Politechnika Wrocławska

Projektowanie algorytmów i metody sztucznej inteligencji

Projekt
Termin: śr. 11:15

Projekt 1: Algorytmy sortowania

Autor:
Michał Kuzemczak

Prowadzący:
dr inż. Łukasz Jeleń

3 kwietnia 2019

Politechnika
Wrocławska

1 Wprowadzenie

Sprawozdanie zawiera omówienie trzech algorytmów sortowania: przez scalanie, quicksort, introspektywne. Przeprowadzono na nich szereg testów mających na celu sprawdzenie ich wydajności, także ich mocnych i słabych stron dla różnego rodzaju danych wejściowych.

Każdy czas jest podany jako średnia ze 100 sortowań, w milisekundach. Istnieją dwa warianty wstępnego posortowania elementów:

- Posortowane elementy są na swoich miejscach - raczej bezużyteczny sposób, niewiele wnosi do testów. Wstępne posortowanie zawsze skraca czas.
- Posortowane elementy nie są na swoich miejscach - przy tym sposobie zachowanie algorytmów nie jest jednoznaczne, co podczas testów jest bardzo na rękę.

Oczywiście wybrano drugi wariant.

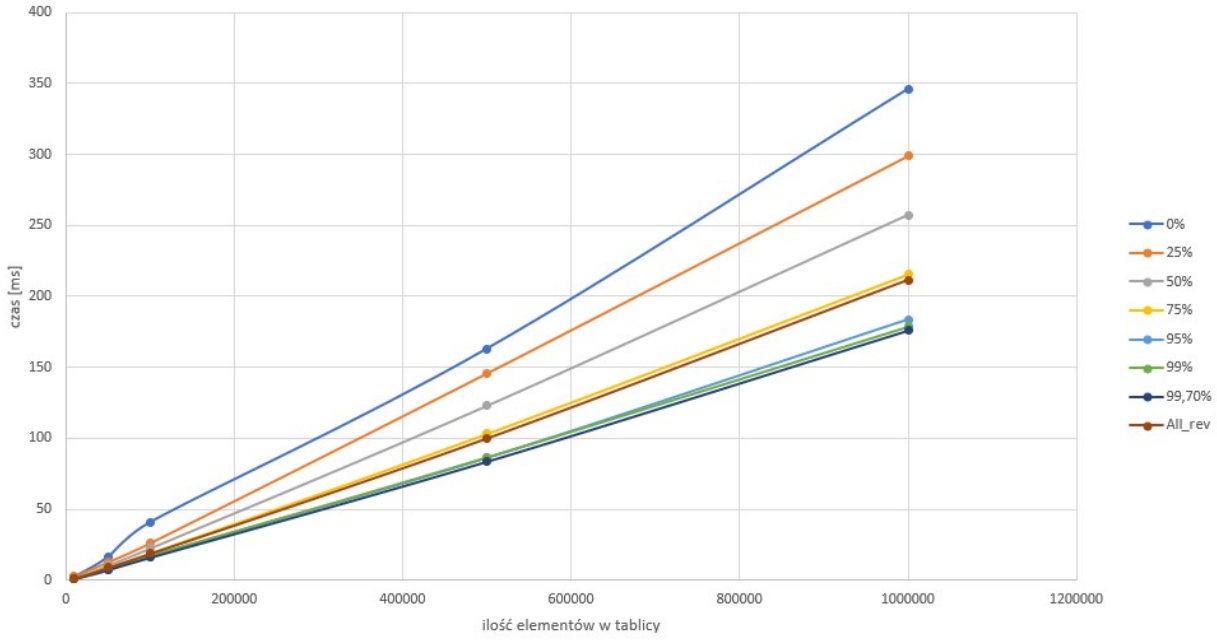
2 Sortowanie przez scalanie (merge sort)

Sortowanie przez scalanie jest algorytmem rekurencyjnym. W toku jego działania tablica o wielkości n zostaje podzielona na n jednoelementowych podzbiorów, siłą rzeczy posortowanych. W następnym kroku podzbiory są łączone w co raz większe, z zachowaniem sortowania. Maksymalna głębokość rekurencji jest równa wysokości drzewa binarnego, ponadto w każdym elemencie wykonywane jest porównanie i scalenie dwóch podzbiorów, zetem złożoność obliczeniowa algorytmu wynosi $O(n \cdot \log n)$. Złożoność ta jest stała, ponieważ dla różnych przypadków zmienia się jedynie liczba porównań podczas scalania.

W **Tabeli 1** przedstawiono wyniki pomiaru czasu sortowania tablic o różnej wielkości i różnym procentowym poziomie wcześniejszego posortowania.

