Министерство сельского хозяйства РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова»

Кафедра менеджмента

Контрольная работа
по дисциплине «Математическое моделирование в менеджменте»
Вариант 9

Выполнил:
студент факультета заочного
обучения по направлению
«Менеджмент»
Кузнецов Андрей Валерьевич
Шифр Мн-13-204
Руководитель:
к.э.н., доцент
Сафонов Алексей Юрьевич

Пермь 2019

Содержание

1 Тема 1. Устойчивость оптимизационного решения

После того как оптимальное решение задачи найдено, проводится его экономико-математический анализ. Одним из его наиболее важных элементов является изучение того, как влияют на решение изменения различных параметров модели.

Такое исследование называется анализом устойчивости решения. Оно позволяет выяснить, насколько решение модели чувствительно к изменению внешних условий, а также определить область изменения параметров, в которой оно остается прежним.

Проиллюстрируем роль анализа устойчивости на примере задачи фирмы. Ее решение является наилучшим планом выпуска в конкретной экономической ситуации, которая характеризуется определенными условиями производства и сбыта продукции.

Они находят свое отражение в математической модели в виде фиксированных значений ее параметров: удельной прибыли изделий, наличных объемов ресурсов и нормативов их затрат.

При принятии решения ЛПР необходимо учитывать по крайней мере два обстоятельства: во-первых, значения параметров модели обычно известны неточно; во-вторых, часть из них, например прибыльность изделий, может измениться уже в ближайшем будущем

Поэтому если окажется, что небольшие изменения параметров сильно влияют на характеристики оптимального плана, то его реализация без дополнительного изучения модели не представляется разумной.

Это изучение должно включать уточнение значений параметров и области их вероятных изменений и может привести к заключению о необходимости корректировки самой модели.

Если же выяснится, что возможные колебания параметров мало или вообще не влияют на найденное решение, то его выбор в качестве плана производства будет более обоснованным.

Таким образом, анализ устойчивости должен предшествовать использованию результатов расчетов по модели при принятии управленческих решений.

Отчет по устойчивости содержит основную информацию для анализа устойчивости решения. Он состоит из двух таблиц (таблица 1).

Первая таблица «Изменяемые ячейки» содержит сведения о чувствитель-

Таблица 1: Отчет по устойчивости

Изменяемые ячейки						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Нормир. стоимость**	**Целевой Коэффициент**	**Допустимое Увеличение**	**Допустимое Уменьшение**
\$B\$10	Выпуск Изделие 1	56	0	25	1,1538	2,142 857
\$C\$10	Выпуск Изделие 2	18	0	40	3,75	0,9375
\$D\$10	Выпуск Изделие 3	0	-1,5	30	1,5	1E+30
Ограничения						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Ограничение Правая часть**	**Допустимое Увеличение**	**Допустимое Уменьшение**
\$E\$5	Сырье Расход	388	0	400	1E+30	12
\$E\$6	Оборудование Расход	350	4	350	70	30
\$E\$7	Труд Расход	480	1,5	480	10,909	80

ности оптимального решения и оптимального значения целевой функции к малым изменениям ее коэффициентов. Ее столбцы содержат следующую информацию:

«Результ. значение» — оптимальные значения переменных (объемы выпуска).

«Нормир. стоимость» — двойственные оценки переменных, которые показывают, насколько изменится оптимальное значение целевой функции, если принудительно включить единицу изделия этого вида в оптимальный план.

Эта оценка отлична от нуля лишь для изделий, не вошедших в оптимальный план. Так, оценка изделия 3 равна –1,5. Это означает, что если установить фирме обязательное задание по выпуску единицы этого изделия, т. е. заменить условие $x_3 \geq 0$ на $x_3 \geq 1$, то оптимальное значение прибыли уменьшится на 1,5 и составит 2118,5.

«Целевой Коэффициент» — коэффициенты целевой функции (удельная прибыль изделия).

«Допустимое Увеличение (Уменьшение)» — насколько можно увеличить (уменьшить) соответствующий коэффициент целевой функции (удельную прибыль изделия), чтобы оптимальное решение не изменилось.

Таким образом, при изменении первого коэффициента целевой функции (удельной прибыли изделия 1) в интервале $I_1 = (22{,}86; 26{,}15)$ решение останется прежним.

Поэтому этот интервал называют интервалом устойчивости решения. Если же значение удельной прибыли выйдет за его пределы, то это приведет к изменению оптимального плана.

