Zadanie 1.

Na Zbio. Mat. Bonusy ugda
wiele funkcji w ciągu długości
Zgodnie z

Zadanie 2. Niech $\Sigma = \{a, b\}$

Rozważ język L nad Σ zadany
wzorem $L = \{a^n b^n c : n \in \mathbb{N}\}$

Pokaż, że $L \in \mathrm{DTIME}(n)$

Rozwiązanie

Rozważ taką jedną taśmę
wielotaśmowej maszyny
Turinga o alfabecie $\{\#, \$\}$
i następującej własności:
Jeśli na taśmie jest
$\#^n \$ \#^n$ to głowa
jest na $\#$ n-tego
kwadratu.

Dowód:

- Jest jasne, że taka
  taśma istnieje.
- Jest prosta do
  zrobienia.
- Jest prosta do
  sprawdzenia.

- Jest prosta do
  zrobienia w czasie $O(n)$
  (wystarczy przejść
  taśmą n razy).
- Jest prosta do
  sprawdzenia w czasie $O(n)$
  (wystarczy przejść
  taśmą n razy).

Predavanje 2

Primer: $g\circ f$ ne obstaja:

- $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$
- f injektivna, surjektivna, g poljubna
- $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ $f(n) = n+1$, $g(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ n-1 & n > 1 \end{cases}$
- f injektivna
- $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N} \xrightarrow{g} \mathbb{N}$ $f(n) = n$, $g(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ n-1 & n > 1 \end{cases}$

Primer: Kompozicija surjektivnih je surjektivna.

Primer: Kompozicija injektivnih je injektivna.

Primer: Poznamo $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$ $f(n) = n$, $g(n) = \frac{n}{1}$. Kaj je $g \circ f$? $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $(g \circ f)(n) = \frac{n}{1}$. Ker f ni surjektivna, $g \circ f$ ni surjektivna. Ker g ni injektivna, $g \circ f$ ni injektivna.

Definicija 11: Naj $(X, \mathcal{O})$ in $(Y, \mathcal{O})$ topološka prostora. Preslikava $f: X \to Y$ je zvezna, kadar je $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}$ za vse $U \in \mathcal{O}$.

Primer: Naj X poljubna, Y poljubna, $f: X \to Y$ poljubna. Kaj je $f^{-1}[\emptyset]$? $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$. Kaj je $f^{-1}[Y]$? $f^{-1}[Y] = X$. Torej je f zvezna.

Primer: Naj X poljubna, Y poljubna, $f: X \to Y$ poljubna. Kaj je $f^{-1}[\{y\}]$? $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in X : f(x) = y\}$. Ker $\{y\}$ ni nujno v $\mathcal{O}$, f ni nujno zvezna.

Primer: Naj $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Y\}$. Kaj je $f: X \to Y$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ zvezna? $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\{1\}] = \{a\}$, $f^{-1}[\{1, 2\}] = \{a, b\}$, $f^{-1}[Y] = X$. Torej je f

Твердження 2.

Як існує [illegible] то [illegible]

Якщо f — [illegible] то [illegible]

Якщо f — [illegible] то [illegible]

Якщо f —

Ao CASA:

- kompaktni topološki prostori
- potprostori
- homeomorfizmi preslikavanja
- baze

Metrički prostori $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_2$, $\mathbb{S}_n$, $\mathbb{C}_p$

homeomorfizmi

Primjer: Je li unija $\mathcal{O}_R$ i $\mathcal{O}_S$ $\mathcal{O}_{R\cup S}$? $\mathcal{O}_R \cup \mathcal{O}_S = \{U \subseteq X : U \in \mathcal{O}_R \text{ ili } U \in \mathcal{O}_S\}$

Topologija $\mathcal{O}_R$ čini bazu $\mathcal{B}_R = \{(a,b) : a \le b, a,b \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{O}_S$ čini bazu $\mathcal{B}_S = \{(a,b) : a \le b, a,b \in \mathbb{Z}\}$

Ako bazu je jedna od $\mathcal{B}_S$ sadržana u $\mathcal{O}_R$, onda je U otvoren u $\mathcal{O}$ akko $(\forall x \in U)(\exists x \in \mathcal{B}_S)\ x \in B \subset U$

Pomoću $[a,b] \in \mathcal{B}_S \subset \mathcal{O}_S$ znamo da mora $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}_R$

Treba pan. da dopunjujemo da ne je $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}_S$.

