 2x - x^2$ parabola we oňa $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

73. $y = 2x^3$ kubik parabola we oňa (1; 2) nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

74. $y = x^2$ parabola we oňa (0; –4) nokadyň üstünden geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

75. $y = \cos x$, $x = 0$, çyzyklar we $y = \cos x$ funksiýanyň grafigine $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$ nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

76. $y = 4{,}5 - 0{,}5x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x_0 = 1$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x = -2$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

77. $y = 8 - 0{,}5x^2$ funksiýanyň grafigi, oňa $x_0 = 2$ abssissaly nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x = -1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

78. $y = 0{,}5x^2 - 2x + 6$ funksiýanyň grafigi, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x = -1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

79. $y = -0{,}5x^2 - 2x + 1$ funksiýanyň grafigi, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we $x = -1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

80. $y = x^2 - 2x + 2$ parabola, oňa abssissasy 3-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk we ordinata oky bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

81. $y = -x^2 + 4x - 3$ parabola hem oňa $M_1(0; -3)$ we $M_2(3; 0)$ nokatlarda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

82. $y = x^2 + 1$ parabola we oňa ordinatasy 5-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

83. $y = -x^2 - 1$ parabola we oňa ordinatasy – 5-e deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

84. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ çyzyklar we $y = \sqrt{x}$ funksiýanyň grafigine ordinatasy 2-ä deň bolan nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

85. $y = x^2 - 4$ parabola oňa galtaşýan $y=2x - 5$ göni çyzyk hem $y = 0$ we $x = 3$ çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

86. Bitin abssissaly nokatlarda kesişýän.

1) $y = \cos\pi x + 1$ we $y = 2x^2 - 2$;

2) $y = \sin 0{,}5\pi x$ we $y = -x^2 + 3x - 1$

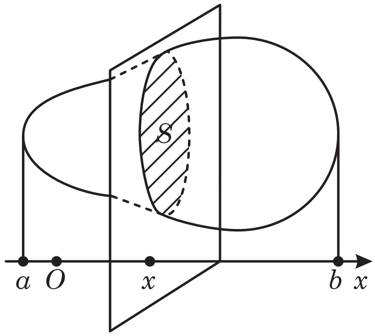
funksiýalaryň grafikleri bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

87. Deňligi subut ediň.

1) $\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;

2) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ (bu ýerde k – hemişelik san).

§6. Integralyň ulanylyşy



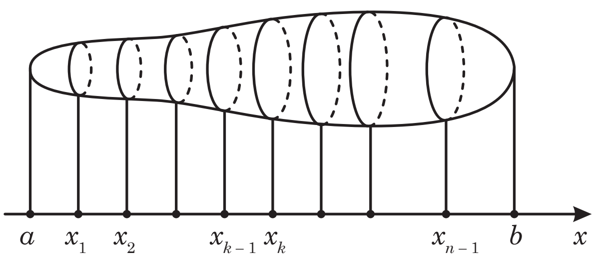
9-njy surat

1. Jisimleriň göwrümlerini hasaplamak. Goý, V göwrümli jisim berlen bolsun, şunlukda şeýle bir göni çyzyk tapylyp (*9-njy surat*), bu göni çyzyga perpendikulýar bolan haýsy tekizligi alsak-da, jisimiň şu tekizlik bilen kesilen S kesiginiň meýdany belli bolsun. Ox oka perpendikulýar bolan tekizlik berlen jisimi käbir x nokatda kesýär diýeliň. Diýmek, her bir x sana ($[a; b]$ kesimde alnan, *9-njy sur. ser.*) ýeke-täk $S(x)$ san degişli edilipdir. $S(x)$ – jisimiň bu tekizlik bilen kesilende alnan kesigiň meýdanydyr. Şeýlelikde, $[a; b]$ kesimde $S(x)$ funksiýa berlen. Eger S funksiýa $[a; b]$ kesimde üznüksiz bolsa, onda aşakdaky formula dogrudyr:

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (1)$$

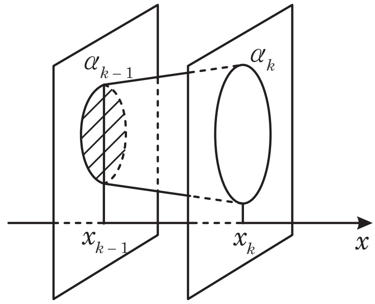
Şu formulanyň doly subudy matematiki analiz dersinde berilýär, bu ýerde bolsa şoňa getirýän käbir oýlanmalaryň üstünde durup geçeliň. $[a; b]$ kesimi $a = x_0 < x_1 < x_2 <...< x_{n-1} < < x_n = b$ nokatlar arkaly deň uzynlykdaky n kesime böleliň. Goý,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \ k = 1,2, \ldots, n$$



10-njy surat

bolsun. Her bir x_k nokat arkaly Ox oka perpendikulýar bolan tekizlik geçireliň. Şu tekizlikler berlen jisimi gatlaklara bölýärler (*10-njy* we *11-nji suratlar*). α_{k-1} we α_k tekizlikleriň arasyndaky gatlagyň göwrümi, n ýeterlikçe uly bolanda, takmynan, $S(x_{k-1})$ kesigiň meýdanynyň Δx «gatlagyň galyňlygyna» köpeltmek hasylyna deňdir. Şonuň üçin



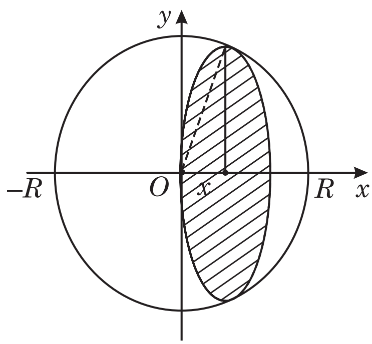
11-nji surat

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n.$$

Şu takmyny deňligiň takyklygy jisimiň kesilen gatlaklary ýuka boldugyça, ýagny n uly boldugyça ýokarydyr. Şonuň üçin, $n \to \infty$ bolanda $V_n \to V$ bolar. Integralyň kesgitlemesine görä $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = \int\limits_a^b S(x)dx.$

1-nji mysal. R radiusly şaryň göwrüminiň $\frac{4}{3}\pi R^2$ deň bolýandygyny subut edeliň.

Ox oky şaryň O merkeziniň üstünden geçireliň (*12-nji surat*). Ox oka perpendikulýar bolan we onuň $[-R; R]$ kesimini x nokatda kesýän her bir tekizlik şaryň kesiginde $\sqrt{R^2 - x^2}$ radiusly tegelegi berýär. Bu tegelegiň meýdany

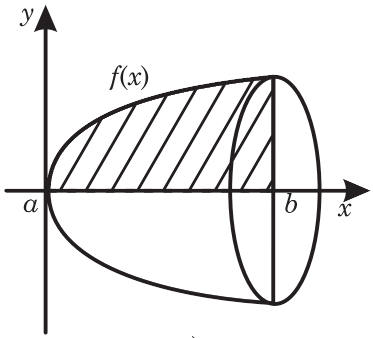


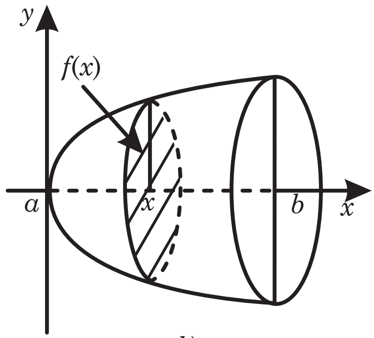
12-nji surat

$$S(x) = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

bolar. Diýmek, (1) formula boýunça

$$V = \int\limits_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$





13-nji surat

2-nji mysal. Goý, egriçyzykly trapesiýa Ox okuň $[a; b]$ kesimine daýanýan bolsun we ýokardan $[a; b]$ kesimde üznüksiz we otrisatel däl f funksiýanyň grafigi bilen çäklenen bolsun. Bu egriçyzykly trapesiýa Ox okuň daşynda aýlananda käbir jisim alynýar (*13-nji surat*), onuň göwrümi

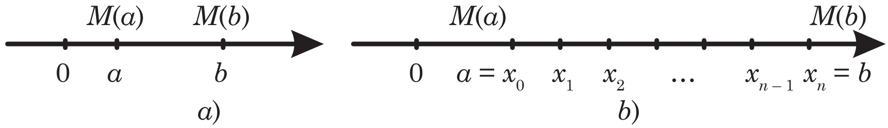
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx \tag{2}$$

formula boýunça tapylýar.

Hakykatdan-da, Ox oka perpendikulýar bolan we bu okuň $[a; b]$ kesimini x nokatda kesýän her bir tekizlik jisim bilen kesişende $f(x)$ radiusly we $S(x) = \pi f^2(x)$ meýdanly tegelek alynýar (*13-nji b surat*). Bu ýerden (1) formuladan (2) formula alynýar.

2. Üýtgeýän güýjüň işi. P güýjüň täsiri astynda göni çyzyk boýunça hereket edýän material nokada garalyň. Eger täsir ediji güýç hemişelik we göni çyzygyň ugry boýunça ugrukdyrylan bolsa, orun üýtgeme S-e deň diýsek, onda fizikadan belli bolşy ýaly şu güýjüň A işi PS köpeltmek hasylyna deňdir. Indi üýtgeýän güýjüň ýerine ýetirýän işini hasaplamak üçin formulany getirip çykaralyň.

Goý, nokat Ox oka proýeksiýasy x-e görä funksiýa bolan güýjüň täsiri astynda Ox oky boýunça hereket etsin.



14-nji surat

Şunlukda, biz f üznüksiz funksiýa diýip güman ederis. Şu güýjüň täsiri astynda material nokat $M(a)$ nokatdan $M(b)$ nokada geçen bolsun (*14-nji a surat*). Bu halda A işiň aşakdaky formula boýunça hasaplanýandygyny görkezeliň:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

$[a; b]$ kesimi deň $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ uzynlykly n kesime böleliň. Netijede, $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$ …, $[x_{n-1}; b]$ kesimleri alarys (*14-nji b surat*). Güýjüň ähli $[a; b]$ kesimdäki işi bu güýjüň alnan kesimlerdäki işleriniň jemine deňdir. f funksiýanyň x-a görä üznüksiz funksiýa bolany sebäpli, ýeterlik kiçi bolan $[a; x_1]$ kesimde bu güýjüň işi, takmynan, $f(a)(x_1 - a)$ deňdir (biz f funksiýanyň kesimde üýtgeýändigini göz öňünde tutmaýarys). Şuňa meňzeşlikde, güýjüň işi ikinji $[x_1; x_2]$ kesimde, takmynan, $f(x_1)(x_2 - x_1)$ deň we ş.m., güýjüň n-nji kesimdäki işi, takmynan, $f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$-e deňdir. Diýmek, güýjüň tutuş $[a; b]$ kesimdäki işi, takmynan, şeýle bolar:

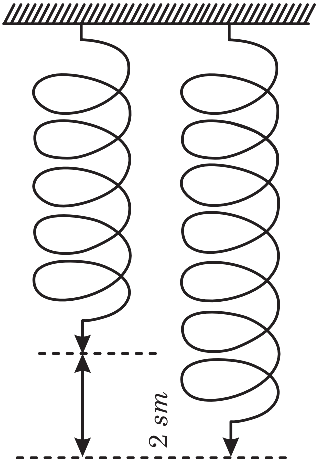
$$A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})).$$

$[a; b]$ kesimiň bölünen kesimleri gysga bolduklaryça, ýakynlaşan deňligiň takyklygy şonça-da ýokarydyr.

$n \to \infty$ bolanda bu ýakynlaşan deňligiň takyk deňlige öwrülýändigi tebigydyr:

$$A_n = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \to A.$$



15-nji surat

Integralyň kesgitlemesine görä

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \int_a^b f(x)dx.$$

3-nji mysal. Goý, pružini x uzynlyga süýndürmäge gerek bolan güýç x süýndürmä proporsional bolsun. Eger pružini 2 *sm* süýndürmäge 6 nýuton güýç gerek bolsa, pružin 6 *sm* süýndürilende edilen işi tapalyň.

Gukuň kanuny boýunça pružina täsir edýän güýç $F = kx$ formula bilen hasaplanylýar, bu ýerde k proporsionallygyň hemişelik koeffisiýenti (*15-nji surat*). Şerte görä, pružini 2 *sm* = 0,02 *m* süýndürmäge 6 nýuton güýç gerek, onda $k \cdot 0{,}02 = 6$. Diýmek, $k = 300$ we güýç $F = 300x$. Pružin deňagramlylyk ýagdaýyndan ($a = 0$) 6 *sm* ($b = 0{,}06$ *m*) uzynlyga süýndürilipdir. Onda edilen işi (3) formula boýunça taparys:

$$A = \int_0^{0,006} 300xdx = 150x^2 \Big|_0^{0,006} = 0,54 \ (J).$$

?
1. Jisimiň göwrümi nähili formula bilen hasaplanýar?
2. Üýtgeýän güýjüň işi nähili formula bilen hasaplanýar?

Gönükmeler

88. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen, egriçyzykly trapesiýanyň abssissa okunyň daşynda aýlanmagyndan alnan jisimiň göwrümini tapyň.

1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

2) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$;

3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$;

4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

89. Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen, figuranyň abssissa okunyň daşynda aýlanmagyndan alnan jisimiň göwrümini tapyň.

1) $y = x^2$, $y = x$;

2) $y = 2x$; $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$;

4) $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

90. R radiusly we H beýiklikli şar segmentiniň göwrümini tapyň.

91. H beýiklikli we esaslarynyň radiuslary R we r bolan kesilen konusyň göwrümi üçin formulany getirip çykaryň.

92. Beýikligi H, esaslarynyň meýdanlary S we s bolan kesilen piramidanyň göwrüminiň $\frac{1}{3}H(S + s + \sqrt{Ss})$ deňdigini subut ediň.

93. Beýikligi H we esasynyň radiusy R bolan konusyň göwrüminiň $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ bolýandygyny subut ediň.

94. 5 *sm* süýndürilen pružiniň maýyşgaklyk güýji $3N$. Pružini 5 *sm* süýndürmek üçin näçe iş edilmeli?

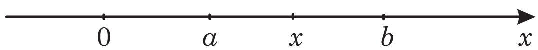
95. Eger $2N$ güýç pružini 1 *sm* gysýan bolsa, onda pružini 4 *sm* gysmak üçin näçe güýç sarp etmeli?

96. $4N$ güýç pružini 8 *sm* süýndürýär. Pružini 8 *sm* süýndürmek üçin nähili iş etmeli?

97. Eger pružini 1 *sm* süýndürmäge 1 *kg* güýç gerek bolsa, pružin 5 *sm* süýndürilende edilen işi tapmaly.

98. q ululykdaky elektrik zarýadyň täsiri astynda elektron göni çyzyk boýunça a uzaklykdan b uzaklyga ornuny üýtgedýär. Zarýadlaryň özaratäsir güýjüniň işini tapyň. (Iki hala garaň: 1) $a < b$, $q < 0$, 2) $b < a$, $q < 0$. Kulonyň kanunyny aňladýan formuladaky proporsionallyk koeffisiýenti γ diýip hasap ediň).

99. Ox okuň üstünde O nokatda m massaly material nokat berkidilen. Ol nokat edil şol Ox okuň üstünde ýerleşen, massasy 1 bolan başga bir nokady Nýutonyň kanuny boýunça dartýar. Birlik massaly birlik nokat a ýagdaýdan b ýagdaýa orun üýtgedende dartylma güýjüniň işini hasaplaň (*16-njy surat*).



16-njy surat

100. Kanalyň kesigi deňýanly trapesiýa görnüşinde, onuň beýikligi h, esaslary a we b. Kanaly doldurýan suwuň bende edýän basyş güýjüni tapyň ($a > b$, a – trapesiýanyň ýokarky esasy).

101. Silindrik gabyň esasynyň tekizligindäki deşikden girýän suw gaby bütinleý doldurýar. Gabyň beýikligi h, esasynyň radiusy r bolsa, edilen işi kesgitläň.

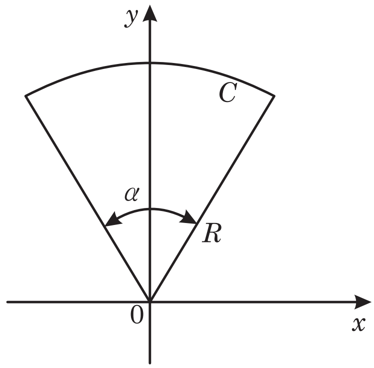
102. Şar suwa çümendäki itýän güýje garşy işi tapyň.

103. Uzynlygy $l = 20$ *sm* bolan bir jynsly steržen ujundan geçýän wertikal okuň daşynda gorizontal tekizlikde aýlanýar. Aýlanmagyň burç tizligi $w = 10\pi c^{-1}$. Sterženiň kese kesiginiň meýdany $S = 4\ sm^2$, sterženiň ýasalan materialynyň dykyzlygy $\rho = 7{,}8\ g/sm^3$. Sterženiň kinetik energiýasyny tapyň.

104. Birjynsly göni togalak konusyň massasynyň merkezini tapyň.

105. Birjynsly sektoryň massasynyň merkezini tapyň (*17-nji surat*).

106. Birjynsly töweregiň dörtden biriniň massasynyň merkezini tapyň.



17-nji surat

§7. Funksiýanyň differensialy barada düşünje

1. Funksiýanyň differensialy. Goý, $[a;\ b]$ aralykda haýsy hem bolsa bir $y = f(x)$ funksiýa berlen bolsun. x argumente onuň bahasyny şol aralykdan çykarmaýan haýsy hem bolsa bir Δx artdyrma bereliň. Onda y funksiýa hem Δy artdyrmany alar.

Eger funksiýanyň Δy artdyrmasyny argumentiň Δx artdyrmasynyň üsti bilen

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (1)$$

görnüşde ýazyp bolsa (A bu ýerde x-a bagly bolup, Δx-a bagly bolmadyk ululykdyr, α bolsa Δx nola ymtylanda nola ymtylýan ululykdyr), onda $y = f(x)$ funksiýa berlen x nokatda differensirlenýän funksiýa diýilýär. Differensirlenýän funksiýanyň Δy artdyrmasynyň Δx-e çyzykly bagly $A\Delta x$ bölegine $y = f(x)$ funksiýanyň *differensialy* diýilýär we şeýle belgilenýär: dy (okalyşy:de igrek) ýa-da $df(x)$ okalyşy: de ef iks).

Şunlukda, kesgitlemä görä:

$$dy = A\Delta x \quad \text{ýa-da} \quad df(x) = A\Delta x. \qquad (2)$$

Goý, $f(x)$ funksiýa x nokatda differensirlenýän funksiýa bolsun, onda (1) deňlik ýerine ýetýändir. Onuň iki bölegini hem Δx-e bölüp taparys.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Indi Δx artdyrmany nola ymtyldyryp alarys: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, çünki α ululygyň kesgitlemesine görä $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Eger Δx nola ymtylanda $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gatnaşyk hem bellibir predele ymtylsa, onda şol predel berlen $y = f(x)$ funksiýanyň önümidir diýlip ozal kesgitlenipdi. Şonuň üçin hem

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \quad \text{ýa-da} \quad A = f'(x).$$

Şoňa görä-de, x nokatda differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýa üçin ýazyp bileris:

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{3}$$

Eger $f(x) = x$ bolsa, onda (3) formuladan peýdalanyp, taparys: $dy = dx = x'.\ \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, ýagny argumentiň differensialy onuň Δx artdyrmasyna deňdir:

$$dx = \Delta x.$$

Şunlukda, differensirlenýän $y = f(x)$ funksiýanyň differensialy şu aşakdaky formula bilen aňladylýandyr:

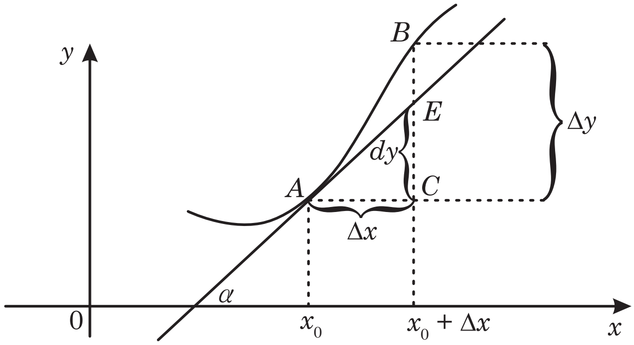
$$dy = f'(x)dx. \tag{4}$$

Bu formuladan peýdalanyp, $y = f(x)$ funksiýanyň önümini şu aşakdaky görnüşde hem ýazyp bolar:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

2. Differensialyň geometrik manysy

$y = f(x)$ funksiýanyň grafiginde $A(x_0, y_0)$ we $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nokatlary alyp, A nokatda grafige galtaşýan çyzyk geçireliň. Onda 18-nji suratdan görnüşi ýaly, Δx artdyrma degişli Δy artdyrma CB kesimiň ululygyna, şol bir artdyrma



18-nji surat

degişli dy differensial bolsa, CE kesimiň ululygyna deňdir, çünki ACE üçburçlukdan

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{\Delta x}$$

deňlik alnar, ondan bolsa önümiň geometrik manysynyň we (3) formulanyň esasynda şeýle deňlik alynýar:

$$CE = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x_0)\Delta x = dy.$$

Şeýlelikde, 18-nji suratdan Δy we dy ululyklaryň, umuman aýdanyňda deň däldigi aýdyň görünýär.

Diýmek, $f(x)$ funksiýanyň $f'(x)\Delta x$ differensialy şol egri çyzyga x_0 nokatda geçirilen galtaşýan göni çyzygyň ordinatasynyň abssissa x_0 nokatdan $x_0 + \Delta x$ nokada geçendäki artdyrmasyna deňdir. Bu bolsa differensialyň geometriki manysydyr.

3. Differensiallary tapmagyň düzgünleri

1. $d(u + v) = du + dv.$

2. $d(u \cdot v) = vdu + udv.$

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0).$

1-nji mysal. $y = 5x - 10$ funksiýanyň differensialyny tapalyň.

(4) formulany peýdalanyp taparys:

$$dy = (5x - 10)'dx = 5dx.$$

1. Funksiýanyň differensialy nähili formula bilen hasaplanylýar?
2. Differensiallary tapmagyň nähili düzgünleri bar?

Gönükmeler

Funksiýalaryň differensialyny tapmaly (107–115).

107. 1) $f(x) = 10$; 3) $f(x) = x^2 + 5x - 10$;
2) $f(x) = 10x + 5$; 4) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$.

108. 1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 100$;
2) $f(x) = (x^2 + 6)(3x - 1)$;
3) $f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
4) $f(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 4)$.

109. 1) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$; 4) $f(x) = -3x^{\frac{1}{3}}$; 7) $f(x) = ax^{-5}$;
2) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}}$; 5) $f(x) = \sqrt{x}$; 8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$; 6) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^{-2}}$; 9) $f(x) = \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$.

110. 1) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; 4) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$; 5) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$; 6) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

111. 1) $f(x) = x + \sin x$; 4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

2) $f(x) = x\cos x$;
3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 + \cos x$;
5) $f(x) = 2\sin^3 x$;
6) $f(x) = -\cos 2x$.

112. 1) $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$;
2) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$;
3) $f(x) = \dfrac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$;
4) $f(x) = x\cos\dfrac{x}{2}$.

113. 1) $f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$;
2) $f(x) = (x^2 + 1)\cos 5x$;
3) $f(x) = x + \cos x \sin x$;
4) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

114. 1) $f(x) = e^{-x}$;
2) $f(x) = 3^x$;
3) $f(x) = x^2 e^{-x}$;
4) $f(x) = e^{2x}$;
5) $f(x) = xe^x$;
6) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$.

115. 1) $f(x) = x^n \ln x$;
2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$;
3) $f(x) = \ln ex$;
4) $f(x) = \sin 2x \cdot \ln x$;
5) $f(x) = \ln^4 x + 3\ln^2 x$;
6) $f(x) = \ln ax$;
7) $f(x) = e^{3x} \cdot \ln x$.

§8. Differensial deňleme barada düşünje

x argumenti, y näbelli funksiýany we onuň önümlerini baglanyşdyrýan deňlemä **differensial deňleme** diýilýär:

$$g(x, y, y', y'', \ldots) = 0 \quad (1)$$

Differensial deňlemäniň çözüwi diýip şu differensial deňlemede goýlanda ony toždestwo öwürýän funksiýa aýdylýar.

Berlen $f(x)$ funksiýanyň $F(x)$ asyl funksiýasy

$$F'(x) = f(x) \quad (2)$$

ýönekeý differensial deňlemäniň çözüwidir. (2) deňlemäniň tükeniksiz köp çözüwiniň bolşy ýaly, (1) deňlemäniň hem tükeniksiz köp çözüwi bardyr, ondan anyk hususy çözüwi saýlap almak üçin goşmaça şertler berilmelidir.

Köp fiziki kanunlar differensial deňleme görnüşinde aňladylýar. Iki mysala garalyň.

1. Mehaniki hereketiň deňlemesi

m massaly nokat $F(t)$ (t – wagt) güýjüň täsir etmeginde $x = x(t)$ kanun bilen Ox oky boýunça hereket etsin, material nokadyň tizlenmesi $a(t)$ bolsun. Nýutonyň ikinji kanuny boýunça $F = ma$. Tizlenmäniň hereketiň kanunynyň ikinji tertipli önümine deňligini göz öňünde tutup alarys:

$$mx''(t) = F(t) \tag{3}$$

(3) differensial deňlemä **mehaniki hereketiň deňlemesi** diýilýär.

Maýyşgak pružiniň hereketi Gukuň kanunyna laýyk gelýär, ýagny $F(t)$ güýç nokadyň $x(t)$ süýşmesine proporsionaldyr:

$$F(t) = -kx(t),\ (k > 0) \tag{4}$$

«–» alamat güýjüň we süýşmäniň ugurlarynyň garşylyklydygyny aňlatmak üçin ýazylýar.

Şeýlelikde, $mx''(t) = -kx(t)$ ýa-da $k/m = \omega^2$ belläp,

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{5}$$

alarys. (5) deňlemä **garmonik yrgyldynyň deňlemesi** diýilýär.

2. Radioişjeň dargaýyş

Radioişjeň maddanyň t pursatdaky massasy $m(t)$ diýeliň. Köp gözegçilikler massanyň kemeliş tizliginiň maddanyň şol pursatdaky massasyna proporsionaldygyny görkezýär, ýagny

$$m'(t) = -km(t), \quad k > 0 \tag{6}$$

deňlemä getirýär, «–» alamat massanyň kemelýändigini görkezmek üçin ýazylýar.

Differensial deňlemäni çözmeklige ony integrirlemek diýilýär. Biz integrirlemek usullaryny öwrenmek bilen meşgullanmakçy däl. Diňe durmuş meselelerinde köp duş gelýän (4) deňlemäniň umumy çözüwini

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{7}$$

we (5) deňlemäniň umumy çözüwini

$$m(t) = Ce^{-kt} \tag{8}$$

(A, B we C – käbir näbelli hemişelik sanlar) bermek bilen çäklenmekçidiris.

Mysal. $y'' + y = 0$ garmonik yrgyldynyň differensial deňlemesiniň $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ şerti kanagatlandyrýan $y(t)$ çözüwini tapalyň.

Bu ýerde $\omega = 1$. Çözüwi $y = A\cos t + B\sin t$ görnüşde gözläliň. Şert boýunça $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; diýmek, $1 = A\cos\frac{\pi}{2} + B\sin\frac{\pi}{2}$, ýagny $B = 1$. $y' = (B\sin t + A\cos t)' = B\cos t - A\sin t$. Şert boýunça $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; diýmek, $2 = B\cos\frac{\pi}{2} - A\sin\frac{\pi}{2} = -A$, ýagny $A = -2$.

Şunlukda, biz koeffisiýentleriň bahalaryny tapdyk: $B=1$, $A=-2$. Olary deňlemäniň umumy çözüwinde goýup, gözlenýän çözüwi alarys

$$y = \sin t - 2\cos t.$$

Gönükmeler

116. $y = 5e^{3x}$ funksiýanyň $y' = 3y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

117. $y = 7e^{-2x}$ funksiýanyň $y' = -2y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

118. $y = 3e^{-7x}$ funksiýanyň $y' = -7y$ deňlemäni kanagatlandyrmagyny subut ediň.

119. $y = x^3$ funksiýanyň $xy' = 3y$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň. $y = cx^3$ görnüşdäki islendik funksiýanyň hem bu deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

120. $y = \sin 4x$ funksiýanyň $y'' + 16y = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

121. $y = 3x - 8 + \frac{x^3}{6}$ funksiýanyň $y'' = x$ deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň. $y = C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6}$ görnüşdäki islendik funksiýanyň hem bu deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

122. $y(t)$ funksiýanyň berlen differensial deňlemäniň çözüwi bolýandygyny barlap görüň.

1) $y(t) = 3\cos(2t + \pi)$, $\quad y'' = -4y$;

2) $y(t) = 4\sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)$, $\quad y'' = -\frac{1}{4}y$;

3) $y(t) = 2\cos 4t$, $\quad y'' + 16y = 0$;

4) $y(t) = \frac{1}{3}\sin(0{,}1t + 1)$, $\quad y'' + 0{,}01y = 0$.

123. Differensial deňlemeleri çözüň.

1) $y' = 0$; 3) $y'' + 9y = 0$; 5) $y'' = x^2$;

2) $y'' = 0$; 4) $y' = x^4$; 6) $y'' + 25y = 0$.

124. Differensial deňlemeleriň haýsy bolsa-da noldan tapawutly çözüwini tapyň.

1) $y'' = -25y$; 3) $4y'' + 16y = 0$;

2) $\frac{1}{9}y'' + 4y = 0$; 4) $4y'' = -\frac{1}{4}$.

125. $y'' + 9y = 0$ differensial deňlemäniň aşakdaky başlangyç şertleri kanagatlandyrýan çözüwini tapyň.

1) $y(0) = 5,$ $y'(0) = 0;$
2) $y(0) = 0,$ $y'(0) = 5;$
3) $y(0) = 0,$ $y'(0) = 6.$

126. Garmonik yrgyldylaryň differensial deňlemesini ýazyň.

1) $x = 2\cos(2t - 1);$
2) $x = 6,4\cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right);$
3) $x = 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right);$
4) $x = 0,71\sin(0,3t + 0,7).$

127. $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ we $x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ iki garmoniki yrgyldynyň jeminiň ýygylyk gatnaşygy r rasional san bolanda, periodik funksiýa bolýandygyny subut ediň.

128. t minutdan soň C radiniň m milligramynyň radioaktiw dargamagyndan n milligram galdy. C radiniň ýarym dargaýyş periodyny tapyň.

129. Radioaktiw dargamasyndan ozal 1 g A radi bardy. Eger onuň ýarym dargaýyş periody 3 min bolsa, näçe minutdan soň onuň 0,125 g galar?

130. Radioaktiw maddanyň ýarym dargaýyş periody 1 sag deň. Onuň mukdary näçe sagatdan soň 10 esse kemeler? Eger radiniň ýarym dargaýyş periody 1550 ýyl bolsa, onda onuň 1000 ýyldan soň näçe ülşüniň galýandygyny hasaplaň.

131. Jisimiň biriniň temperaturasy 200°, beýlekisininňki bolsa 100°. Bu jisimler 0° temperaturaly howada 10 minut sowadylandan soň, birinji jisim 100° temperatura çenli, ikinji jisim bolsa 80°-a çenli sowady. Näçe minutdan soň jisimleriň temperaturasy deňleşer? ($T(t)$ jisimiň temperaturasy $T'(t) = -k(T - T_1)$ deňlemäni kanagatlandyrýar, bu ýerde T_1 – töwerekdäki sredanyň temperaturasy).

132. Iki jisimiň birmeňzeş 100° temperaturasy bar. Olaryň açyk howada (onuň temperaturasy 0°) 10 minutdan soň jisimiň biriniň temperaturasy 80°, ikinjisininiňki bolsa 64° boldy. Sowap başlanlaryndan näçe minutdan soň olaryň temperaturalarynyň tapawudy 25° bolar?

133. Motorly gaýyk kölde 30 *km/sag* tizlik bilen hereket edýär. Motoryny işledip ugrandan 3 *min* soň gaýygyň tizligi nähili bolar? (Gaýygyň $\upsilon(t)$ tizliginiň $\upsilon'(t) = -k\upsilon(t)$ differensial deňlemäni kanagatlandyrýandygyndan peýdalanyň, bu ýerde $K = \frac{5}{3}$, υ – tizlik minutda metr hasabynda).

Taryhy maglumatlar

Integral $\int$ belgisi Leýbnis tarapyndan (1675) girizildi. Bu belgi S latyn harpynyň (jem sözüniň birinji harpy) üýtgedilen görnüşidir. Integral sözüniň özüni Ý. Bernulli (1690) oýlap tapypdyr. Ol *ozalky ýagdaýyna eltmek, dikeltmek* ýaly terjime edilýän latyn sözi bolan integraldan gelip çykan bolsa gerek (hakykatdan-da integrirlemek operasiýasy, differensirlemek arkaly alnan integral asyl funksiýasyny dikeldýär).

Integral hasaplama degişli beýleki adalgalar has giç döredi. Häzirki wagtda ulanylýan *asyl funksiýa* ady Lagranžyň has irki girizen (1797) «primitiw funksiýasyny» çalyşdy. Latynça primitiuus sözi «başlangyç» hökmünde terjime edilýär: $F(x) = \int f(x)dx$ – differensirlemek bilen $F(x)$-den alnyňan $f(x)$ üçin başlangyç funksiýa.

$f(x)$ funksiýa üçin ähli asyl funksiýalaryň köplügine *kesgitsiz integral* hem diýilýär. Asyl funksiýalaryň biri-birinden erkin hemişelik bilen tapawutlanýandyklaryny gören Leýbnis şu düşünjäni saýlap alypdyr. $\int_a^b f(x)dx$-a bolsa *kesgitli integral* diýilýär (belgilemäni K. Furs (1769–1830) girizdi, integrirlemegiň predellerini bolsa Eýler görkezdi).

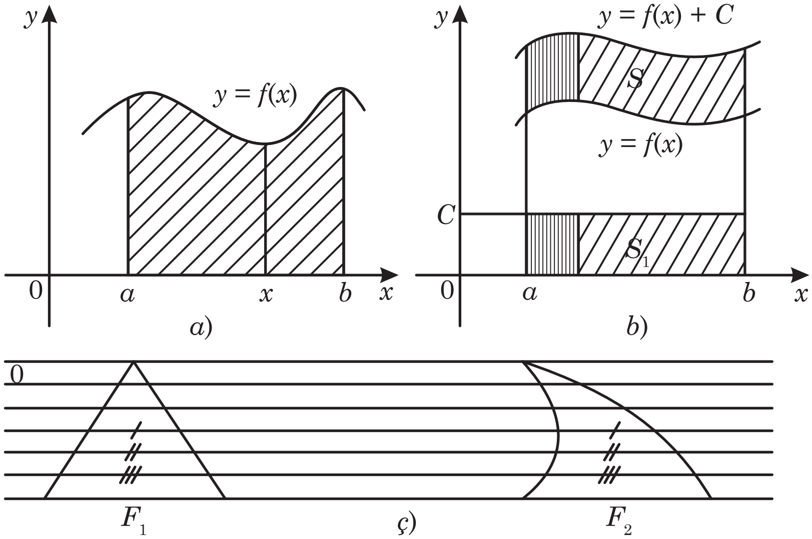
Arhimed integral hasaplamanyň köp ideýalaryny öňünden görmäni başarypdyr (predeller baradaky ilkinji teoremalary onuň subut edendigi bellidir). Emma welin, ol ideýalaryň takyk aňladylmagyna we hasaplama derejesine ýetmegine çenli bir ýarym müň ýyldan köpräk wagt gerek boldy.

XVII asyryň matematikleri Arhimediň işlerinden öwrenýärler. Şonuň ýaly-da, gadymy Gresiýada dörän, başga bir usul – *bölünmeýänleriň usuly* giňden ulanylýar (ol birinji nobatda Demokritiň atomistik dünýägaraýşy bilen baglydyr). Mysal üçin, olar egriçyzykly trapesiýany (*19-njy surat*) uzynlygy $f(x)$-e deň bolan wertikal kesimlerden düzülen, ol kesimleriň bolsa $f(x)dx$ *tükeniksiz kiçi ululyga* deň bolan meýdanlary bar diýip göz öňüne getiripdirler. Şeýle düşünjä görä gözlenilýän meýdan tükeniksiz köpsanly tükeniksiz kiçi meýdanlaryň jemine deň diýip hasap edipdirler:

$$S = \sum_{a<x<b} f(x)dx.$$

Hatda käbir halatlarda bu jemdäki aýry-aýry goşulyjylaryň nolduklary hem nygtalyp görkezilipdir, emma olar tükeniksiz sanda goşulyp, bütinleý kesgitli položitel jemi berýän aýratyn nollardyr.

Goý, 19-njy *b* suratda şekillendirilen figuranyň meýdanyny tapmak talap edilsin, bu ýerde $y = f(x)$ we $y = f(x) + C$ figurany aşakdan we ýokardan çäklendirýän egri çyzyklaryň deňlemeleridir.



19-njy surat

Biziň figuramyz «bölünmeýän» tükeniksiz ýuka sütünjiklerden (olaryň hemmesiniň şol bir c uzynlygy bardyr) düzülen diýip göz öňüne getirsek, biz olary wertikal ugur boýunça süýşürip, esasy b we beýikligi c deň bolan gönüburçluk düzüp bileris. Şonuň üçin gözlenilýän meýdan gönüburçlugyň meýdanyna deňdir, ýagny:

$$S = S_1 = c(b - a).$$

Tekiz figuralaryň meýdanlary üçin Kawalýeriniň (italýan matematigi, 1958–1647) prinsipi şeýle diýýär: Goý, parallel göni çyzyklaryň dessesi F_1 we F_2 figuralary deň uzynlykly kesimler boýunça kesýän bolsun, onda F_1 we F_2 figuralaryň meýdanlary deňdir (*19-njy ç surat*).

Şuňa meňzeş prinsip stereometriýada-da bar we göwrümler tapylanda ondan peýdalanyp bolar. Mysal üçin, umumy esaslary we deň beýiklikleri bolan göni we ýapgyt silindrleriň deň göwrümleriniň bardygyny subut ediň.

Gaýtalamaga degişli soraglar we meseleler

134. R-de f funksiýa üçin F-iň asyl funksiýa bolýandygyny subut ediň.

1) $f(x) = 2x + 3,$ $F(x) = x^2 + 3x + 1;$

2) $f(x) = \sin 2x + 3,$ $F(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + 3x;$

3) $f(x) = -x^3 + 5,$ $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 5x + 2;$

4) $f(x) = -\cos\frac{x}{2} + 1,$ $F(x) = -2\sin\frac{x}{2} + x;$

5) $f(x) = 2x - 1,$ $F(x) = x^2 - x;$

6) $f(x) = \frac{-2}{x^3} - \cos x,$ $F(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x;$

7) $f(x) = 1 - \sin x,$ $F(x) = x + \cos x.$

135. Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýanyň umumy görnüşini ýazyň.

1) $f(x) = 1;$ 3) $f(x) = \frac{1}{2};$

2) $f(x) = 2;$ 4) $f(x) = -3.$

136. 1) asyl funksiýalary tapmagyň üç düzgünini beýan ediň;
2) aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýanyň umumy görnüşini ýazyň.

1) $f(x) = x;$ 3) $f(x) = ax;$

2) $f(x) = 2x;$ 4) $f(x) = -x.$

Aşakdaky funksiýalar üçin asyl funksiýalaryň umumy görnüşini tapyň (137–139).

137. 1) $f(x) = -3x + \sqrt{2};$ 5) $f(x) = x + m;$

2) $f(x) = 2x + m;$ 6) $f(x) = ax + m;$

3) $f(x) = -3x;$ 7) $f(x) = -x^2;$

4) $f(x) = 3x + 2$;   8) $f(x) = -x^2$.

138. 1) $f(x) = 2x^2$;   6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

2) $f(x) = x^2 + 3$;   7) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$;

3) $f(x) = -\sin 2x$;   8) $f(x) = \sqrt{x}$;

4) $f(x) = 2\cos 2x$;   9) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

5) $f(x) = x^7$;   10) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

139. 1) $f(x) = x^3$;   5) $f(x) = x^4$;

2) $f(x) = x^{100}$;   6) $f(x) = x^{-4}$;

3) $f(x) = x^{-101}$;   7) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$;

4) $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$;   8) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

f funksiýanyň grafiginiň *M* nokatdan geçýän asyl funksiýasyny tapyň (140–142).

140. 1) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{7+3x}}$, $M(3;\ 8)$;

2) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3-2x}}$, $M\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{16}\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(\pi - x)}$, $M\left(-\frac{2\pi}{3};\ -\sqrt{3}\right)$;

4) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$, $M\left(-\frac{\pi}{4};\ -1\right)$.

141. 1) $f(x) = \sin(1 - 2x)$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$;

2) $f(x) = \cos(2x - 1)$, $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$;

3) $f(x) = \frac{2}{3x-2} - \frac{1}{\sin^2(0,5\pi x)}$, $M(1;\ 2)$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{\sin^2(0,5\pi x)}$, $M(1;\ 3)$.

142. 1) $f(x)=\cos(2\pi-x)$, $M\left(-\dfrac{\pi}{2};-1\right)$;

2) $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, $M(\pi;\ -1)$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\dfrac{\pi}{4};-2\right)$;

4) $f(x)=\sqrt{2}\cos x$, $M\left(\dfrac{\pi}{2};2\right)$.

143. 1. Egriçyzykly trapesiýa diýlip nähili figura aýdylýar? Egriçyzykly trapesiýanyň meýdanyny hasaplamak üçin formulany ýazyň.

2. Berlen çyzyklar bilen çäklenen egriçyzykly trapesiýany çyzyň we onuň meýdanyny tapyň:

1) $y=\sin x$, $y=0$;
2) $y=-x^3$, $y=0$, $x=-2$;
3) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=3$;
4) $y=3-2x-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x=-2$.

144. Integraly hasaplaň.

1) $\int\limits_1^3 dx$; 2) $\int\limits_1^2 4dx$; 3) $\int\limits_{-3}^a (-1)dx$; 4) $\int\limits_{-1}^2 x^2dx$.

Integrallary hasaplaň (145–147)

145. 1) $\int\limits_0^2 \dfrac{x^3}{4}dx$; 6) $\int\limits_{-1}^1 (2x-3)dx$;

2) $\int\limits_0^1 2x^5dx$; 7) $\int\limits_{-1}^2 (3x-2)dx$;

3) $\int\limits_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx$; 8) $\int\limits_0^1 (ax+b)dx$;

4) $\int\limits_{1}^{4} x^{-\frac{1}{2}} dx;$ 9) $\int\limits_{-1}^{2} (3x^2 - 2x - 1)dx;$

5) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx;$ 10) $\int\limits_{1}^{3} (6x^2 - 4x + 1)dx.$

146. 1) $\int\limits_{2}^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx;$ 7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos 2x dx;$ 8) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx;$

3) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 x dx;$ 9) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \frac{x}{4} dx;$

4) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (2\sin x + 3\cos x)dx;$ 10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx;$

5) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin^2 \frac{x}{2} dx;$ 11) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right)dx;$

6) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^2 x dx;$ 12) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4}{\sin^2 x} dx.$

147. 1) $\int\limits_{0}^{\pi} |\cos x| dx;$ 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx.$

148. Integraly hasaplaman, netijäniň alamatyny kesgitläň.

1) $\int\limits_{1}^{2}(x^2+1)dx;$ 3) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos x dx;$

2) $\int\limits_{1}^{3}(1-x^2)dx;$ 4) $\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx;$

5) $\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x dx;$ 6) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg} x dx.$

149. Subut ediň.

1) $\int\limits_{0}^{1}\sin 2t dt > 0;$ 3) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin t dt > \int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t dt;$

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}(\cos t - 1)dt < 0;$ 4) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin t dt > \int\limits_{0}^{\pi}\sin t dt.$

150. Eger f funksiýa jübüt bolsa, onda

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$$

deňligi subut etmeli.

Aşakdaky çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň (151–158).

151. 1) $y = x^2,$ $y = 3x;$
2) $y = x^2 - 4x + 6,$ $y = 1,$ $x = 1,$ $x = 3;$
3) $y = 4 - x^2,$ $y = 3;$
4) $y = \cos x,$ $y = 1,$ $x = -\frac{\pi}{2},$ $x = \frac{\pi}{2}.$

152. 1) $y = \sqrt{x},$ $x + 2y = 3,$ $2y - x = -3;$

2) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$;

3) $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x}$, $x = 2$;

4) $y = \dfrac{1}{x} \cdot x^2$, $y = 2\sqrt{x}$.