Интервалы устойчивости для остальных коэффициентов целевой функции таковы:

$$I_2 = (39,06; 43{,}75) \text{ и } I_3 = (-\infty; 31{,}5).$$

Во второй таблице «Ограничения» находится информация об оптимальных оценках ограничений. Ее столбцы содержат следующие сведения:

«Результ. значение» — значение левой части ограничения (затраты ресурсов) в оптимальном плане.

«Теневая Цена» — двойственные оценки ограничений (ресурсов), показывающие, насколько изменится оптимальное значение целевой функции, если увеличить на единицу правую часть ограничения (наличный объем ресурса).

Таким образом, ресурсы имеют следующие оценки: сырье: 0, оборудование: –4 и труд: –1,5. Это означает, что дополнительная единица сырья не приведет к увеличению прибыли фирмы, дополнительная единица оборудования позволит фирме увеличить свою прибыль на 4 единицы, а труда — на 1,5 единицы

«Ограничение Правая часть» — значения правых частей ограничений (наличные объемы ресурсов).

«Допустимое Увеличение (Уменьшение)» — насколько можно увеличить (уменьшить) правую часть соответствующего ограничения, чтобы не изменилась его двойственная оценка (теневая цена).

Информация, содержащаяся в последних трех столбцах, позволяет найти интервалы устойчивости оценок, в пределах которых их значения не изменяются. Левая граница интервала вычисляется по формуле

«Ограничение Правая часть» – «Допустимое Уменьшение», а правая граница — по формуле:

«Ограничение Правая часть» + «Допустимое Увеличение».

Таким образом, интервал устойчивости оценки сырья имеет вид $J_1 = (388; +\infty)$. В нем оценка равна 0, так как этот ресурс избыточен. Интервал устойчивости оценки оборудования $J_2 = (320; 420)$.

В его пределах каждая дополнительная единица оборудования позволяет фирме увеличить прибыль на 4 единицы. Соответственно, интервал устойчивости оценки труда $J_3 = (400; 490{,}9)$.

2 Тема 2. Трендовые модели на основе кривых роста

Использование метода экстраполяции на основе кривых роста для прогнозирования базируется на двух предположениях:

— временной ряд экономического показателя действительно имеет тренд, т.е. преобладающую тенденцию;

— общие условия, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений в течение периода упреждения.

В настоящее время насчитывается большое количество типов кривых роста для экономических процессов. Чтобы правильно подобрать наилучшую кривую роста для моделирования и прогнозирования экономического явления, необходимо знать особенности каждого вида кривых. Наиболее часто в экономике используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста. Простейшие полиномиальные кривые роста имеют вид:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t \text{ (полином первой степени)},$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \text{ (полином второй степени)},$$

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \text{ (полином третьей степени)}$$

и т.д.

Параметр a_1 называют линейным приростом, параметр a_2 — ускорением роста, параметр a_3 — изменением ускорения роста.

Для полинома первой степени характерен постоянный закон роста. Если рассчитать первые приросты по формуле $u_t = y_t - y_{t-1}, t = 2, 3, ..., n$, то они будут постоянной величиной и равны a_1.

Если первые приросты рассчитать для полинома второй степени, то они будут иметь линейную зависимость от времени и ряд из первых приростов $u_2, u_3, ...$ на графике будет представлен прямой линией. Вторые приросты $u_t^{(2)} = u_t - u_{t-1}$ для полинома второй степени будут постоянны.

Для полинома третьей степени первые приросты будут полиномами второй степени, вторые приросты будут линейной функцией времени, а третьи приросты, рассчитываемые по формуле $u_t^{(3)} = u_t^{(2)} - u_{t-1}^{(2)}$, будут постоянной величиной.

На основе сказанного можно отметить следующие свойства полиномиальных кривых роста:

— от полинома высокого порядка можно путем расчета последовательных разностей (приростов) перейти к полиному более низкого порядка;

— значения приростов для полиномов любого порядка не зависят от значений самой функции $\hat{y}_t$.

Таким образом, полиномиальные кривые роста можно использовать для аппроксимации (приближения) и прогнозирования экономических процессов, в которых последующее развитие не зависит от достигнутого уровня.

В отличие от использования полиномиальных кривых использование экспоненциальных кривых роста предполагает, что дальнейшее развитие зависит от достигнутого уровня, например, прирост зависит от значения функции. В экономике чаще всего применяются две разновидности экспоненциальных (показательных) кривых: простая экспонента и модифицированная экспонента.

Простая экспонента представляется в виде функции:

$$\hat{y}_t = ab^t,$$

где a и b — положительные числа, при этом если b больше единицы, то функция возрастает с ростом времени t, если b меньше единицы — функция убывает.