Po Teoremu 25: dovoljno je ispitati $\mathcal{S}$ je $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{O}_S$.

Uzmimo proizvoljan $(a,b) \in \mathcal{B}_R$ $a \le b$, $a,b \in \mathbb{Z}$

Pokušajmo ga prikazati kao $\bigcup_{i \in I} [a_i, b_i]$

Treba primetiti da je $M \subset \mathcal{B}_S$.

Ogitno onda je $\bigcup M \in \mathcal{O}_S$.

Želimo da znamo da je $\bigcup M = (a,b)$

"$\subset$" znamo je jer svaki $[a,b] \in M$ sadržan u intervalu (a,b) onda je $\bigcup M \subset (a,b)$

"$\supset$" kad je x proizvoljan element intervala (a,b).

Tvrdi je $\lceil x \rceil$, $\boxed{\frac{\lceil x \rceil - a}{2} > 0}$

Tvrdi je $\lfloor x \rfloor$, $\boxed{\frac{b - \lfloor x \rfloor}{2} > 0}$

$y \in \left[\frac{\lceil x \rceil}{2}, \frac{\lfloor x \rfloor}{2}\right] \in \mathcal{B}_S$

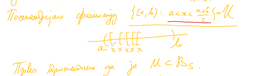
$\Rightarrow x \in \bigcup M$ onda $\frac{\lceil x \rceil}{2} < y$.

Dakle $(a,b) \subset \bigcup M$.

Dakle $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{O}_S$.

Primjer: Neka je $\mathbb{Z}$ uzmi gornje topologiju.

Neka je $\mathcal{B}_S = \{\{x \in \mathbb{Z} : x \ge 2\} \cup \{0, 1, 6\} \in \mathbb{Z}\}$.



$\boxed{\mathcal{B}_S = \mathbb{Z}}$

Dakle, bazu uzgoda je da uzmete proizvoljne podskupove $\mathbb{Z}$ uzmi gornje topologiju (Sesnum 24).

Ulazimo se pokazalo je da ovo nije baza.

Uslovi: (BN1 i BN2)

(BN1) jasno je da je $\mathbb{Z} \in \mathcal{B}_S$ ili je $\bigcup \mathcal{B}_S = \mathbb{Z}$

(BN2) ako su B_1 i B_2 iz $\mathcal{B}_S$ onda

Treba $B_1 \cap B_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \ge 2\}$ $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_S$

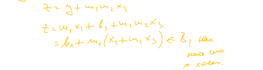
$B_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \ge 2\}$ $B_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \ge 2\} \cup \{0, 1, 6\}$

Ali je kontrast ovim ako je gornja.

Ako treba, gornjom $y \in B_1 \cap B_2$.

$y = u_1 x_1 + b_1$ i neka $x_1, x \in \mathbb{Z}$

$y = u_2 x_2 + b_2$



Primetimo je $\{y = u_1 x_1 + x \in \mathbb{Z}\} \subset B_1$ $\{y = u_2 x_2 + x\} \subset B_2$

Primetimo ni je $B \subset B_1 \cap B_2$ ni $y \in B$.

Tvrdimo x b_1.

Uzmimo proizvoljan $z \in B$, onda je oblika

$z = y + u_1 x_1 + x$

$z = u_1 x_1 + b_1 + u_1 x_1 + x$

$= b_1 + u_1(x_1 + u_1 + x) \in B_1$ jako

jasno da ne sadrži.

Dakle B_1 nemamo gornja BN1 i BN2 da bi bazu istraživje na $\mathbb{Z}$.

Definicija 31: Neka je $(X,\mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo P podskup onog X je zatvoren sadržaju $\mathcal{O}$ ako ima sve tri osnovna gornja.

1) sadržaju $\emptyset$ i X $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

2) presjeku dva konačno mnogo sadržaju P $P_1, P_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow P_1 \cap P_2 \in \mathcal{O}$

3) unija sadržaju $\mathcal{O}$ $P_i \in \mathcal{O}$ $\bigcup_{i \in I} P_i \in \mathcal{O}$

Primjer: Primjeri $\{x \in \mathbb{R} : x \in [0,1] \cup [3,4]\} \in \mathcal{O}$ je zatvoren jednakost sadržaju u $\mathbb{R}$.