153. 1) $y = \sqrt{x+1}$, $x = 3$, $y = 0$;

2) $y = \sqrt{x-1}$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$;

3) $y = (x-3)^2$, $y = 9 - 2x$;

4) $y = (x+3)^2$, $y = 4 - x$.

154. 1) $y = x^2 + 1$, $y = 2x + 4$;

2) $y = x^2 + 2$, $y = 4x - 1$;

3) $y = 1 - x^2$, $y = 2x - 2$, $x = 0$.

4) $y = 4 - x^2$, $y = -4x + 8$, $x = 0$.

155. 1) $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 9$;

2) $y = -\dfrac{2}{x}$, $x = -4$, $x = -1$, $y = 0$;

3) $y = \dfrac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 3$;

4) $y = -\dfrac{4}{x}$, $y = 1$, $x = -1$.

156. 1) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$;

2) $y = x^2 + 2$, $y = 4 - x$;

3) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$;

4) $y = -2x^2 + 8$, $y = 2x^2 - 8$.

157. 1) $y = 9 - x^2$, $y = 2(6 - x - x^2)$;

2) $y = x^2 + 3$, $y = 2x^2 - x + 1$;

3) $y = 2\sqrt{x-1}$, $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$;

4) $y = \sqrt{2-1}$, $x = 1$, $x = -2$, $y = 0$.

158. 1) $y = (x-1)^3$, $y = 8$, $x = 2$;

2) $y = (2 - x)^3$, $y = 8$, $x = 1$;

3) $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = e$;

4) $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = -e$.

159. $y = |x^2 - 4|$ funksiýanyň grafigi, Ox oky we $x = -1$ göni çyzyk bilen çäklenen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

160. $y = x^2 - 2x + 2$ parabola hem oňa (0; 2) we (3; 5) nokatlarda geçirilen galtaşýan çyzyklar bilen çäklenen figuranyň meýdanyny tapyň.

161. Aşakdaky deňsizlikler bilen berlen figuranyň meýdanyny hasaplaň.

1) $|y| \leq -x^2 + 2x$; 2) $|y| \leq -x^2 + 6x - 8$.

162. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t) = t + 3t^2$ kanun boýunça üýtgeýär (t – wagt sekuntlarda, υ tizlik sekuntda metrlerde ölçenilýär). Eger $t = 0$ pursatda nokat koordinata başlangyjynda ýerleşýän bolup, nokadyň koordinatasy 1-e deň bolsa, onda onuň koordinatasynyň haýsy kanun boýunça üýtgeýänini kesgitläň.

163. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizligi $\upsilon(t) = \cos\pi t$ formula boýunça aňladylýar (υ – sekuntda metrler hasabyndaky tizlik, t – sekuntlarda ölçenilýän wagt):

1) $t = 2$ bolanda nokadyň koordinatasy 2-ä deň, $t = \frac{3}{2}$ bolanda nokadyň koordinatasyny tapyň;

2) $t = 1$ bolanda nokadyň koordinatasy 1-e deň, $t = 3{,}5$ bolanda nokadyň koordinatasyny tapyň.

164. Daş bölegi beýikligi 20 m bolan jaýyň üstünden wertikal ýokarlygyna zyňlypdyr. Eger 1 sekuntdan soň daş

5. Sargyt №1011

bölegi 30 m ýokarlykda bolan bolsa, onda onuň başlangyç tizligi näçä deň?

165. Daş bölegi jaýyň üstünden $\upsilon_0 = 15$ m/s başlangyç tizlik bilen wertikal ýokarlygyna zyňlypdyr. Eger zyňlandan 2 sekuntdan soň daş bölegi 30 m ýokarlykda bolan bolsa, jaýyň beýikligi näçe?

166. Tizligiň üýtgeýşi $\upsilon(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ formula bilen berlen (tizlik sekuntda metr hasabynda ölçenilýär). Jisimiň hereket edip başlanyna 3 s bolandan soňraky geçen ýoluny tapyň.

167. Jisimiň tizligi $\upsilon(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3/4 + t/2}}$ formula arkaly berlen (tizlik sekuntda metr hasabynda ölçenilýär). Jisimiň hereket edip başlanyna 3 s bolandan soňraky geçen ýoluny tapyň.

168. Gönüçyzykly hereket edýän nokadyň tizlenmesi $a = 2t$ kanun boýunça üýtgeýär (t wagt sekuntlarda, a tizlenme bolsa sekundyň kwadratynda metrlerde ölçenilýär).

Eger:

1) birinji sekundyň ahyrynda nokat 10 m ýoly geçen bolsa we tizligi 4 m/s bolsa;
2) ikinji sekundyň ahyrynda nokadyň tizligi 6 m/s bolup, üçünji sekundyň ahyryna çenli ol 40 m ýoly geçen bolsa, onda nokadyň haýsy kanun boýunça hereket edýändigini kesgitläň.

169. Material nokat $a(t) = 3\cos 3t$ m/s^2 tizlenme bilen gönüçyzykly hereket edýär. Deslapky wagt pursadynda nokadyň tizligi 4,5 m/s bolsa, nokadyň tizliginiň deňlemesini ýazyň.

170. Material nokat $a(t) = \left(\frac{1}{t} + e^t\right)\ m/s^2$ tizlenme bilen göniçyzykly hereket edýär. Eger $t = 1s$ pursatda onuň tizligi 2 m/s bolan bolsa, nokadyň tizliginiň deňlemesini ýazyň.

171. $y = xe^{-3x}$ funksiýanyň $y' + 3y = e^{-3x}$ differensial deňlemäni kanagatlandyrýandygyny subut ediň.

172. Differensial deňlemeleri çözüň.

1) $y' = 2y$; 3) $y' = -10y$; 5) $y' = -2y$;

2) $y' = \frac{1}{2}y$; 4) $y' = 10y$; 6) $y' = -\frac{1}{2}y$.

173. $y' = 5y$ differensial deňlemäniň $y(1) = 7$ şerti kanagatlandyrýan çözüwini tapyň.

174. Çözüwi aşakdaky funksiýalar bolan differensial deňlemäni tapyň.

1) 3^{2x}; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$.

175. $y = d \cdot x^{\frac{2}{3}}$ funksiýa $y'' = -k \cdot \frac{1}{y^2}$ deňlemäniň çözüwi bolar ýaly d sany tapyň.

176. $y_1 = c_1e^x$, $y_2 = c_2e^{-2x}$ funksiýalaryň $y'' + y' - 2y = 0$ deňlemäniň çözüwi bolýandygyny barlamaly.

177. Aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan f funksiýany tapyň.

1) $f'(x) = x^2$, $f(2) = 1$; 4) $f'(x) = \frac{1}{x}(x < 0)$, $f(-1) = 1$;

2) $f'(x) = e^{-x}$, $f(0) = -2$; 5) $f'(x) = \sin x$, $f(0) = 2$;

3) $f'(x) = \frac{1}{x}(x > 0)$, $f(e) = 1$; 6) $f'(x) = 2\cos x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

II bap

Kombinatorikanyň, ähtimallyklar nazaryýetiniň we matematiki statistikanyň elementleri

§9. Kombinatorikanyň esasy düşünjeleri we prinsipleri

1. Jem we köpeltmek düzgünleri

Ylmy we amaly döredijiligimizde çözülişlerinde tükenikli sandaky elementlerden dürli kombinasiýalary düzmek hem-de olaryň sanyny hasaplamak zerur bolan meseleler ýygy-ýygydan duş gelýärler. Olar kombinatoriki meseleler diýlip atlandyrylyp, matematikanyň şeýle meseleleri öwrenýän şahasyna bolsa **kombinatorika** diýilýär. «Kombinatorika» sözi «birleşdirmek, utgaşdyrmak» diýilmegini aňladýan combinare diýen latyn sözünden gelip çykandyr. Kombinatorikanyň usullary fizikada, himiýada, biologiýada, ykdysadyýetde hem-de bilimleriň başga ugurlarynda giňden ulanylýarlar.

Käbir kombinatoriki meselelere garalyň.

1-nji mysal. Stoluň üstünde 15 sany gyzyl reňkli we 7 sany gök reňkli şar bar. Bir sany şary näçe usul bilen saýlap bolar?

Çözülişi. Bir sany şary $15 + 7 = 22$ usul bilen saýlap boljakdygy düşnüklidir. Umuman, kombinatorikada jem düzgüni diýilýän aşakdaky tassyklama dogrudyr:

Eger *a* elementi *m* usul bilen, *b* elementi bolsa *n* usul bilen saýlap bolýan bolsa we *a* elementi saýlamagyň islendik usuly *b* elementi saýlamagyň islendik usulyndan tapawutly bolsa, onda «*a* ýa-da *b*» saýlamagy *m* + *n* usul bilen amala aşyryp bolar.

2-nji mysal. 1, 2, 3, 4 – ilkinji dört sany natural sanlardan, olaryň her birini bir gezekden köp ulanmazdan, düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny tapmaly.

Çözülişi. Aýdylan üçbelgili sanlaryň ählisini ýazyp çykalyň. Goý, birinji orunda 1 duran bolsun. Onda ikinji orunda galan 2, 3, 4 sanlaryň islendiginiň ýazylmagy mümkindir. Mysal üçin, ikinji orunda 2 ýazylan hasap edeliň. Onda üçünji orunda galan 3 we 4 sanlaryň islendik biri ýazylar. Şeýlelikde, 123 ýa-da 124 alynarlar. Eger-de ikinji orunda 3 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda 2 ýa-da 4 ýazylar. Şoňa görä-de, bu ýagdaýda 132 ýa-da 134 sanlar alynarlar. Eger-de ikinji orunda 4 ýazylan bolsa, onda üçünji orunda 2 ýa-da 3 ýazylmagy mümkin bolup, bu ýagdaýda 142 hem-de 143 sanlar alnarlar.

Diýmek, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan düzmek mümkin bolan üçbelgili sanlaryň 1 bilen başlaýanlarynyň ählisi alty sany bolup, olar 123; 124; 132; 134; 142; 143 sanlardyr

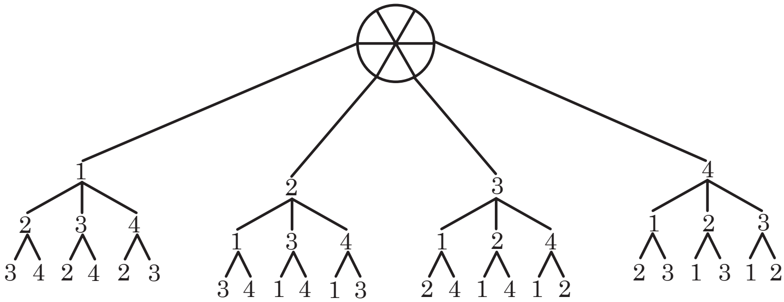
Edil şuňa meňzeşlikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan, düzmek mümkin bolan sanlaryň 2, 3 we 4 bilen başlanýanlary hem alynýarlar.

Şeýlelikde, ilkinji dört sany natural sanlardan, sanlary gaýtalamazdan, düzmek mümkin bolan ähli üçbelgili sanlar:

123, 124, 132, 134, 142, 143,
213, 214, 231, 234, 241, 243,
312, 314, 321, 324, 341, 342,
412, 413, 421, 423, 431, 432,

Bu diýildigi 1, 2, 3, 4 sanlardan, olary gaýtalap ulanmazdan, 24 sany üçbelgili sanlary düzmek mümkindir.

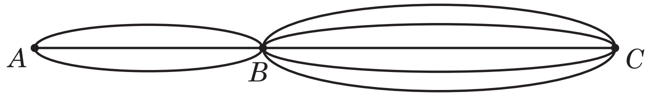
Bu sanlaryň saýlanyp tapylyşy 20-nji suratda görkezilýän şekilde aňladylýar. Bu şekile, adatça, mümkin **wariantlaryň daragty** diýlip aýdylýar.



20-nji surat

Getirilen şekilden hem görnüşi ýaly, ilkinji dört sany natural sanlardan, olary gaýtalamazdan, ýazmak mümkin bolan üçbelgili sanlaryň sanyny kesgitlemegi, olary ýokarda görkezilişi ýaly ýazyp oturmazdan, ýerine ýetirmek mümkindir. Hakykatdan hem, ol sanlaryň birinji orunda duran sanyny dört sany dürli usulda saýlamak mümkindir. Eger-de birinji orundaky san saýlanan bolsa, ikinji orundaky san deregine galan üç sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, üç sany dürli mümkinçiligiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda, üçünji orundaky san deregine birinji we ikinji orunlara alnan sanlardan galan iki sanyň haýsy hem bolsa birini almak mümkin bolup, ony saýlap almagyň iki mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar.

Şeýlelikde, aýdylýan görnüşdäki üçbelgili sanlaryň ählisiniň sany $4 \cdot 3 \cdot 2$ köpeltmek hasylyna, ýagny 24-e deňdir. Bizi gyzyklandyrýan sowalyň jogabyny tapmagyň bu usulyna kombinatorikada **köpeltmek düzgüni** diýlip aýdylýar. Bu düzgün umumy görnüşde, indiki ýaly aňladylýar: **goý, n sany elementlerden k sany elementleri yzly-yzyna saýlap almaly bolsun. Eger-de birinji elementi n_1, ikinji elementi n_2, üçünji elementi n_3 we şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen k-njy elementi n_k sany dürli usullarda saýlap almak mümkin bolsa aýdylan k sany elementleri saýlap almak mümkinçilikleriniň sany $n_1 \cdot n_2 ... n_k$ köpeltmek hasylyna deňdir.**



21-nji surat

2-nji mysal. A şäherden B şähere 3 sany, B şäherden C şähere 5 sany dürli ýollar bilen barmak mümkin bolsa, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen näçe sany dürli ýollar eltýärler?

Çözülişi. A şäherden B şähere eltýän ýoly üç sany usullar bilen saýlamak mümkin, B şäherden C şähere ýoly 5 sany dürli usulda saýlamak mümkin bolup, A şäherden C şähere B şäheriň üsti bilen $3 \cdot 5 = 15$ sany usullarda barmak mümkindir (*21-nji surat*).

3-nji mysal. Ýurtda birinjilik üçin 16 sany futbol toparlary ýaryşa gatnaşýar. Altyn we kümüş medallaryň näçe sany dürli usullar bilen eýelenmekleri mümkin?

Çözülişi. Altyn medaly 16 komandanyň islendik biri alar. Altyn medalyň eýesi anyklanandan soň, kümüş medaly galan 15 komandanyň islendik biri alar. Şeýlelikde, altyn we kümüş medallaryň eýeleriniň ähli mümkin bolanlarynyň sany $16 \cdot 15 = 240$ bolar.

4-nji mysal. 0, 1, 2, 3, 4, 5 sanlary ulanyp, näçe sany 4 belgili sany düzmek mümkin, eger-de:

a) sanlaryň hiç biri bir gezekden artyk gaýtalanmasa;
b) sanlaryň gaýtalanyp ulanylmaklary hem mümkin bolsa;
ç) düzülýän san täk bolmaly bolsa (sanlaryň gaýtalanmaklary hem mümkin)?

Çözülişi.

a) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$;
b) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$;
ç) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$;

?
1. Kombinatorikada jem düzgüni diýip nämä aýdylýar?
2. Köpeltmek düzgüni nähili aňladylýar?

Gönükmeler

178. Stadionda 12 sany girelge bar. Janköýeriň girelgeleriň birinden girip başga birinden çykmagynyň näçe sany dürli usullary bar?

179. Küşt ýaryşynda 12 adam gatnaşýar. Olaryň hersi galanlarynyň her biri bilen bir döw oýnaýarlar. Ählisi bolup näçe döw oýnaýarlar?

180. Synpdaky bar bolan 25 sany okuwçylar özara suratlaryny çalyşmakçy bolýarlar. Munuň üçin näçe sany surat gerek bolar?

181. Ýurtda birinjilik üçin futbol ýaryşyna 12 sany toparlar gatnaşýar. Olaryň her biri galanlarynyň her biri bilen hem olaryň, hem özleriniň meýdanynda bir oýundan oýnaýarlar. Ýaryşda jemi näçe duşuşyk geçirler?

182. Tennisçileriň türgenleşigine 12 adam gatnaşýar. Olaryň birmeňzeş derejedäki türgenler bolandyklaryna görä, ýaryşa gatnaşmaly 3 adamy bije bilen saýlamagy şertleşýärler. Ähli mümkin bolan şeýle saýlap almaklaryň sanyny tapyň.

2. Çalşyrmalar

Elementleriniň sany tükenikli bolan köplügiň elementlerinden düzmek mümkin bolan ýönekeý kombinasiýalaryň biri hem çalşyrmadyr.

Eger-de üç sany okuwçy nyzama durmaly bolsa, olaryň dürli usullar bilen durmaklary mümkindir. Hakykatdan hem, okuwçylary a, b, c harplar bilen belgiläp, olaryň nyzamda a, b, c; a, c, b; b, a, c; b, c, a; c, a, b; c, b, a; görnüşlerde ýerleşip durmaklaryny alyp bileris. Getirilen hatara durmalaryň her biri üç sany elementden **çalşyrma** diýlip atlandyrylýar.

Kesgitleme. ***n*** **sany elementleriň bellibir tertipde ýerleşip gelmekleriniň islendigine** ***n*** **sany elementlerden çalşyrma diýilýär.**

Adatça, n elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sany P_n görnüşde belgilenýär hem-de «n-den P» diýlip okalýar.

Ýokardaky mysaldan görnüşi ýaly, $P_3 = 6$. Ýöne ony tapmak üçin çalşyrmalary ýazyp oturmagyň hiç zerurlygy ýokdur. Çünki nyzamda birinji orna üç sany okuwçynyň islendik biriniň alynmagy mümkin bolup, birinji orunda durjak okuwçyny saýlamagyň üç sany mümkinçiligi, birinji orundaky okuwçynyň saýlanylan her bir ýagdaýynda, ikinji orna galan iki okuwçynyň islendik biriniň alynmagy mümkin bolup, ol ikinji orundaky durjak okuwçyny saýlamagyň iki sany mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar. Ahyrsoňunda ilkinji iki orunlarda durjak okuwçylar saýlanylan ýagdaýda üçünji orun üçin galan diňe bir okuwçynyň alynmagy mümkin bolup, ol üçünji orun üçin ýekeje saýlanylmak mümkinçiliginiň bardygyny aňladýar. Şeýlelikde, üç sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalaryň sany, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ köpeltmek hasylyna deň bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde, n sany elementlerden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyny tapmagyň düzgünini hem almak mümkindir.

Goý, n sany elementler berlen bolsun. Birinji orunda olaryň islendigini goýmak mümkindir. Birinji elementiň her bir alynmasyna degişli ikinji ornuň elementi deregine beýleki $(n - 1)$ sany elementleriň islendigini almak mümkindir. Ilkinji iki elementleriň alynmalarynyň her biri üçin üçünji element deregine galan $(n - 2)$ sany elementleriň islendigini almak mümkindir we ş.m.

Şeýlelikde, kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä:

$$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1$$

bolýandygy alnar.

Ilkinji n sany natural sanlaryň köpeltmek hasylynyň

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n$$

belgilemesinden peýdalanmak bilen

$$P_n = n!$$

ýaly ýazyp bileris.

1-nji mysal. 4 sany kitaby tekjede näçe sany dürli usul bilen goýup bolar?

Çözülişi. 4 sany kitaplary tekjede goýmagyň dürli usullarynyň sany 4 sany elementlerden düzmek mümkin bolan ähli çalşyrmalaryň sanyna deň, ýagny

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

bolar.

2-nji mysal. 5 sany okuwçyny bäş adamlyk oturgyçda näçe sany dürli usul bilen oturtmak bolar?

Çözülişi. 5 sany okuwçynyň bäş adamlyk oturgyçda dürli usulda ýerleşip oturmaklarynyň 5 sany elementden düzmek mümkin bolan çalşyrmalar sanyna deň, ýagny

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

bolar.

3-nji mysal. Arasynda 5 sany okuw kitaplary bolan 9 sany kitaplar bar bolsa, okuw kitaplaryny ýanaşyk ýerleşdirmek bilen bu kitaplary näçe sany dürli usullar bilen tekjä goýmak bolar?

Çözülişi. Ilki bilen ähli okuw kitaplaryna bitewülikde bir kitap ýaly gararys. Onda tekjede dokuz däl-de, bäş sany kitaplary ýerleşdirip goýmaklyk alnar. Belli bolşy ýaly, bäş sany kitaplary $P_5 = 5!$ Sany dürli usullar bilen ýerleşdirip goýmak mümkindir. Ýöne şeýle goýulmalaryň her birinde okuw kitaplaryny $P_5 = 5!$ sany dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Şeýlelikde, kitaplary aýdylan görnüşde tekjede goýmalaryň gözlenilýän sany $P_5 \cdot P_5 = (5!)^2$ bolar. Diýmek, $5! = 120$ bolmak bilen, gözlenilýän san

$$(5!)^2 = (120)^2 = 14400$$

bolar.

?! 1. Çalşyrma diýlip nämä aýdylýar?
2. Çalşyrmalar sanyny tapmagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

183. 0, 1, 3, 5 sanlardan, sanlary gaýtalanmaýan, dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp boljakdygyny kesgitläň.

184. 0, 1, 3, 5 sanlardan, sanlary gaýtalanmaýan, jübüt dörtbelgili sanlaryň näçe sanysyny ýazyp bolar?

185. Aman jaň etmekçi bolanda telefon belginiň soňky üç sany sanlarynyň 2, 3, 6 sanlardygyny, ýöne olaryň haýsy tertipde gelýändiklerini unudandygyny bilip galýar. Şol sanlaryň tertibini tötänden saýlap almakçy bolup, iň bir şowsuz synanyşyklarynda näçe gezek synanyşmaly boljakdygy hakynda iňkise gidýär. Amanyň iň şowsuz ýagdaýda näçe gezek synanyşyk etmeli boljagyny tapyň.

186. 2, 3, 5, 6 sanlardan, olary bir gezekden artyk ulanmazdan, näçe sany

a) 5000-den uly; ç) 3000-den uly;
b) 5250-den uly; d) 6000-den uly

sanlary ýazyp bolar?

187. 5 sany oglan we 5 sany gyz teatrda bir hataryň 1–10 orunlaryny näçe sany dürli usullar bilen eýelemekleri mümkin? Eger-de oglanlar şol orunlaryň täk, gyzlar bolsa olaryň jübüt belgili orunlaryny eýelemeli bolsalar dürli usullaryň sany näçe bolar?

188. 30! sanyň 90-a bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitläň.

189. 14! san 136-a bölünýärmi ýa-da ýok?

190. $7! \cdot 6$ we $6! \cdot 7$ sanlaryň haýsy bir iniň uludygyny kesgitläň.

191. $(m + 1)! \cdot m$ we $m! \cdot (m + 1)$ sanlaryň haýsy biriniň beýlekisinden uludygyny we näçe esse uludygyny kesgitlemeli.

192. 30! sanyň 96-a bölünýändigini ýa-da bölünmeýändigini kesgitläň.

3. Ýerleşdirmeler

Goý, 4 sany şar hem-de 3 sany boş öýjük bar bolsun. Şarlary a, b, c, d harplar bilen belgiläliň. Berlen şarlardan üçüsini boş öýjüklere dürli usullar bilen ýerleşdirmek mümkindir. Eger-de a şary birinji öýjüge, b şary ikinji öýjüge, c şary bolsa üçünji öýjüge ýerleşdirsek şarlaryň tertipleşdirilen üçlükleriniň birini alarys:

a	b	c

Birinji, ikinji hem-de üçünji şarlary dürli saýlamak bilen şarlaryň dürli tertipleşdirilen üçlüklerini alarys.

Mysal üçin,

a	c	b

b	a	c

d	c	b

Dört sany elementleriň tertipleşdirilen üçlüginiň her birine dört sany elementlerden üç elementli **ýerleşdirme** diýip aýdylýar.

Kesgitleme. ***n*** **sany elementlerden** $\boldsymbol{k(k \leq n)}$ **elementli ýerleşdirme diýlip, şol** ***n*** **elementlerden kesgitli tertipde alnan** ***k*** **sany elementleriň islendik köplügine aýdylýar.**

n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň sany, adatça, A_n^k görnüşinde belgilenýär hem-de «A n-den k boýunça» diýlip okalýar.

Kesgitlemeden görnüşi ýaly, n sany elementlerden k elementli iki sany ýerleşdirmeler elementleri boýunça ýa-da elementleriniň tertipleri bilen tapawutlanýan bolsalar, olar dürli ýerleşdirmeler hasap edilýärler.

Eger-de a, b, c, d – dört sany elementlerden ähli üç elementli ýerleşdirmeleri ýazyp çykmakçy bolsak, onda bu elementleriň her birini yzygiderlikli ýagdaýda birinji orunda ýerleşdirmek bilen alarys:

$$\begin{gathered} abc, abd, acb, acd, adb, adc, \\ bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, \\ cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, \\ dab, dac, dba, dbc, dca, dcb. \end{gathered}$$

Şeýlelikde, $A_4^3 = 24$ bolýar. Munuň şeýledigini indiki ýaly pikir ýöredip hem alyp bileris: birinji element deregine berlen dört sany elementleriň islendigini almak mümkin bolup, ol dört sany usul bilen saýlanylyp bilner. Birinji elementiň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin ikinji element deregine beýleki üç elementiň islendik birini almak mümkindir. Bu diýildigi onuň üç sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini aňladýar. Şuňa meňzeşlikde ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýynda üçünji element ornuna galan iki elementleriň islendik birini almak mümkin bolup, ol üçünji elementi iki sany dürli usulda saýlap bolýandygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgünine görä taparys:

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Edil şuňa meňzeşlikde n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň ($k \le n$ bolanda) sanyny hem tapmak mümkindir. Şeýle ýerleşdirmede birinji element n sany dürli usulda saýlanylyp bilner. Ol saýlanylandan soň, ikinji element deregine galan $(n-1)$ sany elementleriň islendigininiň alynmagy mümkin bolup, şol elementiň $(n-1)$ sany dürli usulda saýlanylmagynyň mümkindigini alarys. Soňra ilkinji iki elementleriň her bir saýlanylan ýagdaýy üçin üçünji element deregine galan $(n-2)$ elementleriň islendigini almak mümkin bolup, şol elementiň $(n-2)$ sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinjekdigi alnar. Şuňa meňzeşlikde dowam etmek bilen ahyrsoňunda k-njy element deregine ilkinji $(k-1)$ sany elementler deregine saýlanylanlardan galan $n-(k-1)$ sany elementleriň islendigininiň alynmagynyň mümkindigini, şoňa görä-de, ol elementiň $n-(k-1)$ sany dürli usulda saýlanylmak mümkinçiliginiň bardygyny alarys. Onda kombinatorikanyň köpeltmek düzgüninden

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))$$

bolýandygy alnar. Bu formuladan görnüşi ýaly A_n^k-nyň, ýagny n sany elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň sanynyň iň ulusy n bolan k sany yzygiderli natural sanlaryň köpeltmek hasylyna deňdigini alarys.

Hususan,

$$A_n^{n-1} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1)) =$$
$$= n\cdot(n-1)(n-2)\ldots1 = 1\cdot2\ldots\cdot(n-2)(n-1)\cdot n = n!$$

bolýandygyny alarys. Hakykatdan-da, n sany elementlerden n elementli ýerleşdirmeler biri-birinden diňe elementleriň tertipleri bilen tapawutlanýarlar, şoňa görä-de olar n sany elementlerden çalşyrmalar bolup,

$$A_n^n = P_n = n!$$

bolýandyklary alnar.

1-nji mysal. 25 sany ýygnaga gatnaşyjylaryň arasyndan ýygnagyň başlygyny hem-de kätibini näçe sany usul bilen saýlap bolar ?

Çözülişi. Ýygnagyň başlygy deregine 25 sany gatnaşyjylaryň islendik biriniň saýlanylmagy mümkin bolup, ol 25 sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilner. Eger-de başlyk saýlanylan bolsa, onda kätip deregine galan 24 adamyň islendiginiň saýlanylmagy mümkindir. Bu diýildigi kätibiň 24 sany dürli usullar bilen saýlanylyp bilinýändigini aňladýar. Şeýlelikde, biz 25 sany elementlerden 2 elementli ýerleşdirmeler sanyny alarys:

$$A_{25}^{2} = 25 \cdot 24 = 600.$$

2-nji mysal. Tekizligiň bäş sany nokatlaryny latyn harplarynda belgilemekçi bolup, olary näçe sany dürli usullar bilen ýerine ýetirmek mümkin diýip oýlanýarlar. Eger-de latyn elipbiýi 26 sany harplardan durýan bolsa, şol belgilemeleriň näçe sany dürli mümkinçilikleri bardyr?

Çözülişi. Tekizligiň bäş sany nokatlarynyň belgilemeleri biri-birinden ýa belgilemede ulanylan harplar bilen ýa-da şol bir harplarda olaryň belgilenilen nokatlary bilen tapawutlanýandyrlar. Şeýlelikde, belgilemeleriň dürli mümkinçilikleriniň sanynyň 26 sany elementlerden 5 elementli ýerleşdirmeleriň sany bilen gabat gelmelidigini, ýagny

$$A_{26}^{5} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 8923200$$

bolýandygyny alarys.

?! 1. Ýerleşdirme diýlip nämä aýdylýar?
2. Ýerleşdirmeler sanyny tapmagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

193. Eger-de 100 *m* aralyga 10 sany ylgaýjy ýaryşýan bolsa, birinji, ikinji hem-de üçünji orunlaryň eýelenmekleriniň dürli mümkinçilikleriniň sany näçe bolar?

194. Aman, Berdi, Gurban üçüsi konsert diňlemäge gelenlerinde dört sany boş orun galan eken. Olaryň näçe sany dürli usullar bilen oturmaklary mümkin?

195. 5 sany okuwçynyň synp otagyndaky 15 sany kompýuteri näçe sany dürli usullarda eýelemekleri mümkin?

196. Bäsleşige gatnaşyjy 20 sany aýdymçylaryň birinji, ikinji we üçünji bolup çykyş etjeklerini näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

197. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sanlardan olaryň hiç birini hem bir gezekden artyk ulanman, dört belgili sanlaryň näçesini ýazyp bolar?

4. Utgaşdyrmalar

Dükanda galan dürli reňkli 5 sany çişirilen şarlardan Aman üçüsini bilelikde baglap baýramçylyk gezelenjine çykmakçy bolýar. Onuň şeýle şarlar üçlügini näçe sany dürli usullarda saýlap almak mümkinçiliginiň bardygyny öwreneliň. Şol şarlary a, b, c, d, e harplar bilen belgiläliň.

Şarlar üçlüginde a şar bar bolan halatynda indiki şarlar üçlükleriniň alynmaklary mümkin:

$$abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade.$$

Eger-de şarlar üçlüginde a şar bolman b şar bar bolsa,

$$bcd,\ bce,\ bde$$

üçlükleri alynýarlar.

Eger-de Amanyň saýlan şarlarynyň arasynda a şar hem, b şar hem ýok bolsalar, onda

$$cde$$

şarlardan durýan ýekeje üçlük saýlanan bolar.

Şeýlelikde, biz 5 sany dürli reňkli şarlardan üçüsini saýlap almagyň ähli bolup biläýjek mümkinçiliklerini görkezdik. Bu diýildigi, 5 sany dürli reňkli şarlardan 3-üsini näçe sany dürli mümkinçilikler bilen **utgaşdyryp** alyp boljakdygyny kesgitledik.

Kesgitleme. Berlen *n* sany elementleriň köplüginden alnan *k* sany elementleriň islendik köplügi *n* sany elementlerden *k* elementli utgaşdyrma diýlip aýdylýar.

Utgaşdyrmalarda, ýerleşdirmelerden tapawutlylykda, elementleriň ýerleşiş tertibi ähmiýete eýe däldir, ýagny n sany elementlerden iki sany k elementli utgaşdyrmalar biri-birinden hiç bolmanda bir elementi bilen tapawutlanýarlar.

n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalaryň sany C_n^k görnüşinde belgilenýär hem-de «C n-den k boýunça» diýlip okalýar.

$k \leq n$ bolanda n sany elementlerden k elementli utgaşdyrmalar sanyny hasaplamagyň düzgünini öwreneliň.

Ýokarda getirilen mysalda $C_5^3 = 10$ bolupdy. C_5^3 sanyň A_5^3 hem-de P_3 sanlar bilen arabaglanyşygyny tapalyň.

Şol mysalda 5 sany a, b, c, d, e elementlerden üç elementli *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde* utgaşdyrmalar alnypdy. Her bir utgaşdyrmada ähli mümkin bolan çalşyrmalary ýerine ýetireliň. Ol utgaşdyrmalaryň her birinde alnyp bilinjek çalşyrmalaryň sany

$$P_3 = 3! = 6$$

bolar. Ol çalşyrmalar netijesinde 5 sany elementlerden 3 elementli ýerleşdirmeleriň ählisi alnar. Şol ýerleşdirmeleriň sany A_5^3 bolup, olar biri-birinden ýa elementleriniň tertibi ýa-da hiç bolmanda bir elementli bilen tapawutlanýandyrlar.

Diýmek,

$$C_5^3 \cdot P_3 = A_5^3$$

deňlik alnyp, şoňa görä-de:

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3}$$

bolýandygy tapylar.

Umumy ýagdaýda hem ýokardaky ýaly hereket ederis. Goý, n sany elementleri bolan köplügiň elementlerinden k elementli ähli utgaşdyrmalar alnan bolsun. Şeýle utgaşdyrmalar sanyny C_n^k görnüşinde belgiläpdik. Her bir utgaşdyrmada P_k sany çalşyrma alnyp bilner. Bu çalşyrmalar netijesinde n elementlerden k elementli ýerleşdirmeleriň ählisi alnyp, olaryň sany A_n^k.

Şeýlelikde,

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

ýa-da başgaça

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$$

bolýandygy alnar. Bu deňligiň sag tarapynda sanawjysynyň hem-de maýdalawjynyň ornuna olaryň aňlatmalaryny goýmak bilen

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot k}$$

formula eýe bolarys. Eger-de soňky deňligiň sag tarapynda drobuň sanawjysyny hem, maýdalawjysyny hem $n \neq k$ hasap etmek bilen $(n - k)!$ köpeltmek hasylyna köpeltsek, her bir k üçin

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

bolýandygyny taparys.

Eger-de kesgitlemä görä, $0! = 1$ diýip hasap etsek, onda

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

formula $n = k$ bolan ýagdaýynda hem ulanylyp bilner:

$$C_n^n = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$$

1-nji mysal. Matematikadan okuwçylaryň etrap olimpiadasyny geçirmeklige çagyrylan 20 sany mekdep mugallymlaryndan 5-isini saýlap almakçy boldular. Olary näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

Çözülişi. Her bir saýlanan düzüm başgasyndan hiç bolmanda bir mugallym bilen tapawutlanmalydyr. Onda biz 20 sany elementlerden 5 elementli utgaşdyrmalary almak meselesine eýe bolarys, olaryň sany bolsa

$$C_{20}^{5} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 16 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 = 15504$$

bolar.

Diýmek, 20 sany çagyrylan mugallymlardan 5 sanysyny 15504 sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin.

2-nji mysal. Tekjede goýlan 12 sany «Algebra» hem-de 8 sany «Geometriýa» kitaplaryndan 5 sany «Algebra» we 3 sany «Geometriýa» kitaplaryny almaly bolsa, olary näçe sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkin?

Çözülişi. 5 sany «Algebra» kitaplaryny bar bolan 12 sany «Algebra» kitaplarynyň arasyndan C_{12}^{5} sany düri usullar bilen, 3 sany «Geometriýa» kitaplaryny bolsa 8 sany şeýle kitaplaryň arasyndan C_{8}^{3} sany dürli usullar bilen saýlap almak mümkindir. «Algebra» kitaplarynyň her bir saýlamasyna «Geometriýa» kitaplarynyň C_{8}^{3} sany saýlamalarynyň islendigi degişli bolup biler. Şoňa görä-de, mysalda aýdylan kitaplar $C_{12}^{5} \cdot C_{8}^{3}$ sany usullar bilen alynmaklary mümkindir.

$$C_{12}^{5} \cdot C_{8}^{3} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 8 = 44352$$

bolýandygyna görä, kitaplaryň aýdylan görnüşdäki saýlanylmaklarynyň mümkinçilikleriniň sany 44352 bolar.

?!
1. Utgaşdyrma diýlip nämä aýdylýar?
2. Utgaşdyrmalar sanyny hasaplamagyň formulasyny ýazyň.

Gönükmeler

198. Synpda 18 sany oglan hem-de 8 sany gyz bolanlarynda timarlaýyş işine 5 oglan we 3 gyzy näçe sany usul bilen saýlap almak mümkin?

199. Syýahata çykan 14 adamdan düşelgede galmaly iki sany nobatçylary näçe usulda saýlamak mümkin?

200. Tekjede duran 12 kitabyň biri rusça-türkmençe sözlük, galanlary bolsa rus dilindäki çeper eserler. Eger-de okyja:

a) sözlük zerur bolanda;

b) sözlük derkar däl bolanda

näçe sany usulda 4 sany kitaplary saýlap almak mümkinçiligi bar?

201. Mekdep bagyna serenjam bermek üçin 12 sany okuwçy kömege geldi. Olaryň 3-üsini baglaryň düýbüni ýumşatmaga, galanlarynyň 4-üsini gülleri tertibe getirmäge ulanmaly. Olary näçe sany usulda saýlamak mümkin?

202. Kitaphana täze gelen 10 kitapdan 6 sanysyny näçe sany dürli usullar bilen saýlamak mümkin?

5. Paskalyň üçburçlugy

Biziň bilşimiz ýaly, $C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$. Şeýle hem, $0! = 1$ we $C_0^0 = C_m^0 = C_m^m = 1$ diýip hasap edilendir. Formulany we $C_0^0 = C_m^0 = C_m^m = 1$ gatnaşygy peýdalanyp, C_m^n sanyň doly tablisasyny düzeliň. Bu tablisa onuň häsiýetlerini derňän fransuz matematigi *B*. Paskalyň (1623–1662) hatyrasyna **«Paskalyň üçburçlugy»** diýip atlandyrmak kabul edilendir.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Bu tablisada şeýle kanunalaýyklyk bardyr: çepde birinji sütündäki sanlar setiriň nomerini, ýokardaky birinji setirdäki sanlar bolsa sütüniň nomerini aňladýandyr. Tablisadaky galan sanlar bolsa utgaşdyrmalaryň sanydyr. Mysal üçin,dördünji setirdäki

1, 4, 6, 4, 1 sanlar C_4^0; C_4^1; C_4^2; C_4^3; C_4^4 aňladýar. Setirleriň her biri 1 bilen başlanýar we 1 bilen hem gutarýar. m-nji setir bilen n-nji sütüniň kesişmesinde C_m^n san ýerleşendir. Mysal üçin, $C_4^2=6$, $C_7^3 = 35$.

Paskalyň üçburçlugynyň şeýle häsiýetleri bardyr:

1) C_m^n – bu her bir setirdäki sandyr;
2) m-nji setirdäki sanlaryň jemi 2^m-e deňdir;
3) islendik setiriň sanlarynyň jemi yzyndaky setiriň sanlarynyň jeminden 2 esse uludyr;
4. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

Paskalyň üçburçlugy, köplenç, deňtaraply uçburçluk görnüşinde ýazylýar.

				1					$n = 0$
			1		1				$n = 1$
		1		2		1			$n = 2$
		1	3		3	1			$n = 3$
	1	4		6		4	1		$n = 4$
	1	5	10		10	5	1		$n = 5$
1	6	15		20		15	6	1	$n = 6$
1	7	21	35		35	21	7	1	$n = 7$
1	8	28	56	70	56	28	8	1	$n = 8$

Gönükmeler

203. Paskalyň üçburçlugyny aşakdaky görnüşde ýazyp bolýar:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad C_n^2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Bu ýazgyny ulanyp, $n = 9$ üçin Paskalyň uçburçlugyny ýazyň.

204. Deňligiň dogrudygyny subut ediň.

$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$.

205. Deňligiň dogrudygyny subut ediň.

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$;

2) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

206. Hasaplamaly.

a) $C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7$; b) $C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6$.

207. Hasaplamaly.

a) C_{100}^{99}; b) C_{1000}^{999}; ç) C_{100}^{97}; d) C_{1000}^{998}.

§10. Nýuton binomy

1. Nýuton binomy

Biz $a + x$ iki agzanyň ikinji we üçünji derejeleri üçin formulalary bilýäris:

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Indi biz n islendik natural san bolanda $(a + x)^n$ dereje üçin formulany getirip çykaralyň. Eger $(a + x)^n$ aňlatmada ýaýy açsak ýa-da $(a + x)$ iki agzany n gezek öz-özüne köpeltsek, onda x görä n derejeli köpagza alnar. Häzirlikçe biz onuň koeffisiýentlerini bilemzok, şonuň üçin jogaby aşakdaky ýaly ýazalyň:

$$(a + x)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 +\ldots+ A_nx^n. \tag{1}$$

Bize $A_0, A_1, A_2, A_3,\ldots, A_n$ koeffisiýentler üçin aňlatmany tapmak gerekdir.

A_0 tapmak üçin (1) deňligiň iki böleginde x-iň ýerine 0 bahany goýup alarys:

$$A_0 = a^n. \tag{2}$$

A_1-i tapmak üçin (1) deňligiň iki bölegini differensirläp, soňra $x = 0$ goýalyň. Onda derejäni differensirlemegiň formulasy boýunça alarys:

$$((a + x)^n)' = n(a + x)^{n-1}(a + x)' = n(a + x)^{n-1}.$$

Başga tarapdan,

$$(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 +\ldots+ A_nx^n)' =$$
$$= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 +\ldots+ nA_nx^{n-1}.$$

Diýmek,

$$n(a + x)^{n-1} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 +\ldots+ nA_nx^{n-1}. \tag{3}$$

Bu ýerde $x = 0$ goýup, alarys: $na^{n-1} = A_1$. Diýmek,

$$A_1 = \frac{na^{n-1}}{1}. \tag{4}$$

A_2-ni tapmak üçin (3) deňligiň iki bölegini differensirläliň we alnan aňlatmada $x = 0$ goýalyň. Onda alarys:

$$n(n-1)(a + x)^{n-2} = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3x +\ldots+ n(n-1)A_nx^{n-2},$$

bu ýerden

$$n(n-1)a^{n-2} = 2A_2.$$

Diýmek,

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}. \tag{5}$$

Galan koeffisiýentler hem edil şuňa meňzeş tapylýar.

Eger (1) deňligi k gezek differensirlesek, onda alarys:

$$n(n-1)\dots(n-k+1)(x+a)^{n-k} = k(k-1)(k-2)\dots2\cdot1\cdot A_k + (k+1)\cdot k\dots2A_{k+1}x + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)A_n x^{n-k}.$$

Bu deňlikde $x = 0$ goýup, alarys:

$$n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k} = 1\cdot2\dots k\cdot A_k,$$

bu ýerden

$$A_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\dots\cdot k}a^{n-k}. \qquad (6)$$

$\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\dots\cdot k}$ sana binomial koeffisiýent diýilýär we C_n^k görnüşde belgilenýär. Şeýlelikde, $A_k = C_n^k a^{n-k}$, bu ýerde

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot2\cdot\dots\cdot k}. \qquad (7)$$

Şoňa görä-de,

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \dots + C_n^k a^{n-k}x^k + \dots + C_n^n x^n. \qquad (8)$$

Bu formula iňlis matematigi we fizigi Isak Nýutonyň (1642–1727) hatyrasyna **Nýuton binomynyň formulasy** diýilýär.

Binomial koeffisiýentler üçin formula başga görnüşde hem ýazylýar:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots2\cdot1}{1\cdot2\cdot\dots k\cdot(n-k)\dots2\cdot1} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

bu ýerde $1\cdot2\cdot\dots\cdot n$ köpeltmek hasyly üçin (n-faktorial) belgileme ulanylýar.

Diýmek,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (9)$$

$n! = (n-1)!n$ deňligi bilmek peýdalydyr. (8) formulada a^n derejäniň koeffisiýenti 1-e deňdir. Şoňa görä-de, $C_n^0 = 1$ hasap edilýär. x^n-iň koeffisiýenti hem 1-e deňdir. Şoňa görä-de, $C_n^n = 1$ hasap edilýär. Bu deňlikler $0! = 1$ hasap edip (9) formuladan alynýar.

1-nji mysal. (8) formulany ulanyp $(a + x)^4$ binom dagytmasyny ýazalyň.

Çözülişi. Biziň ýagdaýymyzda $n = 4$. Onda alarys:

$$(a + x)^4 = a^4 + C_4^1 a^3 x + C_4^2 a^2 x^2 + C_4^3 a x^3 + C_4^4 x^4.$$

Indi c_4^k binomial koeffisiýentleri hasaplalyň:

$$C_4^1 = \frac{4}{1} = 4;\ C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6;\ C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4;$$

$$C_4^4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1.$$

Diýmek, (8) formula boýunça, taparys:

$$(a + x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.$$

?
1. Nýuton binomynyň formulasy nähili ýazylýar?
2. Binomial koeffisiýentler nähili formula boýunça hasaplanýar?