	10000	50000	100000	500000	1000000
0%	2,08	14,25	30,99	171,26	350,48
25%	2,05	12,39	27,37	145,24	301,07
50%	1,06	11,3	22,48	123,74	252,7
75%	1	9,52	19,57	101,21	214,21
95%	1,05	7,73	16,78	85,6	184,52
99%	1,03	7,26	16,71	89,98	179,76
99,7%	1,07	7,95	16,26	84,32	186,55
All rev	1,41	9,39	20,45	103,25	216,69

Tabela 1: Średnie czasy z testów algorytmu mergesort, podane w milisekundach



Wykres 1: Sortowanie przez scalanie, wizualizacja wyników testów.

Z powyższych danych możemy zauważyć, że częściowe, czy też pełne odwrotne posortowanie ma jedynie pozytywny wpływ na czas wykonywania algorytmu. Potwierdza się tu wczesniejsze założenie, że liczba operacji jest w tych przypadkach podobna.

3 Quicksort

Sortowanie szybkie to algorytm rekurencyjny, który polega na rozbiciu zbioru o wielkości n na n podzbiorów o długości 1, przy czym, przy każdym podzieleniu na dwa, wybiera się tzw. pivota, a następnie po jego lewej stronie odkłada się elementy mniejsze od niego, a po prawej większe.

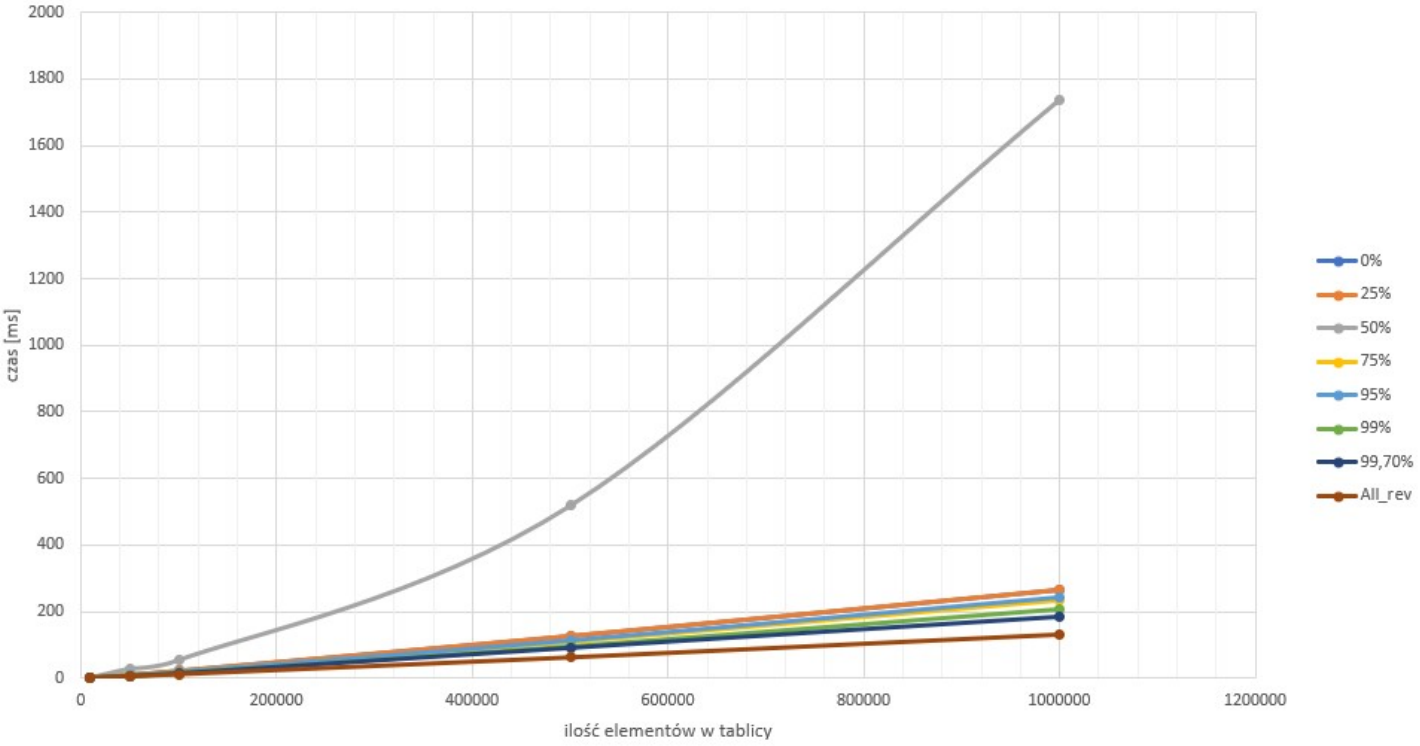
Kluczowy jest tutaj sposób, w jaki wybierzemy pivota. Jedną z możliwości jest wybór pierwszego elementu zbioru, lecz szybko okazuje się, że jeśli często będzie to element większy od pozostałych, to dostajemy najgorszy przypadek złożoności obliczeniowej algorytmu, czyli $O(n^2)$.