Teorem 32: Neka je X zatvoren onda $\mathcal{O}$ i P sadržaj $\mathcal{O}$. Sadržaju onda X zatvoren ako i samo ako $\mathcal{O} \setminus P \in \mathcal{O}$. Onda vrijedi:

1) Presjeku dva konačno mnogo zatvoren sadržaju P je opet zatvoren sadržaj u X, a P je kao zatvoren.

2) $\emptyset$ je unijom zatvoren sadržaj u X sadržaj P.

Dokaz: 1) Kao je $B = \{P_1 \cap \ldots \cap P_n : P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{O}\}$.

Nama je $\mathcal{O} \setminus P = X_1$ uzmi kao $\cap$ $\cup B \setminus P = X$.

Zato BN1 je ispunjen.

Provjerimo BN2: Neka su B_1 i B_2 proizvoljni elementi presjeka B. Neka je $x \in B_1 \cap B_2$.

Prema $B_1 = P_1 \cap \ldots \cap P_n$ i $B_2 = P'_1 \cap \ldots \cap P'_k$ kao

$B_1 = P_1 \cap \ldots \cap P_n$ $x \in P_1, \ldots, P_n \in P$.

$B_2 \in P'_1 \cap \ldots \cap P'_k$ $x \in P'_1, \ldots, P'_k \in P$.

onda je $B_1 \cap B_2 = P_1 \cap \ldots \cap P_n \cap P'_1 \cap \ldots \cap P'_k \in B$.

$x \in B_1 \cap B_2 \in B_1 \cap B_2$

ili je $\cap$ BN2 ispunjen.

Dakle B je baza ima jako sadržaju.

2) Neka je $\mathcal{O}'$ sadržaju na X onda ispunjen P. To zatvoren 2 $B \subset \mathcal{O}'$, ili je po Teoremu 29 $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. $\square$

Teorem 33: Neka su $(X,\mathcal{O})$ i $(Y,\mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$. Neka je $\mathcal{B}$ baza za $\mathcal{O}$ ovisno sadržaju $\mathcal{O}$. Onda su sljedeći uvjeti ekvivalentni:

1) f je neprekidno

2) $f^{-1}[B]$ je otvoren za sve $B \in \mathcal{B}$

3) $f^{-1}[P]$ je zatvoren za sve $P \in \mathcal{P}$.

Dokaz: 1) $\Rightarrow$ 2) jasno jer je $B \in \mathcal{O}$ a $f^{-1}[\cdot]$ je otvoren x ako $U \in \mathcal{O}$ (neprekidnost)

3) $\Rightarrow$ 2) Neka je $B \in \mathcal{B}$ proizvoljan element.

Treba $B = P_1 \cap \ldots \cap P_n$ $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$.

$f^{-1}[B] = f^{-1}[P_1 \cap \ldots \cap P_n] = f^{-1}[P_1] \cap \ldots \cap f^{-1}[P_n] \in \mathcal{O}$.

$\underset{\text{zatvoren}}{\downarrow}$ $\underset{\text{zatvoren}}{\downarrow}$

$x \in P_1$ $x \in P_n$

2) $\Rightarrow$ 1) Neka je U otvoren u Y.

Mora znati je je $U = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Onda je $f^{-1}[U] = f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i] \in \mathcal{O}$.

$\underset{\text{otvoren}}{\downarrow}$ $\underset{\text{otvoren}}{\downarrow}$

po 2). $\square$

$f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$

$f : X \to Y$ $x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i]$

$A_i \subset Y$. $\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} A_i$

$\Leftrightarrow (\exists i \in I)\ f(x) \in A_i$

$\Leftrightarrow (\exists i \in I)\ x \in f^{-1}[A_i]$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i]$

Da bismo $\cap$ $f^{-1}[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[A_i]$ ne zaboravite na ovom mesto.

Primjer: Promatramo skup svih prostora $(X_i, \mathcal{O}_i)$ za i iz nekog skupa I. Neka je $S_P = \{x \in X : x \in P\}$.

$P = \{S_P : P$ konačan podskup $\cup_{i \in I} X_i\}$ je zadan uvek sadržaju na X.

Na osnovu teorema 32. P je zadan uvek sadržaju na X sp. $\cup P = X$.

Ovaj primjer govori da je jasno sadržaj zadan na X $\cup$

Bazu ovakva je skup sadržaju $\mathcal{B}$ kao konačni presjeci sadržaju.