Gönükmeler

208. (7) formula boýunça hasaplaň.

$$C_4^1,\ C^2,\ C^3,\ C_5^1,\ C_5^2,\ C_5^3,\ C_5^4,\ C_6^1,\ C_6^2,\ C_6^3,\ C^4,\ C_6^5,\ C_n^1,\ C_n^2,\ C_n^{n-3}.$$

209. (7) formula boýunça hasaplaň.

$$C_{1000}^1,\ C_{1000}^2,\ C_{1000}^3,\ C_{1000}^{999},\ C_{1000}^{998},\ C_{1000}^{997}.$$

210. $C_{1000}^4 = C_{1000}^{996}$ deňligiň dogrudygyny görkeziň.

211. (9) formula boýunça binom dagytmasyny ýazyň.

1) $(a - x)^5$; 2) $(2 + h)^4$; 3) $(x + 1)^5$;

4) $(x - 1)^5$; 5) $(x - 2y)^6$; 6) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^7$;

7) $(\sqrt{x} - 1)^5$; 8) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4$; 9) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^6$;

10) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{10}$; 11) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^8$; 12) $(\sqrt{5} - 1)^6$.

212. Binom dagytmasy özünde näçe agzany saklaýar:

1) $(a + x)^{10}$; 2) $(a + x)^{15}$; 3) $(a + x)^{n}$?

213. (8) formulany matematiki induksiýa usuly bilen subut ediň.

214. Nýuton binomy formulasy boýunça hasaplaň.

1) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^4$; 2) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^4$;

3) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^5$; 4) $(\sqrt{10} - \sqrt{2})^5$.

215. Deňligi subut ediň.

1) $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$; 2) $C_2^{n-2} = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

216. Toždestwony subut ediň.

$$C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

217. $11^{10} - 1$ sanyň 100-e bölünýändigini subut ediň.

2. Binomial koeffisiýentleriň käbir häsiýetleri

Biz

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n x^n \tag{1}$$

deňligi subut etdik, bu ýerde $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Bu formulada $a = x = 1$ goýup, alarys:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n. \tag{2}$$

Şeýlelikde, ***n*-iň berlen bahasynda binomial koeffisiýentleriň jemi 2^n-e deňdir.**

Indi (1) formulada $a = 1$, $x = -1$ goýalyň. Onda alarys:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n. \tag{3}$$

Bu ýerden görnüşi ýaly, **jübüt orunlarda duran binomial koeffisiýentleriň jemi täk orunlarda duran binomial koeffisiýentleriň jemine deňdir.**

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ formulany ulanyp alarys:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(k!)} = C_n^k. \qquad (4)$$

Diýmek, **dagytmanyň uçlaryndan deňdaşlaşan binomial koeffisiýentler biri-birine deňdir.**

Indi C_{n-1}^{k-1} bilen C_{n-1}^{k} binomial koeffisiýentleri goşup alarys:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)} =$$

$$= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Şeýlelikde,

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k \qquad (5)$$

deňligi aldyk. Bu formula C_{n-1}^{s} binomial koeffisiýentleri bilip, C_n^k binomial koeffisiýentleri tapmaklyga mümkinçilik berýär.

? 1. Binomial koeffisiýentleriň nähili häsiýetleri bar?

Gönükmeler

218. Hasaplaň.

1) C_{10}^{8}; 2) C_{15}^{12}; 3) C_{100}^{96}; 4) C_{36}^{34}.

219. $C_n^x = C_n^y$ deňlik berlen bolsa, $x = y$ diýip tassyklamak bolarmy?

220. Deňlemäni çözmeli.

1) $C_x^{x-2} + 2x = 9$; 2) $C_{x-1}^{x-2} = x^2 - 13$; 3) $C^{n-2} = C_n^3$.

221. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ dagytmada a^8-iň koeffisiýentini tapyň.

222. $\left(2a-\frac{1}{3a}\right)^{10}$ dagytmada a^4-üň koeffisiýentini tapyň.

223. Hasaplaň.

1) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$;
2) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n$;
3) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$;
4) $C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \ldots + (2n+1)C_n^n$.

224. Subut ediň.

$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

§11. Ähtimallyklar nazaryýetiniň elementleri. Ähtimallygyň statistiki we klassyky kesgitlemeleri

Gündelik durmuşymyzda, amaly we ylmy işlerimizde biz ýygy-ýygydan ol ýa-da başga hadysalara gabat gelýäris, dürli tejribeleri geçirýäris.

Gözegçilik ýa-da tejribe dowamynda ýüze çykmagy hem, ýüze çykmazlygy hem mümkin bolan waka **tötän waka** diýlip aýdylýar. Mysal üçin, oklanan topuň tora düşmegi ýa-da sowa geçmegi (düşmezligi) tötän wakalardyr. Çapuwa goşulan bedewiň ozmagy, galmagy ýa-da başga bedew bilen deň gelmegi hem tötän wakalardyr. Matematikanyň tötän wakalaryň kanunalaýyklyklaryny öwrenýän şahasyna **ähtimallyklar nazaryýeti** diýilýär.

Ähtimallyklar nazaryýetiniň döremegi birmeňzeş şertlerde amala aşyrylýan tötän netijeleri bolan synaglaryň uly tapgyrynda ol ýa-da başga wakanyň ýüze çykmagynyň ýygylygyny öwrenmek meselesi bilen baglanyşyklydyr. Has dogrusy, onuň döremeginiň humarly oýunlarda gabat gelýän meseleleriň çözülişleri bilen baglanyşyklydygyny belläp geçeliň.

Oýnalýan kubjagazy oklamakdan durýan mysala garalyň . Kubjagaz oklananda onuň ýokary granynda 1, 2, 3, 4, 5, 6 oçkolaryň islendik biriniň bolmagy mümkin bolup, oýnuň bu netijeleriniň her biriniň alynmagy tötändir.

Indiki synag geçirilipdir. Oýnalýan kubjagazy 100 gezek oklap, olaryň näçesinde 5 oçkonyň düşendigine gözegçilik edýärler. Bu oklamalarda 5 oçko 14 gezek düşüpdir. 5 oçkonyň bu synaglardaky düşmekliginiň 14 sanyna gyzyklandyrýan wakanyň **ýygylygy**, bu ýygylygyň synaglaryň umumy sanyna gatnaşygy bolan $\frac{14}{100}$ san bolsa, şol wakanyň **otnositel ýygylygy** diýlip atlandyrylýar.

Goý, birmeňzeş şertlerde käbir synag köp gezek gaýtalanýan we olaryň her birinde haýsydyr bir A wakanyň ýüze çykandygy ýa-da çykmandygy hasaba alynýan bolsun. Geçirilen synaglaryň umumy sany n, olaryň arasynda A wakanyň ýüze çykanlarynyň sany bolsa m (onda A wakanyň ýüze çykmadyk synaglarynyň sany $n-m$) bilen belgilenen bolsun. Bu ýagdaýda $m - A$ wakanyň ýygylygy, $\frac{m}{n}$ gatnaşyk bolsa ol wakanyň **otnositel ýygylygy** diýlip atlandyrylýarlar.

Kesgitleme. Synaglar tapgyrynda tötän wakanyň otnositel ýygylygy diýlip bu wakanyň ýüze çykan synaglarynyň sanynyň synaglaryň umumy sanyna bolan gatnaşygyna aýdylýar.

Statistiki gözegçilikler käbir tejribeler ýa-da bolmasa gözegçilikler birmeňzeş şertlerde köpsanly gaýtalananlarynda wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň käbir p sandan ujypsyz tapawutlanýan özara birmeňzeş diýen ýaly sanlar bolýandygyny görkezipdirler. Mysal üçin, şaýlyk oklananda onuň ýüz ýa-da arka tarapynyň ýokara bakyp düşmegi mümkindir. Eger-de şaýlyk geometriki dogry bolup, birjynsly materialdan ýasalan bolsa onda ýüzüniň hem-de arkasynyň düşmekleri birmeňzeş mümkinçiliklidirler. Azsanly oklamalarda şaýlygyň ýüzüniň düşmeginiň onuň arka tarapynyň düşmeginden ýygy-ýygydan ýa-da tersine, bolmagy mümkindir. Ýöne oklamalar sany ýeterlik uly bolanda ýüz tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy bilen arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy özara ýakyndyrlar.

Şaýlyk oklamalar bilen baglanyşykly synaglar hem köpsanly öwrenijileriň ünsüni özüne çekipdirler. Indiki tablisada şaýlyk oklamalar sany hem-de olarda şaýlygyň arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy getirilendir.

Oklamalar sany	Arka tarapynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy
4040	0,4930
4092	0,4995
80630	0,5070

Tablisadan görnüşi ýaly, şaýlygyň arkasynyň düşmeginiň otnositel ýygylygy $\frac{1}{2}$-den ujypsyz tapawutlanýar.

Aslynda netijeleri tötän bolan köpsanly tejribeleriň tapgyrynda wakanyň otnositel ýygylyklary käbir sandan az tapawutlanýan bolsalar, onda şol san bu wakanyň ähtimallygy deregine alynýandyr. Ähtimallygyň şeýle kesgitlemesi onuň **statistiki kesgitlemesi** diýlip atlandyrylýar. Ýokarda getirilen mysalda $\frac{1}{2}$ şaýlygyň arka tarapyna düşmeginiň ähtimallygydyr.

Tejribe ýa-da gözegçilik bilen baglanyşykly tötän wakanyň ähtimallygyny şeýle tejribeleriň ýa-da gözegçilikleriň köpsanlysyny birmeňzeş şertlerde gaýtalamak bilen alynýan wakanyň otnositel ýygylygyny statistiki derňemek bilen tapýarlar. Mysal üçin, ekiniň tohumynyň gögerijilik ukybyny kesgitlemekçi bolanlarynda hem, bazara satmaga getirilen köpsanly elektrolampalaryň üýşmegindäki elektrolampanyň şikessiz bolmaklygyny çaklamak üçin hem şu nukdaý – nazardan ugur alýarlar. Bizi gyzyklandyrýan wakanyň ähtimallygyny tapmak üçin, her birinde bu wakanyň ýüze çykmagy mümkin bolan tejribeleriň ýa-da gözegçilikleriň köpsanlysyny amala aşyrmak zerurdyr. Ýöne öwrenilýän synaglar her biriniň ýüze çykmagy deňmümkinçilikli tötän netijelere eýe bolanlarynda olar bilen baglanyşykly tükenikli sany tötän wakanyň ähtimallygyny synaglary gaýtalap oturman, pikir ýöretmeler arkaly hem tapmak mümkindir.

Aýdylana düşünmek üçin mysala ýüzleneliň. Eger-de oýnalýan kubjagaz birjynsly materialdan ýasalyp, dogry geometriki şekile eýe bolanynda onuň oklanmagynda 6 sany granlarynyň islendiginiň düşmegine şol bir umyt bilen garaşarys. Şoňa görä-de, bu synagyň 6 sany deňmümkinçilikli netijeleri bar diýilýär. Olar 1, 2, 3, 4, 5 hem-de 6 oçkolaryň düşmekleridir. Şeýle synag (kubjagazyň oklanmagy) bilen baglanyşykly A waka diýip kubjagaz oklananda jübüt oçkonyň düşmegini kabul edeliň. Bu waka synagyň 6 sany netijeleriniň arasynda 3-üsi bolup geçende ýüze çykýar. Ýagny A waka haçanda 2, 4 we 6 oçkolar düşende we diňe şol netijelerde ýüze çykýar. Şol netijeler hem A **wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeler** diýlip atlandyrylýar. A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriň sanynyň synagyň ähli deňmümkinçilikli netijeleriniň sanyna bolan gatnaşygy $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ bolup, ol A **wakanyň ähtimallygy** diýlip atlandyrylýar we $P(A)=\frac{1}{2}$ görnüşde aňladylýar.

Kesgitleme: Tükenikli sandaky deňmümkinçilikli netijeleri bolan synag bilen baglanyşykly wakanyň ähtimallygy hökmünde synagyň bu wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sanynyň onuň ähli netijeleriniň sanyna bolan gatnaşygy alynýar.

Ähtimallygyň şeýle kesgitlemesi onuň **klassyky kesgitlemesi** diýlip atlandyrylýar.

$P(A) = \frac{1}{2}$ bolmagy iş ýüzünde nämäni aňladýar? Ilkinji nobatda onuň kubjagaz dört gezek oklananda olaryň laýyk iki sanysynda jübüt oçko düşer (A waka ýüze çykar) diýip tassyklamaga esas berip bilmejekdigini bellemek gerek. Çünki ol wakanyň oklamalaryň hiç birinde, birinde, ikisinde, üçüsinde, ählisinde ýüze çykmagy mümkindir. Ýöne synaglar sany ýeterlik uly bolanda A wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygy $\frac{1}{2}$-den örän az tapawutlanýan san bolar diýip tassyklap bolar. Şeýlelikde, synaglar sany ulaldygyça wakanyň ýüze çykmagynyň otnositel ýygylygynyň onuň ähtimallygyna ýakynlaşýandygyny alarys.

Bellik. Ähtimallygyň ýokarda getirilen klassyky hem-de statistiki kesgitlemelerini deňeşdirmek bilen klassyky kesgitlemede synagyň geçirilmeginiň zerurlygy ýok bolup, statistiki kesgitlemede synaglar tapgyryny geçirmelidigini göreris. Şunlukda, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinde netijeleri deňmümkinçilikli bolan synagyň ähli netijeleriniň hem-de öwrenilýän wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sanlaryny kesgitlemäni başarmalydyrys.

Indiki mysala garalyň. Iki sany kubjagazlar oklanylýar. Olarda düşen oçkolaryň jeminiň 9-a deň bolmagyny aňladýan A wakanyň ähtimallygyny tapmaly. Bu synagyň netijelerini abssissasy birinji kubjagazda düşen x oçko, ordinatasy bolsa ikinji kubjagazda düşen y oçko bolan tekizligiň (x, y) nokady ýaly belgilesek, $1 \le x, y \le 6$ bolandyklaryna görä bu synagyň ähli netijeleriniň sany 36 bolar. Olaryň arasynda (3, 6); (4, 5); (5, 4); (6, 3) – dört sanysy A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleridir. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

bolar.

Edil şuňa meňzeşlikde, synag iki sany şaýlyk oklanmagyndan durýar diýsek, Ý bilen şaýlygyň ýüz tarapynyň, A bilen onuň arka tarapynyň düşmeklerini belgilemek bilen, synagyň ähli mümkin bolan netijelerini ($Ý$, A); ($Ý$, $Ý$); (A, $Ý$); (A, A) görnüşinde (harplaryň her bir jübütinde birinji orunda birinji şaýlygyň, ikinji orunda bolsa ikinji şaýlygyň düşen taraplaryny ýazyp) aňlatmak mümkindir. Şeýlelikde, synagyň ähli mümkin bolan netijeleriniň sany 4-e deň bolar. Eger-de bizi gyzyklandyrýan B waka oklanan şaýlyklaryň diňe biriniň ýüz tarapynyň düşmeginden durýan bolsa, onda ol wakanyň ýüze çykmagyna bu netijeleriň diňe iki sanysy, ýagny ($Ý$, A) hem-de (A, $Ý$) ýardam berýärler. Diýmek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä:

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

bolar.

Synagda ýüze çykjagyny öňünden tassyklap bolýan waka **hökmany waka** diýilýär.

Mysal üçin, synag iki sany kubjagazyň oklanmagyndan durýan bolsa, olarda düşen oçkolaryň jeminiň 12-den uly bolmazlygyny aňladýan B waka hökmanydyr. Çünki kubjagazlaryň her birinde düşmegi mümkin oçko 6-dan uly bolup bilmez.

Synagda ýüze çykyp bilmejek waka **mümkin däl waka** diýilýär.

Mysal üçin, ýokardaky mysalda kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 15-e deň bolmagyny aňladýan wakany C bilen belgilesek, ol mümkin däldir. Sebäbi kubjagazlaryň birinjisinde düşen x oçko bilen ikinjisinde düşen y oçkonyň jemi $x + y \leq 12$ bolup, C waka mümkin däldir.

7. Sargyt №1011

Eger-de netijeleri n sany deň mümkinçilikli ýagdaýlar bolan synagda A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriň sany m diýsek, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

bolmalydygy alynýar. $0 \le m \le n$ bolandygyna görä, $0 \le \frac{m}{n} \le 1$ bolup, $0 \le P(A) \le 1$ bolmalydygy hakynda netijä geleris.

Indiki mysallara seredeliň:

1. Mekdepde geçirilýän baýramçylyk çäresinde lotoreýa oýnuna taýýarlanan 100 sany bukjanyň arasynda 20 sanysynyň utuklydygy belli. Aman ilkinji bolup, bukjalaryň üýşmeginden birini alypdyr. Oňa utukly bukjanyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Synag bukjalar üýşmeginden bir bukja almakdan durýar. Bukjanyň içindäki habaryň nähilidigi bilinmeýändigi synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolmaklaryna şert döredýär. Şeýlelikde, Amanyň bukjalaryň islendik birini almagynyň mümkinçiligi synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolup, olaryň sanynyň 100-e deňdigini aňladýar. Amanyň utukly bukjany almagy diýlen A wakanyň ýüze çykmagy Aman utukly 20 sany bukjalaryň birini alanda amala aşar. Diýmek, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän synag netijeleriniň sany 20 bolar. Onda kesgitlemä görä, gözlenilýän ähtimallyk

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,2$$

bolar.

2. Oýnalýan kubjagazlaryň ikisi birbada oklanylýar. Olarda düşen oçkolaryň jeminiň 6-a deň bolmaklygy has ähtimalmy ýa-da 7-ä deň bolmaklygy?

Çözülişi. Kubjagazlar oklananda olaryň birinjisinde düşen islendik $x(1 \le x \le 6)$ oçko degişlilikde, ikinjisinde

$y(1 \leq y \leq 6)$ oçkonyň islendiginiň düşmeginiň mümkindigi, bu synagyň 36 sany deňmümkinçilikli netijeleriniň bardygyny görkezýär. Olar (x, y) görnüşinde $1 \leq x, y \leq 6$ sanlaryň jübütleri ýaly ýazylyp bilinerler. Eger-de A bilen kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 6-a deň bolmaklygyny, B bilen bolsa ol jemiň 7-ä deň bolmaklygyny aňladýan wakalary belgilesek, olaryň

$$A = \{(x, y) : x + y = 6\},$$
$$B = \{(x, y) : x + y = 7\}$$

görnüşde kesgitlenilýän synag netijeleriniň bölek köplükleri ýaly ýazylyp bilinjekdiklerini alarys Şeýlelikde, bu köplükleriň birinjisinde (1, 5); (5, 1); (2, 4); (4, 2), (3, 3), ikinjisinde bolsa (6, 1); (1, 6), (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3) synag netijeleriniň saklanýandyklaryna görä A wakanyň ýüze çykmagyna 5 sany, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 6 sany netijeleriň ýardam berýändiklerini alarys. Bu diýildigi klassyky kesgitlemä görä,

$$P(A) = \frac{5}{36}, \ P(B) = \frac{6}{36}$$

bolýandyklaryny aňladar. Onda $P(A) < P(B)$ bolmak bilen oklanan iki sany kubjagazlarda düşýän oçkolaryň jeminiň 7-ä deň bolmaklygynyň ol jemiň 6-a deň bolmagyndan has ähtimaldygyny aňladýar.

3. Okuwçylara alnyp getirilen 25 sany kitabyň 5-isi öňki neşirden bolup çykdy. Tötän alnan 3 sany kitabyň ählisiniň hem soňky neşirden bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Eger-de A bilen tötän alnan 3 sany kitabyň ählisiniň hem soňky neşirden bolmagyny aňladýan wakany belgilesek, 25 kitapdan 3-üsini tötän almakdan durýan synagyň ähli netijeleri deňmümkinçilikli bolup, olaryň sany C_{25}^3, A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri bolsa C_{20}^3 sany bolar. Çünki A waka diňe we diňe alnan 3 sany kitaplar 20 sany soňky neşiriňkilerden alnanlarynda ýüze çykar. Şeýlelikde, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A) = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} : \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{57}{115}$$

bolýandygy alnar.

4. Zawodyň ýygnaýjy sehinde 30 sany erkek kişi hem-de 50 sany aýal maşgala işleýär. Sanatoriýada dynç almaklary üçin bu sehiň işgärlerine 6 sany ýollanma berlipdir. 80 adama bije atýarlar. Bijesi çykan 6 adamyň laýyk 4-üsiniň erkek kişi bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. A bilen bijesi çykan 6 adamyň laýyk 4-üsiniň erkek kişi bolmagyny aňladýan wakany belgiläliň. Bu mysalda synag 80 adamdan bije atmak bilen 6 adamy saýlamakdyr. 80 adamdan 6 adamyny C_{80}^6 dürli usulda saýlap bolar. Ýöne A waka saýlanan 6 adamynyň 4-üsi 30 sany erkek kişileriň arasyndan alnanda, 2-si bolsa 50 sany aýal maşgalalaryň arasyndan alnanlarynda ýüze çykar. Şeýle saýlamalar sany degişlilikde, C_{30}^4 hem-de C_{50}^2 bolarlar. Ýöne C_{30}^4 sany usuldan erkek kişileriň saýlamalarynyň her birine aýal maşgalalaryň arasyndan 2-sini almagyň C_{50}^2 usulynyň islendiginiň degişli bolmagy mümkindir. Şeýlelikde, synagyň A wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeleriniň sany $C_{30}^2 \cdot C_{50}^2$ bolar. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä,

$$P(A) = \frac{C_{30}^4 \cdot C_{50}^2}{C_{80}^6}.$$

?

1. Ähtimallygyň klassyky kesgitlemesini aýdyň.
2. Tötän wakanyň otnositel ýygylygy diýlip nämä aýdylýar?
3. a) hökmany waka; b) mümkin däl waka diýip nämä düşünýärsiňiz?

Gönükmeler

225. Taýýar önümleriň barlagynda 1500 sany önümleriň arasynda 21 sany talaby kanagatlandyrmaýanlaryny tapypdyrlar. Talaby kanagatlandyrmaýan önümiň gabat gelmeginiň otnositel ýygylygyny tapmaly.

226. Türgenleşikde nyşanany urmagynyň otnositel ýygylygy 0,8 bolan türgeniň ýaryşda atan 30 okunyň näçesiniň nyşana degmegine garaşyp bolar?

227. Oýnalýan kubjagaz oklananda düşen oçkonyň 5-den kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

228. Iki sany oýnalýan kubjagaz oklananda düşen oçkolaryň jeminiň ýönekeý san bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

229. Şaýlyk üç gezek oklanýar. Olaryň ikisinde şaýlygyň ýüzüniň, birinde bolsa arka tarapynyň düşmeginiň ähtimallygyny tapmaly.

230. Seýfiň açylmagy üçin 1, 2, 3, 4, 5, 6 sanlaryň hiç birini gaýtalamazdan, olaryň altysyny hem käbir tertipde saýlap ýazmaly. Sanlaryň tötänden alnan tertipdäki saýlanmagynda seýfiň açylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

231. Gutuda 6 sany gara hem-de 4 sany sary galamlar bar. Tötänden alnan 4 sany galamyň 2-siniň gara, 2-siniň bolsa sary bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

232. Gutuda 5 sany kubjagazlar bolup, olaryň granlarynda *T*, *O*, *Ý*, *L*, *Y* harplaryň biri ýazylan. Ol kubjagazlary garyşdyranlaryndan soň, ýeke-ýekeden tötänden alyp hatara goýanlarynda «TOÝLY» ýazylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

233. Aman 6 sany sandan durýan telefon belgisini saýlap başlanda onuň soňky ikisini ýadyndan çykarandygyny bilip, tötänden iki sany san saýlaýar. Onuň belgini dogry saýlan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

234. Gutudaky 10 sany detallaryň biri şikesli. Tötänden alnan 2 sany detallaryň ikisiniň hem şikessiz bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

§12. Sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny geçmek düzgüni. Garşylykly wakalaryň ähtimallygy

Indiki mysala seredeliň.

Aman bilen Geldi täze ýasalan birmeňzeş ölçegli şarlary reňklemäge girişdiler. Olar 50 sany şaryň 15 sanysyny gyzyl, 20-sini bolsa gök reňk bilen reňkläp ýetişdiler. Şarlaryň ählisini guta salyp, oňat garyşdyranlaryndan soň birini tötän aldylar. Tötän alnan şaryň reňklenen bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Bu ýagdaýda synag – gutudan bir şar almakdyr. Indiki belgilemeleri girizeliň:

A – alnan şaryň gyzyl reňklenen bolmaklygy;

B – alnan şaryň gök reňklenen bolmaklygy;

C – alnan şaryň reňklenen bolmagy (haýsy reňk hem bolsa).

Şol bir şara dürli reňkleriň çalynmaýandygyna görä, A we B wakalar bilelikde ýüze çykyp bilmezler, başgaça aýdanyňda olar **sygyşmaýan wakalardyr.** Şoňa görä-de, C waka A we B wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagydyr. Bu wakalaryň ähtimallyklaryny tapalyň. Synagyň ähli netijeleriniň deňmümkinçilikli bolup, olaryň sanynyň 50-ä deňdigi düşnüklidir. Çünki gutudaky şarlaryň islendiginiň alynmagy mümkindir. Synagyň netijeleriniň arasynda A-nyň ýüze çykmagyna 15, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 20 sanysynyň ýardam berýändiklerine görä,

$$P(A) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad P(B) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4$$

bolmalydyklary alnar. Ikinji bir tarapdan C wakanyň ýüze çykmagyna 50 sany netijeleriň 35-isi ýardam berýärler, onda

$$P(C) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Diýmek, A, B, C wakalaryň ähtimallyklary $P(C) = P(A) + P(B)$ deňlige görä baglanyşyklydyrlar.

Aslynda **sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň düzgüni** diýlip atlandyrylýan indiki düzgün adalatlydyr.

Eger-de C waka A we B sygyşmaýan wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagyndan durýan bolsa, onda C wakanyň ähtimallygy A we B wakalaryň ähtimallyklarynyň jemine deňdir.

1-nji mysal. Hersine 1-den 10-a çenli natural sanlaryň biri ýazylan, 10 sany birmeňzeş ölçegdäki şarlary guta salyp, oňat garyşdyrýarlar. Soňra gutudan tötän bir şar alýarlar. Alnan şaryň ýüzüne ýönekeý san ýa-da 7-den uly san ýazylan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. 1-den 10-a çenli natural sanlaryň arasynda 2, 3, 5, 7 sanlar ýönekeýdir (olaryň ähli natural bölüjileri iki sanydyr: özleri we 1-dir).

Şeýlelikde, A bilen şaryň ýüzüne ýönekeý san ýazylan, B bilen bolsa 8, 9, 10 (7-den uly) sanlaryň biriniň ýazylan bolmaklaryny aňladýan wakalary belgilesek, A we B wakalaryň sygyşmaýandyklaryny göreris: $\{2, 3, 5, 7\}$ hem-de $\{8, 9, 10\}$ san köplükleri umumy elementlere eýe däldirler (kesişmeýärler). Şoňa görä-de, tötän alnan şarda ýazylan san bu köplükleriň ikisine hem degişli bolup bilmez.

C bilen bizi gyzyklandyrýan – alnan şarda ýönekeý ýa-da 7-den uly bolan san ýazylan bolmagyny aňladýan, wakany belgilesek, ol alnan şarda $\{2, 3, 5, 7\} \cup \{8, 9, 10\} = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ san köplüginiň elementleriniň biriniň ýazylan bolmagyny aňladar.

Şeýlelikde, gutudan bir şar almakdan durýan synagyň ähli mümkin bolan netijeleriniň sany 10, olaryň arasynda A-nyň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri 4, B-niň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri 3, C-niň ýüze çykmagyna ýardam berýänleri bolsa 7 sanydyr. Şunlukda, sarlaryň ölçegleriniň birmeňzeş bolup, tötän alynmagy synagyň netijeleriniň deňmümkinçilikli bolmagyny üpjün edýär.

Onda ýokarda getirilen düzgüne görä,

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$$

bolmalydygy alnar. Aslynda ýokarda aýdylanlardan ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä, $P(C) = \frac{7}{10}$ bolmalydygy aýdyňdyr.

Käbir mysallaryň çözülişleri garşylykly wakalaryň ähtimallyklarynyň arasynda bar bolan baglanyşykdan peýdalanmak bilen aňsat alynýarlar.

Garşylykly wakalaryň manysyna düşüneliň. Şaýlyk oklananda mümkin bolan iki netijeleriň biriniň, mysal üçin, ýüz tarapynyň düşmegi ($Ý$ waka) bilen onuň arka tarapynyň düşmegi (A waka) biri beýlekisini inkär edýän wakalar bolup, olar **garşylykly wakalar** diýlip atlandyrylýarlar. Adatça, A wakanyň garşylyklysy $\overline{A}$ görnüşinde belgilenýär. Şunlukda, synagda garşylykly wakalaryň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagynyň hökmany waka bolýandygy düşnüklidir.

Edil şuňa meňzeşlikde, kubjagaz oklananda 5 oçkonyň düşmegi bilen 5 oçkonyň düşmezligi (galan 1, 2, 3, 4, 6 oçkolaryň biriniň düşmegi) diýlen wakalar garşylyklydyrlar: biri beýlekisiniň ýüze çykmagyny inkär edýän wakalar. Bu mysalda hem 5 oçkonyň düşmegi bilen onuň düşmezliginiň haýsy hem bolsa biriniň ýüze çykmagy hökmany wakadyr: oklanan kubjagazda 5 oçko düşer ýa-da ol düşmez.

Diýmek, garşylykly A we $\overline{A}$ wakalar üçin

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

2-nji mysal. Iki sany kubjagaz oklananda olarda düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Bu tanyş mysalda synag-iki sany kubjagazyň oklanmagy. Bu synagyň netijeleri $1 \leq x, y \leq 6$ bolan sanlaryň (x, y) jübütleri görnüşinde aňladylyp, olar deňmümkinçiliklidirler, olaryň ähli mümkin bolanlarynyň sany bolsa 36 : (1, 1); (1, 2); ...; (1, 6); (2, 1); ...(6, 6).

A bilen kubjagazlarda düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmagyny aňladýan wakany belgiläliň. Onda A-nyň garşylyklysy bolan $\overline{A}$ waka, düşen oçkolaryň jeminiň 10-dan kiçi bolmazlygyny $(10 \leq x + y \leq 12)$ aňladar. $\overline{A}$ wakanyň ýüze çykmagyna 36 sany netijeleriň arasynda ýardam berýänleri (4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 6); (6, 5); (6, 4) – alty sanydyr.

Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesine görä,

$$P(\overline{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

alnyp, ýokarda aýdylan düzgüni peýdalanmak bilen gözlenilýän

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ähtimallygy taparys.

Indi baglanyşyksyz wakalar düşünjesini girizeliň.

Kesgitleme. Iki sany wakalaryň biriniň ýüze çykmagyna olaryň beýlekisiniň ýüze çykandygy ýa-da ýüze çykmandygy täsir etmeýän bolsa, ol wakalar baglanyşyksyz diýilýär.

Baglanyşyksyz iki sany wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklarynyň ähtimallygyny hasaplamagy öwreneliň.

Indiki mysala seredeliň.

Iki sany sebetleriň birinde 20 sany şar bolup, olaryň 2-si gyzyl, beýlekisinde bar bolan 30 sany şarlaryň 4-üsi gyzyl reňklenen. Her sebetden tötän bir şar alnan. Olaryň ikisiniň hem gyzyl reňkli şar bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly (Şarlar diňe reňkleri bilen tapawutlanýarlar).

Aşakdaky belgilemeleri girizeliň:

A – birinji sebetden tötän alnan şaryň gyzyl reňkli bolmagyny aňladýan waka;

B – ikinji sebetden tötän alnan şaryň gyzyl reňkli bolmagyny aňladýan waka.

A wakanyň ýüze çykmagyna 20 sany netijeleriň 2-si, B-niň ýüze çykmagyna bolsa 30 sany netijeleriň 4-üsi ýardam berýärler. Şerte görä (şarlar diňe reňkleri bilen tapawutlanýarlar hem-de tötän alynýar) netijeleriň deňmümkinçilikli bolandyklaryna görä, ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden

$$P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \quad P(B) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

bolmalydyklary alnarlar.

Şunlukda, A we B wakalaryň baglanyşyksyzdyklary düşnüklidir. Bu iki wakalaryň bilelikde ýüze çykmagyny aňladýan wakany C bilen belgiläliň. Her sebetden bir şar almakdan durýan synagyň ähli netijeleri deňmümkinçilikli bolup, olaryň sany $20 \cdot 30 = 600$ bolar, çünki birinji sebetden alnan her bir şara (20 şaryň islendigine) ikinji sebetden 30 sany şaryň her biriniň utgaşyp gelmegi mümkindir.

C wakanyň ýüze çykmagyna ýardam berýän netijeler sebetlerden alnan şarlaryň ikisiniň hem gyzyl reňkli bolan ýagdaýlarydyr. Birinji sebetden alynmagy mümkin gyzyl şarlaryň her biri bilen ikinji sebetden alynmagy mümkin gyzyl şarlaryň 4 sany mümkinçiliginiň her biriniň utgaşmagy mümkindir. Şeýlelikde, C wakanyň ýüze çykmagyna 600 sany netijeleriň arasynda $2 \cdot 4 = 8$ sanysy ýardam berýärler. Onda ähtimallygyň klassyky kesgitlemesinden,

$$P(C) = \frac{8}{600} = \frac{1}{75} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{15}$$

bolmalydygy alnar. Bu ýerden

$$P(C) = P(A) \cdot P(B)$$

deňligi alarys.

Şunlukda, indiki düzgün adalatlydyr.

Baglanyşyksyz *A* we *B* wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklary bolan *C* wakanyň ähtimallygy bu *A* we *B* wakalaryň ähtimallyklarynyň köpeltmek hasylyna deňdir.

3-nji mysal. Gutuda 1-den 10-a çenli nomerlenip çykylan birmeňzeş 10 sany şar bar. Gutudan tötän bir şar alnyp, onuň nomerini ýazyp alandan soň ýene guta gaýtaryp, soňra ýene-de gutudan tötän bir şar alyp, onuň hem nomerini ýazyp alýarlar. Iki gezek hem täk nomerli şar alnan bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Goý, A_1 we A_2, degişlilikde, birinji hem-de ikinji gezek tötän alnan şarlaryň täk nomerli bolmaklaryny aňladýan wakalar bolsun. Onda $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, sebäbi 1, 2, 3, ..., 10 natural sanlaryň arasynda jübüt hem-de täk sanlaryň sanlary özara deňdir, ýagny 5 sanydyrlar.

A_2 wakanyň A_1 waka bagly däldigi düşnüklidir, çünki birinji gezek alnan şaryň nomeriniň ikinji gezek tötän alnan şaryň nomerine hiç hili täsiri bolmaz: birinji alnan şar guta gaýtarylandan soň ikinji şar alynýar. Onda A_1 hem-de A_2 wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklaryndan durýan wakany C bilen belgilesek, ýokarda getirilen düzgüne görä

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

bolmak bilen, $P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ bolýandygy alnar.

Ýöne birinji gezek gutudan alnan şar yzyna gaýtarylman gutudan ikinji şary tötän almak bilen alnan şarlaryň ikisiniň hem täk nomerli bolmaklary öwrenilse A_1 we A_2 wakalar baglanyşykly bolup, ýokarda ulanylan düzgünden peýdalanyp bolmaz: A_2 wakanyň ähtimallygy birinji gezek alnan şaryň nomeriniň jübütdigine ýa-da täkdigine bagly bolar.

4-nji mysal. Myhmanhana otagyndaky oturdylan biri beýlekisine baglanyşyksyz iki sany ýangyn duýduryjylaryň ýangyn duýduryş ähtimallyklary degişlilikde, 0,9 we 0,95. Otagdaky dörän ýangynyň duýdurylmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

Çözülişi. Indiki belgilemeleri girizeliň:

$\boldsymbol{A_1}$ – duýduryjylaryň birinjisiniň dörän ýangyny duýdurmagy;

$\boldsymbol{A_2}$ – duýduryjylaryň ikinjisiniň dörän ýangyny duýdurmagy;

$\boldsymbol{C}$ – otagda dörän ýangynyň duýdurylmagy

Bu mysalda A_1 we A_2 baglanyşyksyz wakalardyr, ýöne C waka olaryň ikisiniň bilelikde ýüze çykmagyndan durýan däldir, sebäbi ol A_1 we A_2 wakalaryň hiç bolmanda biriniň ýüze çykmagydyr.

Ýöne $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ we $\overline{C}$ bilen degişlilikde A_1, A_2 we C wakalaryň garşylykly wakalaryny belgilesek, onda $\overline{C}$ wakanyň $\overline{A}_1$ hem-de $\overline{A}_2$ wakalaryň bilelikde ýüze çykmaklaryny aňladýandygy düşnüklidir.

Onda bu ýagdaýda

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1)\, P(\overline{A}_2)$$

bolmak bilen islendik A waka üçin,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

deňligiň adalatlydygyndan

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1,$$

$$P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$$

ähtimallyklary, şoňa görä-de:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}005$$

bolýandygyndan, gözlenilýän

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$$

ähtimallygy taparys.

?

1. Nähili wakalara sygyşmaýan wakalar diýilýär?
2. Sygyşmaýan wakalaryň ähtimallyklaryny goşmagyň düzgünini aýdyň.
3. Nähili wakalara baglanyşyksyz wakalar diýilýär?
4. Baglanyşyksyz wakalaryň ähtimallyklaryny köpeltmek düzgünini düşündiriň.

Gönükmeler

235. Iki tüpeňden zalp bilen bir gezek atylanda nyşana bir okuň degmeginiň ähtimallygy 0,38-e deň. Eger-de tüpeňleriň birinden atylan okuň nyşana degmeginiň ähtimallygy 0,8-e deň bolsa şeýle ähtimallygy ikinji tüpeň üçin tapyň.

236. Nahalhanada ýetişdirilen alma nahallarynyň talabalaýyklygynyň ähtimallygy 0,9-a deň. Üýşmekden tötänden alnan iki nahalyň diňe biriniň talabalaýyk bolmagynyň ähtimallygyny hasaplamaly.

237. Biolaboratoriýada geçirilýän ölçegleriň her birinde nätakyklyk goýberilmeginiň mümkin derejeden aşmagynyň ähtimallygy 0,4-e deň. Geçirilen üç sany baglanyşyksyz ölçegleriň diňe birinde goýberilen nätakyklygyň derejesiniň mümkin hasap edilýäninden ýokary bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

238. Taýýar önümler üýşmeginden haryt öwreniji ýokary hillilerini saýlaýar. Tötän alnan önümiň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygy 0,85-e deň. Barlanylan üç önümiň diňe ikisiniň ýokary hilli bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

239. Käbir enjam biri-birinden baglanyşyksyz işleýän üç sany elementden durýar. Olaryň käbir t wagt dowamynda bozulman işlemeginiň ähtimallyklary degişlilikde 0,7; 0,8 we 0,9 bolsun. Görkezilen t wagt dowamynda enjamyň:

a) diňe bir elementiniň;

b) diňe iki elementiniň;

ç) ähli üç elementiniň

bozulman işlemekleriniň ähtimallyklaryny tapmaly.

240. Ders synagynyň sowalnamalarynyň ählisi 50 bolup, olaryň arasynda 5 sanysy talyplaryň «bagtly» hasap edýänleri. Synaga ilkinji giren üç talybyň ählisine-de «bagtly» sowalnamalardan düşmeginiň ähtimallygyny hasaplaň.

241. Umumy okuwa gatnaşmaly 20 talybyň 10-usy geograf, 5-isi ekolog, 5-isi bolsa meteorolog. Olaryň umumy žurnalyndan üç sany talybyň familiýasyny tötänden alyp, höwesekler aşa köp bolan turistik topara almaşak edilipdir. Olaryň ählisiniň hem geograf bolmaklarynyň ähtimallygyny tapmaly.

242. Talyp maksatnamada öwrenilýän 25 soragyň 20-sini özleşdiripdir. Synagçy mugallymyň beren üç soragyna hem talybyň jogap bermeginiň ähtimallygyny tapmaly.

243. Talyp käbir kitaby gözläp kitaphanalaryň üçüsine aýlanyp çykmakçy bolýar. Her bir kitaphana üçin gözlenilýän kitabyň onuň fondunda bar bolmagy hem, bolmazlygy hem deň ähtimallykly. Kitap bar bolaýanda-da onuň okyjynyň elinde bolmaklygy we bolmazlygy deňähtimallykly wakalar diýip hasap edip, kitaphanalar biri-birinden baglanyşyksyzlykda kitap bilen üpjün edilýän ýagdaýynda talybyň kitaby tapmaklygy ähtimalmy ýa-da tapmazlygy diýlen sowala jogap beriň.

244. Aslynda ogul dogulmagynyň ähtimallygynyň ≈0,51 bolup, doglan ekiz çagalaryň birjynsly bolmaklarynyň ähtimallygynyň bolsa ≈0,64 bolýandygy gözegçiliklerde kesgitlenipdir. Ekiz doglanlaryň birinjisiniň oguldygy belli bolanda, ikinjisiniň hem ogul bolmagynyň ähtimallygyny tapmaly.

§13. Statistiki häsiýetlendirijiler

1. Orta arifmetiki, gerim we moda

Okuwçylaryň öý işini ýerine ýetirmäge sarp edýän wagtlaryny öwrenmek üçin, olardan düýnki gün algebradan öýe berlen ýumuş üçin sarp eden wagtlaryny özlerine belläp almaklaryny sargamak bilen minutlarda 30, 21, 27, 28, 31, 29, 25, 28, 22, 24, 26, 27, 20, 31, 24, 25, 23, 22, 30, 27 san görkezijileri alnan.

Bu san hatary arkaly okuwçylaryň berlen ýumşy ýerine ýetirmek üçin ortaça näçe minut sarp edendiklerini kesgitläp bileris. Şonuň üçin, ol sanlaryň jemini okuwçylaryň sanyna böleris:

$$(30 + 21 + 27 + 28 + 31 + 29 + 25 + 28 + 22 +$$
$$+ 24 + 26 + 27 + 20 + 31 + 24 + 25 + 23 + 22 + 30 + 27) :$$
$$: 20 = 520 : 20 = 26.$$

26 sana okuwçylardan alnan wagt görkezijileriniň hatarynyň **orta arifmetigi** diýilýär.

Kesgitleme. Sanlar hatarynyň orta arifmetigi diýlip, ol sanlaryň jeminiň goşulyjylaryň sanyna bolan paýa aýdylýar.

Şeýlelikde, başga dersler boýunça hem gözegçilikler geçirmek bilen okuwçylaryň öýe berlen ýumuşlary ýerine ýetirmäge ortaça sarp edýän wagtlaryny tapyp bileris. Şeýle hem, öýe berlen ýumuşlary ýerine ýetirmek üçin sarp edilýän wagtlaryny dürli dersler boýunça deňeşdirip hem bolar. Şunlukda, orta arifmetigiň diňe birjynsly ululyklar üçin tapylýandygy düşnüklidir. Mysal üçin, daýhan birleşiginiň pagtadan gektara düşýän ortaça hasyllylygy bütin hojalygy häsiýetlendirjek umumy görkeziji bolup hyzmat edip bilmez. Kähalatlarda birjynsly ululyklar üçin hem orta arifmetigi hasaplamagyň manysyz pişe bolýandygyny bellemek gerek.

Mysal üçin, hassahanadaky näsaglaryň temperaturalarynyň orta arifmetigini hasaplamagyň hajaty ýokdur: manysyz pişedir.

Ýöne ýokarda seredilen mysalda okuwçylaryň şol gezek öýe berlen ýumşa ortaça 26 minut sarp edendikleri alnan hem bolsa, görkezijiler olaryň käbiriniň bu ortaça wagtdan ýoluk tapawutlanýan wagt sarp edendigini görkezýär. Okuwçylaryň iň az sarp edeni 20 minut, iň köp sarp edeni bolsa 31 minut bolup, iň köp we iň az sarp edilen wagtlaryň tapawudy 31 – 20 = 11 minut bolýar. Bu ýagdaýda hatar **gerimi** 11-e deň diýilýär. Görşümiz ýaly, **gerim görkezijiler hataryndaky seçelenişi aňladýar.** Eger-de howanyň temperaturasy sutkanyň dowamynda her sagatda ölçelýän bolsa, alnan görkezijiler hataryny onuň orta arifmetigi (sutkadaky ortaça temperatura) bilen birlikde, ähmiýeti onuňkydan pes bolmadyk, hataryň gerimi (howa temperaturasynyň sutkanyň dowamyndaky iň uly üýtgemesi) hem häsiýetlendirýändir.

