수학 - 삼각함수 (상세 풀이)

주어진 문제의 그림과 조건에 따라 삼각형 PBC 넓이의 최댓값을 구하는 과정을 아주 자세히 설명합니다. 각 단계별 논리와 계산 과정을 최대한 상세하게 풀어서, 이해를 돕고자 합니다.

1. 문제 분석 및 기본 조건 정리

주어진 조건:

- 삼각형 ABC에서 $\overline{AD}:\overline{DB} = 3:2$ 인 점 D가 선분 AB 위에 있습니다.
- 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원 O가 있습니다.
- 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라고 합니다.
- $\sin A : \sin C = 8:5$ 입니다.
- $\triangle ADE : \triangle ABC = 9:35$ 입니다.
- 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 7입니다. ($R=7$)
- $\overline{AB} < \overline{AC}$ 입니다.
- 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값을 구해야 합니다.

그림에 표시 및 추가 정보 도출:

1. **원 O의 성질:** 원 O는 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나므로, $\overline{AD}$는 원 O의 반지름입니다. 또한, 점 E도 원 O 위에 있으므로, $\overline{AE}$도 원 O의 반지름입니다. 따라서 $\overline{AD} = \overline{AE}$ 입니다.
2. **사인 법칙:** 삼각형 ABC에서 사인 법칙을 적용하면,

   $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R$

   여기서 R은 외접원의 반지름이고, $R=7$이므로,

   $\overline{BC} = 14\sin A,\ \ \overline{AB} = 14\sin C,\ \ \overline{AC} = 14\sin B$

   입니다.
3. **선분 비율:** $\overline{AD}:\overline{DB} = 3:2$ 이므로, $\overline{AB}$를 5등분했을 때 $\overline{AD}$는 3칸, $\overline{DB}$는 2칸에 해당합니다. 따라서,

   $\overline{AD} = \frac{3}{5}\overline{AB},\ \ \overline{DB} = \frac{2}{5}\overline{AB}$

   입니다.

2. $\triangle ADE$와 $\triangle ABC$의 넓이 비 활용 (상세 풀이)

$\triangle ADE$와 $\triangle ABC$는 각 A를 공통으로 가지고 있습니다. 삼각형의 넓이는 "($\frac{1}{2}$ × 두 변의 길이 × 끼인각의 사인)"으로 구할 수 있습니다. 따라서,

- $\triangle ADE$의 넓이: $[\triangle ADE] = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\sin A$
- $\triangle ABC$의 넓이: $[\triangle ABC] = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$

두 삼각형의 넓이 비는 다음과 같이 표현됩니다.

$$\frac{[\triangle ADE]}{[\triangle ABC]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin A}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A}$$

$\frac{1}{2}$ 과 $\sin A$는 공통 인자이므로 약분됩니다.

$$\frac{[\triangle ADE]}{[\triangle ABC]} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

문제에서 $\triangle ADE : \triangle ABC = 9 : 35$ 라고 주어졌으므로, $\frac{[\triangle ADE]}{[\triangle ABC]} = \frac{9}{35}$ 입니다.

또한, 1단계에서 $\overline{AD} = \frac{3}{5}\overline{AB}$ 임을 구했으므로, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$ 입니다.

이 값들을 넓이 비 식에 대입하면,

$$\frac{9}{35} = \frac{3}{5} \times \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ 를 구하기 위해 양변에 $\frac{5}{3}$ 를 곱합니다.

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{9}{35} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{7}$$

따라서 $\overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 7$ 입니다. 즉, $\overline{AC}$를 7등분했을 때 $\overline{AE}$는 3칸에 해당합니다.

$\overline{AE} = \overline{AD}$ (원 O의 반지름) 이므로, $\overline{AD} = \frac{3}{5}\overline{AB}$ 와 $\overline{AE} = \frac{3}{7}\overline{AC}$ 라는 중요한 관계를 얻었습니다.

3. $\sin A : \sin C = 8 : 5$ 와 $\overline{AB} < \overline{AC}$ 조건 활용 (상세 풀이)

$\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이므로, 비례상수 k ($k > 0$)를 도입하여 $\sin A = 8k$, $\sin C = 5k$ 로 나타낼 수 있습니다.

$\overline{AB} < \overline{AC}$ 이고, $\overline{AB} = 14\sin C$, $\overline{AC} = 14\sin B$ 이므로, $14\sin C < 14\sin B$, 즉 $\sin C < \sin B$ 입니다.

삼각형의 내각의 합은 180° 이므로, $A + B + C = 180^\circ$ 입니다. A, B, C는 모두 삼각형의 내각이므로, $0^\circ < A < 180^\circ$, $0^\circ < B < 180^\circ$, $0^\circ < C < 180^\circ$ 입니다.

핵심: 여기서 $A = 90^\circ$ 라고 $*$가정하지 않고$*$ 문제를 해결해야 합니다. 이전 풀이와의 차이점이 바로 이 부분입니다.