Statystycznie dobrym sposobem okazuje się wybór środkowego elementu jako pivota, ponieważ przy równomiernym rozkładzie losowania liczb, tutaj będziemy potrzebować najmniej operacji zamiany miejscami. Złożoność wynosi wtedy $O(n \log n)$.

Poniżej wyniki testów dla wersji z wyborem pivota w środku zbioru.

	10000	50000	100000	500000	1000000
0%	1,44	10,34	22,15	127,06	267,03
25%	1,08	10,01	21,8	125,97	264,05
50%	3,02	29,72	55,22	518,25	1737,31
75%	1,01	8,35	18,74	110,07	235,65
95%	1,01	8,16	18,57	112,81	241,98
99%	1,02	7,12	15,41	94,51	205,12
99,7%	1	6,21	14,47	91,88	186,65
All rev	0,36	5,17	11,22	63,06	133,24

Tabela 2: Średnie czasy z testów algorytmu quicksort, podane w milisekundach



Wykres 2: Sortowanie szybkie, wizualizacja wyników testów.

Wśród uzyskanych danych rzuca się w oczy słaba wydajność algorytmu przy wprowadzeniu zbioru posortowanego w 50%. Po dodaniu podczas testów zmiennej kontrolującej maksymalną głębokość rekurencji okazuje się, że wacha się ona od 70 do nawet 2000 (dla tablicy 500000 el.). Dla porównania, przy 0% posortowania maksymalna głębokość rekurencji wacha się między 40 a 50.

Na **Wykresie 3** możemy zauważyć, jak wybór pivota psuje się przy posortowaniu 50%. Średnia dległość od środka dochodzi wtedy nawet do 50%, czyli pivot ląduje przy końcu lub początku podzbioru, co jest najgorszym przypadkiem. Oznacza to w praktyce, że po wyborze pivota w środku algorytm musiał wykonać ilość zamian wynoszącą ponad połowę wielkości podzbioru, skoro raz jest przesuwany w lewo, raz w prawo, a i tak dotarł do krawędzi.

Duża ilość zamian w połączeniu z dużą głębokością rekurencji są powodem takiego pogorszenia czasu wykonywania algorytmu.

Sytuacja zupełnie przeciwna, czyli najlepszy przypadek, ma miejsce przy pełnym odwrotnym posortowaniu. Pivot wybierany ze środka dzieli podzbiory zawsze na pół, przez co głębokość rekurencji jest najmniejsza. Ponadto ilość zamian dla podzbioru o długości n zawsze wynosi dokładnie $\frac{n-1}{2}$. Nie jest to najlepszy przypadek ogólnie, ale wśród analizowanych, to połączenie małej głębokości rekurencji i średniej ilości zamian okazało się najlepsze.

Wykres 3: Jedna kropka to jedno sortowanie, dla 0% i 50% wstępnego posortowania przeprowadzono po 100 sortowań.

Użyty wzór przedstawiono poniżej. Oblicza on średnią odległość pivota od środka dzielonego podzbioru, po podzieleniu na mniejsze i większe, dla całego sortowania.

$$d = \frac{1}{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{n_i}{100}} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \frac{n_i}{100} \cdot abs\left(\frac{end_i - j_i}{n_i} - 0{,}5\right)$$