Okuwçylaryň öýe ýumuş üçin sarp eden wagtlaryny seljermek bilen hataryň orta arifmetigi hem-de geriminden başga-da häsiýetlendirijileriň bardygyny göreris. Mysal üçin, okuwçylaryň köpsanlysyna mahsus bolan sarp edilen wagt, ýagny görkezijiler hataryndaky iň köp gaýtalanýan san üns berilmegine mynasypdyr. Garalan mysalda, şeýle (görkezijiler hatarynda iň köp gaýtalanýan) san 27 bolup, bu ýagdaýda ol 27 sana garalýan hataryň modasy diýlip aýdylýar.

Kesgitleme. Hataryň modasy diýlip, onuň iň köp gaýtalanýan sanyna aýdýarlar.

Ýöne sanlar hatarynyň birden köp modasynyň bolmagy, şeýle hem, onuň asla bolmazlygy hem mümkindir.

Mysal üçin, 17, 21, 19, 23, 27, 31, 17, 23, 16, 24, 22, 15 hatarda iki sany moda bardyr: 17 we 23, sebäbi olar hatarda iki gezek gaýtalanýarlar, galan sanlar bolsa diňe bir gezekden gelýärler.

29, 28, 23, 25, 27, 31, 24, 26, 30, 22 hatarda bolsa, moda ýokdur: hataryň ähli sanlary diňe bir gezekden gelýärler.

Adatça, gözegçilikleriň mahsus aýratynlygy bilen gyzyklananlarynda hataryň modasyny tapmaklyga çalyşýarlar. Mysal üçin, dükana ammardan haýsy ölçegdäki köwşi näçe mukdarda alyp gelmelidigini kesgitlemekçi bolanlarynda, öňki söwda günlerindäki iň köp talap bildirilen ölçegden, ýagny ölçeglere görä modadan ugur alýarlar. Bölekleýin satuwa çykaryljak azyk önümleri näçeräk bölekläp gaplamalydygyny kesgitlemekçi bolanlarynda hem alyjylaryň ol ýa-da beýleki önüme isleginden ugur alýarlar. Bu ýagdaýda hem moda iň bir ýaramly görkeziji bolup hyzmat edýär.

Indiki mysala seredeliň. Goýun sürüsiniň gyrkymyna gelen kömekçileriň günüň dowamynda gyrkan goýunlarynyň sanynyň hasabaty

$$41, 40, 40, 41, 42, 42, 41, 42, 43, 41, 41, 41, 44,$$
$$44, 42, 44, 43, 43, 41, 44, 41$$

görkezijilerden durýar. Bu görkezijiler hatarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapalyň.

Munuň üçin alnan hataryň agzalaryny kemelmeýän tertipde täzeden tertipleşdirip ýazalyň. Onda

$$40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42,$$
$$42, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44$$

hatary alarys. Şeýlelikde, başdaky hataryň orta arifmetigi

$$\frac{40 \cdot 2 + 41 \cdot 8 + 42 \cdot 4 + 43 \cdot 3 + 44 \cdot 4}{21} = \frac{881}{21} \approx 42$$

bolar. Hataryň geriminiň $44 - 40 = 4$ bolup, onuň modasynyň 41 bolýandygy alnar.

Şeýlelikde, kömekçileriň şol günüň dowamynda gyrkan goýunlarynyň ortaça sanynyň 42, olaryň gyrkan goýunlarynyň sanynyň biri-biriniňkiden tapawudynyň 4-den köp däldigi, gyrkan goýunlarynyň olara mahsus bolan sanynyň bolsa 41 bolýandygyny alarys.

Şunlukda, hataryň orta arifmetigininiň onuň hiç bir sany bilen gabat gelmezligininiň mümkindigini, onuň modasynyň bolsa, ol bar bolan halatynda, hataryň ikiden az bolmadyk gaýtalanýan sany bilen gabat gelmelidigini alarys. Şeýle hem, orta arifmetikden tapawutlylykda moda düşünjesininiň **sandan tapawutly** görkezijilere hem degişli bolmagy mümkindir. Mysal üçin, okuwçylardan telewizion ýaýlymlaryň haýsy birini has gyzykly hasap edýändikleri hakynda pikir öwrenmek geçirilen diýip hasap etsek, olaryň jogaplarynyň arasynda iň köp gaýtalanýany moda bolup hyzmat edýär.

Ýokarda getirilen orta arifmetiki , gerim hem-de moda häsiýetlendirijilerininiň tebigatda we jemgyýetde bolup geçýän dürli köpçülikleýin hadysalaryň mukdar görkezijilerini almak we olary seljermek hem-de derňemek bilen meşgullanýan **statistika** diýlip atlandyrylýan ylymda ulanylyşlara eýediklerini belläp geçeliň. Aslynda, statistika diýlen söz «zatlaryň (barlyklaryň) ýagdaýy, haly» diýlenini aňladýan **status** diýlen latyn sözünden gelip çykandyr. Statistiki derňewleriň hem-de seljerilmeleriň netijelerinden amaly hem-de ylmy maksatlar üçin ýygy-ýygydan peýdalanýarlar.

?
1. Sanlar hatarynyň orta arifmetigi diýlip nämä aýdylýar?
2. Sanlar hatarynyň gerimi diýlip nämä aýdylýar?
3. Sanlar hatarynyň modasy diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

245. a) 31, 24, 36, 30, 29, 28;
b) 41, 39, 36, 37, 42, 38;
ç) 51, 49, 48, 50, 53, 51, 52;

d) 39, 38, 43, 41, 42, 40, 39, 44

san hatarlarynyň orta arifmetigini hem-de gerimini tapyň.

246. a) 21, 19, 22, 21, 23, 20;

b) 31, 33, 31, 32, 36, 35;

ç) 29, 30, 28, 27, 28;

d) 61, 59, 59, 58, 57, 59, 67

san hatarlarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapyň.

247. On sany sanlardan durýan hataryň orta arifmetigi 12. Bu hatara 23 sany hem goşup ýazansoňlar alnan hataryň orta arifmetigi näçe bolar?

248. 3, 9, 6, 5, 11, 7, 12, 10, 8, 13, –, 4, 7, 2, 6 hataryň sanlarynyň biri bozulypdyr. Eger-de hataryň orta arifmetigi 8 bolsa bozulan san näçe bolar?

249. 9, 7, 11, 15, 12, –, 14, 21 hataryň sanlarynyň biri bozulypdyr. Eger-de hataryň gerimi 18 bolsa bozulan sany tapyp bolarmy, tapmak mümkin bolsa, ol näçä deň?

250. Sanlarynyň biri bozulan 8, 5, 7, 9, 11, 14, –, 12, 16, 17 hataryň modasy 9 bolanda, şol bozulan sany tapyp bolarmy?

251. 5, 6, 3, 5, 6, 4, 8, 6, 6, 7, 9, 7 hataryň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapyň.

252. 12 sany ýaryşa gatnaşyjylaryň her biri nyşana on ok atýarlar. Olaryň nyşanany urmaklarynyň sanlary 5, 6, 3, 4, 6, 5, 6, 8, 6, 7, 9, 7 hatary düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini, gerimini we modasyny tapmaly.

253. Maý aýynyň ilkinji on günlüginde howanyň günortanky temperaturasy graduslarda indiki sanlar bilen berilýär: 18, 18, 19, 21, 22, 22, 24, 27, 22, 24. Bu sanlar hatarynyň gerimini we modasyny tapyň.

254. 6 sany slesardan durýan toparyň agzalarynyň çalşykda ýasan detallarynyň sanlary 22, 17, 18, 23, 24, 16 hatary düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini hem-de gerimini tapyň.

2. Görkezijiler hatarynyň medianasy

Indiki tablisada suratkeşleriň işleriniň on günlik sergisine ilkinji dokuz günde gatnaşanlaryň sanlary getirilen

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gatnaşanlaryň sanlary	710	720	719	805	788	817	809	798	763

Tablisadaky getirilen görkezijilerden, olary artýan tertipde ýerleşdirmek bilen

710, 719, 720, 763, **788**, 798, 805, 809, 817

hatary düzeliň. Bu hatarda dokuz sany sanlar bolup, hataryň ortasynda 788 san ýerleşendir, ýagny hatarda 788-den çepde hem, sagda hem dört sany sanlar gelipdirler. Bu ýagdaýda 788 hataryň ortalyk sany ýa-da hataryň **medianasy** («ortalyk» sözüni aňladýan latynça **mediana** sözünden). Şol 788 san başda alnan görkezijiler hatarynyň hem medianasy hasaplanýandyr.

Eger-de serginiň onunjy gününiň görkezijisini hem goşup, ähli on günüň görkezijileriniň tablisasyny

Günler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gatnaşanlaryň sanlary	710	720	719	805	788	817	809	798	763	812

getirmek bilen, ýokardaka meňzeşlikde görkezijilerden tertipleşdirilen hatary düzeliň:

710, 719, 720, 763, **788**, **798**, 805, 809, 812, 817.

Bu hataryň sanlarynyň sany jübüt bolandygyna görä, onuň ortalyk sanlary iki sanydyr: 788 we 798 sanlar. Olaryň orta arifmetigi

$$\frac{788+798}{2}=\frac{1586}{2}=793$$

793 san hatarda saklanmaýar, ýöne ol hatary deň sanlardan durýan iki bölege bölýär: 793-den çepde hem-de sagda bäş sany sanlar bar:

710, 719, 720, 763, 788, **793**, 798, 805, 809, 812, 817.

Bu ýagdaýda, 793 san görkezijileriň berlen hatarynyň medianasydyr.

Kesgitleme. **Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany täk bolanda hataryň ortasyndaky san, eger-de ol sanlar jübüt sany bolsalar hataryň ortasyndaky iki sany sanlaryň orta arifmetigi tertipleşdirilen hataryň medianasy diýlip aýdylýar.**

Kesgitleme. **Sanlar hatarynyň islendiginiň medianasy diýlip, oňa degişli bolan tertipleşdirilen hataryň medianasyna aýdýarlar.**

Indiki mysal medianany̆ň ähmiýetli artykmaçlyga eýedigini görkezýär. Edaranyň 34 sany işgärleri käbir aksioner jemgyýetiniň aksiýalaryny edinipdirler. Işgärleriň edinen aksiýalarynyň sanlary aşakdaky tertipleşdirilen hatary emele getirýärler:

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \underbrace{3, 3, \ldots, 3,}_{12\ gezek}\ \underbrace{4, 4, \ldots 4}_{16\ gezek}\ 100.$$

Bu hataryň sanlarynyň sany 34 bolup, hataryň medianasy 17-nji we 18-nji sanlaryň orta arifmetigine, ýagny $\frac{3+4}{2}=3,5$-e deňdir.

Bu hataryň orta arifmetigi bolsa, takmynan, 6,2 bolar. Bu diýildigi edaranyň işgärleriniň ortaça 6 sany aksiýa edinendiklerini aňladýar. Ýöne görkezijiler hataryndan 34 sany işgäriň birinden galanlarynyň 4-den köp bolmadyk aksiýalary edinendiklerini hasaba almak bilen, bu ýagdaýda medianany̆ň has gowy häsiýetlendiriji bolýandygy hakynda netijä geleris.

Orta arifmetiki, moda hem-de mediana ululyklary gözegçilik netijesinde alnan görkezijileri dürlüçe häsiýetlendirýärler. Şoňa görä-de, alnan görkezijileri derňemekçi bolanlarynda bu häsiýetlendirijileriň ählisini ýa-da olaryň käbirlerini peýdalanýarlar.

?
1. Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany täk bolanda tertipleşdirilen hataryň medianasy diýlip nämä aýdylýar?
2. Sanlaryň tertipleşdirilen hataryndaky sanlaryň sany jübüt bolanda tertipleşdirilen hataryň medianasy diýlip nämä aýdylýar?
3. Sanlar hatarynyň islendiginiň medianasy diýlip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

255. Indiki san hatarlarynyň medianasyny tapmaly:

a) 201, 205, 269, 273, 219, 282, 243, 256, 289;
b) 147, 221, 129, 322, 183, 192, 176, 191, 201;
ç) 74, 102, 134, 131, 129, 117, 169, 81, 97.

256. Indiki san hatarlarynyň orta arifmetigini we medianasyny tapmaly:

a) 34, 31, 21, 23, 27, 29;
b) 64, 56, 58, 74, 62, 66;
ç) 5,6, 4,9, 5,2, 4,3, 4,8, 3,8.

257. Aşakdaky tablisa bilen 10 sany öýüň ýaşaýjylarynyň bir aýyň dowamynda harçlan elektrik energiýalary berlen

Öý nomerleri	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Harçlanan elektrik energiýasy (*kWt/sag* hasabynda)	93	84	72	75	72	78	82	89	90	67

Görkezijiler hatarynyň gerimini, modasyny hem-de medianasyny tapmaly.

258. «Tiz kömek» stansiýasyna dekabr aýynyň ilkinji on gününde gelen çakylyklaryň sanynyň görkezijileri

27, 31, 24, 22, 26, 23, 27, 20, 22, 28

sanlar hataryny düzýärler. Bu hataryň orta arifmetigini, gerimini, modasyny hem-de medianasyny tapyň.

259. Welaýatyň pagta arassalaýjy zawodlarynda bir günde işlenilen pagtanyň mukdarlary tonna hasabynda indiki sanlar hataryny düzýärler:

231, 243, 172, 184, 202, 138, 281, 191, 198.

Hataryň gerimini, orta arifmetigini tapyň.

§14. Statistiki derňewler

1. Statistiki görkezijileri ýygnamak we aýyl-saýyl etmek

Dürli jemgyýetçilik hem-de durmuşy ykdysady meselelerini, şeýle hem bolup geçýän käbir tebigy prosesleri öwrenmek maksady bilen ýörite statistiki derňewler geçirilýär. Her bir statistiki derňew öwrenilýän hadysa ýa-da proses hakynda maksadalaýyk görkezijileri, maglumatlary ýygnamakdan başlanýar. Işiň şu bölegi **statistiki gözegçilik basgançagy** diýlip atlandyrylýar.

Statistiki gözegçilik netijesinde alnan görkezijileri umumylaşdyrmak hem-de tertipleşdirmek maksady bilen ilki olary, käbir nyşana görä, aýyl-saýyl edip böleklere bölýärler.

Indiki mysala garalyň. 8-nji synp okuwçylarynyň matematika dersini özleşdirişlerini kesgitlemek maksady bilen 7 sany ýumuşdan durýan test düzüpdirler. Okuwçylaryň ýerine ýetiren işlerini barlamak üçin, mugallym bar bolan 25 okuwçynyň her biriniň dogry jogaplarynyň sanyny anyklapdyr. Netijede, sanlaryň

$$4, 5, 6, 4, 3, 5, 7, 5, 1, 0, 4, 5, 6, 7, 5, 4, 2,$$
$$4, 3, 1, 3, 5, 4, 7, 6$$

hatary alnan. Bu hatary derňemek üçin, onuň sanlaryny kemelmeýän görnüşde ýerleşdirmek bilen, tertipleşdireliň:

$$0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5,$$
$$5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7.$$

Alnan bu görkezijileri ýokarky setirinde dogry jogaplaryň sanlaryny, aşaky setirinde bolsa, ol sanlaryň hatardaky **ýygylyklaryny**, ýagny gaýtalanyşlaryny ýazmak bilen iki sany setirleri bolan indiki tablisa görnüşinde aňladalyň:

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	1	2	1	3	6	6	3	3

Şeýle usulda alynýan tablisa **ýygylyklar tablisasy** diýlip atlandyrylýar.

Bu mysaldaky ýygylyklar tablisasynyň aşaky setirindäki ýygylyklaryň jemi 25-e, ýagny barlanylan işleriň sanyna deňdir.

Aslynda, gözegçilik netijeleri ýygylyklar tablisasy görnüşinde aňladylanda, ýygylyklaryň jemi görkezijileriň sanyna deň bolmalydyr.

Statistiki derňew geçirilende görkezijiler ýygnalyp, olar aýyl-saýyl edilenden soň, olary umumylaşdyryjy görkezijileri öwrenmeklige başlaýarlar. Şunlukda, orta arifmetiki ululyk, moda, mediana, gerim ýaly statistiki häsiýetlendirijiler şeýle görkezijileriň ýönekeýleridir.

Ýokardaky mysaldaky gözegçiligiň netijelerini öwreneliň. Orta arifmetigi tapmak üçin dogry jogaplaryň umumy sanyny okuwçylaryň sanyna, ýagny 25-e böleris:

$$\frac{0\cdot1+1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3+4\cdot6+5\cdot6+6\cdot3+7\cdot3}{25}=$$

$$=\frac{106}{25}=4{,}24.$$

Diýmek, okuwçylar ortaça 4,24 sany ýumuşlara dogry jogap beripdirler. Bu diýildigi, olaryň ortaça ýumuşlaryň 0,6 bölegine dogry jogap berendiklerini görkezýär.

Okuwçylaryň arasynda ýumuşlaryň ählisine (7-sine-de) dogry jogap berenleri-de, birine-de dogry jogap bermänleri-de bar. Onda 7 – 0 = 7 bolup, görkezijiler hatarynyň gerimi 7-ä deňdir. Şeýlelikde, berlen dogry jogaplaryň iň uly we iň kiçi sanlarynyň tapawudy 7 bolup, ol kiçi däl, uludyr. Şeýle-de tablisadan görnüşi ýaly, dogry jogaplaryň sanlarynyň arasynda 4 we 5 sanlar köp gabat gelýärler. Şoňa görä-de, hataryň modasy ikidir: 4 we 5 sanlar, olaryň her biri hatarda 6 gezek gelýär.

Hatarda 25 sany sanlar bolandygyna görä, onuň medianasy degişli tertipleşdirilen hataryň 13-nji sanydyr: ol 4 bolar.

Kähalatlarda ýokarda getirilen ýygylyklar tablisasyndan tapawutlylykda **otnositel ýygylyklar tablisasy** diýilýän tablisadan hem gözegçilik netijelerini derňemäge peýdalanýarlar. Ol ýygylyklar tablisasyndan diňe aşaky setirinde ýygylyklary ýazman, olaryň ornuna görkezijileriň ýygylyklarynyň görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşyklarynyň ýazylmagy bilen tapawutlanýandyr. Şol prosentlerde aňladylýan gatnaşyklar bolsa, **otnositel ýygylyklar** diýlip atlandyrylýar.

Biziň ýokardaky mysalymyzda görkezijileriň umumy sany 25 bolar: 25 okuwçynyň her biri üçin testi ýerine ýetirişi barada bir görkeziji alynýar.

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Otnositel ýygylyk, %	4	8	4	12	24	24	12	12

Tablisanyň aşaky setirindäki otnositel ýygylyklaryň jeminiň 100 % bolmalydygy düşnüklidir.

Eger-de hatar gaýtalanyşlary seýrek bolan köpsanly görkezijilerden durýan bolsa, onda ýygylyklar tablisasy, şonuň ýaly-da otnositel ýygylyklar tablisasy tagaşyksyz uly bolýar. Şeýle ýagdaýlarda gözegçilik netijesiniň derňewi üçin **interwallar hataryny** guryarlar. Munuň üçin hataryň iň uly we iň kiçi bahalarynyň arasyndaky tapawudy birnäçe deň böleklere bölýärler we alnan ululygy tegelekläp, interwalyň uzynlygyny tapýarlar. Birinji interwalyň başlangyjy deregine iň kiçi görkeziji ýa-da ondan uly bolmadyk iň ýakyn bitin sany alýarlar. Her bir interwala düşýän görkezijileriň sanyny ýa-da olaryň prosentlerde aňladylýan görkezijileriň umumy sanyna bolan gatnaşygyny görkezýärler. Şunlukda, her bir interwalyň çägi indiki interwala degişli diýip hasap edilýär: interwalyň çäklerini görkezýän sanlaryň birinjisi şol interwala degişli, ikinjisi bolsa indiki interwala degişlidir.

Indiki mysala seredeliň. Alnan 100 sany elektrolampalarynyň sagatlarda hasaplanan iş dowamlyklaryny öwrenmekçi bolup, hasabat ýöredipdirler. Bu gözegçiligiň netijeleri aşaky tablisany beripdir.

Iş dowamlylygy, sagat	Ýygylygy
100 sagatdan az	3
100–200	8
200–300	8
300–400	10
400–500	10

500–600	11
600–700	15
700–800	13
800–900	11
900–1000	7
1000–1100	3
1100–1200	1

Elektrolampalaryň ortaça iş dowamlylygyny tapmak üçin, bu tablisanyň her bir interwalyny onuň orta nokady bilen çalşyryp, aşakdaky ýygylyklar tablisasyny düzýäris:

Iş dowamlylygy, sagat	Ýygylygy
50	3
150	8
250	8
350	10
450	10
550	11
650	15
750	13
850	11
950	7
1050	3
1150	1

Alnan bu hataryň orta arifmetigi

$$(50 \cdot 3 + 150 \cdot 8 + 250 \cdot 8 + 350 \cdot 10 + 450 \cdot 10 +$$
$$+ 550 \cdot 11 + 650 \cdot 15 + 750 \cdot 13 + 850 \cdot 11 + 950 \cdot 7 +$$
$$+ 1050 \cdot 3 + 1150 \cdot 1) : 100 = (150 + 1200 + 2000 +$$
$$+ 3500 + 4500 + 6050 + 9750 + 9750 + 9350 + 6650 +$$
$$+ 3150 + 1150) : 100 = 57200 : 100 = 572.$$

Şeýlelikde, biz elektrolampalaryň ortaça iş dowamlylygynyň 572 sagat bolmagy hakynda netije alarys.

Ýokarda seredilen mysallaryň ilkinjisinde 25 sany 8-nji synp okuwçylarynyň matematika dersinden taýýarlyklaryny barlamak üçin test ýumuşlaryny ýerine ýetirişleri öwrenilipdi. Şol barlag bir mekdebiň ýa-da bütin, şäheriň mekdepleriniň 8-nji synp okuwçylarynyň ählisi üçin hem geçirilmegi mümkindir. Ýöne köpçülikleýin derňewleriň islendiginiň, bellibir derejede, uly çykdajylary hem-de guramaçylyk bilen baglanyşykly meseleleriň çözülmeklerini talap edýändigi bellidir. Mysal üçin, ilat ýazuwy, pasport çalyşmak we başga-da ş.m. dürli resminamalary taýýarlamak ýaly meseleler çözülmeklerini talap edýärler. Şeýle ýagdaýlarda uçdantutma derňewi geçirmegiň agyr düşýändigini göz öňünde tutmak bilen **saýlama** derňewi geçirýärler. Saýlama derňewinde öwrenilýän **baş toplum** diýlip atlandyrylýan ähli görkezijiler toplumyndan onuň **saýlama toplumy** diýilýän käbir bölegi saýlanylýar hem-de öwrenilýär. Şunlukda, saýlama toplumy öwrenilýän baş toplumyna häsiýetli aýratynlyklaryň ählisini özünde saklaýan bolmalydyr. Şeýle häsiýetli saýlama toplumyna **reprezentatiw** ýa-da **wekilçilikli** diýlip aýdylýar.

Ýigrimi bäş müň sany saýlawçylary bolan okrugda üç sany bäsdeşiň saýlawda haýsy biriniň ýeňmekliginiň mümkingadarlygyny barlamakçy bolup müň sany saýlawçylardan kime ses bermekçidikleri hakynda pikir sorama geçirilýän bolsun. Şunlukda, saýlanyp alnan müň sany saýlawçylar toplumy reprezentatiw bolmalydyr: olaryň arasynda ýaşlar, ýaşulular, erkekler, aýallar, pensionerler hem, dürli durmuşy şertleri we bilimleri bolan adamlar bolmalydyrlar. Tersine, statistiki derňewiň nädogry netijelere alyp gelmegi mümkindir.

Şeýle-de, uçdantutma derňewiň öwrenilýän obýektleri zaýalaýan ýa-da olaryň ýok bolmagyna alyp gelýän ýagdaýlarynda hem saýlama derňewinden peýdalanýarlar. Mysal üçin, zawodyň öndüren ähli elektrolampalarynyň bozulman işlemekleriniň dowamlylyklary öwrenilmekçi bolsa, elektrolampalary uçdantutma öwrenmek mümkin däldir, sebäbi şeýle jähtden iş tutmak olaryň ählisiniň zaýalanmagyna alyp geler: olary tä köýýänçä ýakmaly bolar.

?
1. Otnositel ýygylyklar diýip nämä düşünýärsiňiz?
2. Interwallar hatary nähili guralýar?

Gönükmeler

260. Şäheriň ähli mekdepleriniň 9-njy synp okuwçylaryna algebradan barlag işli hökmünde 7 sany ýumuşlardan durýan test hödürlenipdir. Şäher Bilim müdirligi barlag işiniň jemi boýunça dogry jogaplaryň hem-de olaryň eýeleriniň sanlary boýunça indiki tablisany alypdyr.

Dogry jogaplaryň sany	Okuwçylaryň sany
0	0
1	19
2	21
3	73
4	137
5	321
6	229
7	102

Bu tablisa görä, 1 % takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

261. Tokarlaryň bäşisi hem çalşyk dowamynda şol bir detaly taýýarlapdyrlar. Olaryň ýasan detallarynyň sany boýunça indiki tablisa alnypdyr.

Tokarlar	1	2	3	4	5
Ýasalan detallaryň sany	13	22	18	24	25

Bu tablisa görä, 1% takyklygynda kesgitlenen otnositel ýygylyklaryň tablisasyny düzmeli.

262. 50 sany okuwçylaryň türkmen dilinden ýazan işlerini barlamak arkaly olaryň işlerinde bar bolan orfografiki ýalňyşlary hasaba almak bilen alnan maglumatlary ýygylyklaryň indiki tablisasy görnüşinde aňladypdyrlar:

Ýalňyşlar sany	0	1	2	3	4	5	6	7
Ýygylygy	3	4	11	13	9	6	2	2

Goýberilen ýalňyşlaryň sanlarynyň iň uly tapawudy näçe? Bu okuwçylar üçin ýalňyşlar sanynyň haýsysy mahsus? Bu sowallara jogap bermek üçin statistiki häsiýetlendirijileriň haýsylaryny peýdalanandygyňyzy aýdyň.

263. Telekeçi hödürlenen önümiň hilini kesgitlemekçi bolup, olaryň üýşmeginden 100 sany gutyny alyp, olaryň her biriniň içindäki zaýa önümleriň sanyny hasaba almak bilen indiki tablisany doldurypdyr:

Zaýa önümler sany	0	1	2	3	4	5	6
Gutularyň sany	15	29	27	19	7	2	1

Görkezijiler hatarynyň orta arifmetigini, gerimini hem-de modasyny tapmaly. Bu statistiki häsiýetlendirijileriň amaly manylaryny düşündiriň.

264. Turistik syýahata gatnaşýanlary ýaşlary boýunça häsiýetlendirmek bilen indiki tablisa düzülen (ýaş interwallarynyň her bir çägi özünden soň gelýän interwala degişlidir)

Ýaşy, ýyl hasabynda	18–22	22–26	26–30	30–34	34–38
Syýahatçylar sany	45	37	10	6	2

Her bir interwaly ony ýarpa bölýän nokady bilen çalşyryp, syýahatçylaryň orta ýaşyny tapmaly.

2. Statistiki maglumatlary suratlandyrmak

Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileri suratlandyrmak üçin olary şekillendirmäniň dürli usullary giňden ulanylýar.

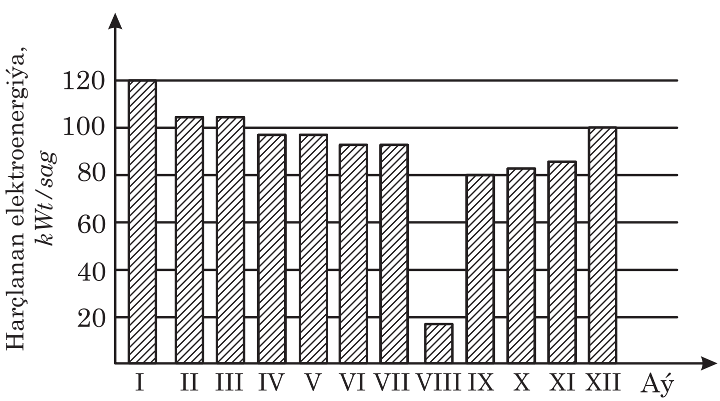
Görkezijiler hataryny suratlandyrmagyň belli usullarynyň biri hem sütünlerdäki diagrammany gurmakdyr.

Görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini ýa-da statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny şekillendirmekçi bolanlarynda sütünlerdäki diagrammadan peýdalanýarlar.

Mysal üçin, maşgalanyň ýylyň dowamynda harç eden elektroenergiýasy, 5 *kWt/sag* takyklygynda, indiki tablisa bilen berlen bolsun.

Aý	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Harçlanan elektroenergiýa, *kWt/sag*	120	105	105	90	90	85	85	15	80	90	95	100

Bu tablisa degişli sütünlerdäki diagramma 12 sany gönüburçluklardan durmak bilen, olar erkin saýlanan, birmeňzeş esasly bolup biri-birinden deňdaşlykda ýerleşendirler (*22-nji surat*). Şunlukda, her bir gönüburçlugyň beýikligi, saýlanan masştaba görä, berlen aýdaky harçlanan elektroenergiýanyň mukdaryna deňdir. Şeýlelikde, aşakdaky şekile eýe bolarys:



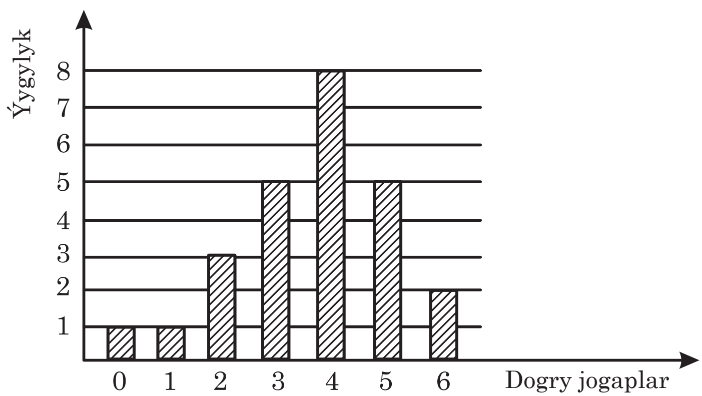
22-nji surat

Eger-de statistiki derňewde alnan görkezijileriň birmeňzeşlerini toplaşdyrmak bilen aýyl-saýyl edilip, her toparyň degişli ýygylygy (otnositel ýygylygy) anyklanan bolsa, onda her bir topar sütünlerdäki diagrammada beýikligi, saýlanan masştaba görä, degişli ýygylyga (otnositel ýygylyga) deň bolan gönüburçluk ýaly şekillendirilýär.

Goý, 8-nji synpyň 25 sany okuwçysynyň 6 sany ýumuşlardan durýan test boýunça barlag işleriniň netijeleri indiki tablisa görnüşinde aňladylan bolsun (*23-nji surat*).

Dogry jogaplaryň sany	0	1	2	3	4	5	6
Ýygylygy	1	1	3	5	8	5	2

Degişli sütünlerdäki diagramma her sütüniň beýikligi, saýlanan masştaba görä, görkezijiler hataryndaky dogry jogaplaryň berlen sanynyň gaýtalanyş ýygylygyna deň bolup, aşakdaky ýaly aňladylar:

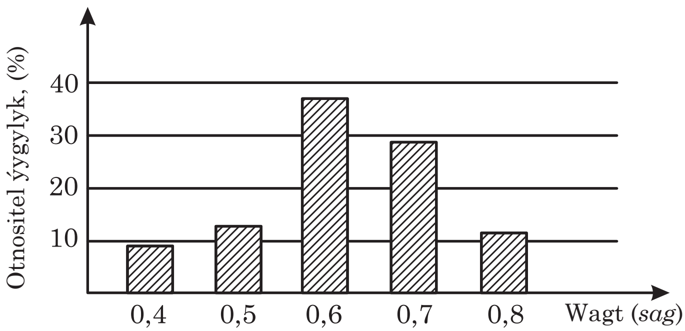


23-nji surat

Krossa gatnaşýan ylgaýjylaryň aralygy geçen wagtlaryna görä, 0,1 *sag* takyklygynda, otnositel ýygylyklaryň indiki tablisasy alnan:

Wagt (*sag*)	Otnositel ýygylyk, (%)
0,4	9
0,5	14
0,6	37
0,7	29
0,8	11

Bu tablisa degişli bolan sütünlerdäki diagramma indiki şekile eýe bolar (*24-nji surat*):



24-nji surat

Öwrenilýän görkezijileriň köplüginiň toparlarynyň arasyndaky gatnaşyklary suratlandyrmak üçin tegeleklerdäki diagrammalardan peýdalanmak oňaýlydyr.

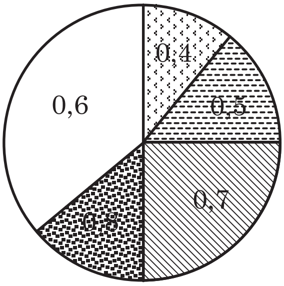
Eger-de statistiki derňewiň netijesi otnositel ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda tegelekdäki diagrammany gurmak üçin tegelegi görkezijileriň her bir toparynyň otnositel ýygylygyna proporsional bolan merkezi burçlara eýe sektorlara bölýärler.

Ýokardaky krossa gatnaşyjylaryň aralygy geçmäge sarp eden wagtlaryna görä ylgaýjylaryň paýlanyşynyň tegelekdäki diagrammasyny guralyň. $360° : 100 = 3{,}6°$ bolýandygyna görä bir prosente $3{,}6°$-a deň merkezi burç degişli bolar. Şoňa görä-de, her bir topar üçin degişli merkezi burçy taparys:

$$3{,}6° \cdot 9 = 32{,}4°;$$

$$3{,}6° \cdot 14 = 50{,}4°;$$
$$3{,}6° \cdot 37 = 133{,}2°;$$
$$3{,}6° \cdot 29 = 104{,}4°;$$
$$3{,}6° \cdot 8 = 28{,}8°.$$

Tegelegi tapylan bu merkezi burçlary bolan sektorlara bölekläp, indiki suratdaky, tegelekdäki diagrammany alarys (*25-nji surat*):



25-nji surat

Eger-de statistiki derňewiň netijesi ýygylyklar tablisasy bilen berlen bolsa, onda ilki bilen otnositel ýygylyklar tablisasyna geçip, soňra tegelekdäki diagrammany gurmak oňaýlydyr.

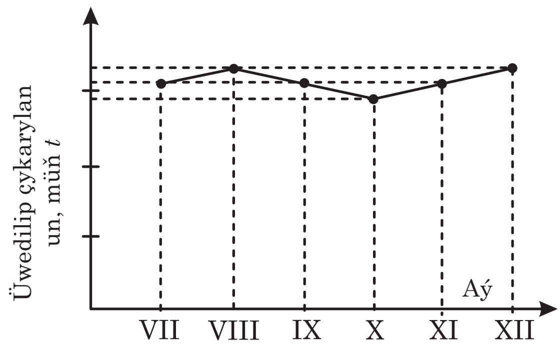
Şeýle hem, tegelekdäki diagrammany öwrenilýän görkezijiler köplügi azsanly toparlara bölेklenýän ýagdaýynda synlamak bilen köplüge baha bermäge mümkinçilik berýändigini belläp geçeliň. Tersine, tegelekde biri-beýlekisinden, göräýmäge tapawutlanmaýan köpsanly sektorlar saklanyp, olara degişli toparlara diagramma garap baha bermek kynlaşýar.

Statistiki görkezijileriň wagta görä üýtgeýiş depginini, köplenç, **poligon** ýardamynda şekillendirýärler. Poligony gurmak üçin koordinatalar tekizliginde abssissalary wagt pursatlary, ordinatalary bolsa olara degişli statistiki görkezijiler bolan nokatlary alyp, ol nokatlary yzygiderlilikde kesimler bilen birleşdirip poligon diýip atlandyrylýan döwük çyzygy alýarlar.

Un kombinatynyň 2008-nji ýylyň ikinji ýarymynda üwäp çykaran ununyň aýlardaky mukdarlary indiki tablisada berilýär:

Aý	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Üwelip çykarylan un, müň tonna	3,1	3,2	3,1	2,8	3,1	3,2

2008-nji ýylyň ikinji ýarymynda un kombinatynda un üwelmeginiň ýagdaýyny şekillendirýän poligon indiki 26-njy surat görnüşinde alnar:



26-njy surat

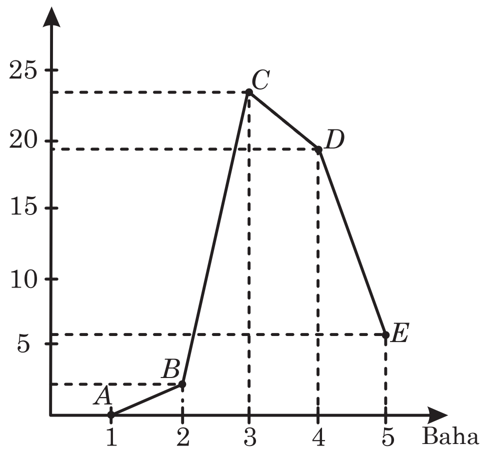
Statistiki derňew netijesinde alnan görkezijileriň paýlanyşyny suratlandyrmak üçin hem poligonlar ulanylýarlar.

Eger-de statistiki derňew netijesinde alnan görkezijiler ýygylyklar ýa-da otnositel ýygylyklar tablisasy görnüşinde berlen bolsalar, onda poligon gurmak üçin abssissalary statistiki görkezijiler, ordinatalary bolsa olara degişli ýygylyklar ýa-da otnositel ýygylyklar bolan nokatlary gurup, olary yzygiderli ýagdaýda kesimler bilen birleşdirýärler.

Algebradan barlag işini 50 sany okuwçy ýerine ýetirip, barlagyň netijesi okuwçylaryň alan bahalaryna görä aýyl-saýyl edip toplanyp, indiki ýygylyklar tablisasy bilen berlen:

Bahalar	1	2	3	4	5
Ýygylyklar	0	2	23	19	6

Koordinatalar tekizliginde $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 2)$, $C(3;\ 23)$, $D(4;\ 19)$, $E(5;\ 6)$ nokatlar gurup olary yzygiderlikde kesimler bilen birleşdirip barlag işiniň bahalarynyň paýlanyşynyň poligonyny alarys (*27-nji surat*):



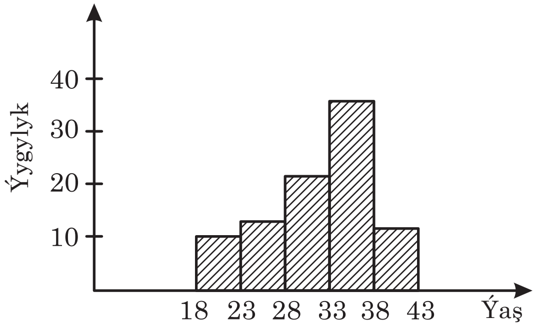
27-nji surat

Görkezijileriň interwallarda berlen hataryny **gistogramma** arkaly şekillendirýärler. Gistogramma sepleşen gönüburçluklardan durýan basgançak şekildir. Her bir gönüburçlugyň esasy interwalyň uzynlygyna, beýikligi bolsa degişli ýygylyga ýa-da otnositel ýygylyga deňdir. Şeýlelikde, gistogrammada sütünlerdäki diagrammadan tapawutlylykda gönüburçluklaryň esaslary erkin alynman interwalynyň uzynlygy bilen takyk kesgitlenýändirler.

Eger-de sehiň işçileriniň ýaşlary boýunça paýlanyşlary

Ýaşy	18–23	23–28	28–33	33–38	38–43
Ýygylyk	12	16	24	37	11

tablisa bilen berilýän bolsa, onda şol paýlanyşyň gistogrammasyny gursak, ol indiki şekilde bolar (*28-nji surat*).



28-nji surat

Bu şekildäki gönüburçluklaryň beýiklikleriniň jemi derňelýän köplügiň elementleriniň umumy sanydyr, ýagny sehde işleýän işçileriň sanyna deňdir.

?

1. Statistiki görkezijileri suratlandyrmak üçin olary şekillendirmäniň haýsy usullary ulanylýar?
2. Diagrammalar, poligonlar, gistogrammalar nähili guralýar?

Gönükmeler

265. Daýhan birleşiginiň miweli bag ekilen ýerleriniň 52 %-ini üzüm, 18 %-ini alma, 11 %-ini erik, 10 %-ini şetdaly, 9 %-ini bolsa garaly tutýar.

Miweli bag ekilen ýerleriň meýdanlarynyň paýlanyşyny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

266. Mekdebiň bir synpyndaky okuwçylaryň algebradan çärýek bahalary indiki ýaly:

«5»–6 sany okuwçy;

«4»–9 sany okuwçy;

«3»–14 sany okuwçy;

«2»–1 sany okuwçy.

Okuwçylaryň bu çärýek bahalary boýunça paýlanyşlaryny görkezýän tegelekdäki diagrammany guruň.

267. Welaýatyň daýhan birleşiklerinde gowaçanyň hasyllylygyny öwrenmek bilen indiki tablisa alnan;

Hasyllylyk *sentler* / gektar	23	24	25	26	27	28	29	30
Daýhan birleşikleriniň sany	4	6	14	13	18	20	17	8

Gowaçanyň hasyllylygy boýunça daýhan birleşikleriniň paýlanyşynyň poligonyny guruň.

268. Obanyň maşgalalarynyň agzalarynyň sany boýunça paýlanyşlaryny öwrenmek maksady bilen 100 sany maşgalalaryň birmeňzeş sandaky agzalary bolanlarynyň otnositel ýygylygyny görkezmek bilen tablisa alnypdyr.

Maşgala agzalarynyň sany	2	3	4	5	6	7	8	9
Otnositel ýygylyk, %	7	9	16	28	19	14	5	2

Otnositel ýygylyklaryň poligonyny guruň.

269. Mekdebiň ähli uçurymlarynyň boýlaryny ölçemek bilen

Boýy, *sm*	155–160	160–165	165–170	170–175	175–180	180–185
Ýygylygy	4	12	31	28	15	8

tablisa alnan (boýlary görkezýän interwallaryň çakleri özünden soňky gelýän interwala degişlidir). Uçurymlaryň boýlary boýunça paýlanyşynyň gistogrammasyny guruň.

II baby gaýtalamak üçin gönükmeler

270. 1, 2, 3, 4, 5 sanlardan näçe sany bäşbelgili sanlary düzmek mümkin?

271. 1, 2, 3, 5, 7, 8 sanlaryň her birini bir gezekden köp bolmadyk gezek ulanyp, näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

272. 7 okuwçydan arakesmede nobatçylyk etmek üçin 3 okuwçyny näçe usul bilen saýlap bolar?

273. 1, 3, 5, 7, 9 sanlaryň her birini bir gezekden köp ulanman, näçe sany bäşe kratny bolmadyk bäşbelgili san düzüp bolar?

274. Synp otagynda 34 sany oturmaga ýer bar. 30 okuwçyny näçe sany dürli usul bilen bu synp otagynda oturdyp bolar?

275. 8 ruhy küşt tagtasynda olar biri-birini alyp bilmez ýaly edip, näçe usul bilen oturdyp bolar?

276. 7 dürli şary 3 öýjüge näçe sany dürli usul bilen ýerleşdirip bolar?

277. Bir okuwçynyň matematika degişli 6 kitaby, ikinji okuwçynyň bolsa matematika degişli 10 kitaby bar. Olaryň biriniň 3 kitabyny, ikinjisiniň 3 kitabyna näçe sany dürli usul bilen çalşyp bolar?

278. Onluk ýazgysynda 5 san iň bolmanda bir gezek gabat geler ýaly, näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

279. Ýazgysynda hiç bir sany gaýtalap ulanmakdan bäşe kratny bolan näçe sany bäşbelgili sany düzüp bolar?

280. Bäşe bölünýän näçe sany altybelgili san bar?

281. 1, 2, 3, 5, 7, 8 sifrleriň her birini islendik gezek ulanyp, näçe sany bäşbelgili san düzüp bolar?

282. 1, 2, 3, 4, 5 sanlaryň hersini bir gezek ulanyp, jübüt sanlar ýanaşyk gelmez ýaly edilip, ähli mümkin bolan bäşbelgili sanlar düzülipdir. Olaryň sanyny tapmaly.

283. Jemi hasaplaň:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n.$$

284. Aşakdaky dagytmada x^3-yň koeffisiýentini tapyň.

a) $(1 + x)^6$; b) $(2 + x)^5$; ç) $(1 + 2x)^5$; d) $(3 + 2x)^4$.

285. Gapda 100 sany ýumurtga bolup, olaryň 4-üsi zaýa. Tötänden alnan bir ýumurtganyň zaýa bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

286. Bije atylyşygyna gatnaşýanlar ýüzüne 1-den 100-e çenli sanlar ýazylan kagyzlary gutudan çykarýarlar. Tötänden alnan ilkinji kagyzda 5 sifriň bolmazlygynyň ähtimallygyny tapyň.