Можно заметить, что ордината данной функции изменяется с постоянным темпом прироста. Если взять отношение прироста к самой ординате, оно будет постоянной величиной:

$$\frac{u_t}{y_t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t} = 1 - \frac{1}{b}.$$

Прологарифмируем выражение для данной функции по любому основанию:

$$\log \hat{y}_t = \log a + t \log b.$$

Отсюда можно заметить, что логарифмы ординат простой экспоненты линейно зависят от времени.

Модифицированная экспонента имеет вид:

$$\hat{y}_t = k + ab^t,$$

где постоянные величины: меньше нуля, b положительна и меньше единицы, а константа k носит название асимптоты этой функции, т.е. значения функции неограниченно приближаются (снизу) к величине k. Могут быть другие варианты модифицированной экспоненты, но на практике наиболее часто встречается указанная выше функция.

Если прологарифмировать первые приросты данной функции, то получится функция, линейно зависящая от времени, а если взять отношение двух последовательных приростов, то оно будет постоянной величиной:

$$\frac{u_t}{u_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1} - y_{t-2}} = b.$$

В экономике достаточно распространены процессы, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу. В качестве примера можно привести процесс ввода некоторого объекта в промышленную эксплуатацию, процесс изменения спроса на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня насыщения, и др. Для моделирования таких процессов используются так называемые S-образные кривые роста, среди которых выделяют кривую Гомперца и логистическую кривую.

Кривая Гомперца имеет аналитическое выражение:

$$\hat{y}_t = ka^{b^t},$$

где , b — положительные параметры, причем b меньше единицы; параметр k — асимптота функции.

В кривой Гомперца выделяются четыре участка: на первом — прирост функции незначителен, на втором — прирост увеличивается, на третьем участке прирост примерно постоянен, на четвертом — происходит замедление темпов прироста и функция неограниченно приближается к значению k. В результате конфигурация кривой напоминает латинскую букву S.

Логарифм данной функции является экспоненциальной кривой; логарифм отношения первого прироста к самой ординате функции — линейная функция времени.

На основании кривой Гомперца описывается, например, динамика показателей уровня жизни; модификации этой кривой используются в демографии для моделирования показателей смертности и т. д.

Логистическая кривая, или кривая Перла—Рида — возрастающая функция, наиболее часто выражаемая в виде

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}$$

другие виды этой кривой:

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + ab^{-t}};\ \hat{y}_t = \frac{k}{1 + 10^{a-bt}}.$$

В этих выражениях и b — положительные параметры; k — предельное значение функции при бесконечном возрастании времени.

Если взять производную данной функции, то можно увидеть, что скорость возрастания логистической кривой в каждый момент времени пропорциональна достигнутому уровню функции и разности между предельным значением k и достигнутым уровнем.

Логарифм отношения первого прироста функции к квадрату ее значения (ординаты) есть линейная функция от времени. Конфигурация графика логистической кривой близка графику кривой Гомперца, но в отличие от последней логистическая кривая имеет точку симметрии, совпадающую с точкой перегиба.

Рассмотрим проблему предварительного выбора вида кривой роста для конкретного временного ряда. Допустим, имеется временной ряд $_{1,2,3,\ldots,n}$.

Для выбора вида полиномиальной кривой роста наиболее распространенным методом является метод конечных разностей (метод Тинтнера). Этот метод может быть использован для предварительного выбора полиномиальной кривой, если, во-первых, уровни временного ряда состоят только из двух компонент: тренд и случайная компонента, и во-вторых, тренд является достаточно гладким, чтобы его можно было аппроксимировать полиномом некоторой степени.

На первом этапе этого метода вычисляются разности (приросты) до k-го порядка включительно:

$$u_t = y_t - y_{t-1};$$

$$u_t^{(2)} = u_t - u_{t-1};$$

$$\dots$$

$$u_t^{(k)} = u_t^{(k-1)} - u_{t-1}^{(k-1)}.$$

Для аппроксимации экономических процессов обычно вычисляют конечные разности до четвертого порядка.

Затем для исходного ряда и для каждого разностного ряда вычисляются дисперсии по следующим формулам: для исходного ряда

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{t=1}^{n} y_t\right)^2}{n-1};$$

для разностного ряда k-го порядка ($k = 1, 2,...$)

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum\limits_{t=k+1}^{n} (u_t^k)^2}{(n-k)C_{2k}^k}; \qquad C_{2k}^k\text{— биноминальный коэффициент.}$$

Производится сравнение отклонений каждой последующей дисперсии от предыдущей, т.е. вычисляются величины

$$|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2|,$$

и если для какого-либо k эта величина не превосходит некоторой наперед заданной положительной величины, т.е. дисперсии одного порядка, то степень аппроксимирующего полинома должна быть равна $k-1$.