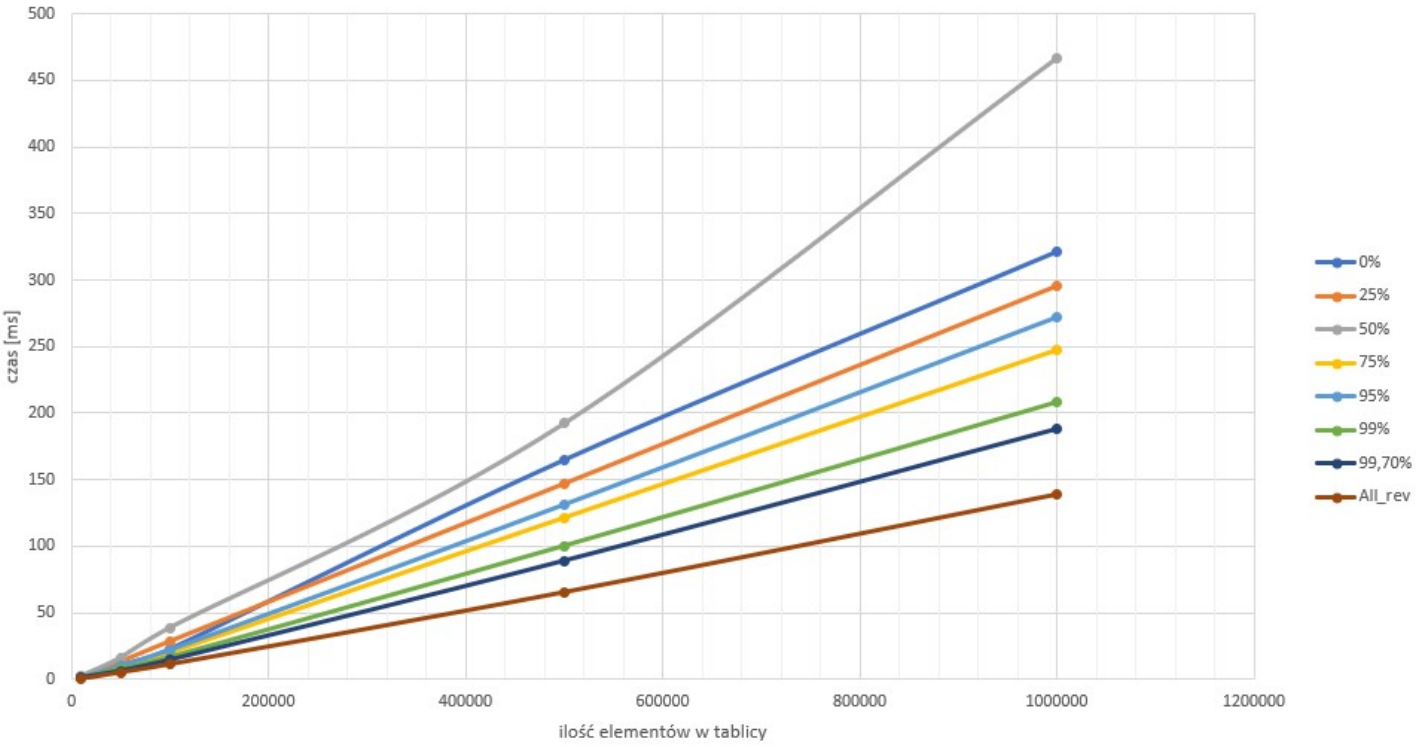
gdzie:
d - średnia odległość,
M - ilość wywołań funkcji wyboru pivota w sortowaniu,
n_i - wielkość podzbioru i,
$\frac{n_i}{100}$ - waga jednej próbki odległości pivota od środka zbioru i,
end_i - ostatni indeks podzbioru i,
j_i - indeks pivota w podzbiorze i po przestawieniu mniejszych na lewo i większych na prawo.

4 Sortowanie introspektywne

Introsort to hybrydowy algorytm sortujący, który bazuje na dwóch algorytmach: quicksort i heap sort. Introsort działa jak quicksort dla lepszych przypadków, korzystając z jego prędkości, lecz dla gorszych przypadków, gdzie rekurencja zachodzi zbyt głęboko, wywoływany jest heap sort. Pozwala to na zachowanie złożoności $O(n \log n)$ dla średnich i najgorszych przypadków.
Wyniki testów:

	10000	50000	100000	500000	1000000
0%	1,32	10,93	22,59	164,9	321,77
25%	1,34	13,24	28,51	147,16	296,04
50%	2,44	16,19	38,68	192,17	467,08
75%	1,01	8,77	19,64	121	247,07
95%	1,08	9,89	21,78	131,15	272,27
99%	1,03	7,73	16,45	100,03	208,03
99,7%	1	6,17	14,32	89,16	188,65
All rev	0,09	5,1	11,13	65,19	138,59

Tabela 3: Średnie czasy z testów algorytmu introsort, podane w milisekundach



Wykres 4: Sortowanie introspektywne, wizualizacja wyników testów.

Jak widać, dla naszego najgorszego przypadku (dla quicksorta z wyborem pivota w środku), przy 50% wstępnie posortowanych danych, nastąpiła znaczna poprawa czasu sortowania w stosunku do samego quicksorta. Zadziałało ograniczenie głębokości rekurencji.

5 Źródła

- wikipedia.org - mergesort, quicksort, introsort;
- 4programmers.net - o złożoności obliczeniowej;
- algorytm.org - mergesort;
- eduinf.waw.pl - mergesort, heap sort;
- researchgate.net - introsort;
- algorytm.edu.pl - mergesort;
- gist.github.com/imneme/540829265469e673d045 - randutils.hpp;
- youtube.com - wizualizacje dla weny.