287. Jaň edýän adam telefon belgisiniň soňky sifrini ýadyndan çykaryp ony tötänden saýlady. Telefon belgisiniň dogry saýlanan bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

288. Şaýlyk iki gezek yzly-yzyna oklanýar. Olaryň ikisinde hem şaýlygyň arka tarapynyň düşmeginiň ähtimallyklaryny tapmaly.

289. Oýnalýan kubjagazlaryň iki sanysy birbada oklananda, olarda düşen oçkolaryň jeminiň 8-e deň bolmagynyň ähtimallygy näçä deň?

290. Gutudan tötänden çykarylan şaryň gyzyl ýa-da gök reňkli bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

291. Oýnalýan kubjagaz oklananda 3-e kratny oçko düşmeginiň ähtimallygy näçä deň?

292. Synpdaky 25 okuwçynyň 10-usy dutar, 5-isi bolsa gyjak çalyp bilýärler, galanlary bolsa hiç bir saz guralyndan baş çykaranoklar. Synp okuwçylaryndan tötän alnan bir iniň saz guralyndan baş çykarýan bolmagy ähtimalmy ýa-da baş çykarmaýan?

III bap

Deňlemeler we deňsizlikler

§15. Deňlemelere degişli umumy maglumatlar

Biz şu wagta çenli siziň bilen deňlemeleriň birnäçe görnüşlerini we olary çözmegi öwrendik. Indi deňlemeler we olary çözmek boýunça alan bilimlerimizi umumylaşdyralyň we tertibe getireliň. Şonda biz ol bilimlerden peýdalanyp, deňlemeleri çözmegi has gysga ýol bilen ýalňyşsyz ýerine ýetirmegi başararys.

Umumy görnüşde bir näbellili deňlemä aşakdaky ýaly kesgitleme berilýär.

Kesgitleme. Eger-de üýtgeýän x ululygyň haýsy bahalarynda $f(x) = g(x)$ deňligiň dogry san deňligine öwrüljekligini kesgitlemek talap edilýän bolsa, onda $f(x) = g(x)$ deňlige bir näbellili deňleme diýilýär.

Üýtgeýän ululygyň berlen deňlemäni dogry $f(x_0) = g(x_0)$ san deňligine öwürýän ähli bahalaryna **deňlemäniň çözüwi (köki)** diýilýär. Deňlemäniň bir ýa-da birnäçe köküniň bolmagy, tükeniksiz köp köküniň bolmagy, şeýle-de hiç bir kökünin bolmazlygy hem mümkindir. Deňlemäniň bar bolan ähli köklerini tapmaklyga ýa-da onuň çözüwiniň ýokdugyny görkezmeklige **deňlemäni çözmek** diýilýär.

Üýtgeýän x ululygyň haýsy bahalarynda $f(x)$ we $g(x)$ aňlatmalaryň ikisi hem kesgitli bolsa (kesgitli san baha eýe bolýan bolsalar) onda x-yň şol bahalaryna $f(x) = g(x)$ deňlemäniň **kesgitleniş ýaýlasy** ýa-da x üýtgeýän ululygyň **ýolbererli bahalarynyň ýaýlasy (köplügi)** diýilýär. Başgaça aýdanyňda deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $f(x)$ we

$g(x)$ aňlatmalaryň kesgitleniş ýaýlalarynyň kesişmesidir. Deňlemäniň kökleri onuň kesgitleniş ýaýlasynyň bölek köplügidir.

Eger iki deňlemäniň kökleriniň köplükleri gabat gelýän bolsa, onda onuň ýaly deňlemelere **deňgüýçli deňlemeler** diýilýär. Mysal üçin, $\lg x = 0$ we $\sqrt{x} = 1$ deňlemeler deňgüýçlidir (olaryň ikisiniň hem $x = 1$ ýeke-täk köki bar); $x(x-1) = 0$ we $\sqrt{x} = x$ deňlemeler deňgüýçlidir (olaryň her biriniň 0 we 1 iki köki bar); $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = x - 1$ we $\sin x = \sqrt{2}$ deňlemeler hem deňgüýçlidir (olaryň ikisiniň hem köki ýok: birinji deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy boş köplük, ikinji deňlemede bolsa $\sqrt{2}$ $\sin x$-iň bahalar ýaýlasyna degişli däl).

Eger $f(x) = g(x)$ deňlemäniň her bir köki şol bir wagtda $f_1(x) = g_1(x)$ deňlemäniň hem köki bolsa, onda $f_1(x) = g_1(x)$ deňlemä $f(x) = g(x)$ **deňlemäniň netijesi** diýilýär. $(x-1)(x+2) = 0$ deňleme $x - 1 = 0$ deňlemäniň netijesidir. $x - 1 = 0$ deňleme bolsa $(x-1)(x+2) = 0$ deňlemäniň netijesi däldir. **Eger iki deňlemäniň her biri beýleki deňlemäniň netijesi bolsa, onda ol deňlemeler deňgüýçlidir.**

Eger birnäçe deňlemäniň kökleriniň birleşmesini (berlen deňlemeleriň iň bolmanda birini kanagatlandyrýan kökleri) tapmak talap edilýän bolsa, onda ol deňlemeler kwadrat ýaýyň kömegi bilen sütünläp ýazylýar. Mysal üçin,

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 1 = 3x + 5, \\ 4x - 3 = x^2 \end{array}\right.$$

görnüşde. Beýle deňlemelere **deňlemeler toplumy** diýilýär. Deňlemeler toplumy nokatly otur bilen bölünip, setirleýin hem ýazylýar: $2x + 1 = 3x + 5$; $4x - 3 = x^2$. Şeýle-de, «ýa-da» sözi bilen birleşdirilip setirleýin hem ýazylyp bilner: $2x + 1 = 3x + 5$ ýa-da $4x - 3 = x^2$. Deňlemeler toplumynyň çözüwi toplumy düzýän deňlemeleriň kökleriniň köplükleriniň birleşmesidir.

Biz deňlemeleri çözenimizde yzygiderli berlen deňlemäni oňa seredende ýönekeýräk deňleme bilen çalşyrmaly bolýarys. Eger birnäçe özgertmeleri geçirip $f(x) = g(x)$ deňlemäni $f_1(x) = g_1(x)$ deňlemä (ýa-da deňlemeler toplumyna) getirenimizde $f_1(x) = g_1(x)$ deňlemäniň käbir kökleri $f(x) = g(x)$ deňlemäniň kökleri bolmasa, onda $f_1(x) = g_1(x)$ deňlemäniň bu köklerine $f(x) = g(x)$ deňlemäniň **del kökleri** diýilýär. Mysal üçin $\sqrt{x+2} = x$ deňlemäniň iki tarapyny hem kwadrata göterip $x + 2 = x^2$ deňlemäni alarys, soňky deňlemäniň –1 we 2 kökleri bar, $x = 2$ kök $\sqrt{x+2} = x$ deňlemäni kanagatlandyrýar, emma $x = -1$ ony kanagatlandyrmaýar. Diýmek, $x = -1$ kök $\sqrt{x+2} = x$ deňlemäniň del köküdir.

Indi $x^2 - 4 = x + 2$ deňlemä seredeliň, onuň iki köki bar: –2 we 3. Eger biz bu deňlemäni çözenimizde onuň iki bölegini hem $x + 2$-ä bölüp, $x - 2 = 1$ deňlemäni alyp, ony çözsek, onda diňe bir köki taparys: $x = 3$. Şunuň ýaly bolanda ilkibaşda berlen deňlemäniň **köki ýitirildi** diýilýär. Biziň mysalymyzda $x = -2$ ýitirilen kök.

?

1. Deňlemäniň çözüwi diýip nämä aýdylýar?
2. Del kök nähili kesgitlenýär?
3. Deňgüýçli deňlemeler diýip nähili deňlemelere aýdylýar?

Gönükmeler

Deňlemeleriň çözüwiniň ýokdugyny subut ediň (293–295):

293. 1) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x-5}$;

2) $\sqrt[4]{x^2 - 144} = \sqrt{x-8} + \sqrt{8-x}$;

3) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = x - 5$;

4) $\sqrt[3]{x^2 - 144} = \sqrt{x-6} + \sqrt{6-x}$.

294. 1) $\log_2(x^2 - 1) + \log_3(x^3 - 1) + \log_4(1 - x^4) = \sqrt{x}$;

2) $2^{\log_{2x}(x+2)} + 3^{\log_{3x}(x+3)} = \sqrt{-1-x}$;

3) $\log_2(x^2-1) + \log_3(x^3-1) + \log_4(x^4-1) = \sqrt{1-x}$;

4) $2^{\log_{2x}(x+2)} + 3^{\log_{3x}(x+3)} = \sqrt[3]{-x}$.

295. 1) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4+1} = 1$; 3) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$;

2) $x^4 + x^2 + 1 = \log_{0,3}\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} = -1$.

Deňlemeler deňgüýçlimi (296–297):

296. 1) $x^2 + 2x + 1 = 0$ we $x + 1 = 0$;

2) $\sqrt{x^2+2x+1} = -(x+1)$ we $1 + x = 0$;

3) $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{1}{5}$ we $\sqrt{x} = \frac{x+1}{5}$;

4) $\frac{x^2}{x-1} = 2x$ we $\frac{x}{x-1} = 2$?

297. 1) $x^2 + 1 = \sqrt{x}$ we $x^2 + 1 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x} + \sqrt{1+x}$;

2) $x^2 - 1 = \sqrt{x}$ we $x^2 - 1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

3) $x^3 + x = 0$ we $\frac{x^3+x}{x} = 0$;

4) $x^2 + 1 = 0$ we $\frac{x^2+1}{x} = 0$.

§16. Deňlemeleriň deňgüýçliligi barada teoremalar

Biz deňlemeleri çözenimizde olary ýönekeý deňlemelere (ýa-da olaryň toplumyna) getirmek üçin dürli özgertmeleri geçirmeli bolýarys. Şonuň üçin şol özgertmeleriň haýsylarynyň berlen deňlemäni oňa deňgüýçli bolan deňlemä, haýsylarynyň del köke, haýsy özgertmeleriň bolsa kök ýitmegine getirýändigini bilmek zerurdyr. Haýsy deňlemeleriň biri-birine deňgüýçlidigini ýüze çykarmak (kesgitlemek) üçin san deňlikleriniň we deňsizlikleriniň esasy häsiýetlerinden gelip çykýan deňlemeleriň, deňgüýçliligi baradaky teoremalardan peýdalanylýar.

1-nji teorema. Eger

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

deňlemäniň iki bölegine hem onuň kesgitleniş ýaýlasynda kesgitli bolan $\varphi(x)$ aňlatmany goşsak, onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x) \qquad (2)$$

deňleme alnar.

Subudy. Goý, x_0 (1) deňlemäniň köki bolsun, onda $f(x_0) = g(x_0)$ san deňligi dogry bolar. Bu deňligiň iki bölegine hem $\varphi(x_0)$ sany goşalyň $f(x_0) + \varphi(x_0) = g(x_0) + \varphi(x_0)$ dogry san deňligini alarys. Bu bolsa x_0-yň (2) deňlemäniň köküdigini görkezýär. Diýmek, (1) deňlemäniň islendik köki (2) deňlemäniň hem köki bolýan eken. (2) deňlemäniň her bir köküniň (1) deňlemäni kanagatlandyrýandygy hem şeýle subut edilýär.

Şonuň üçin $f(x_0) + \varphi(x_0) = g(x_0) + \varphi(x_0)$ deňligiň, iki bölegine $-\varphi(x_0)$ sany goşmak ýeterlikdir. Mysal üçin, $3x^2 + 2x - 5 = 7x - 1$ deňleme $3x^2 + 2x - 5 + (-7x + 1) = 7x - 1 + (-7x + 1)$ deňlemä deňgüýçlidir. Sebäbi $\varphi(x) = -7x + 1$ aňlatma x-yň $3x^2 + 2x - 5 = 7x - 1$ deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli ähli bahalarynda kesgitlidir. Emma $x^2 = 1$ deňleme $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$ deňlemä deňgüýçli däldir. Sebäbi $\varphi(x) = \sqrt{x}$ aňlatma $x^2 = 1$ deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynyň ähli nokatlarynda däl-de, eýsem, diňe x-yň otrisatel däl bahalarynda kesgitlidir. $x^2 = 1$ deňlemäniň iki bölegine hem $\varphi(x) = \sqrt{x}$ aňlatmany goşup, biz deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny kiçeltdik. Şolam kökün ýitmesine getirdi. $x = -1$ berlen $x^2 = 1$ deňlemäniň köki $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$ deňlemäniň köki däldir.

Bellik. 1-nji teoremada gürrüň diňe $\varphi(x)$ aňlatmany (1) deňlemäniň iki bölegine-de goşmak barada gidýär. Soňraky meňzeş agzalary toplamak eýýäm deňlemäniň başga özgertmesidir. Meňzeş agzalary toplamak deňlemäni oňa deňgüýçli bolmadyk deňlemä hem getirip biler. Mysal üçin, $x^2 + 2x + \lg x = \lg x - 1$ deňlemäniň iki bölegine hem $\varphi(x) = -\lg x$ aňlatmany goşsak, berlen deňlemä deňgüýçli bolan $x^2 + 2x + \lg x - \lg x = \lg x - 1 - \lg x$ deňleme alnar. Emma soňky deňlemede meňzeş agzalary toplasak, ilkibaşda berlen deňlemä deňgüýçli bolmadyk $x^2 + 2x = -1$ deňleme alnar. Soňky deňlemäniň $x = -1$ köki $x^2 + 2x + \lg x = \lg x - 1$ deňlemäni kanagatlandyrmaýar.

2-nji teorema. Eger $f(x) = g(x)$ deňlemäniň iki bölegini hem onuň kesgitleniş ýaýlasynda kesgitli bolan noldan tapawutly şol bir $\varphi(x)$ aňlatma köpeltsek, onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan $f(x)\,\varphi(x) = g(x)\,\varphi(x)$ deňleme alnar.

Bu teorema hem öňki teorema meňzeş subut edilýär. $\varphi(x_0) \neq 0$ bolandygyna görä, $f(x_0) = g(x_0)$ deňlikden $f(x_0)\,\varphi(x_0) = g(x_0)\,\varphi(x_0)$ we tersine $f(x_0)\,\varphi(x_0) = g(x_0)\,\varphi(x_0)$ deňlikden $f(x_0) = g(x_0)$ deňlik alynýar.

Eger $x - 4 = x(\sqrt{x} + 2)$ deňlemäniň iki bölegini hem $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$ aňlatma köpeltsek, onda berlen deňlemä deňgüýçli bolan $\sqrt{x} - 2 = x$ deňlemäni alarys. Sebäbi $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$ aňlatma berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynyň ($x \geq 0$) ähli nokatlarynda kesgitli we hiç ýerde nola öwrülmeýär.

Eger $6x - 5 = 0$ deňlemäniň iki bölegini $\varphi(x) = x + 3$ aňlatma köpeltsek, berlen deňlemä deňgüýçli bolmadyk $(6x - 5)(x + 3) = 0$ deňlemäni alarys. Munuň sebäbi $\varphi(x) = x + 3$ aňlatma $6x - 5 = 0$ deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynda (R) kesgitli hem bolsa, $x = -3$ bolanda ol nola öwrülýär. Şoňa görä-de, berlen deňlemäniň iki bölegini $\varphi(x) = x + 3$ aňlatma köpeltmeklik $x = -3$ del köküň peýda bolmagyna getirdi.

2-nji teoremada gürrüň diňe deňlemäniň iki bölegini hem şol bir aňlatma köpeltmek barada barýar. Soňraky drob aňlatmalarda geçirilýän gysgaltmalar (eger olar bar bolsa) eýýäm täze özgertmelerdir. Mysal üçin, $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 4$ deňlemäniň iki bölegini hem $\varphi(x) = x - 2$ aňlatma köpeldip, biz berlen deňlemä deňgüýçli bolan $\frac{(x^2 - x - 2)(x - 2)}{x - 2} = 4(x - 2)$ deňlemäni alarys. Sebäbi $\varphi(x) = x - 2$ aňlatma x-yň berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli ähli bahalarynda ($x \neq 2$) kesgitlidir we hiç ýerde nola öwrülmeýär.

Emma $\frac{(x^2 - x - 2)(x - 2)}{x - 2} = 4(x - 2)$ deňlemäniň çep bölegindäki drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny $x-2$-ä gysgaltmak, bu täze özgertme bolar we netijede, $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 4$ deňlemä deňgüýçli bolmadyk $x^2 - 5x + 6 = 0$ deňleme alnar. $x = 2$ soňky deňlemäniň köküdir, ilkibaşda berlen deňlemäni bolsa kanagatlandyrmaýar, onuň del köküdir.

3-nji teorema. Eger x-yň $f(x) = g(x)$ deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli ähli bahalarynda $f(x)\, g(x) \geq 0$ bolsa, onda $f(x) = g(x)$ deňlemäniň iki bölegini hem şol bir natural n derejä götersek, berlen deňlemä deňgüýçli bolan $(f(x))^n = (g(x))^n$ deňleme alnar.

San deňsizlikleriniň häsiýetine görä, eger-de $f(x_0)$ we $\varphi(x_0)$ birmeňzeş alamatly sanlar bolanda $f(x_0) = g(x_0)$ we $(f(x_0))^n = (g(x_0))^n$ deňlikleriň biri dogry bolsa beýlekisi dogrudyr.

Bellik. n-täk san bolanda teoremadaky $f(x)\, g(x) \geq 0$ şerti aýyrmak bolar.

Mysallara seredeliň: $2x - 1 = \sqrt{x - 1}$ deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata götersek, onda oňa deňgüýçli bolan $(2x - 1)^2 = (\sqrt{x - 1})^2$ deňleme alnar. Sebäbi berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynda ($x \geq 1$ bolanda) berlen deňlemäniň iki bölegi hem otrisatel däl.

Eger $x - 6 = \sqrt{x}$ deňlemäniň iki bölegini kwadrata götersek, onda oňa deňgüýçli bolmadyk $(x - 6)^2 = x$ deňleme alnar.

Sebäbi berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli ($x \geq 0$) käbir bahalarynda deňlemäniň çep bölegi otrisatel bahalary alýar ($x = 5$ bolanda, $x - 6 = -1$), sag bölegi bolsa hemişe otrisatel däl. Hakykatdanda $(x - 6)^2 = x$ deňlemäni çözsek, $x_1 = 9$ we $x_2 = 4$ kökleri alarys. Emma $x_2 = 4$ berlen deňlemäniň del köküdir.

Gönükmeler

Deňlemeleri çözüň we barlagyny geçiriň. Eger del kökler bar bolsa, olaryň döremeginiň sebäbini anyklaň (298–300).

298. 1) $\dfrac{2}{2 - x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{2x - x^2}$;

2) $\dfrac{x + 2}{x + 1} + \dfrac{2 - x}{1 - x} + \dfrac{4}{x - 1} = 0$;

3) $\dfrac{x}{2x - 1} + \dfrac{25}{4x^2 - 1} = \dfrac{1}{27} - \dfrac{13}{1 - 2x}$;

4) $\dfrac{6}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x - 1} = 2 - \dfrac{x + 4}{x - 1}$.

299. 1) $1 + \sqrt{2x + 7} = x - 3$; 2) $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} = 2$;
3) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x - 2} = 7$; 4) $\sqrt{3x - 2} = 2\sqrt{x + 2} - 2$.

300. 1) $\lg(54 - x^3) = 3\lg x$;

2) $\dfrac{\lg(3x-5)}{\lg(3x^2+25)} = \dfrac{1}{2}$;

3) $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$;

4) $\lg\sqrt{5x-4} + \lg\sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$.

301. Deňlemeler deňgüýçlimi:

1) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+3} = \dfrac{3x^2+2x-1}{x+3}$;

we $2x^2 + 2x + 3 = 3x^2 + 2x - 1$;

2) $\dfrac{2x^2+2x+3}{x+2} = \dfrac{3x^2+2x-1}{x+2}$;

we $2x^2 + 2x + 3 = 3x^2 + 2x - 1$;

3) $\sqrt{x} - 2 = \sqrt{2x} + 1$ we $(\sqrt{x} - 2)^2 = (\sqrt{2x} + 1)^2$;

4) $2\sqrt{x} - 7x^2 = 2x + 2\sqrt{x}$ we $-7x^2 = 2x$?

302. Deňlemeleriň käbiri beýleki biriniň netijesi. Şeýle jübütleri görkeziň.

1) $\sqrt{x+2} = |x|$; 2) $x = x^2$;

3) $x + \dfrac{1}{x} = 2$; 4) $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5$;

5) $\sqrt{x+2} = \sqrt{2} - x$; 6) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+5}{x+9}$;

7) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 2$; 8) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$.

Deňlemeler we deňlemeler toplumy deňgüýçlimi (303–305).

303. 1) $(x-4)(x+3) = 0$ we $\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x+3=0; \end{array}\right.$

2) $(x-4)\left(x + \dfrac{1}{x-4}\right) = 0$ we $\left[\begin{array}{l} x-4=0, \\ x+\dfrac{1}{x-4}=0; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=0, \\ \sqrt{2-x}=0;\end{array}\right.$ we $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{2-x}=0;$

4) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3}=0;$ we $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0, \\ \sqrt{x+3}=0.\end{array}\right.$

304. 1) $(x-3)\lg(2-x)=0$ we $\left[\begin{array}{l}x-3=0, \\ \lg(2-x)=0;\end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l}2-x=0, \\ \lg(x-3)=0;\end{array}\right.$ we $(2-x)\lg(x-3)=0;$

3) $\dfrac{(x^2-2x-3)(x+1)}{x-3}=0$ we $\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3=0, \\ x+1=0;\end{array}\right.$

4) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\left(2^{\frac{x+4}{x^2-9}}-1\right)=0$ we $\left[\begin{array}{l}x^2-5x+6=0, \\ 2^{\frac{x+4}{x^2-9}}-1=0.\end{array}\right.$

305. 1) $x^2-x-6=0$ we $\sqrt{x}=\sqrt{x^2-6};$

2) $x(x+6)=x^3$

we $x+6+\dfrac{1}{x^2-x-6}=x^2+\dfrac{1}{x^2-x-6};$

3) $x-1=0$ we $\sqrt{x^2-x-1}=2x-1;$

4) $(x-1)(x-2)=0$ we $x^2-2x=x-2?$

§17. Deňlemeleri çözmek

Deňlemeler çözülende ulanylýan esasy usul bu berlen deňlemäni her gezek oňa deňgüýçli bolan ýönekeý deňleme ýa-da deňlemeler toplumy bilen çalşyrmak arkaly ýönekeýje deňlemä getirip, ony çözmekden ybaratdyr. Beýle edilende kök ýitenok we del kök emele gelenok. Şoňa görä-de, deňleme çözülende alnan kökleri barlamak zerurlygy aradan aýrylýar. Emma ähli deňlemäni diňe deňgüýçliligi saklaýan özgertmeleri peýdalanyp, çözmeklik hemişe başardybam baranok. Biz käbir deňlemeleri çözenimizde deňlemeleriň deňgüýçliligi baradaky teoremalardan başga hem birnäçe özgertmelerden we formulalardan peýdalanmaly bolýarys. Del köküň emele gelmegi we kök ýitmesi hem şeýle formulalardan peýdalanylanda deňlemeleriň kesgitleniş ýaýlalarynyň üýtgemegi bilen baglylykda bolup geçýär. Kesgitleniş ýaýlasynyň giňelmegi, köplenç, del köküň emele gelmegine getirýär. Kesgitleniş ýaýlasynyň kiçelmegi (gysylmagy) bolsa köküň ýitmegine getirip biler.

Ulanylanda deňlemeleriň kesgitleniş ýaýlasyny üýtgedýän formulalardan birnäçesini mysal getireliň:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad (\sqrt{a})^2 = a;$$

$$a^{\log_a b} = b, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$$

$$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1, \quad \sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}}, \quad \mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y}$$

we ş.m.

Del kökleriň peýda bolmagyna getirip biljek özgertmeleriň hem käbirini sanalyň:

a) üýtgeýän ululygy saklaýan meňzeş agzalary toplamak;

b) drobuň sanawjysyny we maýdalawjysyny üýtgeýän ululykly aňlatma gysgaltmak.

Deňlemeleriň deňgüýçliligi baradaky teoremalaryň şertlerini berjaý etmän:

ç) deňlemäniň iki bölegini-de üýtgeýän ululykly aňlatma köpeltmek;

d) deňlemäniň iki bölegini hem jübüt derejä götermek.

Bitin rasional deňlemeler çözülende deňgüýçliligi saklaýan özgertmeler ulanylýar we alnan kökler barlanylmaýar. Emma beýleki köp deňlemeler çözülende deňgüýçliligiň saklanyşyna gözegçilik edilmese kök ýitmegi ýa-da del köküň emele gelmegi mümkindir.

1-nji mysal. $\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$ deňlemäni çözeliň.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x \geq 4$ sanlaryň köplügidir. Ony göz öňüne tutup, deňlemäniň iki bölegini hem $\sqrt{2x-7}$ aňlatma köpeldip, berlen deňlemä deňgüýçli bolan deňleme alarys: $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{2x-7} = x-2$.

$x \geq 4$ bolanda bu deňlemäniň iki bölegi hem otrisatel däl san. Şoňa görä-de, ony kwadrata göterenimizde deňgüýçli deňleme alarys:

$$(x-4)(2x-7) = (x-2)^2,$$
$$2x^2 - 15x + 28 = x^2 - 4x + 4,$$
$$x^2 - 11x + 24 = 0.$$

Bu ýerden $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

$x_1 = 3$ kök $x \geq 4$ şerti kanagatlandyrmaýar. Ýagny berlen deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli däl, şoňa görä-de onuň köki bolup bilmez.

Köp deňlemeler çözülende her bir täze alynýan deňleme ondan öňki deňlemäniň netijesi bolar ýaly edip, özgerdip bolýar. Şeýle edilende kök ýitmeýär, emma del köküň alynmagy mümkindir. Şoňa görä-de, alnan kökler hökman barlanylmalydyr. Eger barlag geçirilmedik bolsa, deňlemäniň çözüwi doly hasaplanylmaýar. Bu usul drob-rasional, irrasional we logarifmik deňlemeler çözülende köp ulanylýar.

2-nji mysal. $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$ deňlemäni çözeliň.

Deňlemäniň iki bölegini hem kwadrata göterip alarys:

$$2x + 5 = (8 - \sqrt{x-1})^2,$$
$$2x + 5 = 64 - 16\sqrt{x-1} + x - 1,$$
$$16\sqrt{x-1} = 58 - x.$$

Ýene-de kwadrata götereliň:

$$256(x-1) = (58-x)^2,$$

$$x^2 - 372x + 3620 = 0.$$

Kwadrat deňlemäni çözüp, alarys:

$$x_1 = 10,\ x_2 = 362.$$

Deňleme çözülende alnan her bir deňlemäniň özünden öňki deňlemäniň netijesidigini görmek kyn däldir. Şoňa görä-de, tapylan kökler barlanylmalydyr.

Barlagy. $x_1 = 10$ köki barlalyň:

$$\sqrt{2x_1 + 5} = \sqrt{2 \cdot 10 + 5} = 5,$$

$$8 - \sqrt{x_1 - 1} = 8 - \sqrt{10 - 1} = 5.$$

$x = 10$ bolanda berlen deňlemäniň iki bölegi hem şol bir san baha eýe boldy. Diýmek, $x_1 = 10$ berlen deňlemäniň köki.

$x_2 = 362$ köki barlalyň.

$$\sqrt{2x_2 + 5} = \sqrt{2 \cdot 362 + 5} = 27,$$

$$8 - \sqrt{x_2 - 1} = 8 - \sqrt{362 - 1} = -11.$$

$x = 362$ bolanda berlen deňlemäniň çep we sag bölekleri dürli san baha eýe boldy. Onda $x_2 = 362$ del kökdür.

Kök ýitmegine getirýän özgertmeleri ulanmak maslahat berilmeýär. Eger käbir ýagdaýlarda ulanmaly bolaýsa, onda şol ýitmesi mümkin bolan bahalary aýratyn barlamalydyr.

3-nji mysal. $\log_{\frac{x}{10}} x + \log_{\frac{x}{5}} x = 0$ (1) deňlemäniň çözüwine seredeliň. Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny tapalyň:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 10. \end{cases}$$

x esasa görä logarifmlere geçeliň:

$$\frac{1}{\log_x \frac{x}{10}} + \frac{1}{\log_x \frac{x}{5}} = 0. \qquad (2)$$

x esasa geçenimizde deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy kiçeldi (gysyldy): ondan $x = 1$ baha «düşüp» galdy. Şol san berlen deňlemäniň köki dälmikä? Şony barlamalydyrys. Kesgitleniş ýaýlanyň galan bahalarynda (1) we (2) deňlemeler deňgüýçlidir. $x = 1$ bahany (1) deňlemede goýup barlanymyzda, onuň şol deňlemäniň köküdigini görýäris. Galan kökleri tapmak üçin (2) deňlemäni çözeliň. Onuň iki bölegini hem (1) deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasynda $x \neq 1$ bolanda noldan tapawutly $\log_x \frac{x}{10} \cdot \log_x \frac{x}{5}$ aňlatma köpeldip alarys:

$$\log_x \frac{x}{5} + \log_x \frac{x}{10} = 0, \ \log_x \frac{x^2}{50} = 0;$$

$$\frac{x^2}{50} = 1; \ x_1 = 5\sqrt{2}, \ x_2 = -5\sqrt{2}.$$

$x_2 = -5\sqrt{2}$ kök kesgitleniş ýaýla degişli däldir. Diýmek, berlen deňlemäniň $x_1 = 1$ we $x_2 = 5\sqrt{2}$ iki köki bar.

Gönükmeler

Deňlemeleri çözüň (306–309).

306. 1) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$;

2) $x^2 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x-1)$;

3) $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$;

4) $\sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x+3} - 1$.

307. 1) $\frac{\lg(2x-5)}{\lg(x^2-8)} = 0,5$;

2) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;

3) $\log_x (2x^2 - 7x + 12) = 2$;

4) $\log_x (2x^2 - 4x + 3) = 2$.

308. 1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$;

2) $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+4} = 0$;

3) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} = x+1;$

4) $1-x=\sqrt{1-\sqrt{4x^2-7x^4}}.$

309. 1) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1;$

2) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}} = 3;$

3) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8} = 7;$

4) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6} = 3.$

Deňlemäni çözüň (310–312).

310. 1) $\log_2 x+\log_2 2x+\log_2 8x=7;$

2) $\log_2 x^2+2\log_4 x^2+\log_{16} x^4=5;$

3) $\log_2 x-\log_x 16=-3;$

4) $\ln x\lg x-2=\lg x-2\ln x.$

311. 1) $\lg^2 10x+\lg x=19;$

2) $\log_3^2 x-3\log_3 x+5=3^{\log_3 9};$

3) $\log_2\sqrt{x-4}+\log_2\sqrt{2x-1}=\log_2 3;$

4) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30.$

312. 1) $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=6+2\log_x^2;$

2) $\log_x^2\cdot\log_{2x}^2=\log_{16x}^2;$

3) $\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(3x)}\cdot\log_3 x=2;$

4) $\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)}\cdot\log_5 x=-2.$

§18. Deňlemeleri çözmegiň esasy usullary

Deňlemeler çözülende esasy iki usuldan: köpeldijilere dagytmak we täze üýtgeýän ululyk girizmek usullaryndan peýdalanylýar. Köpeldijilere dagytmak metody eger $f(x)$ aňlatmany köpeldijilere dagydyp bolýan bolsa, onda $f(x)=0$ görnüşli deňlemeler çözülende ulanylýar.

1-nji teorema. Goý, $f(x)=f_1(x) \dots f_n(x)$ we $f_k(x)(1 \le k \le n)$ aňlatmalar $f(x)$ aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasynda kesgitli bolsun, onda $f(x) = 0$ deňlemäniň kökleriniň köplügi $f_k(x) = 0$ deňlemeleriň kökleriniň köplükleriniň birleşmesidir.

Başga sözler bilen aýdanyňda: $f(x)$ aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli $f(x) = 0$ deňlemäni kanagatlandyrýan islendik san $f_k(x) = 0$ deňlemeleriň iň bolmanda biriniň çözüwidir. Ters tassyklama hem dogrudyr.

Subudy. Goý, $f(x)$ aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolan α san $f(x) = 0$ deňlemäniň kökleriniň biri bolsun. Onda $f(\alpha) = 0$, ýagny $f_1(\alpha) \cdot \dots \cdot f_n(\alpha) = 0$ bolar. Köpeltmek hasyly bolsa, diňe onuň köpeldijileriniň iň bolmanda biri nola deň bolanda nola öwrülýär. Şoňa görä-de, $f_1(\alpha), \dots, f_n(\alpha)$ sanlaryň iň bolmanda biri nola deňdir, ýagny α san $f_k(x) =$ $= 0$ deňlemeleriň iň bolmanda biriniň kökidir. Tersine, α san $f_k(x) = 0$ deňlemeleriň biriniň köki bolsa, onda $f_1(\alpha) \cdot \dots \cdot$ $\cdot f_n(\alpha) = 0$, şoňa görä-de, $f(\alpha) = 0$.

1-nji mysal. $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$ deňlemäni çözeliň. Deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dagydalyň:

$$x^4 - x^3 - 12x^2 - x^2 + x + 12 = 0,$$
$$x^2 \cdot (x^2 - x - 12) - (x^2 - x - 12) = 0,$$
$$(x^2 - 1)(x^2 - x - 12) = 0.$$

Soňky deňleme:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{array}\right.$$

deňlemeler toplumyna deňgüýçlidir. Deňlemeler toplumyny çözüp alarys:

$$x_{1,2} = \pm 1; \quad x_3 = -3; \; x_4 = 4.$$

Indi täze üýtgeýän ululyk girizmek usuly bir sany deňlemäniň çözüwinde görkezeliň.

2-nji mysal. $(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 1680$ (1)

deňlemäni çözeliň. Deňlemäniň çep bölegini 1-nji, 4-nji we 2-nji, 3-nji ýaýlary jübüt-jübütden köpeldip, özgerdeliň:

$$(x^2-9x+18)(x^2-9x+20)=1680.$$

$x^2-9x+18=z$ diýsek, $x^2-9x+20=z+2$ bolar. Deňlemämiz $z^2+2z-1680=0$ görnüşe geler. Ony çözüp, $z_1=40$ we $z_2=-42$ kökleri alarys. Onda (1) deňleme aşakdaky deňlemeler toplumyna deňgüýçli bolar:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-9x+18=40, \\ x^2-9x+18=-42. \end{array}\right.$$

$x^2-9x+18=40$ deňlemäni çözüp, $x_1=-2$, $x_2=11$ kökleri alarys. $x^2-9x+18=-42$ deňlemäniň hakyky kökleri ýok.

Bu deňleme çözülende ulanan usulymyzy umumy aşakdaky teorema görnüşinde aňladýarlar.

2-nji teorema. Eger α san $f(z)=0$ deňlemäniň kökleriniň biri, β san bolsa $g(x)=\alpha$ deňlemäniň kökleriniň biri bolsa, onda β san $f(g(x))=0$ deňlemäniň kökleriniň biridir. Tersine, β san $f(g(x))=0$ deňlemäniň köki bolsa, onda $\alpha=g(\beta)$ san $f(z)=0$ deňlemäniň kökleriniň biridir (bu ýerde $z=g(x)$).

Subudy. Goý, α san $f(z)=0$ deňlemäniň köki we β san $g(x)=\alpha$ deňlemäniň köki bolsun. Onda $\alpha=g(\beta)$, $f(\alpha)=0$ we $f(g(\beta))=f(\alpha)=0$ bolar. Bu ýerden β sanyň $f(g(x))=0$ deňlemäniň köküdigi görünýär.

Tersine, goý, β san $f(g(x))=0$ deňlemaniň köki bolsun. Onda $f(g(\beta))=0$. Bu ýerden $\alpha=g(\beta)$ sanyň $f(z)=0$ deňlemäniň kökϋdigi gelip çykýar.

Bu teoremadan peýdalanyp, $F(x)=0$ görnüşli deňlemäni çözmek üçin, ilki bilen $F(x)$ aňlatmany $f(g(x))$ görnüşe getirip, $g(x)=z$ belgilenişigi girizmeli. $f(z)=0$ deňleme alnar. Ony çözenimizde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ kökler alnan bolsun. Ol kökleriň her birini $g(x)=\alpha_k$ görnüşli deňlemede α_k-nyň ornuna goýup, alynýan deňlemeleriň ählisini çözmeli.

Bu usulyň kömegi bilen $ax^4+bx^2+c=0$ görnüşli **bikwadrat deňleme** diýilýän deňlemeler $x^2=z$ belgileme girizmek arkaly kwadrat deňlemelere getirip çözülýär.

Simmetrik deňlemeler diýip atlandyrylýan:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

görnüşli deňlemeleri çözmek üçin, onuň iki bölegini hem x^2-a bölüp:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

görnüşe getirýärler. Soňra $x + \frac{1}{x} = z$ belgileme girizýärler. Onda $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = z^2 - 2$ bolar we $a(z^2 - 2) + bz + + c = 0$ kwadrat deňleme alynýar. Kwadrat deňlemäniň z_1 we z_2 köklerini tapyp, $x + \frac{1}{x} = z_1$ we $x + \frac{1}{x} = z_2$ deňlemeleri çözmeli.

3-nji mysal. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ deňlemäni çözeliň. Deňlemaniň iki bölegini hem x^2-a bölüp, $x + \frac{1}{x} = z$ diýsek,

$$6(z^2 - 2) - 5z - 38 = 0,$$
$$6z^2 - 5z - 50 = 0$$

deňlemäni alarys. Onuň $\frac{10}{3}$ we $-\frac{5}{2}$ kökleri bar. Soňra $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ we $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ deňlemeleri çözüp, dört sany kök alarys: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

4-nji mysal. $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$ deňlemäni çözeliň. Deňlemäniň iki bölegini hem x^2-a böleliň ($x = 0$ berlen deňlemäniň köki däl):

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9;$$

$2x + \frac{1}{x} = y$ täze üýtgeýän ululyk girizeliň:

$(y - 3)(y + 5) = 9$; $y^2 + 2y - 24 = 0$ deňleme alnar.

Ony çözüp, $y_1 = -6$ we $y = 4$ kökleri alarys. Tapylan kökleri y-iň ornuna goýsak, $2x + \frac{1}{x} = -6$ we $2x + \frac{1}{x} = 4$ deňlemeler alnar. Soňky deňlemeleri çözüp, $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ we $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ kökleri alarys.

Irrasional deňlemeler çözülende, köplenç, deňlemäniň iki bölegini hem şol bir derejä götermek usulyndan peýdalanylýar. Emma köp ýagdaýlarda irrasional deňlemeler çözülende kömekçi üýtgeýän ululyklary girizmek usuly has amatlydyr.

5-nji mysal. $\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x-6} = 2$ deňlemäni çözeliň.

$\sqrt{x+1} = u$, $\sqrt[3]{2x-6} = \upsilon$ diýip belgileme girizeliň. Onda berlen deňlemämiz $u - \upsilon = 2$ görnüşe geler. Täze üýtgeýän ululyklaryň bahasyny tapmak üçin, bir deňleme ($u - \upsilon = 2$) ýeterlik däl. Şonuň üçin biz

$$\begin{cases} x + 1 = u^2, \\ 2x - 6 = \upsilon^3 \end{cases}$$

sistemanyň birinji deňlemesini –2-ä köpeldip, ikinji deňlemä goşup $2u^2 - \upsilon^3 = 8$ deňlemäni alarys. Indi

$$\begin{cases} u - \upsilon = 2, \\ 2u^2 - \upsilon^3 = 8 \end{cases}$$

sistemany ornuna goýmak usuly bilen çözeliň:

$$2(\upsilon + 2)^2 - \upsilon^3 - 8 = 0,\ 2\upsilon^2 + 8\upsilon - \upsilon^3 = 0,$$
$$\upsilon(2\upsilon + 8 - \upsilon^2) = 0;\ \upsilon_1 = 0,\ \upsilon_2 = -2,\ \upsilon_3 = 4.$$

υ-niň bahalaryny $\sqrt[3]{2x-6} = \upsilon$ deňlikde goýup, taparys: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 35$.

Barlagy: tapylan çözüwleri berlen deňlemä goýmak bilen, olaryň hemmesiniň deňlemäni kanagatlandyrýandygyna göz ýetirýäris.

Jogaby: –1; 3; 35.

Gönükmeler

313. Deňlemeleri köpeldijilere dagytmak arkaly çözüň (313–314).

1) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$;
2) $x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$;
3) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0$;
4) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$;
5) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$;
6) $x^3 + 1991x + 1992 = 0$;
7) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$;
8) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0$;
9) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$;
10) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

314. 1) $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) = (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8)$;
2) $(x^2 + 5x)(x^2 - 3x - 28) = (x^3 - 16x) \cdot (x^2 - 2x - 35)$;
3) $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$;
4) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$;
5) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$;
6) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0$;
7) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$;
8) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$;
9) $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 3 = 0$;
10) $2x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 15 = 0$.

315. Deňlemeleri täze üýtgeýän ululyk girizmek bilen çözüň (315–316).

1) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
2) $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$;
3) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$;
4) $27x^6 - 215x^3 - 8 = 0$;
5) $(x^2 - 2x)^2 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$;
6) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$;
7) $(x - 2)(x - 3)^2(x - 4) = 20$;
8) $(x^2 - 3x)(x - 1)(x - 2) = 24$;

9) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)=24$;

10) $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=1680$.

316. 1) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$;

2) $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$;

3) $x^4-5x^3+10x^2-10x+4=0$;

4) $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$;

5) $(x+5)^4-13x^2(x+5)^2+36x^4=0$;

6) $2(x-1)^4-5(x^2-3x+2)^2+2(x-2)^4=0$;

7) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;

8) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$;

9) $\dfrac{x^2}{1-2x^2}=12x^2+7x-6$;

10) $2x+1+\dfrac{4x^4}{2x+1}=5x^2$;

11) $\dfrac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$;

12) $\dfrac{1}{x^2-3x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$;

13) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;

14) $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.

317. Deňlemeleri çözüň.

1) $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$;

2) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=5\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)$;

3) $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}=x^2-1$;

4) $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$;

5) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$;

6) $x + \sqrt[3]{x} - 2 = 0$;

7) $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$;

8) $x\sqrt{x^2 + 15} - \sqrt{x}\sqrt[4]{x^2 + 15} = 2$;

9) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$;

10) $(x + 1)(x + 4) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$.

318. 1) $4x - 3\sqrt[3]{x} - 1 = 0$;

2) $x^{10} - x^5 - 2\sqrt{x^5} + 2 = 0$;

3) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x - 1} = 1$;

4) $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$;

5) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = x - 1$;

6) $2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48$;

7) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 7} + 2\sqrt{x^2 + 7x} = 35 - 2x$;

8) $x + \sqrt{x} + \sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 + 2x} = 3$.

§19. Deňlemeler sistemasy we ony çözmegiň esasy usullary

Deňlemeler sistemasy bolanda biz birnäçe deňlemäniň umumy çözüwlerini tapmak talap edilýär diýip düşünýäris. Iki näbellili iki deňlemäniň sistemasynyň çözüwi (köki) üýtgeýän ululyklaryň berlen deňlemeleriň ikisini hem dogry san deňligine öwürýän bahalarynyň tertipleşdirilen jübütidir. Deňlemeler sistemasyny çözmek – onuň ähli çözüwlerini tapmak ýa-da çözüwleriniň ýokdugyny subut etmek diýmekdir. Eger iki deňlemeler sistemasynyň şol bir çözüwleri bar bolsa, onda olara deňgüýçli deňlemeler sistemalary diýilýär. Çözüwleri ýok bolan deňlemeler sistemalary hem deňgüýçli deňlemeler sistemalary hasaplanýar.

Deňlemeler sistemasy çözülende berlen sistemany oňa deňgüýçli bolan ýönekeý (çözmek üçin amatly bolan) sistema bilen çalşyrýarlar. Şonda deňlemeler sistemasynyň deňgüýçliligi baradaky aşakdaky tassyklamalardan peýdalanyp bolar:

1. Eger sistemanyň deňlemeleriniň birini oňa deňgüýçli bolan deňleme bilen çalyşsak, onda berlen sistema deňgüýçli bolan sistema alnar.
2. Eger sistemanyň deňlemeleriniň birini bu sistemanyň iki sany deňlemesiniň jemi ýa-da tapawudy bilen çalyşsak, onda berlen sistema deňgüýçli bolan sistema alnar.

Deňlemeler sistemasy analitik usulda çözülende, esasan, aşakdaky 3 usuldan peýdalanylýar:

1. Algebraik goşmak usuly;
2. Ornuna goýmak usuly;
3. Üýtgeýän ululyklary çalşyrmak usuly;

1-nji mysal.

$$\begin{cases} 14x^2 - 5xy + 3y^2 = 16, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny çözeliň.