4. 변수 설정 및 관계식 도출

원 O의 반지름을 r이라고 설정합니다. 그러면 $\overline{AD} = \overline{AE} = r$ 입니다.

$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 이므로, $\overline{DB} = \frac{2}{3}r$ 입니다. 따라서 $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = r + \frac{2}{3}r = \frac{5}{3}r$ 입니다.

$\overline{AE} : \overline{AC} = 3 : 7$ 이고 $\overline{AE} = r$ 이므로, $\overline{AC} = \frac{7}{3}r$ 입니다. $\overline{CE} = \overline{AC} - \overline{AE} = \frac{7}{3}r - r = \frac{4}{3}r$ 입니다. 편의상 $\overline{CE} = x$ 라고 놓으면, $x = \frac{4}{3}r$ 입니다.

5. 넓이 비를 이용한 방정식 수립

$\triangle ADE$와 $\triangle ABC$의 넓이를 다시 한번 r과 $\sin A$를 이용하여 표현합니다.

- $[\triangle ADE] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin A = \frac{1}{2} r^2 \sin A$
- $[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} r \cdot \frac{7}{3} r \cdot \sin A = \frac{35}{18} r^2 \sin A$

주어진 넓이 비 $\triangle ADE : \triangle ABC = 9 : 35$ 를 이용하면,

$$\frac{[\triangle ADE]}{[\triangle ABC]} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \sin A}{\frac{35}{18} r^2 \sin A} = \frac{9}{35}$$

$\sin A$ 와 r^2은 0이 아니므로 약분할 수 있습니다.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{35}{18}} = \frac{9}{35}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{18}{35} = \frac{9}{35}$$

$$\frac{9}{35} = \frac{9}{35}$$

이 식은 항등식이므로, 넓이 비 자체만으로는 r 값을 구할 수 없습니다. 다른 관계식을 찾아야 합니다.

6. 사인 법칙과 코사인 법칙 활용

$\triangle ABC$에서 사인 법칙을 적용하면,

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R = 14$$

$\overline{AB} = \frac{5}{3} r$ 이고, $\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이므로, $\sin A = 8k$, $\sin C = 5k$ 라고 하면,

$$\frac{\overline{BC}}{8k} = \frac{\frac{5}{3} r}{5k} = 14$$

$$\frac{\overline{BC}}{8} = \frac{\frac{1}{3} r}{1} \implies \overline{BC} = \frac{8}{3} r$$

이제 $\triangle ABC$에서 코사인 법칙을 적용합니다. $\angle ACB = \theta$ 라고 하면,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\theta$$

$\overline{AB} = \frac{5}{3} r$, $\overline{BC} = \frac{8}{3} r$, $\overline{AC} = \frac{7}{3} r$ 를 대입하면,

$$(\frac{5}{3} r)^2 = (\frac{8}{3} r)^2 + (\frac{7}{3} r)^2 - 2 \cdot \frac{8}{3} r \cdot \frac{7}{3} r \cdot \cos\theta$$

$$\frac{25}{9} r^2 = \frac{64}{9} r^2 + \frac{49}{9} r^2 - \frac{112}{9} r^2 \cos\theta$$

양변에 9를 곱하고 r^2으로 나누면 ($r \neq 0$ 이므로),

$$25 = 64 + 49 - 112 \cos\theta$$

$112\cos\theta = 88$

$\cos\theta = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로,

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{11}{14})^2} = \sqrt{\frac{196-121}{196}} = \sqrt{\frac{75}{196}} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$

7. 외접원 반지름과 사인 법칙을 이용한 r 값 계산

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름이 7이므로, 사인 법칙을 다시 적용합니다.

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2R = 14$

$\overline{AB} = \frac{5}{3}r$ 이고, $\sin\theta = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ 이므로,

$\frac{\frac{5}{3}r}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = 14$

$\frac{5}{3}r = 14 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14}$

$\frac{5}{3}r = 5\sqrt{3}$

$r = 3\sqrt{3}$

8. 최대 높이 계산

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면, $\overline{AH}$는 $\triangle ABC$의 높이입니다.

$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\theta = \frac{7}{3}r \cdot \sin\theta = \frac{7}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15}{2}$

$\triangle PBC$의 넓이가 최대가 되려면, 점 P는 A에서 BC에 내린 수선의 연장선과 원 O가 만나는 점(Q)에 위치해야 합니다. 이때, $\triangle PBC$의 높이는 $\overline{QH} = \overline{AH} + r$ 입니다.

$\overline{QH} = \frac{15}{2} + 3\sqrt{3}$

9. 최대 넓이 계산

$\triangle PBC$의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{QH} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3}r \times (\frac{15}{2} + 3\sqrt{3})$

$r = 3\sqrt{3}$ 을 대입하면,

$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \cdot 3\sqrt{3} \times (\frac{15}{2} + 3\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}(\frac{15}{2} + 3\sqrt{3}) = 30\sqrt{3} + 36$

10. 결론

따라서, $\triangle PBC$ 넓이의 최댓값은 $36+30\sqrt{3}$ 입니다.