$S_{P_1} \cap S_{P_2} \cap \ldots \cap S_{P_n}$ x konačno skupova $P_1, \ldots, P_n$.

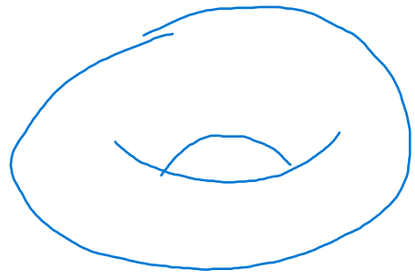
Dakle sadržaju bazu ovog primjera je da dopustite kao gornje $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Kad znam uvek je baza, onda

$\boxed{(\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subset U}$

Данас желимо да разумемо производ простора

$\mathbb{R}^2$



$\leftarrow S^1 \times S^1$

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

<u>Дефиниција 34:</u> Ако је $n \in \mathbb{N}$ и $X_1, \dots, X_n$ непразни скупови, онда је

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

производ скупова $X_1, \dots, X_n$

<u>Тврђење 35:</u> Нека су $(X, \mathcal{O})$ и $(Y, \mathcal{O}')$ топološки простори и нека су $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ њихове базе. Тада је фамилија

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{B}'\}$$

база неке топологије на $X \times Y$.

Доказ: Довољно је проверити услове BN1 и BN2 из Теореме 30.

1) $\bigcup \mathcal{B}_{X\times Y} = X\times Y$.

Ово је тачно јер за сваку тачку $\langle x,y\rangle \in X\times Y$ постоје $B_1\in\mathcal{B}$ и $B_2\in\mathcal{B}'$ такви да је $x\in B_1$ а $y\in B_2$.

Сада је $B_1\times B_2\in\mathcal{B}_{X\times Y}$ и $\langle x,y\rangle\in B_1\times B_2$

То значи да је $X\times Y\subset \bigcup\mathcal{B}_{X\times Y}$.

Други смер је очигледан јер $U\times V\subset X\times Y$ за све $U\in\mathcal{B}$, $V\in\mathcal{B}'$.

2) За све $B_1\times B_2$ и $U\times V$ из $\mathcal{B}_{X\times Y}$ и сваку тачку $\langle x,y\rangle\in(B_1\times B_2)\cap(U\times V)$ морамо пронаћи потенцијалним базним $W_1\times W_2$ да

$$\langle x,y\rangle\in W_1\times W_2\subset(B_1\times B_2)\cap(U\times V)$$

$x\in B_1\cap U$ па постоји $W_1\in\mathcal{B}$ да $x\in W_1\subset B_1\cap U$.

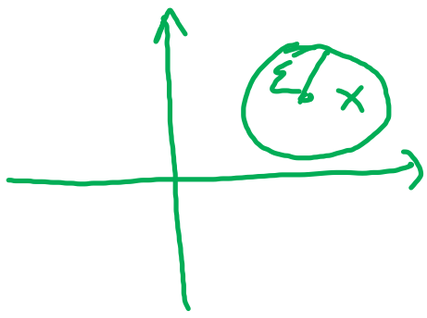
$y\in B_2\cap V$ па постоји $W_2\in\mathcal{B}'$ да $y\in W_2\subset B_2\cap V$.

Сада је јасно да је $\langle x,y\rangle\in \underbrace{W_1\times W_2}_{\in\mathcal{B}_{X\times Y}}\subset(B_1\times B_2)\cap(U\times V)$. ∎

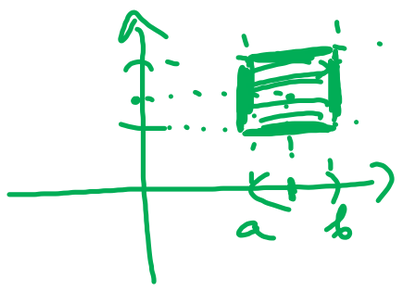
Пример: Знамо да на $\mathbb{R}^2$ имамо топологију индуковану метриком

$$d(\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

У овој топологији база је $\{L(x,\varepsilon) : x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$ где је $L(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) < \varepsilon\}$



У топологији из теореме 35. базни су облика $(a,b) \times (c,d)$ за $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c<d$



Ordinaire 1

Jan van Geldrop

Jan van Geldrop

Jan van Geldrop

Tychonov izrek: = produkt

$X_i \quad i \in I$

Kartezijev produkt množic X_i

Primer: Ulomki enote na gnezdenje. (X_i, O_i) $i \in I$

$O_{\mathbb{R}} = \{\bigcap_{i \in J} U_i ; U_i \in O_i \text{ in } J \subset I\}$

Mora se definirati v $\mathcal{P}$ kakšne funkcije kontinuiranje zaporedja na $\prod X_i$.