Sistemanyň ikinji deňlemesini –2-ä köpeldip, ony birinji deňlemä goşalyň:

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0.$$

Birjynsly deňleme diýip atlandyrylýan deňleme alyndy. Ähli agzalarynyň derejeleri deň bolan $f(x, y) = 0$ görnüşli deňlemelere **birjynsly deňlemeler** diýilýär. $y = 0$ bolanda

$$2x^2 - 3xy + y^2 = 0$$

deňlemeden $x = 0$-ly alarys. (0; 0) sanlaryň jübüti sistemanyň deňlemelerini kanagatlandyrmaýar. Diýmek, $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ birjynsly deňlemäniň iki bölegini hem y^2-a ($y \neq 0$) bölmek bolar:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 1 = 0$$

deňleme alnar. $\frac{x}{y} = z$ diýsek, $2z^2 - 3z + 1 = 0$ kwadrat deňleme alarys. Ony çözüp, taparys:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{1}{2}.$$

Diýmek, ilkibaşda berlen deňlemeler sistemasy

$$\begin{cases} y = x, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x, \\ 6x^2 - xy + y^2 = 8. \end{cases}$$

Sistemalaryň toplumyna deňgüýçlidir. Soňky sistemalardan ornuna goýmak usulyndan peýdalanyp:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right), (1; 2), (-1; -2)$$

çözüwleri taparys.

2-nji mysal.

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny çözeliň.

Bu deňlemeler sistemasyna **simmetrik deňlemeler sistemasy** diýilýär. Sistemanyň deňlemeleriniň her birinde $x - y$, y-e we y-gi x-a çalyşanda deňlemeler üýtgemeýän bolsa, onda sistema şeýle atlandyrylýar. Beýle sistemalar esasy simmetrik aňlatmalar diýip atlandyrylýan $x + y$ we xy aňlatmalary degişlilikde, u we ϑ üýtgeýän ululyklar bilen çalyşmak arkaly çözülýär.

$$x + y = u, \quad xy = \vartheta \quad \text{diýsek}, \quad x^3 + y^3 = u^3 - 3u\vartheta$$

bolar we berlen sistema

$$\begin{cases} u^3 - 3u\vartheta + \vartheta^3 = 17, \\ u + \vartheta = 5 \end{cases}$$

görnüşe geler. Bu sistemany çözüp, taparys:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ \vartheta_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 2, \\ \vartheta_2 = 3. \end{cases}$$

Şeýlelikde, ilkibaşda berlen sistema

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3 \end{cases}$$

sistemalaryň toplumyna deňgüýçlidir.

Bu sistemalaryň birinjisiniň çözüwi (1; 2) we (2; 1) sanlaryň jübütidir, ikinji sistemanyň çözüwi ýok.

3-nji mysal.

$$\begin{cases} x(y + z) = 20, \\ y(x + z) = 18, \\ z(x + y) = 14 \end{cases}$$

deňlemeler sistemasyny çözeliň.

Sistemanyň 3 deňlemesini hem agzama-agza goşup, alarys:

$$2(xy + xz + yz) = 52, \quad xy + xz + yz = 26.$$

Soňky deňlemede $xy + xz$, $yx + yz$, $zx + zy$ aňlatmalaryň ýerine olaryň sistemanyň birinji, ikinji we üçünji deňlemelerindäki bahalaryny goýsak, ilkibaşda berlen sistema deňgüýçli bolan

$$\begin{cases} xy = 12, \\ yz = 6, \\ xz = 8 \end{cases}$$

sistema alnar. Soňky sistemanyň ähli 3 deňlemesini agzama-agza köpeldip, $(xyz)^2 = 24^2$ deňlemäni alarys. Bu ýerden $xyz = 24$ ýa-da $xyz = -24$. Alnan deňlemeleriň her birinde soňky sistemadan xy, yz we zx aňlatmalaryň bahalaryny goýup, çözüwleriň iki üçlügini alarys:

$$(4; 3; 2), (-4; -3; -2).$$

11. Sargyt №1011

Gönükmeler

319. Deňlemeler sistemasyny çözüň.

1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ xy = 6; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -16, \\ xy = 15; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{4}xy, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy; \end{cases}$
8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -\dfrac{1}{2}, \\ xy + y^2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$
10) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 2, \\ x^2 + 2xy + 5y^2 = 4. \end{cases}$

320. Deňlemeler sistemasyny çözüň.

1) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2y^2 = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4; \end{cases}$
6) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6, \\ 3x^2 + 8y^2 = 14; \end{cases}$
8) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160, \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8; \end{cases}$
10) $\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

§20. Deňsizlikler. Deňsizlikleri çözmek

Deňsizlikler we olaryň çözüwlerine degişli köp düşünjeler deňlemeler dogrusynda şol düşünjelere berilýän kesgitlemelere meňzeş kesgitlenýär. Üýtgeýän ululygyň berlen deňsizligi dogry san deňsizligine öwürýän ähli bahalaryna **deňsizligiň çözüwi** diýilýär. Deňlemelerden tapawutlylykda deňsizlikleriň çözüwlerine olaryň köki diýilmeýär. Deňsizligi çözmek diýip – onuň bar bolan ähli çözüwlerini tapmaklyga ýa-da çözüwiniň ýokdugyny subut etmeklige aýdylýar. Çözüwleriniň köplükleri gabat gelýän deňsizliklere **deňgüýçli deňsizlikler** diýilýär.

Üýtgeýän ululygyň haýsy bahalarynda deňsizligiň iki bölegi hem kesgitli bolsa (hasaplap bolsa) onda üýtgeýän ululygyň şol bahalaryna deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasy ýa-da **ýolbererli bahalarynyň ýaýlasy** diýilýär.

Deňsizlikler çözülende edil deňlemeler çözülendäki ýaly dürli özgertmeler geçirmek arkaly berlen deňsizlik ýönekeý deňsizlige ýa-da deňsizlikler sistemasyna getirilýär. Ýöne deňsizlikleriň çözüwlerini ornuna goýup barlap bolmaýandygyna görä, geçirilýän özgertmeleriň deňgüýçli deňsizliklere getirýändigine gözegçilik etmelidir.

Deňsizlikleriň deňgüýçliligi baradaky käbir tassyklamalara seredeliň:

1. Eger deňsizligiň iki bölegine hem onuň kesgitleniş ýaýlasynda kesgitli bolan şol bir aňlatmany goşsak, onda berlen deňsizlige deňgüýçli bolan deňsizlik alnar.
2. Eger deňsizligiň iki bölegini hem onuň kesgitleniş ýaýlasynda položitel bolan şol bir aňlatma köpeltsek, berlen deňsizlige deňgüýçli deňsizlik alnar.
3. Eger deňsizligiň iki bölegini hem onuň kesgitleniş ýaýlasynda otrisatel bolan şol bir aňlatma köpeltsek we deňsizligiň manysyny üýtgetsek berlen deňsizlige deňgüýçli deňsizlik alnar.

4. Eger deňsizligiň iki böleginde hem deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasynda diňe položitel bahalara eýe bolan aňlatmalar duran bolsa, onda deňsizligiň iki bölegini-de n (n – natural san) derejä götersek ýa-da n-nji derejeli kök alsak, berlen deňsizlige deňgüýçli deňsizlik alnar.

1-nji mysal. $(x^2 + x + 1)^x < 1$ deňsizligi çözeliň.

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

bolandygyna görä, berlen deňsizligi

$$(x^2 + x + 1)^x < (x^2 + x + 1)^0$$

görnüşde ýazyp bolar. $0 < x^2 + x + 1 < 1$ we $x^2 + x + 1 > 1$ ýagdaýlara serederis. Diýmek, berlen deňsizlik aşakdaky deňsizlikler sistemalarynyň toplumyna deňgüýçlidir:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 < 1, \\ x > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + x + 1 > 1, \\ x < 0. \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x(x + 1) < 0, \\ x > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x + 1) > 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Birinji sistemanyň çözüwi ýok, ikinji sistemanyň çözüwi $(-\infty; -1)$ san aralygy.

2-nji mysal.

$$\log_2^2 (x - 1)^2 - \log_{0,5} (x - 1) > 5$$

deňsizligi çözeliň.

Deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasyny tapalyň: $x - 1 > 0$, $x > 1$ bolar. Logarifmleriň häsiýetlerinden peýdalanyp, alarys:

$$\log_2(x - 1)^2 = 2\log_2 |x - 1| = 2\log_2(x - 1),$$

$$\log_{0,5} (x - 1) = \frac{\log_2 (x - 1)}{\log_2 0,5} = -\log_2 (x - 1).$$

Indi berlen deňsizligi

$$4\log_2^2 (x - 1) + \log_2 (x - 1) > 5$$

görnüşde ýazyp bolar. $\log_2(x-1)=z$ diýsek, $4z^2+z-5>0$ kwadrat deňsizlik alnar. Bu ýerden $z<-\frac{5}{4}$; $z>1$.

Diýmek,

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(x-1)<-\frac{5}{4},\\ \log_2(x-1)>1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}0<x-1<2^{-\frac{5}{4}},\\ x-1>2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}1<x<1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}},\\ x>3.\end{array}\right.$$

Şeýlelikde, deňsizligiň çözüwi $\left(1;1+\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)$ we $(3;\ \infty)$ san aralyklary bolar.

3-nji mysal. $x^{\lg x}>10$ deňsizligi çözeliň. $0<x\neq 1$ we $x^{\lg x}>0$ bolandygyna görä, 10 esasa görä logarifmirläp, alarys:

$$\lg x^{\lg x}>\lg 10, \quad \lg^2 x>1.$$

Bu ýerden $\lg x<-1$; $\lg x>1$. *Toplumyň birinji deňsizliginden* $0<x<0{,}1$, *ikinji deňsizliginden* $x>10$ *çözüwleri alarys.*

Jogaby: $(0;\ 0{,}1)\cup(10;\ \infty)$.

4-nji mysal. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geq -4$ deňsizligi çözeliň.

Berlen deňsizlik aşakdaky sistema deňgüýçlidir:

$$\begin{cases}x^2+2x-8>0,\\ x^2+2x-8\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4};\end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases}x^2+2x-8>0,\\ x^2+2x-24\leq 0\end{cases}$$

sistemanyň birinji deňsizliginden $\left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>2\end{array}\right.$ ikinji deňsizliginden $-6\leq x\leq 4$ çözüwleri alarys. Deňsizlikleriň umumy çözüwi $[-6;\ -4)\cup(2;\ 4]$ bolar.

Gönükmeler

321. Deňsizligi çözüň.

1) $1<3^{|x^2-x|}<9$;

2) $2^{2+x}-2^{2-x}>15$;

3) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52;$

4) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9;$

5) $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}};$

6) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25;$

7) $|x-3|^{2x^2-7x} > 1;$

8) $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0;$

9) $5^{\log_2 \frac{8-12x}{x-6}} > 125;$

10) $\log_{|x-1|} 0{,}5 > 0{,}5.$

322. Deňsizligi çözüň.

1) $2^{\log_8(x^2-6x+9)} \leq 3^{2\log_x \sqrt{x} - 1};$

2) $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 > 1;$

3) $\log_x(x^3+1) \cdot \log_{x+1} x > 2;$

4) $\dfrac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leq \dfrac{1}{2};$

5) $0,4^{\log_3 \frac{3}{x} \cdot \log_3 3x} > 6,25^{\log_3 x^2 + 2};$

6) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2;$

7) $x + \lg(1+2^x) > x \lg 5 + \lg 6;$

8) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1;$

9) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-2) < 1;$

10) $\log_3(\log_2(2-\log_4 x) - 1) < 1.$

§21 Irrasional deňsizlikler

Irrasional deňsizlikler çözülende irrasional deňlemeler çözülendäki ulanylýan özgertmeler ulanylýar: deňsizligiň iki bölegini şol bir natural derejä götermek; kömekçi üýtgeýän ululyklary girizmek; deňsizligiň iki bölegini hem şol bir aňlatma köpeltmek we ş.m. Emma irrasional deňsizlikleriň irrasional deňlemelerden düýpli aýratynlygy irrasional deňsizlikler çözülende alnan çözüwleri ornuna goýup barlap bolmaýandygydyr. Şoňa görä-de, deňsizlikler çözülende geçirilýän özgertmeleriň deňgüýçli deňsizliklere getirýändigine gözegçilik edilmelidir.

Näbellini kwadrat kök belgisiniň aşagynda saklaýan islendik irrasional deňsizlik käbir özgertmelerden soň $\sqrt{f(x)} < g(x)$ ýa-da $\sqrt{f(x)} > g(x)$ görnüşli deňsizlikleriň birine getirilýär. Ilki bilen

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \tag{1}$$

görnüşli deňsizligiň çözülişine seredeliň. Bu deňsizlik:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases}$$

deňsizlikler sistemasyna deňgüýçlidir. Edil şuňa meňzeş $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ deňsizlik hem

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}$$

deňsizlikler sistemasyna deňgüýçlidir.

Indi

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \tag{2}$$

deňsizlige seredeliň. (1) deňsizlikden tapawutlylykda bu deňsizlikde $g(x)$ položitel bahalaryda,otrisatel bahalaryda alyp biler. Şoňa görä-de, (2) deňsizlik aşakdaky deňsizlikler sistemalarynyň toplumyna deňgüýçlidir.

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

1-nji mysal. $\sqrt{2x-1} < x+1$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizlik (1) görnüşli deňsizlik bolandygyna görä

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x+1 > 0, \\ 2x-1 < (x+1)^2 \end{cases}$$

deňsizlik sistemasyna deňgüýçlidir. Deňsizlikler sistemasyny çözeliň:

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x > -1, \\ 2x-1 < x^2+2x+1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x^2+2 > 0; \end{cases} \qquad x \geq \frac{1}{2}.$$

Jogaby: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

2-nji mysal. $\sqrt{x^2+x-2} \geq x+2$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizlik (2) deňsizlige meňzeş bolandygyna görä, aşakdaky deňsizlikler sistemalarynyň toplumyna deňgüýçlidir:

$$\begin{cases} x+2 < 0, \\ x^2+x-2 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x^2+x-2 \geq (x+2)^2. \end{cases}$$

Bu sistemalary ýönekeýleşdirip, alarys:

$$\begin{cases} x < -2, \\ (x-1)(x+2) \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2, \\ 3x+6 \leq 0; \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x < -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -2, \\ x \geq 1; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Birinji sistemadan $x < -2$, ikinjiden bolsa $x = -2$ çözüwleri taparys. Toplumyň sistemalarynyň çözüwlerini birleşdirip, alarys: $x \leq -2$.

3-nji mysal. $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\geq 1$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizligi $\sqrt{3x}\geq 1+\sqrt{2x+1}$ görnüşde ýazmak amatlydyr. Şonda deňsizligiň iki böleginde hem otrisatel däl aňlatmalar bolar. Biz olary kwadrata göterip, berlen deňsizligiň kesgitleniş ýaýlasynda oňa deňgüýçli bolan sistemany alarys:

$$\begin{cases} 3x\geq 0, \\ 2x+1\geq 0, \\ (\sqrt{3x})^2\geq(1+\sqrt{2x+1})^2. \end{cases}$$

Bu ýerden:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ x\geq -\dfrac{1}{2}, \\ 3x\geq 1+\sqrt{2x+1}+2x+1. \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ \sqrt{2x+1}\leq \dfrac{x}{2}-1 \end{cases}$$

bolar. Soňky sistemadaky ikinji deňsizligi kwadrata göterip, alnan deňsizlikler sistemasyny çözeliň.

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ \dfrac{x}{2}-1\geq 0, \\ 2x+1\leq\left(\dfrac{x}{2}-1\right)^2; \end{cases}\quad \begin{cases} x\geq 0, \\ x\geq 2, \\ 2x+1\leq\dfrac{x^2}{4}-x+1; \end{cases}\quad \begin{cases} x\geq 2, \\ x^2-12x\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2, \\ x(x-12)\geq 0; \end{cases}\quad \begin{cases} x\geq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\geq 12; \end{array}\right. \end{cases}\quad x\geq 12.$$

Jogaby: $[12; +\infty)$

4-nji mysal.

$$x^2+5x+4<5\sqrt{x^2+5x+28}$$

deňsizligi çözeliň.

$\sqrt{x^2+5x+28}=y$ diýsek, berlen deňsizlik $y^2-5y-24<0$ görnüşe geler. Ony çözsek, $-3<y<8$ bolar. Biz $-3<\sqrt{x^2+5x+28}<8$ sistema geldik. Onuň ýerine $0\le x^2+5x+28<64$ sistemany çözmek ýeterlikdir.

$$x^2+5x+28=x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}+21\frac{3}{4}=$$

$$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+21\frac{3}{4}>0$$

bolandygyna görä, $x^2+5x+28<64$ deňsizligi çözeris. Bu ýerden $x^2+5x-36<0$, $(x+9)(x-4)<0$, $-9<x<4$ bolar.

Jogaby: $(-9; 4)$.

Gönükmeler

323. Irrasional deňsizlikleri çözüň (323–327).

1) $\sqrt{2x+1}<5$; 2) $\sqrt{3x-2}>1$;

3) $\sqrt{2x+10}<3x-5$; 4) $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

324. 1) $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$; 2) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$;

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\le 1$; 4) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\ge 2$.

325. 1) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4}-\sqrt{4x+5}<0$;

2) $\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}>\sqrt{8x-5}$;

3) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}\ge 0$;

4) $x^2+\sqrt{x^2+11}<31$.

326. 1) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}\ge\frac{7}{12}$;

2) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\le 3x+7$;

3) $2x^2-\sqrt{(x-3)(2x-7)}<13x+9$;

4) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} < 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

327. 1) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$;

2) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$;

3) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$;

4) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \le x^2 - 9$;

5) $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} - 2\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}} > \sqrt{0}$;

6) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}} > \dfrac{1}{x}$.

§22. Modully deňsizlikler

Üýtgeýän ululygy modul belgisiniň içinde saklaýan deňsizlikler çözülende modulyň kesgitlemesinden peýdalanylýar:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & eger \quad f(x) \ge 0, \\ -f(x), & eger \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

Deňsizligi üýtgeýän ululygy modul belgisinde saklamaýan deňsizlikleriň sistemalarynyň toplumy bilen çalşyrýarlar. Şonuň ýaly-da, deňsizligiň iki bölegini-de kwadrata götermek baradaky teoremany ulanýarlar. Bu teoremadan $|f(x)| > |g(x)|$ görnüşli deňsizlikler çözülende peýdalanylýar. $f(x)$ we $g(x)$ aňlatmalaryň kesgitleniş ýaýlasyna degişli islendik x üçin $|f(x)| \ge 0$, $|g(x)| \ge 0$ bolandygyna görä, $|f(x)| > |g(x)|$ deňsizlik $(f(x))^2 > (g(x))^2$ deňsizlige deňgüýçlidir.

1-nji mysal. $|x-1| < 2$ deňsizligi çözeliň.

Modulyň kesgitlemesine görä:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & eger \ \ x-1 \ge 0, \\ -(x-1), & eger \ \ x-1 < 0. \end{cases}$$

Şoňa görä-de, berlen deňsizligi aşakdaky deňsizlikleriň sistemalarynyň toplumy bilen çalşyryp bolar.

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x-1<2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-1<0, \\ 1-x<2. \end{cases}$$

Birinji sistemadan $1 \leq x < 3$, ikinji sistemadan bolsa $-1 < < x < 1$ çözüwleri alarys. Olary birleşdirsek, $-1 < x < 3$ bolar.

Jogaby: $(-1; 3)$

2-nji mysal. $|2x-1| \leq |3x+1|$ deňsizligi çözeliň.

Deňsizligiň iki bölegini hem kwadrata göterip, berlen deňsizlige deňgüýçli bolan $(2x-1)^2 \leq (3x+1)^2$ deňsizligi alarys. Soňky deňsizligi ýönekeýleşdireliň:

$$4x^2-4x+1 \leq 9x^2+6x+1; \quad 5x^2+10x \geq 0.$$

Bu ýerden $\left[\begin{array}{l} x\leq -2 \\ x\geq 0. \end{array}\right.$

Jogaby: $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

3-nji mysal. $|2x+4| \leq 3x-2$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizlik aşakdaky deňsizlikler sistemalarynyň toplumyna deňgüýçlidir:

$$\begin{cases} 2x+4\geq 0, \\ 2x+4\leq 3x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4<0, \\ -2x-4\leq 3x-2. \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x<-2, \\ x\geq -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

Birinji sistemadan $x \geq 6$ çözüwi alarys, ikinji sistemanyň çözüwi ýok. Diýmek, deňsizligiň çözüwi $[6; +\infty)$ san aralygy bolar.

4-nji mysal. $x^2 - |5x+6| > 0$ deňsizligi çözeliň.

Berlen deňsizlik aşakdaky deňsizlikler sistemalarynyň toplumyna deňgüýçlidir:

$$\begin{cases} 5x+6 \geq 0, \\ x^2-5x-6>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x+6<0, \\ x^2+5x+6>0 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x \geq -\dfrac{6}{5}, \\ (x+1)(x-6)>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-\dfrac{6}{5}, \\ (x+3)(x+2)>0. \end{cases}$$

Birinji sistemanyň çözüwi $\left[-\frac{6}{5};-1\right)\cup(6;+\infty)$, ikinji sistemanyň çözüwi $(-\infty;3)\cup\left(-2;-\frac{6}{5}\right)$ bolar. Olary birleşdirip alarys:

$$(-\infty;\,3)\cup(-2;\,-1)\cup(6;\,+\infty).$$

5-nji mysal. $\dfrac{|2x-1|}{x^2-x-2}>\dfrac{1}{2}$ deňsizligi çözeliň.

Bu deňsizlik

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}>\dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1<0, \\ \dfrac{1-2x}{x^2-x-2}>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

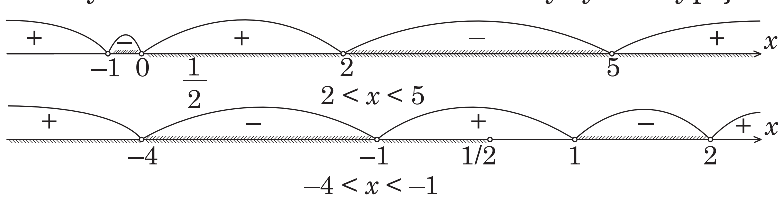
deňsizlikler toplumyna deňgüýçlidir. Olary özgerdip, alarys:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{2}>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1-2x}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{2}>0 \end{cases}$$

ýa-da

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x(x-5)}{(x+1)(x-2)}<0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x-2)}<0. \end{cases}$$

Soňky deňsizlikleri interwallar usulyny ulanyp çözeliň:



Alnan çözüwleri birleşdirsek, $(-4;\ -1)\cup(2;\ 5)$ jogaby alarys.

6-njy mysal. $|x-1|+|x+1|<4$ deňsizligi çözeliň.

San okuny $(-\infty; -1)$, $[-1; 1)$, $[1; +\infty)$ aralyklara bölüp, üç sany deňlemeler sistemasyny alarys:

$$\begin{cases} x<-1, \\ -2x<4; \end{cases} \quad \begin{cases} -1\le x<1, \\ 2<4; \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 1, \\ 2x<4. \end{cases}$$

Berlen deňsizlik şu üç sany sistemanyň toplumyna deňgüýçlidir. Bu sistemalary çözüp, degişlilikde $(-2; -1)$, $[-1; 1)$ we $[1; 2)$ çözüwleri taparys. Olary birleşdirsek, $(-2; 2)$ jogap alnar.

Gönükmeler

328. Deňsizlikleri çözüň.

1) $|x-5|<2$;
2) $|x^2-7x+13|\ge 1$;
3) $|2x+3|\ge 7$;
4) $|x^2+5x|\le 6$.

329. Deňsizlikleri çözüň.

1) $|x+3|+|x-3|>8$;
2) $|x+2|+|x-2|<6$;
3) $|3x-4|+|3x+4|\le 12$;
4) $|x+8|+|x-8|\ge 20$.

330. Deňsizlikleri çözüň.

1) $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$;

2) $\dfrac{\log_{0,3}|x-2|}{x^2-4x}<0$.

331. Deňsizlikleri çözüň.

1) $5x^2-4|x-2|\le 14$;
2) $3x^2-2|x-1|>10$;

3) $|x^2 - 2x - 15| > x^2 - 135$;
4) $|x^2 - 7x + 12| \leq x^2 - 9$.

332. Deňsizlikleriň bitin çözüwlerini tapyň.
1) $|(x + 1)(3 - x)| \leq 6$;
2) $|(x + 2)(x - 4)| < 6$;
3) $|x(x - 2)(x - 4)| < 17$;
4) $|(x - 1)(x - 3)(x - 5)| < 11$.

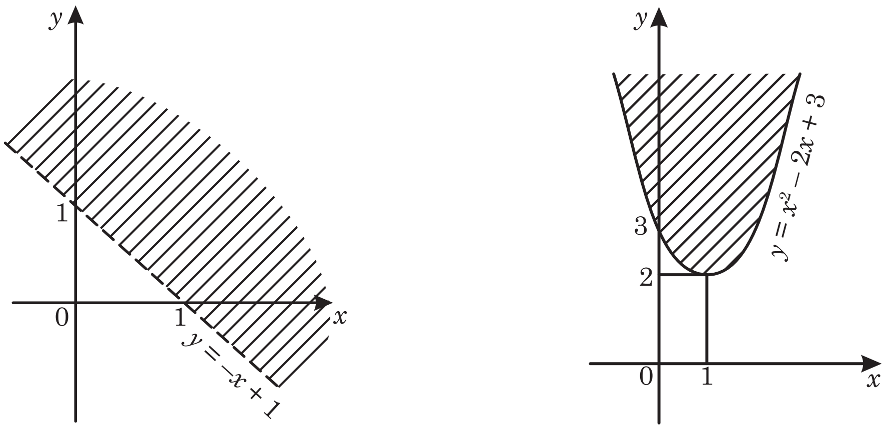
§23. Iki üýtgeýän ululykly deňsizlikler we olaryň sistemalarynyň çözüwlerini koordinata tekizliginde şekillendirmek

$f(x; y) > g(x; y)$ deňsizlige garalyň. **Iki üýtgeýän ululykly deňsizlikleriň çözüwi diýip deňsizligi dogry san deňsizlige öwürýän üýtgeýän ululyklaryň bahalarynyň jübütine aýdylýar.** Mälim bolşy ýaly, $(x; y)$ hakyky sanlaryň jübüti koordinata tekizliginde nokady birbahaly kesgitleýär. Bu bolsa iki üýtgeýän ululykly deňsizlikleriň ýa-da deňsizlikler sistemasynyň çözüwini koordinata tekizliginde nokatlaryň köplügi görnüşinde geometrik şekillendirmäge mümkinçilik berýär.

1-nji mysal. $x + y - 1 > 0$ deňsizligiň çözüwleriniň köplügini koordinata tekizliginde şekillendirmeli.

Çözülişi. Berlen deňsizligi $y > -x + 1$ görnüşde ýazalyň. Koordinata tekizliginde $y = -x + 1$ göni çyzygy guralyň. $y > -x + 1$, göni çyzykdan ýokarda ýatan islendik nokadyň ordinatasy şol bir abssissasy bolan ýöne bu göni çyzygyň üstünde ýatýan nokadyň ordinatasyndan uludyr. Bu bolsa berlen deňsizligiň çözüwiniň geometrik şekillendirmesidir.

2-nji mysal. $x(x - 2) \leq y - 3$ deňsizligiň çözüwleriniň köplügini koordinata tekizliginde şekillendirmeli.



29-njy surat

Çözülişi. Berlen deňsizligi $y \geq x^2 - 2x + 3$ görnüşe özgerdeliň. Koordinata tekizliginde $y = x^2 - 2x + 3$ funksiýanyň grafigi bolan parabolany guralyň.

$y = x^2 - 2x + 3$ paraboladan ýokarda ýatan islendik nokadyň ordinatasy şol bir abssissasy bolan ýöne parabolanyň üstünde ýatan nokadyň ordinatasyndan uludyr. $y \geq x^2 - 2x + 3$ deňsizlik berk däldir. Onda berlen deňsizligiň çözüwiniň geometrik şekillendirmesi $y = x^2 - 2x + 3$ parabolanyň üstünde we ondan ýokarda ýatan tekizlikdäki nokatlaryň köplügi bolýar (*29-njy surat*).

$f(x, y) = 0$ deňleme bilen berlen l çyzyk tekizligi birnäçe ýaýlalara bölýär. Bu ýaýlalaryň her biriniň içinde $f(x, y)$ öz alamatyny saklaýar we ol ýaýlalaryň käbirinde $f(x, y) > 0$ deňsizlik ýerine ýetýär, galan ýaýlalarda bolsa $f(x, y) < 0$ deňsizlik ýerine ýetýär.

Şoňa görä-de, $f(x, y) > 0$ deňsizligi çözmek üçin ilkibaşda l çyzygy, ýagny $f(x, y) = 0$ koordinata tekizliginde gurmaly we çyzygyň tekizligi bölýän ýaýlalarynyň her birinden synag üçin nokat saýlap almaly. f funksiýanyň bu nokatda kabul edýän alamatyny şu ýaýlanyň hemme ýerinde hem kabul edýär. Ondan soňra f položitel bolýan ýaýlany saýlap almak galýar. Alnan çözüwe l çyzygyň özüni hem goşup, $f(x, y) \geq 0$ deňsizligiň çözüwini alarys.

3-nji mysal.

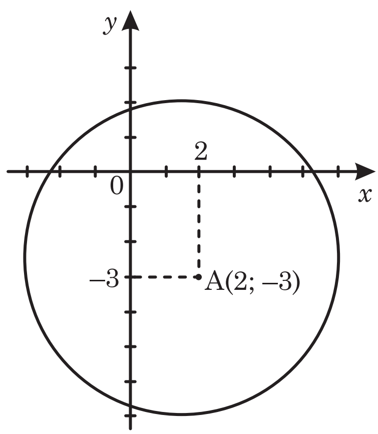
$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 > 0$$

deňsizligi çözeliň.

Çözülişi. Doly kwadraty bölüp çykaryp, alarys:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 25.$$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ deňleme merkezi $A(2; -3)$ nokatda we radiusy 5 bolan töweregi berýär (*30-njy surat*). Synag nokat hökmünde ýaýlanyň içinden $A(2; -3)$ merkezi alalyň. $(2 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 0 < 25$ onda ýaýlanyň içinde berlen deňsizlik ýerine ýetmeýär. Ýaýlanyň daşyndan synag nokat hökmünde $B(8; -3)$ nokady alalyň. Onuň üçin alarys $(8 - 2)^2 + (-3 + 3)^2 = 36 > 25$.



30-njy surat

Diýmek, ýaýlanyň daşynda $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 25$ deňsizlik ýerine ýetýär. 31-nji suratda bu deňsizligiň çözüwi şekillendirilendir.

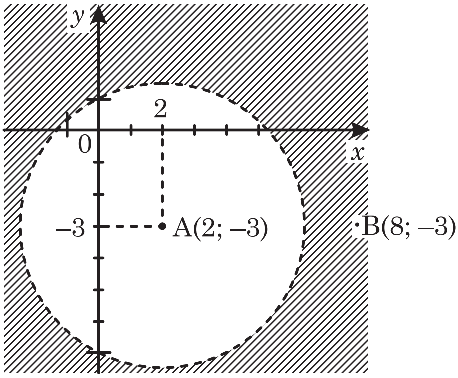
Eger deňsizligiň $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 \geq 25$ görnüşi bar bolsa, onda onuň çözüwini geometrik ştrih bilen däl-de, tutuş çyzyk bilen şekillendireliň (*32-nji surat*).

4-nji mysal. Deňsizlikler sistemasyny çözeliň:

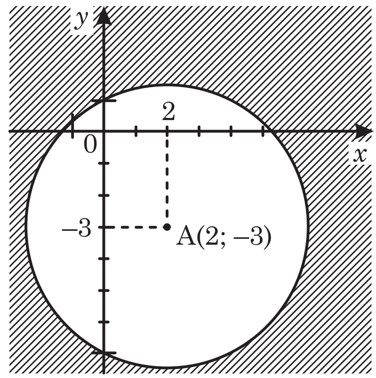
$$\begin{cases} 2y - 3x + 5 < 0, \\ 3y + 4x - 1 > 0. \end{cases}$$

Çözülişi. 1) deňsizlikler sistemasynyň her bir deňsizligini y-ň üsti bilen aňladalyň, ýagny

$$\begin{cases} 2y < 3x - 5, \\ 3y > - 4x + 1; \end{cases}$$



31-nji surat



32-nji surat

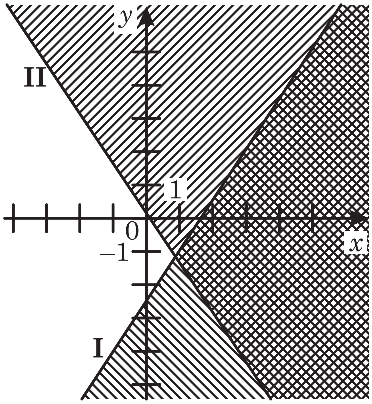
2) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ (I) we $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ (II) göni çyzyklary guralyň;

3) sistemanyň birinji deňsizligini $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ göni çyzykdan aşakda ýerleşen ýarymtekizligiň ähli nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyrýar.

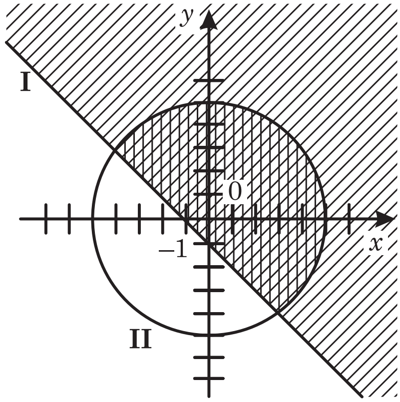
Sistemanyň ikinji deňsizligini $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ göni çyzykdan ýokarda ýerleşen ýarymtekizligiň ähli nokatlaryň koordinatalary kanagatlandyrýar.

4) berlen deňsizlikler sistemasyny birinji we ikinji nokatlaryň köplügi üçin umumy bolan tekizligiň nokatlarynyň koordinatalary kanagatlandyrýar. Şeýle nokatlaryň köplügi 33-nji suratda iki gat ştrih bilen ýapylandyr.

Deňlemeler sistemasynyň çözüwini grafiki şekillendirmek üçin ilkibaşda birinji deňsizligi kanagatlandyrýan tekizlikdäki nokatlaryň X_1 köplügi, soňra ikinji deňsizligi kanagatlandyrýan tekizlikdäki nokatlaryň X_2 köplügi tapylýar. Ahyrynda bolsa bu köplükleriň kesişmesi (ýagny olaryň umumy bölegi) alynýar.



33-nji surat



34-nji surat

5-nji mysal. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwini grafiki şekillendiriň:

$$\begin{cases} x + y + 1 \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Çözülişi. $x + y + 1 \geq 0$ deňsizligi $y \geq -x - 1$ görnüşde ýazalyň. Ol

$$y = -x - 1 \qquad \text{(I)}$$

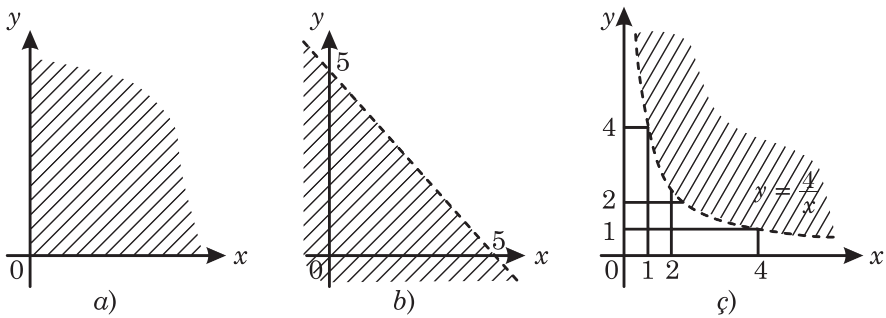
göni çyzykdaky nokatlarda we bu göni çyzykdan ýokarda ýatan nokatlarda ýerine ýetýär.

$x^2 + y^2 \leq 25$ deňsizlik $x^2 + y^2 = 25$ (II) töwerekde we onuň içinde ýerine ýetýär.

Bu köplükleriň umumy bölegi 34-nji suratda iki gat ştrihlenendir. Ol berlen sistemanyň çözüwi bolýar.

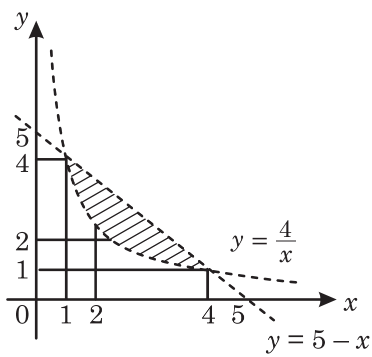
6-njy mysal. Sistemanyň çözüwler köplügini koordinata tekizliginde şekillendiriň:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ xy > 4, \\ x + y < 5. \end{cases}$$



35-nji surat

Çözülişi. $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$ deňsizlikler sistemasynyň çözüwiniň geometrik şekillendirmesi birinji koordinata burçuň nokatlarynyň köplügi bolýar (*35-nji a surat*).



36-njy surat

$x + y < 5$ ýa-da $y < 5 - x$ deňsizligiň çözüwiniň geometrik şekillendirmesi $y = 5 - x$ (*35-nji b surat*) funksiýanyň grafigi bolan göni çyzygyň aşagynda ýerleşen nokatlaryň köplügi bolýar.

Ahyrynda, $xy = 4$ ýa-da $x > 0$, bolany üçin $y > \dfrac{4}{x}$ deňsizligiň çözüwi $y = \dfrac{4}{x}$ funksiýanyň grafigi bolan giperbolanyň şahasynyň ýokarsynda ýatýan nokatlaryň koordinatasy bolýar. Berlen deňsizligiň çözüwi 36-njy suratda ştrihlenip görkezilendir.

Gönükmeler

333. Sistemanyň çözüwler köplügini koordinata tekizliginde şekillendiriň.

1) $y \geq 0{,}5x - 2$;
2) $y \leq -2x + 3$;
3) $y < x^2 - 2x - 3$;
4) $y \geq -x^2 + 5x - 6$.

334. Sistemanyň çözüwler köplügini koordinata tekizliginde şekillendiriň.

1) $\begin{cases} x + y \le 1, \\ y \ge 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \le 2x + 9, \\ y \ge 2x^2 - 2x - 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y \le -\dfrac{2}{3}x + 4, \\ y \ge \dfrac{2}{3}x + 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y \le 1, \\ x \ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + y - 2 > 0, \\ x - 2y + 2 < 0; \end{cases}$

335. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwini grafiki şekillendiriň.

1) $\begin{cases} y \ge \dfrac{2}{x}, \\ y < x - 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y < -2x^2 - 4x + 6, \\ y < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y < -\dfrac{1}{x}, \\ y > x + 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y > 0,5x^2 - x - 4, \\ y < 0. \end{cases}$

336. Deňsizlikler sistemasyny çözüň.

1) $\begin{cases} y > x^2 + 4x + 6, \\ y > -x + 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \le 0,5x + 3, \\ y \le -0,5x^2 + 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y < x^2 - 6x + 10, \\ y < 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \ge -x - 4, \\ y \ge 0,5x - 4. \end{cases}$

337. Sistemanyň çözüwler köplügini koordinata tekizliginde şekillendiriň.

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 > 4, \\ x^2 + y^2 < 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 - x + 4 > 0, \\ y + x^2 - 7x + 10 < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x - 5)^2 + y^2 > 25, \\ x^2 + y^2 < 25; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 - 4x - 4 > 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0. \end{cases}$

338. Deňsizlikler sistemasynyň çözüwler ýaýlasyny grafiki görkeziň.

1) $\begin{cases} y + 2x - 6 > 0, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y + 3x + 9 > 0, \\ x < 0, \\ y < 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y - x - 6 < 0, \\ y + \dfrac{1}{3}x > 0, \\ y + 2x < 0, \\ y + 4x < 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y - 2x < 0, \\ y - 2x + 4 > 0, \\ y < 4, \\ y > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y + 2x - 10 < 0, \\ y - x < 0, \\ y - 0,2x > 0, \\ y - 3x > 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y - x - 8 < 0, \\ y - x - 6 > 0, \\ x < 0, \\ y > 0. \end{cases}$

339. Deňsizlikler sistemasynyň haýsy hem bolsa iki çözüwini görkeziň.

1) $\begin{cases} y \le x^2, \\ x + 2y + 1 \ge 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y \ge 2x^2, \\ 2x + y \ge 0; \end{cases}$

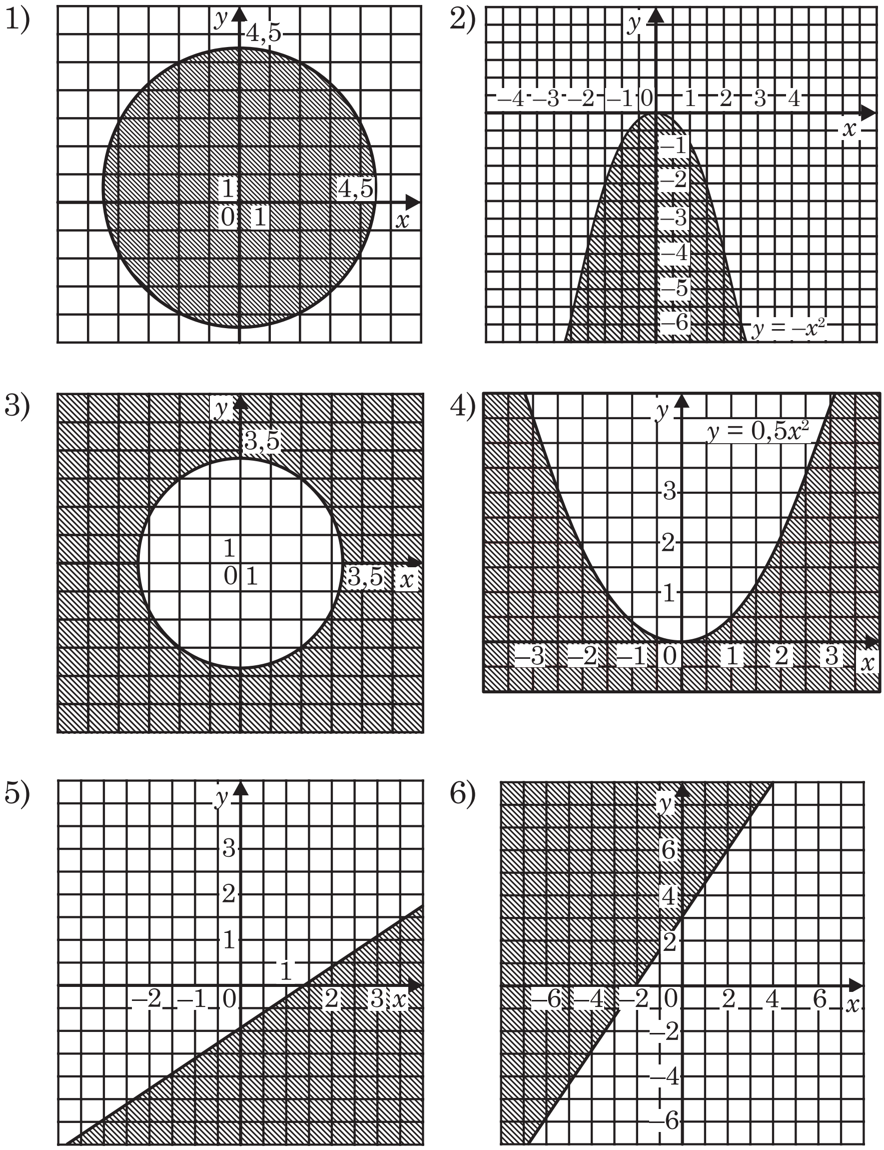
2) $\begin{cases} y \ge \dfrac{6}{x}, \\ x + 3y - 4 \ge 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y \le x^2 + 1, \\ xy \ge 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y \ge 2x - 1, \\ xy \le 12; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y \ge x^2 - 2, \\ xy \le 20. \end{cases}$

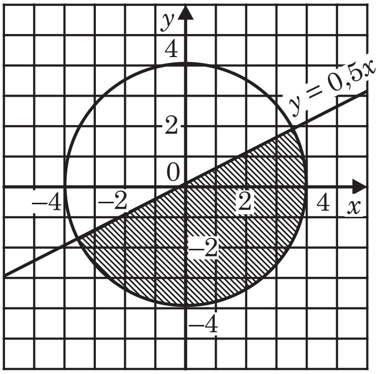
340. 37-nji suratdaky grafigi ştrihlenen deňsizligi ýazyň.



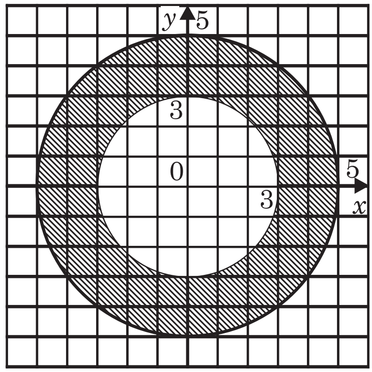
37-nji surat

341. 38-nji suratda ştrih bilen görkezilen koordinata tekizliginde nokatlaryň köplügi bilen berlen deňsizlikler sistemasyny ýazyň.

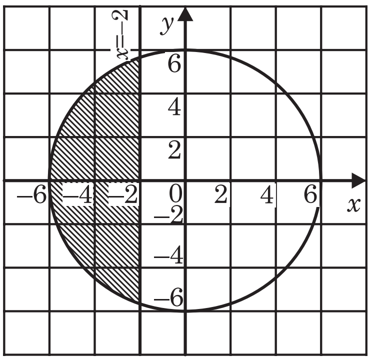
1)



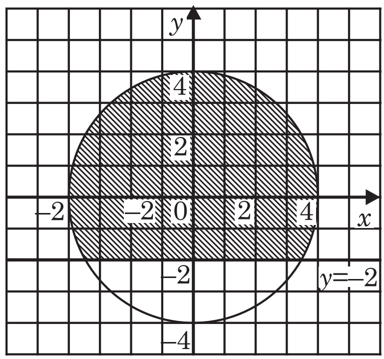
2)



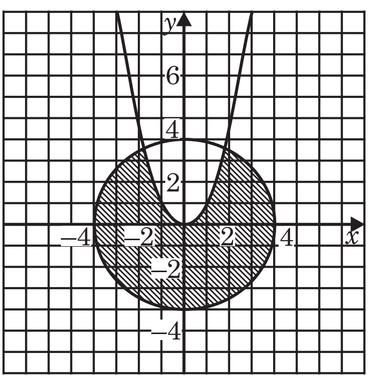
3)



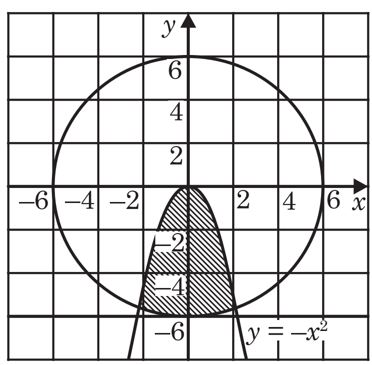
4)



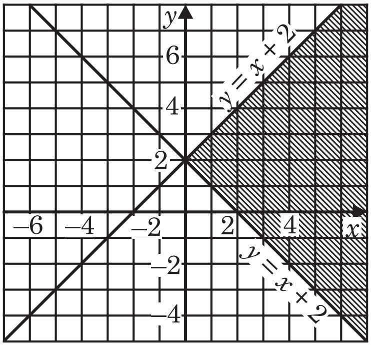
5)



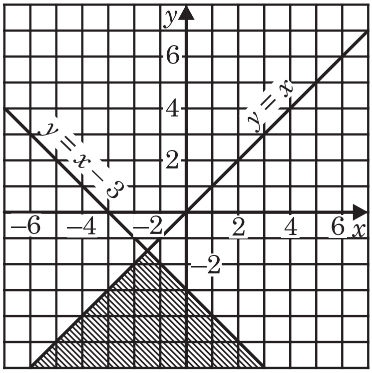
6)



7)



8)



38-nji surat

IV bap

Kompleks sanlar

§24. Hakyky sanlar köplügini giňeltmek. Kompleks sanlar barada düşünje

Hakyky sanlar köplüginde goşmak, aýyrmak, köpeltmek we derejä götermek amallaryny ýerine ýetirmek bolýar. Emma bölmegi we kök almagy hemişe ýerine ýetirmek bolmaýar.

Meselem, biz $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-9}$ aňlatmalara nähili many bermelidigini bilmeýäris. Şoňa görä-de, hakyky sanlar köplüginde göräýmäge ýönekeý ýaly bolup görünýän $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 81 = 0$ we ş.m. deňlemeleriň çözüwleri ýokdur.

Şeýlelik bilen, biz aşakdaky zerurlyga duçar bolýarys:

kök almak amalyny elmydama ýerine ýetirip bolar ýaly, täze sanlary girizmek arkaly hakyky sanlaryň köplügini giňeltmeli.

Bu mesele gutarnykly suratda diňe XIX ýüz ýyllykda çözüldi.

Täze, giňeldilen san köplüginiň nähili elementleriniň bolmalydygyna seredeliň.

Ol köplük ozaly bilen ähli hakyky sanlary özünde saklamalydyr. Şol san köplüginde $x^2 = -1$ deňleme çözülmelidir, çünki derejä götermeklige ters bolan amal bu köplükde ýerine ýetirilmelidir.

Kwadraty -1 bolan sany i harpy bilen belgilemek we **hyýaly birlik** diýip at bermek kabul edilendir. Diýmek, i sanyň kesgitlemesine görä $i^2 = -1$.

Her bir b hakyky san we i hyýaly birlik bilen birlikde olaryň bu köpeltmek hasyly hem şol köplüge degişli bolmalydyr.

Edil şunuň ýaly, her bir a hakyky san we bi köpeltmek hasyly bilen birlikde, olaryň $a + bi$ jemi hem täze san köplügine degişli bolmalydyr. Şeýlelikde, sanlaryň täze köplügi $a + bi$ görnüşdäki hemme sanlary özünde saklamalydyr, bu ýerde a we b – erkin hakyky sanlar, i bolsa hyýaly birlik. Bu sanlara biz kompleks sanlar diýip at bereris. «Kompleks» sözi türkmençe «çylşyrymly», «düzümli» manysyny berýär. $a + bi$ görnüşinde bolan sana bu ady ilkinji gezek nemes matematigi Gauss (1777–1855) beripdir. «Hyýaly» (imaginaire) adyny bolsa 1637-nji ýylda fransuz matematigi Dekart girizipdir. a sana $a + bi$ kompleks sanyň hakyky bölegi, bi aňlatma onuň hyýaly bölegi diýip atlandyrmaklyk kabul edilendir. Şunlukda $a + bi$ aňlatma bu kompleks sanyň algebraik ýazgysy diýip aýdylýar. Meselem, $3 + 4i$ kompleks sanda 3 san hakyky bölek, $4i$ aňlatma bolsa hyýaly bölekdir. $0 - 2i$ kompleks sanyň hakyky bölegi 0 san, hyýaly bölegi bolsa $-2i$ aňlatmadyr; hyýaly bölegiň koeffisiýenti – 2-ä deňdir. $6 + 0i$ kompleks sanyň hakyky bölegi 6 san, hyýaly bölegi bolsa $0i$ aňlatmadyr.

Eger iki sany kompleks sanyň hakyky we hyýaly bölekleri degişlilikde deň bolsalar, onda ol sanlaryň özleri hem deň hasaplanýarlar. Başgaça aýdylanda, $a = c$, $b = d$ bolanlarynda, diňe

$$a + bi = c + di.$$

$a + bi$ we $a - bi$ görnüşinde bolan kompleks sanlara özara çatyrymly sanlar diýilýär.

$a + bi$ we $-a - bi$ görnüşinde bolan kompleks sanlara özara garşylykly sanlar diýilýär.

Biziň bilşimiz ýaly, deň bolmadyk hakyky sanlar üçin «uly» we «kiçi» baglanyşyklar kesgitlenendir. Meselem, $5 > 4$, $0 < 7$ we ş.m. Deň bolmadyk kompleks sanlar üçin şunuň ýaly baglanyşyklary kesgitlemek mümkin däldir. Meselem, $2 + 3i$ ýa-da $5 - 7i$; $0 - 2i$ ýa-da $0 + 4i$ kompleks sanlaryň haýsy biriniň beýlekisinden uludygyny aýdyp bolmaýar.

?

1. Hakyky sanlar köplüginde haýsy amallar ýerine ýetýär?
2. Hakyky sanlar köplüginde haýsy amallar ýerine ýetmeýär?
3. Haýsy sana hyýaly birlik diýilýär?
4. Nähili sanlara kompleks sanlar diýilýär?
5. Haýsy şertde iki kompleks sana deň diýilýär?

Gönükmeler

342. $a + bi$ we $c + di$ iki kompleks sanlar barada aýdylanda nämä düşünilýär?

1) olar biri-birine deňdir; 2) biri-birine deň däldir?

343. Deňlemelerden x we y hakyky sanlary tapmaly.

1) $(x + y) + (x - y)i = 2 + 4i$;
2) $(x + y) + (x - y)i = 4i$;
3) $(x + y) + (x - y)i = 2$;
4) $(y + 2x) + (2y + 4x)i = 0$;
5) $(x + 1{,}5y) + (2x + 3y)i = 13i$.

344. Aşakdaky deňlemelerden x we y hakyky sanlary tapmaly.

1) $(x - y) + (3x + y)i = 3 - 3i$;
2) $(x - 5y) + (2x - y)i = 6 + 3i$.

345. Kompleks sanlaryň hakyky we hyýaly bölegini aýdyň.

1) $5 + 9i$; 4) $-12 - \sqrt{5}\,i$;
2) $-\pi + 7i$; 5) $\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i$;
3) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}i$; 6) $-\frac{2}{7} + \sqrt[3]{3}\,i$.

346. Hakyky we hyýaly bölekleri degişlilikde indiki sanlar bolan kompleks sanlary ýazyň.

1) 8 we 3; 4) $-\sqrt[3]{5}$ we $\sqrt{5}$;
2) 0,8 we –0,8; 5) –0,4 we $\sqrt{7}$;

3) $-\frac{1}{3}$ we $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\frac{2}{9}$ we -5.

347. Berlen kompleks sanlaryň haýsylarynyň deňdigini görkeziň.

1) $-0,25+\sqrt{9}\,i$;

2) $0,8-0,8i$;

3) $-\frac{1}{4}+3i$;

4) $5-3i$;

5) $\sqrt{25}-\sqrt[3]{8}\,i$;

6) $\frac{4}{5}-\frac{4}{5}i$.

348. Aşakdaky sanlar üçin çatyrymly kompleks sanlary görkeziň.

1) $-0,7+\sqrt{2}\,i$;

2) $0,6-0,4i$;

3) $-\frac{1}{8}+4i$;

4) $28-0i$;

5) $\sqrt{7}+\sqrt[3]{6}\,i$;

6) $\frac{7}{59}-\frac{3}{5}i$.

349. x-yň haýsy bahalarynda aşakdaky kompleks sanlaryň hakyky bölegi nola deň bolýar.

1) $(x-7)+2i$;

2) $(5-x)-6i$;

3) $(0,9x-9)+7i$;

4) $(\sqrt{2}-2x)-2i$.

350. x-yň haýsy bahalarynda aşakdaky kompleks sanlaryň hyýaly bölegi nola deň bolýar.

1) $5+(x-7)i$;

2) $0,8-(6-x)i$;

3) $-12+(2x+8)i$;

4) $\sqrt{2}-(12-3x)i$.

351. Deňliklerden x we y hakyky sanlary tapyň.

1) $(2x)+(3y)i=4+6i$;

2) $x-(2-y)i=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i$;

3) $(x-9)+yi=10-\sqrt{3}\,i$;

4) $(\sqrt{2}\,y-2x)-yi=2-\sqrt{2}\,i$.

§25. Kompleks sanlar üstünde amallar

1. Kompleks sanlary goşmak we aýyrmak

Kesgitleme. ***a* + *bi* we *c* + *di* iki kompleks sanyň jemi diýip (*a* + *c*) + (*b* + *d*)*i* kompleks sana aýdylýar:**

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Başgaça aýdylanda, kompleks sanlar goşulanda olaryň hakyky bölekleri we hyýaly bölekleriniň goşulýarlar.

Mysallar.

1) $(1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (1 + 3)i = 3 + 4i$;

2) $(5 + 6i) + (7 - 6i) = (5 + 7) + (6 - 6)i = 12 + 0i$;

3) $(4 + 9i) + (-4 + i) = (4 - 4) + (9 + 1)i = 0 + 10i$;

4) $(3 - 7\mathrm{i}) + (-3 + 7i) = (3 - 3) + (-7 + 7)i = 0 + 0i$.

Hakyky sanlaryň köplüginde 0 san bolup, ol başga bir islendik hakyky sana goşulanda ony üýtgetmeýär: $a + 0 = a$.

Kompleks sanlaryň köplüginde şeýle san $0 + 0i$ bolup, adatça, ol $0 = 0 + 0i$ ýaly belgilenýär. Hakykatdan-da, her bir $a + bi$ kompleks san üçin

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

Biziň bilşimiz ýaly, jemi nola deň bolan a we $-a$ iki hakyky sana garşylykly sanlar diýilýär. Şoňa meňzeşlikde, $a + bi$ we $-a - bi$ kompleks sanlara hem garşylykly sanlar diýilýär.

Kesgitleme. **$z_1 = a + bi$ we $z_2 = c + di$ iki kompleks sanyň tapawudy diýip z_2 bilen goşulanda z_1 berýän $z_3 = x + yi$ kompleks sana aýdylýar.**

Goý, $a + bi$ we $c + di$ kompleks sanlaryň tapawudy $x + yi$ kompleks sana deň bolsun:

$$(a + bi) - (c + di) = x + yi. \qquad (1)$$

Tapawudyň kesgitlemesine görä, alarys:

$$(c + di) + (x + yi) = a + bi. \qquad (2)$$

Goşmagyň kesgitlemesine görä, alarys:

$$(c + di) + (x + yi) = (c + x) + (d + y)i. \qquad (3)$$

(2) we (3) deňlikleri deňeşdirip, alarys:

$$(c + x) + (d + y)i = a + bi.$$

Kompleks sanlaryň deňlik şerti boýunça deňlemeler sistemasyny ýazyp bileris:

$c + x = a$, $d + y = b$, bu ýerden $x = a - c$; $y = b - d$. x-yň we y-iň bahalaryny (1) deňlikde ornuna goýup, alarys:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Kompleks sanlaryň tapawudy kompleks sandyr.

Mysallar:

1) $(3 + 4i) - (1 + 2i) = (3 - 1) + (4 - 2)i = 2 + 2i$;
2) $(-5 + 2i) - (2 + i) = (-5 - 2) + (2 - 1)i = -7 + i$;
3) $(6 + 7i) - (6 - 5i) = (6 - 6) + (7 + 5)i = 12i$;
4) $(0{,}3 + 2{,}5i) - (-0{,}75 + 1{,}5i) = (0{,}3 + 0{,}75) + (2{,}5 - 1{,}5)i = 1{,}05 + i$;
5) $(\sqrt{2} - 2i) - (\sqrt{2} + 3i) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (-2 - 3i) = -5i$;
6) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{5}i\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)i = \frac{1}{12} + 1\frac{1}{10}i.$

?
1. Iki kompleks san nähili goşulýar?
2. Iki kompleks sanyň tapawudy diýip nämä aýdylýar?
3. Garşylykly sanlar diýip nähili sanlara aýdylýar?

Gönükmeler

352. Kompleks sanlary goşmagy ýerine ýetiriň.

1) $(6 + 4i)$ we $(-9 - 7i)$;
2) $(7 - 7i)$ we $(3 - 6i)$;
3) $(23 - 45i)$ we $(-35 + 10i)$;
4) $(-16 + 4i)$ we $(-1{,}9 - 77{,}7i)$;

5) $(3,7 - 0,5i)$ we $(-9,5 + 10,9i)$;
6) $(67,3 - 38,1i)$ we $(-87,4 + 54,45i)$.

353. Kompleks sanlary aýyrmagy ýerine ýetiriň.
1) $(16 + 0,7i)$ we $(18 + 7,6i)$;
2) $(-0,5 + 2,1i)$ we $(0,2 + i)$;
3) $(56 + 37i)$ we $(66 - 75i)$;
4) $(0,67 + 9,5i)$ we $(-9,75 + 7,5i)$;
5) $(\sqrt{6} - 3i)$ we $(\sqrt{6} + 9i)$;
6) $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}i\right)$ we $\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{15}i\right)$.

354. Kompleks sanlary goşmagy we aýyrmagy ýerine ýetiriň.
1) $(5 + 3i) - (2 + i)$;
2) $(12 - 7i) + (-12 + i)$;
3) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}i\right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}i\right)$;
4) $(2 + i) + (3 + i) + (-4 + 5i)$;
5) $8 + (2 - 9i) + 4i + (-2 - 8i)$;
6) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}i\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}i\right)$.

355. Amallary ýerine ýetiriň.
1) $(103 + 65i) - (-55 - 72i) + (-6 + 23i) - (5 + 11i)$;
2) $(0,8 - 0,2i) + (0,1 - 1,3i) - (1,5 + 0,7i) - (2,3 - 0,6i)$;
3) $(2c - 8di) - ((5c - 2di) + (c - di) - (-4c + 3di))$;
4) $(5,3 + 1,6i) - (3,7 - 7,8i) + (-5,3 + 4,4i) - (-3,9 - - 9,9)i$.

356. Deňlemelerden x we y hakyky sanlary tapmaly.
1) $(5x - 3i) + (2y - xi) = 3 - i$;
2) $(2x - 5i) + (7y + 2xi) = -12 + 3yi$;
3) $(x + 3yi) + \left(\frac{3}{2} + 2xi\right) = 4 + 8i$.

357. Deňlemelerden x we y hakyky sanlary tapmaly.

1) $(0 + 3xi) - (10x + 2yi) = -5y + 3i$;

2) $\left(-3y + \frac{1}{2}xi\right) - (-8x + 5yi) = -2 + 12i$;

3) $\left(\frac{3}{4}x - 2yi\right) - \left(\frac{1}{3}y + 6xi\right) = 0 + 21i$.

358. Berlenlere garşylykly bolan kompleks sanlary ýazyň.

1) $3 + i$; 2) $1 - 5i$; 3) $-2 + 0i$; 4) $0 + 4i$; 5) $7 + i$.

359. Jemde 0 alnar ýaly $3 - 2i$ sana haýsy sany goşmaly?

360. Tapawut 8-e deň bolar ýaly $5 - 3i$ sandan haýsy sany aýyrmaly?

2. Kompleks sanlary köpeltmek we bölmek

$a + bi$ we $c + di$ kompleks sanlar hakyky koeffisiýentli iki agzalaryň köpeldilişi ýaly köpeldilýär, ýagny:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= ac + (ad + bc)i + bdi^2.$$

i sanyň kesgitlemesine görä: $i^2 = -1$. Şoňa görä-de, $bdi^2 = -bd$, diýmek,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (1)$$

Bu formula iki sany kompleks sanyň köpeltmek hasylynyň kesgitlemesiniň esasynda goýulýar.

Kesgitleme. ***a + bi* we *c + di* iki sany kompleks sanyň köpeltmek hasyly diýip, (*ac* – *bd*) + (*ad* + *bc*)*i* kompleks sana aýdylýar.**

Mysallar. Köpeltmegi hasaplalyň:

1) $(3 + 5i) \cdot (3 - 5i) = 3^2 + 5^2 = 34$;

2) $(2 + i) \cdot (2 - i) = 2^2 + 1^2 = 5$;

3) $(4 + \sqrt{3}\,i) \cdot (4 - \sqrt{3}\,i) = 4^2 + (\sqrt{3})^2 = 16 + 3 = 19$;

4) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,i) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}\,i) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 = x + y$;

5) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}i\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{4}{25}=\frac{289}{400}.$

Kesgitleme. **z_1 kompleks sany z_2 kompleks sana bölmekden alnan paý diýip, z_2-ä köpeldilende z_1-i berýän z_3 kompleks sana aýdylýar.**

Hakyky sanlaryň köplüginden alnan her bir a we $\frac{a}{b}$ paý kesgitlenendir. Kompleks sanlaryň köplüginde hem şeýledir.

Teorema. $c + di \neq 0 + 0i$ bolanda $a + bi$ we $c + di$ kompleks sanlar üçin $\frac{a+bi}{c+di}$ paý kesgitlenendir.

Subudy. Eger $c + di \neq 0 + 0i$ bolsa, onda

$$(x+yi)(c+di)=a+bi \qquad (1)$$

deňlemäni kanagatlandyrýan (x, y) hakyky sanlar jübütiniň bardygyny görkezmek gerek. Kompleks sanlary köpeltmegiň düzgüni boýunça alarys:

$$(x+yi)(c+di)=(xc-yd)+(xd+yc)i.$$

Şeýlelikde, (1) deňligi indiki görnüşde ýazmak bolar:

$$(xc-yd)+(xd+yc)i=a+bi.$$

Iki kompleks sanyň hakyky bölekleri we hyýaly bölekleri degişlilikde, deň bolanlarynda olar deňdirler. Şoňa görä-de:

$$\begin{cases} cx-dy=a, \\ dx+cy=b. \end{cases} \qquad (2)$$

Bu sistemany çözüp, alarys:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Diýmek,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

bolmalydygy alnar.

1-nji mysal. $\frac{9-7i}{2-3i}$ paýy tapmaly.

Goý, $\frac{9-7i}{2-3i} = x + yi$ bolsun. Onda

$$(x + yi)(2 - 3i) = 9 - 7i;$$
$$2x + 2yi - 3xi - 3yi^2 = 9 - 7i;$$
$$(2x + 3y) + (2y - 3x)i = 9 - 7i.$$

Bu ýerden

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9, \\ -3x + 2y = -7. \end{cases}$$

Bu sistemany çözüp, tapýarys: $x = 3$, $y = 1$. Şoňa görä-de,

$$\frac{9-7i}{2-3i} = 3 + i.$$

Mysallar. Kompleks sanlaryň paýyny tapyň.

1) $$\frac{2+5i}{3-2i} = \frac{(2+5i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)} = \frac{(6-10)+(4+15)i}{9+4} =$$
$$= \frac{-4+19i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{19}{13}i;$$

2) $$\frac{3+i}{i} = \frac{(3+i)(-i)}{i(-i)} = -3i - i^2 = 1 - 3i;$$

3) $$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2} = \frac{1-2i-1}{13} = -i;$$

4) $$\frac{5}{1-2i} = \frac{5+10i}{5} = 1 + 2i;$$

5) $$\frac{4i}{3-2i} = \frac{4i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-8+12i}{9+4} = -\frac{8}{2} + \frac{12}{13}i;$$

6) $$\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}\,i} = \frac{(-2\sqrt{3}+i)(1-2\sqrt{3}\,i)}{(1+2\sqrt{3}\,i)(1-2\sqrt{3}\,i)} =$$
$$= \frac{-2\sqrt{3}+12i+i+2\sqrt{3}}{1+12} = \frac{13i}{13} = i.$$

1. Iki kompleks san nähili köpeldilýär?
2. Iki kompleks san nähili bölünýär?

Gönükmeler

361. Hasaplamaly.

1) $(5 + i)(-2 + 3i)$;
2) $(0,5 + 0,2i)(2 + 3i)$;
3) $(7 + 4i)^2$;
4) $(5 + i)(15 - 3i)$.

362.

1) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ab + bc)i$;

2) $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

aňlatmalar nämäni aňladýarlar.

363. Kompleks sanlary köpeltmegi ýerine ýetiriň.

1) $(5 + 8i) \cdot (4 + 5i)$;
2) $(\sqrt{5} - 4i)\cdot(\sqrt{5} + i)$;
3) $9i \cdot 4i \cdot \sqrt{3}$;
4) $(6 - 2i) \cdot (-4)$;
5) $(-8 - 12i) \cdot (-5i)$;
6) $(2 + 7i) \cdot (2 - 7i)$;
7) $(8 + i) \cdot (8 - i)$;
8) $(5 + \sqrt{2}\,i)\cdot(5 - \sqrt{2}\,i)$;
9) $(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i)\cdot(\sqrt{a} - \sqrt{b}\,i)$;
10) $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i\right)\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i\right)$.

364. Kompleks sanlary köpeltmegi ýerine ýetiriň.

1) $(3 + 7i) \cdot (2 + i)$;
2) $(\sqrt{2} - i)\cdot(\sqrt{3} + \sqrt{2}\,i)$;
3) $\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{4}i\right)\cdot\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}i\right)$;
4) $(\sqrt{2} - i)\cdot(1 + 2i)$;
5) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)$;
6) $(4 + \sqrt{3}\,i)\cdot(2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i)$;
7) $(2a - bi) \cdot (a + 3bi)$.

365. Kompleks sanlary bölmegi ýerine ýetiriň.

1) $(1 + \sqrt{3}\,i):(1 - \sqrt{3}\,i)$;
2) $(3 + 4i):(5 - 2i)$;
3) $5 :(1 + 2i)$;
4) $(5 - 7i):(\sqrt{3} + i)$;

5) $(5-\sqrt{2}\,i):(5+\sqrt{2}\,i)$; 7) $(1-i):(1+i)$.

6) $(2+3i):(2-3i)$;

366. Indiki sanlary özara çatyrymly kompleks sanlaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyň:

1) a^2+9b^2; 4) x^4+y^4; 7) $3+x$;

2) $a+25$; 5) 17; 8) $b^2+\frac{16}{25}$;

3) $0{,}64+0{,}49x^2$; 6) $4+x^2$; 9) $7+\frac{1}{9}$;

10) -4.

367. Indiki aňlatmalary iki agzalaryň köpeltmek hasyly görnüşinde aňladyň.

1) x^2+16; 3) $49a^2+4b^2$; 5) $y+25$;

2) $25+100$; 4) $c+144$; 6) $\frac{9}{25}x^2+\frac{5}{9}y^2$.

368. Kompleks sanlaryň paýyny tapyň.

1) $\frac{8+3i}{4-i}$; 4) $\frac{9-i}{9+i}$; 7) $(5-2i):(5+2i)$;

2) $\frac{5+i}{i}$; 5) $\frac{-3\sqrt{5}+i}{1+3\sqrt{5}\,i}$; 8) $(3-i):\ 7i$.

3) $\frac{6}{4-9i}$; 6) $\frac{6i}{2-3i}$;

369. Hasaplamaly. $\frac{5+0i}{-4+3i}$.

370. Hasaplamaly.

1) $(3+4i)(6-5i)$; 4) $\frac{2+i}{2-i}$;

2) $(7-2i)(3{,}5-i)$; 5) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$;

3) $\frac{0+4i}{1+i}$; 6) $\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}$.

3. Hyýaly birligiň derejeleri. Otrisatel sanlardan kwadrat kök almak

Kesgitlemä görä, i sanyň birinji derejesi i sanyň özüdir, onuň ikinji derejesi bolsa –1 sandyr: $i^1 = i$, $i^2 = -1$.

i sanyň has ýokary derejeleri aşakdaky ýaly tapylýar:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i,\ i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i,\ i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$$

we ş.m. n islendik natural san bolanda, aşakdaky ýaly bolýandygy äşgärdir:

$$i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1;\ i^{4n+3} = -i.$$

Meselem, $i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1;$

$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i.$$

Mysallar.

1) $i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = i^{16+1} = i;$
2) $i^{34} = i^{4 \cdot 8 + 2} = i^{32+2} = -1;$
3) $i^{55} = i^{52+3} = -i.$

Mysallar.

1) $(2 + 5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = -21 + 20i;$
2) $(3 + 2i)^3 = 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = -9 + 46i;$
3) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i;$
4) $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i;$
5) $(1 - i)^4 = ((1 - i)^2)^2 = (-2i)^2 = -4;$
6) $(1 + i)^6 = ((1 + i)^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i;$
7) $(1 - i)^{10} = ((1 - i)^2)^5 = (-2i)^5 = -32i^5 = -32i.$

Biziň bilşimiz ýaly, $i^2 = -1$. Şunuň bilen birlikde

$$(-i)^2 = (-1 \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1.$$

Şeýlelik bilen, –1-iň kwadrat köküniň iň bolmanda iki bahasy bardyr, ýagny i we $-i$. Belki kwadraty –1-e deň bolan başga-da sanlar bardyr?

Bu meseläni anyklamak üçin, $a + bi$ kompleks sanyň kwadraty –1-e deň diýip guman edeliň. Şonda $(a + bi)^2 = -1$, $a^2 + 2abi - b^2 = -1$.

Iki kompleks sanyň hakyky bölekleri we hyýaly bölekleri degişlilikde deň bolanlarynda, olar diňe şonda deňdirler. Şoňa görä-de,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1, \\ ab = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) sistemanyň ikinji deňlemesine görä, a we b sanlaryň iň bolmanda biri nola deň bomalydyr. Eger $b = 0$ bosa, onda birinji deňlemeden $a^2 = -1$ alynýar. a san hakyky sandyr we şoňa görä-de, $a^2 \geq 0$. Otrisatel däl a^2 san -1 otrisatel sana deň bolup bilmez. Şonuň üçin $b = 0$ deňligiň bolmagy mümkin däldir. Diýmek, $a = 0$ diýip kabul edilýär, emma şonda sistemanyň birinji deňlemesinden alarys:

$$-b^2 = -1,\ b = \pm 1.$$

Diýmek, kwadraty -1-e deň bolan kompleks sanlar diňe i we $-i$ sanlar bomalydyr. Bu şertleýin şeýle ýazylýar: $\sqrt{-1} = \pm i$.

Şoňa meňzeş degşirmeler geçirip, kwadraty $-a$ otrisatel sana deň bolan diňe iki sanyň bardygyna göz ýetirip bileris. Şeýle sanlar $i\sqrt{a}$ we $-i\sqrt{a}$ sanlardyr. Başgaça aýdylanda $\pm\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}$ deňlikler her bir $a > 0$ san üçin adalatlydyrlar.

Bu ýerde $\sqrt{a}$ arifmetiki, ýagny položitel kökdür, meselem: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, şoňa görä-de, $\sqrt{-4} = \pm 2i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$ we ş.m.

Biz öň otrisatel diskriminantly kwadrat deňlemelere duş gelenimizde şeýle deňlemeleriň kökleri ýok diýip aýdypdyk. Indi bolsa otrisatel diskriminantly kwadrat deňlemeleriň kompleks kökleri bardyr diýip bileris. Bu kökler bize mälim bolan formula boýunça alynýar. Meselem, $x^2 + 2x + 5 = 0$ deňleme berilsin, onda ol deňleme

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i.$$

köklere eýedir.

Diýmek, berlen deňlemäniň iki köki bardyr: $x_1 = -1 + 2i$; $x_2 = -1 - 2i$. Bu kökler özara çatyrymlydyrlar. Olaryň jemi –2-ä, köpeltmek hasyly bolsa 5-e deňdir, diýmek, Wiýetiň teoremasy adalatlydyr.

Mysallar. Deňlemäni çözmeli:

$$1)\ x^2 - 4x + 5 = 0.$$

Çözülişi. Alarys: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$; $x_{1,2} = 2 \pm i$.

$$2)\ z^2 + 6z + 13 = 0.$$

Çözülişi. Alarys: $z_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4}$; $z_{1,2} = -3 \pm 2i$.

$$3)\ 4x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Çözülişi. Alarys: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{8} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-7}}{8}$.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{8} = -\frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{7}}{8}i.$$

Kökleri boýunça hakyky koeffisiýentli kwadrat deňlemäni düzmäge degişli mysala garalyň.

Goý, $x_1 = 3 - \dfrac{1}{2}i$, $x_2 = 3 + \dfrac{1}{2}i$ bolsun. Onda Wiýetiň teoremasyna görä alarys:

$$x_1 + x_2 = \left(3 - \frac{1}{2}i\right) + \left(3 + \frac{1}{2}i\right) = 6;$$

$$x_1 x_2 = \left(3 - \frac{1}{2}i\right)\cdot\left(3 + \frac{1}{2}i\right) = 9 - \frac{1}{4}i^2 = 9\frac{1}{4}.$$

x_1 we x_2 sanlar $x^2 - 6x + 9\dfrac{1}{4} = 0$ kwadrat deňlemäniň kökleri bolýar. Şeýlelikde, gözlenýän kwadrat deňleme $4x^2 - 24x + 37 = 0$ bolýar.

?

1. i sanyň has ýokary derejeleri nähili tapylýar?
2. Otrisatel sanlardan kök nähili alynýar?

Gönükmeler

371. Derejä göteriň.

1) i^{21};
2) i^{42};
3) i^{78};
4) $(1 + 2i)^6$;
5) $(3 + i)^2$;
6) $(1 - i)^{20}$.

372. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň.

1) $3i^3$;
2) $2i^7$;
3) $7i^{24}$;
4) $5i^{94}$;
5) $10i^{111}$;
6) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$;
7) $(3 + 2i)^2$;
8) $(1 + i)^4$;
9) $(1 + i)^3$;
10) $(2 + \sqrt{3}\,i)^2$;
11) $(1 - i)^{12}$;
12) $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$.

373. Deňlemäni çözüň.

1) $x^2 - 12x + 45 = 0$;
2) $2x^2 - x + 3 = 0$;
3) $3x^2 + 7x + 5 = 0$;
4) $3x^2 + 2x + 27 = 0$;
5) $x^2 + 6x + 18 = 0$;
6) $x^2 - 2ix - 5 = 0$.

374. Hasaplamaly.

1) $i^6 + i^{16} + i^{25} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$;
2) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^n (n > 4)$;
3) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$.

375. a-nyň haýsy hakyky bahasynda $3i^3 - 2ai^2 + (1 - a)i + 5$ san:

1) hakykydyr;
2) hyýalydyr;
3) nola deňdir?

376. Kwadraty aşakdakylara deň bolan ähli kompleks sanlary tapmaly.

1) i; 2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{i}i$.

377. Kwadrat deňlemeleri çözmeli.

1) $x^2-2x+2=0$;

2) $4x^2+4x+5=0$;

3) $x^2-14x+74=0$.

378. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45. \end{cases}$$

379. Hasaplamaly.

1) $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53}$;

2) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^{100}$;

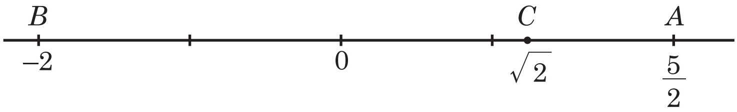
3) $\frac{1}{i^2}$.

380. Deňlemeler sistemasyny çözmeli.

$$\begin{cases} 2x - 3x = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$$

§26. Kompleks sanlaryň geometriki şekillendirilişi

Hakyky sanlary san göni çyzygynyň nokatlary arkaly aňladyp bolýandygy mälimdir. Şunlukda, her bir hakyky sana san göni çyzygynyň ýeke-täk nokady degişlidir. Meselem, $\frac{5}{2}$ hakyky sana 0 başlangyç nokatdan sagda $\frac{5}{2}$ uzynlyk birligiçe uzaklykda durýan A nokat degişlidir; –2 hakyky sana 0 nokatdan çepde 2 uzynlyk birligiçe uzaklykda durýan B nokat degişlidir; $\sqrt{2}$ hakyky sana 0 nokatdan sagda $\sqrt{2}$ uzynlyk birligiçe uzaklykda durýan C nokat degişlidir. Tersine, san göni çyzygynyň her bir nokadyna kesgitli hakyky san degişlidir. Meselem, A we B nokatlara degişlilikde, $\frac{5}{2}$



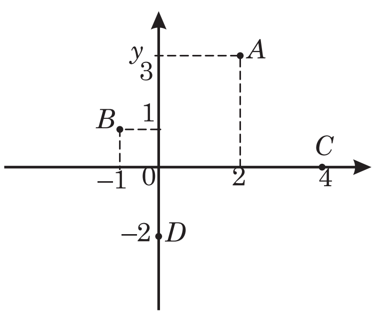
39-njy surat

we –2 rasional sanlar degişlidir, C nokada bolsa $\sqrt{2}$ irrasional san degişlidir (*39-njy surat*).

Şeýlelikde, hemme hakyky sanlaryň köplügi san göni çyzygynyň hemme nokatlarynyň köplügi bilen özara birbelgili degişlilikdedir.

Hakyky sanlary nokatlar arkaly san göni çyzygynyň üstünde şekillendirip bolşy ýaly, kompleks sanlary-da tekizligiň nokatlary arkaly geometrik aňlatmak bolar.

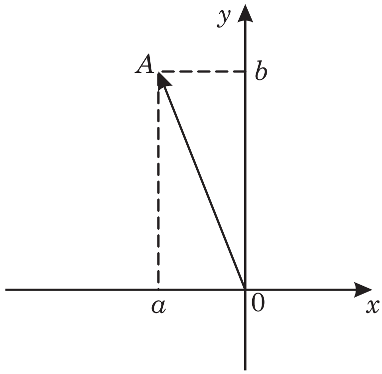
Her bir $a + bi$ kompleks sana tekizligiň koordinatalary $(a,\ b)$ bolan nokadyny degişli edip goýalyň. Meselem, $2 + 3i$ sana koordinatalary (2, 3) bolan A nokady, $-1 + i$ sana koordinatalary (–1, 1) bolan B nokady; $4+0i$ sana koordinatalary (4, 0) bolan C nokady; $0 - 2i$ sana (0,–2) bolan D nokady degişli edip goýalyň (*40-njy surat*).



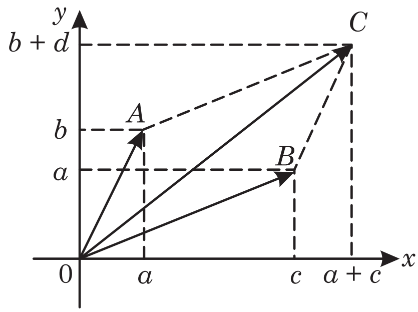
40-njy surat

Tekizligiň her bir nokadynyň kesgitli koordinatalary bardyr. Şoňa görä-de, saýlanyp alnan tekizligiň her bir nokadyna käbir kompleks san degişli bolar. Meselem, koordinatalary (2, 3) bolan A nokada $2 + 3i$ san (*40-njy surat*); koordinatalary (–1, 1) bolan B nokada $-1 + i$ san; koordinatalary (4, 0) bolan C nokada $4 + 0i$ san; koordinatalary (0, –2) bolan D nokada $0 - 2i$ san degişlidir.

Diýmek, her bir $a + bi$ kompleks sana tekizligiň kesgitli ýekeje nokady, ýagny koordinatalary $(a,\ b)$ bolan nokady degişlidir. Tersine, tekizligiň her bir $(\alpha,\ \beta)$ nokadyna bolan kesgitli ýekeje kompleks san, ýagny $\alpha + \beta i$ san degişlidir.



41-nji surat



42-nji surat

Şeýlelik bilen, ähli kompleks sanlaryň köplügi tekizligiň ähli nokatlarynyň köplügi bilen özara birbelgili degişlilikde bolýar.

Tekizligiň her bir A nokadyny koordinatalar başlangyjyndan çykýan we A nokadynda gutarýan $\overrightarrow{OA}$ wektor bilen baglanyşdyrmak bolar (*41-nji surat*).

Her bir $a + bi$ kompleks sany (a, b) koordinatalary bolan $\overrightarrow{OA}$ wektor hökmünde geometriki şekillendirmek mümkindir. Şonda $\overrightarrow{OA}$ wektoryň koordinatalary A nokadyň koordinatalary ýaly, ýagny (a, b) bolar. Ähli kompleks sanlar bilen koordinatalar başlangyjyndan çykýan tekizligiň ähli wektorlary arasyndaky degişliligiň hem özara birbelgilidigini görkezmek aňsatdyr.

Kompleks sanlaryň wektor şekillendirilişini peýdalanyp, biziň iki sany kompleks sanyň jemi üçin kabul eden kesgitlemämizi düşündirmek aňsatdyr:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Mälim bolşy ýaly, wektorlar goşulanda olaryň degişli koordinatalary goşulýarlar . Şoňa görä-de, eger $\overrightarrow{OA}$ wektoryň koordinatalary (a, b) , $\overrightarrow{OB}$ wektoryň koordinatalary (c, d) bolsalar (*42-nji surat*), onda olaryň jemi bolan $\overrightarrow{OC}$ wektoryň koordinatalary $(a+c, b + d)$ bolar. Bu wektor $a + bi$ we $c + di$

kompleks sanlaryň jemi bolan $(a + c) + (b + d)i$ kompleks sana degişlidir.

? 1. Hakyky sanlar san göni çyzygynda nähili şekillendirilýär?
2. Kompleks sanlar koordinatalar tekizliginde nähili şekillendirilýär?

Gönükmeler

381. Berlen kompleks sanlary geometriki şekillendirmek.

1) $1 + i$; 2) $-2 + 3i$; 3) $5 + 0i$; 4) $0 + 5i$.

382. Goý, M nokat tekizlikde $a + bi$ kompleks sany şekillendirsin. Şol tekizlikde aşakdaky kompleks sanlary şekillendirýän nokatlary gurmaly.

1) $a - bi$; 3) $-a - bi$; 5) $0 + bi$; 7) $0 - bi$.
2) $-a + bi$; 4) $a + 0i$; 6) $-a + 0i$;

383. Goý, M nokat tekizlikde $a - bi$ kompleks sany şekillendirsin. Aşakdaky sanlary aňladýan nokatlar şol tekizligiň niresinde ýerleşendir:

1) $3a + 0i$; 3) $0 - bi$; 5) $4a + 3bi$?
2) $-5a + 0i$; 4) $0 + 2bi$;

384. Sanlary tekizlikde şekillendiriň.

1) $1 - i$; 2) $-3 - 2i$; 3) $-6 + 0i$; 4) $0 - 4i$.

385. Aşakdaky kompleks sanlary geometriki şekillendirmeli.

1) $z_1 = 5 + 5i$; 4) $z_4 = -6{,}5 + i$;
2) $z_2 = -6 + 8i$; 5) $z_5 = 5 - 2{,}5i$;
3) $z_3 = -3 - 3{,}5i$; 6) $z_6 = 7i$.

386. Iki kompleks sanyň jeminiň we tapawudynyň geometriki şekillendirmesini beriň.

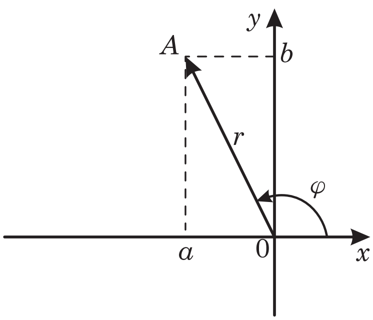
1) $(1 + 5i) + (5 + i)$; 2) $2i + (-1 - 2i)$;

3) $(-4 + 3i) + 2$;
4) $(3 + 2i) + (5 - 4i) + (-1 + 2i)$;
5) $(-3 + 5i) - (-4 + 2i)$;
6) $(6 + 5i) - (-3 + 3i)$.

387. Kompleks sanlary goşmagy we aýyrmagy geometriki şekillendirmäniň üsti bilen ýerine ýetiriň.
1) $(2 + 3i) + (1 + 4i)$;
2) $(-4 + i) - (1 + 4i)$;
3) $(-2 + 3i) - (-5 + 3i)$;
4) $(4 + 5i) - (2 - 3i)$;
5) $(-4 + 2i) + (4 - 2i)$;
6) $(2 + 4i) + (3 - 5i) + (-1 + 6i)$.

388. Aşakdakylary geometriki şekillendirmeli.
1) $(1 + 2i) + (1 - 2i) = 2 + 0i$;
2) $(3 - 4i) + (-1 + 2i) = 2 - 2i$.

§27. Kompleks sanlaryň ýazgysynyň trigonometrik görnüşi



43-nji surat

Goý, $a + bi$ kompleks sana koordinatalary (a, b) bolan $\overrightarrow{OA}$ wektor degişli bolsun. Bu wektoryň uzynlygyny r bilen, onuň *ox* oky bilen emele getirýän burçuny φ bilen belgiläliň (*43-nji surat*). Sinusyň we kosinusyň kesgitlemesine görä:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi;\ \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Bu ýerden $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$. Soňky aňlatmalary ulanyp, $a + bi$ kompleks sany indiki görnüşde ýazmak bolar:

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Mälim bolşy ýaly, islendik wektoryň uzynlygynyň kwadraty onuň koordinatalarynyň kwadratlarynyň jemine deňdir. Şoňa görä-de, $r^2 = a^2 + b^2$, bu ýerden $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Şeýlelikde, islendik $a + bi$ kompleks sany

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1}$$

görnüşde ýazmak bolar, bu ýerde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ burç bolsa

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \tag{2}$$

deňliklere görä kesgitlenýär.

Şeýle görnüşdäki ýazga kompleks sanyň trigonometrik görnüşdäki ýazgysy diýilýär.

r sana $a + bi$ kompleks sanyň moduly, φ burça bolsa, onuň argumenti diýilýär.

Eger $a + bi$ kompleks san nola deň bolmasa, onda onuň moduly položiteldir, eger-de $a + bi = 0$ bolsa, onda $a = b = 0$ bolup, $r = 0$ bolar.