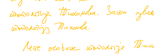
Ob ovrednotenje ene mere kakšne ostaja enaka na ostalih. Mora biti kakšne kontinuiranje Tychonova. Sicer zelo zapletenih zaporedja Tychonova.

Kaj ostane zaporedje Tychonova:

- koordinatna projekcija
- koordinatna projekcija $\mathcal{P}: X \to \prod X_i$ $f: X \to \prod X_i$ $f \circ p_i$ $i \to p_i$ ... i ... i

Primer: $[0,1]^{\mathbb{N}}$ – Hilbertova kocka

Na $[0,1]$ je ogrnjena zaporedja zaporedja kot kopiranje $\mathbb{R}$ kjer je $[0,1]^{\mathbb{N}}$ zaprta vsota $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ je X_n kot x_n za $n \in \mathbb{N}$.



Poskušajmo definirati $\varphi: [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$

$\varphi(x) = f$ za $f(n) = x_n$

$\varphi(x) = \langle x_1, x_2, x_3, \ldots \rangle$

Da ni je φ injektivna.

φ je injektivna ker je $\pi_n \circ \varphi$ injektivna za vse $n \in \mathbb{N}$.

$\pi_n \circ \varphi$ je zvezna.

ker $\pi_n \circ \varphi : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$

$\pi_n \circ \varphi(x) = x_n$

Da ni je φ neprekinjena dokažemo z bazo zaporedja $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Saj ena z baze zaporedja

Mora je $V = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ odprta

$f^{-1}[V] = \{\frac{1}{2}\}$ ← koja odprta

Primer: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ – Kantorjeva množica

Na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definiramo zaporedja φ in na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ zaporedja Tychonova.

Trditev 44: Poskažite injektivno 1-1 preslikavo na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}$.

Dokaz: Mora je $f: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ gosta za $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $x_n \in \{0,1\}$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}}$$

Ugotovimo zaporedje je f gosta geometrijska, 1-1 in injektivna.

DOBRA DEFINICIJA: $0 \le f(x) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < 1$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

Zaradi $f(x) \in \mathbb{R}$ za vse $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

1-1: $x, y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $x \neq y$

$x \neq y$

$x = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle$

$y = \langle y_1, y_2, \ldots \rangle$

Naj je $j = \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}$ t.j.o. naj je $x_j > y_j$, $x_j = 1$, $y_j = 0$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{j-1} \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=j}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} < \sum_{n=1}^{j-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^j} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{j-1} \frac{y_n}{3^n} + \frac{1}{3^j} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} = f(y)$$

zaradi $f(x) < f(y)$ ker je f 1-1.

NEPREKINJENOST: Preslikava je injektivna z dokazi zgoraj. Naj je $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ in naj je $\varepsilon > 0$. $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

Naj je j izračuna, da je $\frac{1}{3^j} < \varepsilon$.

Naj je $U = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\forall n \le j)\ x_n = y_n\}$.

$U = \{y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : (\forall n \le j)\ x_n = y_n\}$.

U je okolica x v $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Naj je $y \in U$ poljubno.

Preverimo, da za y je $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

$$|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{y_n}{3^n} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{3^n}\right| = \left|\sum_{n \ge j} \frac{y_n - x_n}{3^n}\right|$$

$$\le \sum_{n \ge j} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^j} \cdot 1 < \varepsilon.$$

Zaradi $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

za $f(U) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

in f je neprekinjena. ∎

Definicija 45: Kaznimo, da je množica X PREŠTEVNA, ako obstaja bijekcija iz X na $\mathbb{N}$.

NEJASNOST PREŠTEVNA, ako je kakšna ena definicija.

NEPREKINJENOST KONTINUIRANA, ako obstaja bijekcija iz/na $\mathbb{R}$.

Trditev 46: (Cantor) Naj je X množica. Ne obstaja bijekcija med X in $\mathcal{P}(X)$.