Eger $a + bi$ kompleks san nola deň bolmasa, onda onuň argumenti 2π ululyk kratny burça çenli takyklykda (2) formula arkaly kesgitlenýär. Eger-de $a + bi = 0$ bolsa, onda $a = b = 0$. Bu ýagdaýda $r = 0$ alyp, φ argument üçin islendik burçy saýlap almagyň bolýandygyna (1) formuladan düşünmek aňsatdyr: sebäbi islendik burçda $0(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$.

z kompleks sanyň modulyny, adatça, $|z|$ argumentini bolsa argz ýaly belgileýärler. Kompleks sanlary trigonometrik görnüşde aňlatmaga degişli birnäçe mysala garap geçeliň.

1-nji mysal. $1 + i$ kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.

Bu sanyň r modulyny we φ argumentini tapalyň:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Diýmek, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, bu ýerden $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$.

Şeýlelikde, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right)$, bu ýerde n- islendik bitin san. Adatça, kompleks sanyň argumentiniň tükeniksiz köp bahalaryndan 0 we 2π aralykdakylaryny saýlap alýarlar. Garalýan mysalda $\dfrac{\pi}{4}$ şeýle bahadyr. Şonuň üçin:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

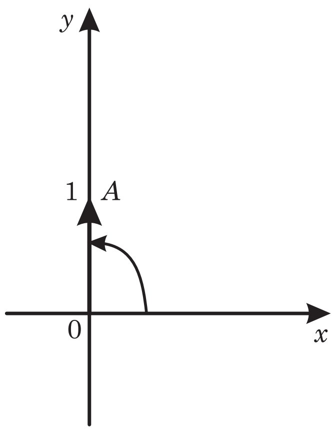
2-nji mysal. $\sqrt{3} - i$ kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.

Alýarys: $r = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$.

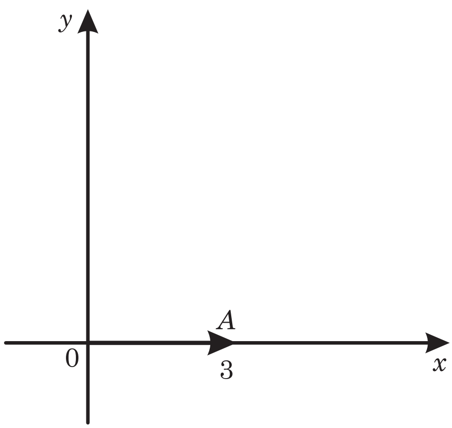
Şonuň üçin 2π ululyga kratny burça çenli takyklykda $\varphi = \dfrac{11}{6}\pi$.

Diýmek, $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$.

3-nji mysal. i kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.



44-nji surat



45-nji surat

i kompleks sana y okuň 1 ordinataly A nokadynda gutarýan OA wektor degişlidir (*44-nji surat*). Şeýle wektoryň uzynlygy 1-e deňdir, onuň absissalar oky bilen emele getirýän burçy bolsa $\frac{\pi}{2}$ deňdir.

Şoňa görä, $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

4-nji mysal. 3 kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.

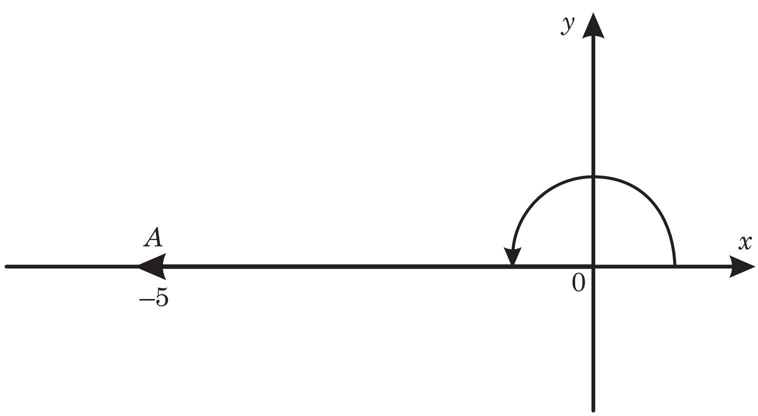
3 kompleks sana x okunyň 3 abssissaly nokadynda gutarýan $\overrightarrow{OA}$ wektor degişlidir (*45-nji surat*).

Şeýle wektoryň uzynlygy 3-e deňdir, onuň abssissalar oky bilen emele getirýän burçy bolsa 0-a deňdir. Şoňa görä $3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.

5-nji mysal. –5 kompleks sany trigonometrik görnüşde ýazmaly.

–5 kompleks sana x okunyň –5 abssissaly nokadynda gutarýan $\overrightarrow{OA}$ wektor degişlidir (*46-njy surat*). Şu wektoryň uzynlygy 5, onuň abssissalar oky bilen emele getirýän burçy bolsa π deňdir.

Şoňa görä-de, $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.



46-njy surat

1. Kompleks sanyň trigonometrik görnüşi nähili ýazylýar?
2. Kompleks sanyň moduly nähili kesgitlenýär?
3. Kompleks sanyň argumenti diýip nämä aýdylýar?

Gönükmeler

389. Aşakdaky kompleks sanlaryň modullaryny we argumentlerini kesgitläp, olary trigonometrik görnüşde ýazmaly:

1) $2 + 2i$; 2) $6 - 6i$; 3) 25; 4) –4; 5) 3i; 6) $-2i$.

390. Kompleks sanlaryň modulyny we argumentini tapyň.

1) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$;
2) $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$;
3) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
4) $z = -1 + \sqrt{3}\,i$;
5) $z_1 + z_2$, bu ýerde $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -3 + 2i$;
6) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

391. Kompleks sanlary trigonometrik görnüşde ýazmaly.

1) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$;
2) $z = \sqrt{3} - i$;
3) $z = -1 - \sqrt{3}\,i$;
4) $z = 5i$;
5) $z = -2i$;
6) $z = i$;
7) $z = 2$;
8) $z = -3$;
9) $z = 6$.

392. Trigonometrik görnüşde ýazylan kompleks sanlary algebraik görnüşde aňlatmaly.

1) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $z = 40\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

3) $z = 5\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$;

4) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $z = 2(\cos 0 + i\sin 0)$;

6) $z = 7(\cos\pi + i\sin\pi)$.

393. Tekizlikde r modullary we φ argumentleri aşakdaky şertleri kanagatlandyrýan kompleks sanlary şekillendirýän nokatlar köplügini görkezmeli.

1) $r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4}$; 4) $2 < r < 3$;

2) $r \leq 3$; 5) $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$;

3) $r < 3$; 6) $1 < r < 2;\quad 70 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$.

394. φ we $-\varphi$ burçlar bir wagtyň özünde kompleks sanyň argumenti bolup bilermi?

395. Berlen kompleks sanlaryň modullaryny we argumentlerini kesgitläp, olary trigonometrik görnüşde aňlatmaly.

1) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$;

2) $2(\cos 20° - i\sin 20°)$.

§28. Trigonometrik görnüşde berlen kompleks sanlary köpeltmek we bölmek

Eger kompleks sanlar trigonometrik görnüşde berlen bolsa, onda olary köpeltmek we bölmek amatlydyr. Şu barada aşakdaky teoremalar bardyr.

1-nji teorema. Iki kompleks sanyň köpeltmek hasylynyň moduly olaryň modullarynyň köpeltmek hasylyna, argumenti bolsa, olaryň argumentleriniň jemine deňdir.

Subudy. Goý, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ we $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ bolsun, onda $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) = r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2))$.

Ýöne

$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$,

$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Şoňa görä-de, $z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Bu bolsa $z_1 \cdot z_2$ kopeltmek hasylynyň modulynyň z_1 we z_2 sanlaryň modullarynyň köpeltmek hasylyna, şol köpeltmek hasylynyň argumentiniň bolsa, z_1 we z_2 sanlaryň argumentleriniň jemine deňdigini aňladýar.

1-nji teorema subut edildi.

Mysallar.

1) $2(\cos 130° + i\sin 130°) \cdot 3(\cos 230° + i\sin 230°) =$
$= 6(\cos 360° + i\sin 360°) = 6.$

2) $5(\cos 47° + i\sin 47°) \cdot 4(\cos 13° + i\sin 13°) = 20(\cos 60° +$
$+ i\sin 60°) = 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}\,i.$

Subut edilen teoremanyň islendik n sandaky köpelijiler üçin dogrudygyny belläliň:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\ldots r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) =$$
$$= r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)).$$

Hususan-da, köpelijileriň ählisi özara deň bolsalar, onda alarys:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Bu formula **Muawryň formulasy** diýilýär. $r = 1$ bolanda ol indiki görnüşi alýar:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

2-nji teorema. Iki kompleks sanyň paýynyň moduly bölüniji bilen bölüjiniň modullarynyň paýyna deňdir; nola deň bolmadyk iki kompleks sanyň paýynyň argumenti bölüniji bilen bölüjiniň argumentleriniň tapawudyna deňdir.

Subudy. $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ kompleks sany $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$ kompleks sana bölmekden ýetýän paýy $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ arkaly belgiläliň. Onda $z = \frac{z_1}{z_2}$ ýa-da $z \cdot z_2 = z_1$.

Şoňa görä-de,

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$.

Bu deňligiň çep bölegindäki köpeltmegi ýerine ýetirip, alarys:

$$r\,r_2(\cos(\varphi + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_2)) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Noldan tapawutly iki sany deň kompleks sanyň modullary deňdirler, argumentleri bolsa diňe 2π ululyga kratny bolan burça tapawutlanyp bilerler. Şonuň üçin soňky deňlikden $r\,r_2 = r_1$; $\varphi + \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ gelip çykýar, bu ýerde n-käbir bitin san. Diýmek,

$$r = \frac{r_1}{r_2};\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi n.$$

Noldan tapawutly islendik kompleks sanyň argumenti diňe 2π ululyk kratny bolan burça çenli takyklykda kesgitlenýändir. Şonuň üçin z kompleks sanyň φ argumenti $\varphi_1 - \varphi_2$-ä deň diýip hasap etmek bolar.

Teorema subut edildi.

Mysallar.

1) $$\frac{2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{3(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)} = \frac{2}{3}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1 + i);$$

2) $$\frac{\cos 70^\circ + i\sin 70^\circ}{\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ} = (\cos(-30^\circ) + i\sin(-30^\circ)) =$$

$$= \cos 30^\circ - i\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

?

1. Trigonometrik görnüşde berlen kompleks sanlar nähili köpeldilýär?
2. Trigonometrik görnüşde berlen kompleks sanlar nähili bölünýär?
3. Muawryň formulasy nähili ýazylýar?

Gönükmeler

396. Köpeltmegi ýerine ýetirmeli.

1) $5(\cos 40° + i\sin 40°) \cdot 3(\cos 50° + i\sin 50°)$;

2) $2(\cos 20° + i\sin 20°) \cdot 7(\cos 100° + i\sin 100°)$;

3) $4\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right) \cdot 6\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$;

4) $7\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \cdot$

$\cdot 2\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$.

397. Bölmegi ýerine ýetirmeli.

1) $\frac{\cos 130° + i\sin 130°}{\cos 40° + i\sin 40°}$; 3) $\frac{-\cos 100° + i\sin 100°}{\cos 40° - i\sin 40°}$;

2) $\frac{\cos 130° - i\sin 130°}{\cos 40° + i\sin 40°}$; 4) $\frac{2(\cos 107° + i\sin 107°)}{5(\cos 47° + i\sin 47°)}$.

398. Kompleks san aşakdaky sanlara köpeldilende, onuň moduly we argumenti nähili üýtgär.

1) i; 2) $-i$; 3) $2i$.

399. Hasaplamaly.

1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}i\right)^{100}$;

2) $(\sqrt{3} + 1)^{50}$;

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8}$.

400. Kompleks san aşakdaky sanlara köpeldilende, onuň moduly we argumenti nähili üýtgär.

1) 4; 2) –3i; 3) –5.

401. Trigonometrik görnüşde berlen kompleks sanlary köpeltmegi we bölmegi ýerine ýetiriň.

1) $z_1 = 0{,}5(\cos 75° + i\sin 75°)$;
$z_2 = 6(\cos 35° + i\sin 35°)$;

2) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $z_1 = 10(\cos 107° + i\sin 107°)$;
$z_2 = 13(\cos 42° + i\sin 42°)$;

4) $z_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$; $z_2 = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}$;

5) $z_1 = 3\sqrt{2}(\cos 100° + i\sin 100°)$;

$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 5° + i\sin 5°)$;

6) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot(\sqrt{3} + i)}{i - 1}$.

§29. Kompleks sanlardan kök almak

Noldan tapawutly $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sanyň n derejeli köki bar we ol $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ sandyr diýip guman edeliň. Şonda

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Muawryň formulasyndan peýdalanyp, alarys:

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Noldan tapawutly iki sany deň kompleks sanyň modullary deňdir, argumentleri bolsa diňe 2π ululyga kratny bolan burça tapawutlanyp biler.

Şoňa görä-de, $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, bu ýerden $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = \dfrac{\phi + 2k\pi}{n}$, bu ýerde k-islendik bitin san bolup biler. Hususan, $k = 0$ bolanda $\theta = \dfrac{\varphi}{n}$; $k = 1$ bolanda $\theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$; $k = 2$ bolanda $\theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{4\pi}{n}$; we ş.m. $k = n - 1$ bolanda $\theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

$k = n$, $n + 1$, $n + 2$ we ş.m. bolanda ýokarda ýazylanlardan 2π ululyk kratny bolan burçlara tapawutlanan bahalary alnar. Şonuň üçin k-nyň bu bahalary hiç bir täze kompleks sanlary berip bilmezler.

k-nyň otrisatel bahalarynda hem hiç bir täze kompleks sanlary alyp bilmejegimizi görkezmek aňsatdyr.

Şeýlelikde, eger $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sanyň n-nji derejeli köki bar bolsa, onda ol diňe aşakdaky bahalary alyp biler:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin n\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right);$$

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Muawryň formulasyny peýdalanyp, şu α_k, k=0,1,..., $n-1$sanlaryň her biriniň $\alpha_k^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ baglanyşygy kanagatlandyrýandygyny we şona görä $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sanyň n derejeli kökudigini gös-göni barlamak bilen takyklamak aňsatdyr.

Şeýlelik bilen, noldan tapawutly her bir kompleks sanyň n derejeli köküniň laýyk n sanyň dürli bahalary bardyr.

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks sanyň n derejeli köküniň ähli bahalary geometriki jähtden merkezi koordinatalar başlangyjynda ýatýan $\sqrt[n]{r}$ radiusly töweregiň nokatlary ýaly aňladylýar Goňşy nokatlar göni çyzyk kesimleri arkaly yzly-yzyna birikdirilse, onda dogry n-burçluk alnar.

Mysal. i sanyň 4-nji derejeli köküniň ähli bahalaryny tapmaly.

i sany $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ görnüşde aňladyp, ähli kökleriň modulynyň $\sqrt[4]{1} = 1$ bolýanlygyny, argumentleriniň bolsa $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}$ ýa-da $\frac{\pi}{8}$; $\frac{5}{8}\pi$; $\frac{9}{8}\pi$; $\frac{13}{8}\pi$ bolmalydyklaryny taparys. Şoňa görä-de, i sanyň 4-nji derejeli kökleri şu sanlar bolar: $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$; $\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$; $\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$. Trigonometrik tablisalary peýdalanmak bilen bu kökleri has anyk görnüşde ýazmak mümkindir.

?

1. Noldan tapawutlanýan iki sany deň kompleks sanyň modullary deňmi?
2. Noldan tapawutlanýan iki sany deň kompleks sanyň argumentleri deňmi?
3. Kompleks sanlardan kök nähili alynýar?

Gönükmeler

402. Berlen kökleriň ähli bahalaryny tapmaly.

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt{\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ}$.

403. Deňlemeleri çözmeli.

1) $x^5 = a$(a – hakyky san); 2) $x^5 = i$.

404. z kompleks sanyň n-nji derejeli ähli köklerini netijede, geometriki progressiýa emele geler ýaly edip ýerleşdirmegiň mümkindigini subut etmeli. Şol progressiýanyň maýdalawjysyny tapyň.

405. Berlen kökleriň ähli bahalaryny tapmaly.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[3]{1+i}$.

406. Deňlemäni çözmeli: $x^4 + 1 = 0$.

§30. Hakyky koeffisiýentli 3-nji we 4-nji derejeli iki agzaly deňlemeler

$ax^3 = b$ görnüşli deňlemelere 3-nji derejeli iki agzaly deňlemeler diýilýär, bu ýerde $a \neq b$ we b – erkin hakyky sanlar.

Şeýle deňlemeleriň çözülişine käbir hususy mysallarda seredeliň.

1-nji mysal. $x^3 = 8$ deňlemäni çözmeli.

Bu deňlemäni $x^3 - 8 = 0$ görnüşde ýazalyň. Kublaryň tapawudynyň formulasyndan peýdalanyp, $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$ alarys. Eger $x - 2 = 0$ bolsa, onda $x = 2$, eger-de $x^2 + 2x + 4 = 0$ bolsa, onda $x = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$. Şeýlelikde, berlen deňlemaniň üç köki bardyr:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -1 - \sqrt{3}\,i;\ x_3 = -1 + \sqrt{3}\,i,$$

bulardan diňe $x = 2$ kök hakykydyr.

2-nji mysal. $-\frac{1}{2}x^3 = 4$ deňlemäni çözmeli. Bu deňlemäniň iki bölegini hem –2-ä köpeldip, biz $x^3 = -8$ deňlemä gelýäris. Bu deňleme öňki seredilen $x^3 = 8$ deňlemeden az tapawutlanýar. Şonuň üçin biz onuň çözüwini düşündirişsiz berýäris:

$$x^3 + 8 = 0,\ (x+2)(x^2-2x+4) = 0;\ x_1 = -2;$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{3}\,i,\ x_3 = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

3-nji mysal. $\frac{1}{3}x^3 = -2$ deňlemäni çözmeli.

Bu deňlemäniň iki bölegini hem 3-e köpeldip, $x^3 = -6$ alarys, bu ýerden $x^3 + 6 = 0$. Indi 6 sana $\sqrt[3]{6}$ sanyň kuby hökmünde garap, $x^3 + 6$ iki agzany köpeldijilere dagydýarys:

$$(x^3 + 6) = (x + \sqrt[3]{6})[x^2 - \sqrt[3]{6}\,x + (\sqrt[3]{6})^2].$$

Diýmek, $x + \sqrt[3]{6} = 0$ ýa-da $x^2 - \sqrt[3]{6}\,x + (\sqrt[3]{6})^2 = 0$. Bu deňlemeleriň birinjisiniň $x_1 = -\sqrt[3]{6}$ köki bardyr. Ikinji deňlemäniň kökleri:

$$x_{2,3} = \frac{\sqrt{(\sqrt[3]{6})^2 - 4(\sqrt[3]{6})^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{6} \pm (\sqrt[3]{6}) \cdot i\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Şeýlelikde, berlen deňlemäniň üç köki bardyr:

$$x_1 = -\sqrt[3]{6};\ x_2 = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 + i\sqrt{3});\ x_3 = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1 - \sqrt{3}i).$$

Bu üç köküň diňe biri hakyky sandyr.

$ax^4 = b$ görnüşli $a \neq 0$, b – hakyky sanlar deňlemelere hakyky koeffisiýentli 4-nji derejeli iki agzaly deňlemeler diýilýär.

4-nji mysal. $x^4 = 16$ deňlemäni çözmeli. Şu deňlemäni $x^4 - 16 = 0$ görnüşde ýazalyň. Bu deňlemäniň çep bölegini köpeldijilere dagydalyň:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x + 2)(x - 2)(x^2 + 4).$$

Bu ýerden $x^4 = 16$ deňlemäniň aşakdaky kökleriniň bolýandygy gelip çykýar: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2i$; $x_4 = 2i$.

Bu kökleriň diňe ikisi hakyky sanlardyr: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.

5-nji mysal. $x^4 = -16$ deňlemäni çözmeli.

Hakyky sanlaryň köplüginde bu deňlemäniň kökleri ýokdur, çünki islendik hakyky sanyň jübüt derejesi otrisatel däldir. Kompleks sanlaryň köplüginde bolsa, bu deňlemäniň dürli 4 köküniň bardygyny görkezeliň.

Berlen deňlemäni $x^4 + 16 = 0$ görnüşde ýazalyň.

$x^4 + 16$ aňlatma x^2 we 4 sanlaryň kwadratlarynyň jemi hökmünde garamak mümkindir. Bu jemi doly kwadrata çenli dolduryp alarys:

$$x^4 + 16 = x^4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 = (x^2 + 4)^2 - 8x^2.$$

Indi iki sanyň kwadratlarynyň tapawudynyň formulasyny peýdalanarys:

$$(x^2 + 4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 4 + \sqrt{8}x^2) \cdot (x^2 + 4 - \sqrt{8}x^2) =$$

$$= (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) \cdot (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4).$$

Diýmek, $x^4 + 16 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) \cdot (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)$.

Onda $x^4 + 16 = 0$ deňlemäni indiki görnüşde ýazmak bolar:

$$(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4) \cdot (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) = 0.$$

Eger $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0$ bolsa, onda

$$x_{1,2} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4}$$

ýa-da

$$x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \; x_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

eger-de $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$ bolsa, onda $x_{3,4} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4}$ ýa-da $x_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i, \; x_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Biz $x^4 = -16$ deňlemäniň 4 köküni aldyk. Olaryň arasynda hakyky kök ýokdur.

6-njy mysal. $3x^4 = -6$ deňlemäni çözmeli. Bu deňleme geçen mysaldaky deňlemeden az tapawutlanýar. Şonuň üçin onuň çözülişini düşündirişsiz berýäris: $x^4 = -2$ ýa-da $x^4 + 2 = 0$

$$x^4 + 2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 = x^4 + (\sqrt{2})^2 + 2x^2\sqrt{2} - 2x^2\sqrt{2} =$$

$$= (x^2 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 = (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{\sqrt{8}}x)^2 =$$

$$= (x^2 + \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2}).$$

Eger $x^2 - \sqrt[4]{8}x + \sqrt{2} = 0$ bolsa, onda

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{(\sqrt[4]{8})^2 - 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt{-2\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{-\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8}i}{2}.$$

Eger-de $x^2 + \sqrt[4]{8}x^2 + \sqrt{2} = 0$ bolsa, onda

$$x_{3,4} = \frac{\sqrt[4]{8} \pm \sqrt[4]{8}i}{2}.$$

Şeýlelik bilen, berlen deňlemäniň 4 sany dürli köki bardyr. Olaryň arasynda hakyky kök ýokdur.

?
1. Hakyky koeffisiýentli 3-nji derejeli iki agzaly deňlemeler nähili çözülýär?
2. Hakyky koeffisiýentli 4-nji derejeli iki agzaly deňlemeler nähili çözülýär?

Gönükmeler

407. Deňlemeleri çözmeli.

1) $3x^3 = 81$; 2) $x^3 = -27$; 3) $3x^3 = 24$; 4) $-4x^3 = \frac{1}{2}$.

408. $x^3 = 64$ deňlemäniň ähli kökleriniň jemini tapmaly.

409. Deňlemeleri çözmeli.

1) $x^4 = 81$; 2) $x^4 = -81$; 3) $3x^4 = 5$.

410. $x^4 = -7$ deňlemäniň ähli kökleriniň köpeltmek hasylyny tapmaly.

411. Deňlemeleri çözmeli.

1) $x^3 = 3$; 2) $x^3 = -5$; 3) $x^4 = 2$; 4) $x^4 = -3$.

412. $x^4 = 4$ deňlemäniň ähli kökleriniň jemini tapmaly.

IV baby gaýtalamak üçin gönükmeler

413. Amallary ýerine ýetiriň.

1) $(4 - 3i) + (-2 + i)$;

2) $(5 + 6i) + 7 - 6i$;

3) $(-07 + 0{,}3i) + (0{,}9 - 1{,}7i)$;

4) $(-0{,}4 - 2{,}1i) + (0{,}6 + 3i)$;

5) $\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$;

6) $(2 + 3i)(6 - 5i)$;

7) $(-3 + 2i) \cdot 2 + (7 - 5i) \cdot 3$;

8) $(0{,}2 - 0{,}3i)\ (0{,}4 + 0{,}5i)$;

9) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i\right)$;

10) $(2 - 3i)^2$;

11) $(-1 + i)^2$;

12) $3 + i + (-2 + 5i)(-1 - 2i)$;

13) $(3 - 2i)(1+4i) + (-6 - i)$;

14) $(4 - 5i)(-2 + 3i) + (1 + 2i)(-3 + 4i)$;

15) $(-7 + i) - (2 - 3i)$;

16) $(5 + i)\ (15 - 3i)$;

17) $\frac{3 - 2i}{5}$.

414. Deňlemelerden x we y hakyky sanlary tapyň.

1) $-\frac{2}{y} + xi = 3$;

2) $x^2 - 3(x+1) + 2i = yi - 5$;

3) $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - y$;

4) $(2 - i)x + (1 + i)y = 5 - i$;

5) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$;

6) $(x + 3yi) + \left(\frac{3}{2}y + 2xi\right) = 4 + 8i$;

7) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$;

8) $x+y+ixy=1$;

9) $(-3y+0{,}5xi)-(-8x+5yi)=-2+9{,}5i$;

10) $x+y+ixy=\mathrm{i}$.

415. Droblary gysgaldyň.

1) $\frac{9m^2+4n^2}{3m-2in}$; 2) $\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}$; 3) $\frac{a+b}{\sqrt{a}-i\sqrt{b}}$.

416. Amallary ýerine ýetiriň.

1) $\frac{1}{1-i}$; 2) $\frac{5}{1+2i}$; 3) $\frac{2+i}{2-i}$; 4) $\frac{3i}{1+i}$; 5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$;

6) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$; 7) $\frac{m\sqrt{n}-n\sqrt{mi}}{n\sqrt{m}+m\sqrt{ni}}$;

8) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}+2i$; 9) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

417. Deňlemäni çözüň.

1) $(2-5i)z=2+5i$; 2) $(2+5i)z=2-5i$.

418. Köpagzanyň bahasyny tapyň.

1) $x^{25}-8x^{14}+5x^4-4x^2-10$, $x=i$ *bolanda*;

2) x^3+x^2+x+1, $x=1+i$ *bolanda*.

419. Deňlemäni çözüň.

1) $x^2=-16$; 2) $x^2=-2$; 3) $3x^2=-5$; 4) $x^2+0{,}09=0$.

420. Deňlemäni çözüň.

1) $x^2-2x+5=0$;

2) $3x^2+4x+3=0$;

3) $x^2-8x+20=0$;

4) $5x^2-4x+8=0$.

421. Kökleri boýunça kwadrat deňlemäni düzüň.

1) $x_1 = 3 + 2i$; $x_2 = 3 - 2i$;

2) $x_1 = -1 + 4i$; $x_2 = -1 - 4i$.

422. Berlen köki boýunça hakyky koeffisiýentli kwadrat deňlemäni düzüň.

1) $2 - i$; 2) $-1 + \frac{1}{2}i$; 3) $\sqrt{5} - i\sqrt{2}$; 4) $0{,}5 - 1{,}5i$.

423. Kompleks sanyň modulyny tapyň.

1) 3; 2) i; 3) $-5i$; 4) -2; 5) $1 + i$; 6) $3 - 4i$;

7) $-\sqrt{3} + i$; 8) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

424. Nokatlaryň arasyndaky uzaklygy tapyň.

1) 0 *we* 4; 2) 5 *we* -2; 3) 3 *we* $4i$; 4) -7 *we* i;

5) $5i$ *we* $-3i$; 6) 0 we $1 - i$; 7) $1 + i$ *we* $2 + 3i$;

8) $3 - 2i$ *we* $1 + 4i$.

425. Amallary ýerine ýetiriň.

1) $2(\cos 130° + i\sin 130°) \cdot 4(\cos 140° + i\sin 140°)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

3) $\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$;

4) $5(\cos 120° + i\sin 120°)(\cos 80° + i\sin 80°) \cdot 4(\cos 70° +$ $+ i\sin 70°)$;

5) $(\cos 3 + i\sin 3)(\cos 2 + i\sin 2)$;

6) $\dfrac{6(\cos 40° + i\sin 40°)}{2(\cos(-50°) + i\sin(-50°))}$.

426. Amallary ýerine ýetiriň.

1) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$; 2) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\beta - i\sin\beta}$;

3) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1 - i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$;

4) $(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

5) $\dfrac{-\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\beta - i\sin\beta}$; 6) $\dfrac{-\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ}{-\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ}$.

427. Muawryň formulasyny ulanyp, toždestwolaryň dogrudygyny subut ediň.

1) $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$; 2) $\cos 3\varphi = 4\cos 3\varphi - 3\cos\varphi$;

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi$; $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$.

428. Hasaplaň.

1) $\left(6\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + i\sin\dfrac{7\pi}{8}\right)\right)^4$;

2) $(2(\cos 20° + i\sin 20°))^{12}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{100}$;

4) $(\sqrt{3} + i)^{50}$.

Taryhy maglumatlar
n-nji derejeli algebraik deňleme

Elementar matematika diňe iki derejeli: birinji we ikinji derejeli algebraik deňlemelere has doly seredýär.

Bu deňlemeleriň

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0),$$
$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

görnüşleri bardyr.

Kompleks sanlaryň oblastynda 1-nji derejeli islendik algebraik deňlemäniň diňe bir köki bardyr, 2-nji derejeli islendik algebraik deňlemäniň bolsa diňe iki köki bardyr. Ýokary algebrada islendik derejeli deňlemeler öwrenilýär, n-nji derejeli algebraik deňlemäniň şeýle görnüşi bardyr:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (1)$$

bu ýerde x – näbelli ululyk, a_0, $a_{1,\ldots}$ a_n bolsa berlen kompleks sanlar, özem $a_0 \neq 0$. Şonuň ýaly deňlemäniň kökleriniň bolup biljekdigi we olaryň sany baradaky mesele köp wagtlap algebranyň esasy meselesi bolup durdy. 1799-njy ýylda görnükli nemes matematigi Gauss (1777 – 1855) şu teoremany subut etdi: ***n*-nji derejeli islendik algebraik deňlemäniň iň bolmanda bir kompleks köki bardyr.**

Şu tassyklama matematika algebranyň esasy teoremasy ady bilen girdi. Gaussyň subudyndan soň bu teoremany subut etmegiň örän köp başga tärleri hödürlendi. Gaussyň özi hem ýene üç subudy hödürledi. Şu teoremanyň şu wagta çenli dowam edýän subutlarynyň örän çalşyrymlydygy zerarly, olar biziň okuw kitabymyzda garalyp bilinmez.

$$(x-1)^3(x-2)=0$$

deňlemä garalyň. Onuň diňe iki, ýagny 1 we 2 kököniň bardygyna düşünmek kyn däldir. Emma bu kökler deň hakly ýagdaýda däldir. 2 köke degişli bolan $x-2$ köpeldiji deňlemäniň çep bölegine birinji derejede girýär, 1 köke degişli bolan $x-1$ köpeldiji bolsa üçünji derejede girýär. 2 köke garalýan deňlemäniň ýönekeý köki, 1 köke bolsa onuň kratny köki, takygragy, 3-e kratny bolan köki diýýärler.

Algebranyň esasy teoremasy algebraik deňlemäniň iň bolmanda bir kompleks kököniň bardygyna güwä geçýär. Ýöne welin, şu teoremadan ugur alyp, **eger her bir kök onuň kratnylygy ýaly hasaplansa, onda *n* derejeli islendik algebraik deňlemäniň laýyk *n* kompleks kököniň bardygyny** subut etmek bolar. Eger şonda (1) deňlemäniň kökleri $x_1, x_{2,\dots,}\ x_n$ deň bolsa, onda şu deňlemäniň çep bölegi aşakdaky görnüşi alar:

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

(Kwadrat deňleme bilen deňeşdiriň!)

1-nji we 2-nji derejeli deňlemeler üçin umumy formulalar çykarylyp, olar arkaly şol deňlemeleriň köklerini tapmak mümkindir. Meselem, $ax^2+bx+c=0$ deňleme üçin

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

formula şeýle formuladyr.

3-nji we 4-nji derejeli deňlemeler üçin hem şeýle formulalar alyndy. Emma ol formulalar örän uzakdyr, şonuň üçin olar bu ýerde berilmeýär. Has ýokary derejeli erkin algebraik deňlemeler üçin bolsa, norwegiýa matematigi Abeliň (1802–1829) görkezişine görä, umumy aýdylanda, şeýle formulalary düzmek mümkin däldir. Deňlemäniň radikallarda çözülmek mümkinçiliginiň şertleri baradaky meseläniň gutarnykly çözüwini görnükli fransuz matematigi Ewarist Galua (1811–1832) berdi.

Diýmek, 4-nji derejeden ýokary derejeli algebraik deňlemeleri hemişe takyk çözüp durmak başartmaýar. Şeýle-de bolsa, häzirki zaman matematikasynyň şeýle deňlemeleri takmyn çözmegiň örän effektiw metodlary bardyr. Bu metodlar hasaplaýyş matematikanyň baplarynda beýan edilýär.

«Hyýaly» sanlara otrisatel sanlaryň kwadrat kökleri diýip ilkinji ýatlama baryp XVI asyra degişlidir. Italýan alymy Kardano (1501-1576) özüniň 1545-nji ýylda çap eden işinde $x^3 - 12x + 16 = 0$ deňlemäni çözmäge synanyşyp $\sqrt{-243}$ aňlatma gelipdir. Şu aňlatma arkaly deňlemäniň $x_1 = x_2 = 2x_3 = -4$ hakyky kökleri getirilipdir. Şeýlelik bilen, Kardanonyň işinde hyýaly sanlar hasaplamalardaky aralyk çlenler hökmünde ýüze çykypdyr.

1629-njy ýylda gollandiýa alymy Jirar (1595 – 1632) n derejeli islendik algebraik deňlemäniň laýyk n köküniň bardygyny ilkinji bolup aýtdy. Bu tassyklamany berk subut etmek oňa başartmandyr. Biziň bilşimiz ýaly, bu berk subudy diňe 1799-njy ýylda Gauss ýerine ýetirdi. Şeýle-de, Jiraryň dogry gipotezany aýdyp, onuň hakyky köklerden başga kompleks kökleri-de hasaba almalydygyny nygtap geçmegi ähmiýetlidir.

XVIII asyryň ortalaryna çenli kompleks sanlar käbir matematikleriň ylmy işlerinde diňe epizodiki ýüze çykypdyr. XVIII asyryň ortasyndan başlap, Dalamber, Eýler we Lagranje gidrodinamikanyň käbir meselelerini çözmekden ötri kompleks argumentli funksiýalary üstünlikli peýdalanypdyrlar. Üýtgeýän kompleks argumentli funksiýanyň kömegi bilen geografiki kartalary düzmek baradaky meseleler, şeýle hem tüýs matematiki meseleler çözülýär. XVIII asyryň ahyryna çenli kompleks sanlaryň hemme esasy häsiýetleri öwrenilipdir. Bu sanlar matematikanyň iň güýçli guraly bolup galýar.

Şeýle-de, XVIII asyryň matematikleri kompleks sanlaryň tebigatyna doly düşünip bilmändirler. Olar bu sanlary hiç bir obýektiw mazmuny bolmadyk hyýaldaky sanlar diýip hasaplapdyrlar.

Diňe XVIII asyryň ahyrynda, matematiki wektorlar berk girenden soň, kompleks sanlara ýönekeýje geometriki integpretasiýa bermek we olaryň üstünde geçirilýän amallaryň düzgünlerini düşündirmek mümkin bolupdyr. Bulary ilkinji gezek daniýaly Wessel (1745–1818) ýerine ýetiripdir. Wesseliň hünäri boýunça matematik bolmandygyny bellemek gyzyklydyr. Onuň kompleks sanlara geometrik düşündiriş bermek baradaky derňewleri köp wagtlap bilinmändir, olara diňe XIX asyryň ikinji ýarymynda üns berlipdir.

Diňe Gaussyň işleri çapdan çykandan soňra matematikler kompleks sanlary doly inkär edip başlapdyrlar.

Üýtgeýän kompleks ululygyň funksiýalarynyň nazaryýetiniň döredilmegi XVIII we XIX asyrlaryň matematikasynyň örän ajaýyp üstünlikleriniň biri boldy. Bu nazaryýet häzir amaly matematikada esasy rollaryň birini oýnaýar.

JOGAPLAR

296. 1) hawa; 2) ýok; 3) hawa; 4) ýok: **297.** 1) hawa; 2) ýok; 3) ýok; 4) hawa; **298.** 1)4; 2) 0; –2; 3) 13; 4) 5; –2; **299.** 1) 9: 2) 6; 3) 6; 4) 2; 34; **300.** 1) 3; 2) 5; 3) 4; 4) 8; **301.** 1) hawa; 2) ýok; 3) hawa; 4) ýok; **303.** 1) hawa; 2) ýok; 3) hawa; 4)ýok; **304.** 1) ýok; 2) ýok; 3) ýok; 4) ýok; **305.** 1) ýok; 2) ýok; 3) hawa; 4) hawa; **306.** 1) 4; 2) 1; $\frac{1}{2}$; 3) 1; $-\frac{8}{3}$; 4) -11; 24; **307.** 1) $\frac{11}{3}$; 2) 2; 3) 3; 4; 4) 3; **308.** 1) 7; 8; 2) 0; 3) 0; 4) 0; **309.** 1) $\frac{5}{4}$; 2) 1; –1; 3) 1; $-\frac{1}{3}$; 4) 1; 2; **310.** 1) 2; 2) –2; 2; 3) 2; $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{100}$; e; **311.** 1) 10^3; 10^{-6}; 2) $\frac{1}{3}$; 81; 3) 5; 4) 6; **312.** 1) Ø; 2) 4; $\frac{1}{4}$; 3) 3; 4) $\frac{1}{25}$; **313.** 1) –2;1; 2) –1; 3; 3) –2; -2; $-\frac{3}{2}$; 4) –3; ±4; 5) 1; $1\pm\sqrt{3}$; 6) –1; 7) –4; –1; 2; 8) 0;5; 9) $-\frac{1}{4}$; 10) $\frac{1}{6}$; **314.** 5) -1; 2;3; 6) –1; 2; 7) 1;2; 8) $-\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$;3; **315.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; ± 1; 3) –2; –1; 4) $-\frac{1}{3}$;2; **316.** 3) 1;2; 4) $-1\pm\sqrt{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; 8) –6; –4; $\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$; 11) 0; 1;–1;–2; 12)1;2; 13) 0;1; 14) –1; 2; **317.** 1) 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$; 2) 2;6; 3) Ø; 4) –4;4; 5) 64; 6) 1; 7) 2; 8) 1; 9) 4; –1; 10) 2; –7; **318.** 1) 1; $-\frac{1}{8}$; 2) 1; 3) 1; 4) 1;2;10; 5) 5; 6) $\frac{1681}{144}$; 7) $\frac{841}{144}$; 8) $\frac{1}{4}$; **319.** 1) (5;2),(–2; –5); 2) (1;5),(5;1); 3) (2;3),(–2, –3); 4) (3;5),(–3; –5); 5) (–4; –5),(5;4); 6) (2;0),(0; –2); 7) (0;0),(4;2),(–2,–4); 8) (3;5),(5,3); 9) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; 10) (1;–1),(–1;1), $\left(\frac{3}{\sqrt{41}};\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{41}};-\frac{5}{\sqrt{41}}\right)$; **320.** 1) $\left(\frac{2}{3};3\right)$;$\left(-\frac{2}{3};-3\right)$, (1;2) (–1;–2); 2) (2;3),(–2; –3); 3) (1;5),(5;1),(2;3),(3;2); 4) (2;3), (3;2); 5) (1;2); 6) (–2;3), (3; –2); 7) $\left(2;\frac{1}{2}\right)$,$\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$,$\left(\frac{\sqrt{10}}{5};-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,$\left(-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$; 8) (1;2), (–1; –2),(2;1), (–2; –1); 9) (8;2), (–8; –2), $\left(5,-\frac{17}{2}\right)$,$\left(-5,\frac{17}{2}\right)$; 10) (3;2), (1,4), (–3; –4), (–5; –2); **321.** 1) (–1;0)∪ (0;1)(1;2); 2) (2;∞); 3) (3;∞); 4) (2;∞); 5) (0;1); 6) (0;2); 7) (–∞;0)∪(2;3,5)∪(4;∞); 8) (2;∞); 9) $\left(\frac{14}{5};6\right)$; 10) $\left(0;\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};2\right)$; **322.** 1) [2;3) ∪ (3;4]; 2) (1;4); 3) (2;∞);

4) $\left(0;0,5\right)\cup[2\sqrt{3};\infty)$; 5) $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(243;\infty\right)$; 6) (0,01; ∞); 7) (1; ∞); 9) $\left(-\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\sqrt{3}\right)$; 10) ($2^{-28}$; 1); **323.** 1) [–0,5; 12); 2) (1; ∞); 3) (3; ∞); 4) (–∞;4); **324.** 1) (–3;1); 2) [–∞;0)∪(4,5; ∞); 3) [3;∞); 4) $\left[4;4\frac{9}{16}\right]$; **325.** 1) [4; 5]; 2) Ø; 3) Ø; 4) (–5; 5); **326.** 1) (–∞; –2)∪[20,5; ∞); 2) [–1; 4]; 3) (–1; 3]∪[3,5; 7,5); 4) (0; 8); **327.** 1) (–∞; –2)∪(0; 1)∪(1; ∞); 2) $\left(-2;-1\right]\cup\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right]$; 3) $\left(-\infty;-4+2\sqrt{5}\right)$; 4) $\left(-\infty;-\frac{5}{6}\right)\cup[3;\infty)$; 5) (2; 8); 6) (–2; 0)∪[0; 2); **330.** 1) (0; 0,5)∪[2; 3); 2) (–∞; 0)∪(1; 2)∪(2; 3)∪(4; ∞); **413.** 1) 2 – 2i; 2) 12; 3) 0,2 – 1,4i; 4) 0,2 + 0,9i; 5) $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}i$; 6) 27 + 8i; 7) 15 – 1i; 8) 0,23 – 0,02i; 9) $\frac{2}{5}-\frac{1}{30}i$; 10) –5 – 12$i$; 11) –2$i$; 12) 15; 13) 5 + 9$i$; 14) –4 + 20$i$; 15) – 5 + 4$i$; 16) 78; 17) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}i$.

414. $x=0, y=-\frac{2}{3}$; 2) $x = 1$, $y = 2$ ýa-da $x = 2$, $y = 2$; 3) $x = 1$, $y = 2$; 4) $x = 2$, $y = 1$; 5) $x=-\frac{4}{11}, y=\frac{5}{11}$; 6) $x = $ t, $y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}t$. 7) $x = 4,5$, $y = 18$; 8) $x = 0$, $y = 1$ ýa-da $x = 1$, $y = 0$; 9) $x = –1$, $y = –2$; 10) Şeýle hakyky sanlar ýok. **415.** 1) $3m + 2ni$; 2) $\sqrt{x}-i$; 3) $\sqrt{a}+\sqrt{bi}$.

416. 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; 2) 1 – 2i; 3) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$; 4) 1,5 + 1,5i; 5) $\frac{18}{13}-\frac{1}{3}i$; 6) 2i; 7) –$i$; 8) 0,7 + 2,1$i$; 9) $2-2i\sqrt{3}$. **417.** 1) $-\frac{21}{29}+\frac{20}{29}i$. 2) $-\frac{21}{29}-\frac{20}{29}i$.

418. 1) 7 + i; 2) 5i. **419.** 1) ±4i; 2) $\pm\sqrt{2i}$; 3) $\pm\sqrt{\frac{5}{3}i}$; 4) ±0,3i. **420.** 1) 1±2i; 2) $-\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$; 3) 4 ± 2$i$; 4) 0,4±1,2$i$. **421.** 1) $x^2 - 6x + 13 = 0$; 2) $x^2 + 2x + 17 = 0$. **422.** 1) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 2) $x^2 + 2x + 1,25 = 0$. 3) $x^2-2\sqrt{5x}+7=0$; 4) $x^2 - x + 2,5 = 0$. **423.** 1) 3; 2) 1; 3) 5; 4) 2; 5) $\sqrt{2}$; 7) 2; 8) 2. **424.** 1) 4; 2) 7; 3) 5; 4) $5\sqrt{2}$; 5) 8; 6) $\sqrt{2}$; 7) $\sqrt{5}$; 8) $2\sqrt{10}$. **425.** 1) –8i; 2) $1,5\sqrt{3}+4,5i$; 3) –1 + i; 4) –20i; 5) cos5 + $i$sin5; 6) 3i. **426.** 1) cos2φ + $i$sin2φ; 2) cos($\varphi + \beta$) + $i$sin($\varphi + \beta$); 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\varphi-15^\circ\right)+i\sin\left(2\varphi-15^\circ\right)\right)$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)$; 5) – cos($\varphi + \beta$) + $i$sin($\varphi – \beta$); 6) i.

428. 1) –1296i; 2) $-2^{11}-2^{11}\sqrt{3i}$; 3) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Mazmuny