Dokaz: Predpostavimo, da obstaja:

$f: X \to \mathcal{P}(X)$ bijekcija.

Poskušajmo množico $S = \{a \in X : a \notin f(a)\}$.

Ker je f bijekcija obstaja $b \in X$ za $f(b) = S$.

$b \in S$! ako $b \in S \to b \notin f(b) = S$ ↯

ako $b \notin S \xrightarrow{S = f(b)} b \in S$ ↯

Zaradi bijekcije ne obstaja. ∎

Lema 47: (Tarski) Naj je X množica in h preslikava na $\mathcal{P}(X)$ v $\mathcal{P}(X)$, izračuna, da je $h(A) \subset h(B)$ vsaka kaže je $A \subset B \subset X$. Naj obstaja $Z \subset X$ izračuna, da je $h(Z) = Z$.

Dokaz: Predpostavimo $\mathcal{F} = \{A \subset X : A \subset h(A)\}$.

$Z = \bigcup \mathcal{F}$ ← izračunamo, da je $h(Z) = Z$ za vsaj enaki.

Trditev, ovrednotimo, da je $Z \subset h(Z)$.

$$Z = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} h(A) \subseteq h(Z)$$

za vsaki $A \subset Z$ je $h(A) \subset h(Z)$ za vsaj enaki

$\Rightarrow Z = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$

$x \in Z \to x \in A$ za nekaj $A \in \mathcal{F}$

$\to x \in h(A) \to$ ker $A \subset Z$ $x \in h(Z)$ $h(A) \subset h(Z)$

Trditev je $Z \subset h(Z)$ enaki $h(Z) \subset h(h(Z))$

in je $h(Z) \in \mathcal{F}$

$Z = \bigcup \mathcal{F}$ in je $h(Z) \subset Z$. ∎

$S_p = \{n \in \mathbb{N} : p \mid n\}$

Odprtih je $\emptyset$ in $\mathbb{N}$

$S_{p_1} \cap \ldots \cap S_{p_k} = \{n \in \mathbb{N} : (\forall i \le k)\ p_i \mid n\}$

U odprta v $\emptyset$

ako $(\forall n \in U)\ (\exists p_1, \ldots, p_k$ praštevi$)\ (\forall m \in \mathbb{N})$

$p_1 \cdots p_k \mid m \Rightarrow m \in U$

Problème 1

Il y a une figure noire comme ligne
1. Rouge
2. Bleu
3. Vert
4. Jaune
5. Violet
6. Orange

Figure 1.1: (Cercle + Droite Verticale)

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$

Alors

$X \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z)$

$= \lim_{z \to \infty} \frac{z+i}{z-i}$

$= 1$

Donc $f(\infty) = 1$

$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} f(z) = f(\infty)$

$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ tel que $\operatorname{Im}(z) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = \frac{1}{2i}(f(z) - \overline{f(z)})$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\right)$

Donc, comme $\operatorname{Im}(z) = 0$

$z = \overline{z}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \frac{z-i}{z+i}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z-i}{z+i}$

$\Rightarrow (z+i)^2 = (z-i)^2$

$\Rightarrow z^2 + 2iz - 1 = z^2 - 2iz - 1$

$\Rightarrow 4iz = 0$

$\Rightarrow z = 0$

Donc $\Delta = \{0\}$

Figure 1.2: Cercle de rayon 1

Soit $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid |z| = 1\}$

Informations Générales: $f(\Gamma) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.3: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.4: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = -1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.5: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.6: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.7: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.8: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.9: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.10: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.11: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.12: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.13: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.14: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.15: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.16: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.17: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.18: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.19: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.20: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.21: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.22: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.23: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.24: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.25: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.26: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$

$\Rightarrow (z+i)(\overline{z}+i) = (z-i)(\overline{z}-i)$

$\Rightarrow z\overline{z} + iz + i\overline{z} - 1 = z\overline{z} - iz - i\overline{z} - 1$

$\Rightarrow 2iz + 2i\overline{z} = 0$

$\Rightarrow z + \overline{z} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Donc $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$

Figure 1.27: Droite qui ne passe pas par i

Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{i\} \mid \operatorname{Im}(z) = 1\}$

Alors

$X \in \Delta \mapsto f(X) \in \mathbb{C}$

Informations Générales: $f(\Delta) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{z+i}{z-i} - \overline{\frac{z+i}{z-i}}\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}}