Более универсальным методом предварительного выбора кривых роста, позволяющим выбрать кривую из широкого класса кривых роста, является метод характеристик прироста. Он основан на использовании отдельных характерных свойств кривых, рассмотренных выше. При этом методе исходный временной ряд предварительно сглаживается методом простой скользящей средней. Например, для интервала сглаживания $m = 3$ сглаженные уровни рассчитываются по формуле:

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3},$$

причем чтобы не потерять первый и последний уровни, их сглаживают по формулам:

$$\bar{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6},$$

$$\bar{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}$$

Затем вычисляются первые средние приросты:

$$\bar{u}_t = \frac{\bar{y}_{t+1} - \bar{y}_{t-1}}{2},\ t = 2,3,...,\lambda,n-1;$$

вторые средние приросты:

$$\bar{u}_t^{(2)} = \frac{\bar{u}_{t+1} - \bar{u}_{t-1}}{2},$$

а также ряд производных величин, связанных с вычисленными средними приростами и сглаженными уровнями ряда:

$$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t};\quad \log \bar{u}_t;\quad \log\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t};\quad \log\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^2}.$$

В соответствии с характером изменения средних приростов и производных показателей выбирается вид кривой роста для исходного временного ряда, при этом используется таблица 2.

Таблица 2: Виды кривой роста для исходного временного ряда

Показатель	Характер изменения показателя во времени	Вид кривой роста
Первый средний прирост $\bar{u}_t$	Примерно одинаковы	Полином первого порядка (прямая)
То же	Изменяются линейно	Полином второго порядка (парабола)
Второй средний прирост $\bar{u}_t^{(2)}$	Изменяются линейно	Полином третьего порядка (кубическая парабола)
$\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	Примерно одинаковы	Простая экспонента
$\log \bar{u}_t$	Изменяются линейно	Модифицированная экспонента
$\log\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t}$	Изменяются линейно	Кривая Гомперца
$\log\frac{\bar{u}_t}{\bar{y}_t^2}$	Изменяются линейно	Логистическая кривая

На практике при предварительном выборе отбирают обычно две-три кривые роста для дальнейшего исследования и построения трендовой модели данного временного ряда.

Рассмотрим методы определения параметров отобранных кривых роста. Параметры полиномиальных кривых оцениваются, как правило, методом наименьших квадратов, суть которого заключается в том, чтобы сумма квадратов отклонений фактических уровней ряда от соответствующих выравненных по кривой роста значений была наименьшей. Этот метод приводит к системе так называемых нормальных уравнении для определения неизвестных параметров отобранных кривых.

Для полинома первой степени:

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$$

система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y_t, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t, \end{cases}$$

где знак суммирования распространяется на все моменты наблюдения (все уровни) исходного временного ряда. Аналогичная система для полинома второй степени

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

имеет вид:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y_t, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum y_t t, \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum y_t t^2. \end{cases}$$

Для полинома третьей степени

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

система нормальных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + a_3 \sum t^3 = \sum y_t, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + a_3 \sum t^4 = \sum y_t t, \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + a_3 \sum t^5 = \sum y_t t^2, \\ a_0 \sum t^3 + a_1 \sum t^4 + a_2 \sum t^5 + a_3 \sum t^6 = \sum y_t t^3. \end{cases}$$

Параметры экспоненциальных и S-образных кривых находятся более сложными методами. Для простой экспоненты

$$\hat{y}_t = ab^t$$

предварительно логарифмируют выражение по некоторому основанию (например, десятичному или натуральному):

$$\log \hat{y}_t = \log a + t \log b,$$

т.е. для логарифма функции получают линейное выражение, а затем для неизвестных параметров $\log a$ и $\log b$ составляют на основе метода наименьших квадратов систему нормальных уравнений, аналогичную системе для полинома первой степени. Решая эту систему, находят логарифмы параметров, а затем и сами параметры модели.

При определении параметров кривых роста, имеющих асимптоты (модифицированная экспонента, кривая Гомперца, логистическая кривая), различают два случая. Если значение асимптоты k известно заранее, то путем несложной модификации формулы и последующего логарифмирования определение параметров сводят к решению системы нормальных уравнений, неизвестными которой являются логарифмы параметров кривой.

Если значение асимптоты заранее неизвестно, то для нахождения параметров указанных выше кривых роста используются приближенные методы: метод трех точек, метод трех сумм и др.

Таким образом, при моделировании экономической динамики, заданной временным рядом, путем сглаживания исходного ряда, определения наличия тренда, отбора одной или нескольких кривых роста и определения их параметров в случае наличия тренда получают одну или несколько трендовых моделей для исходного временного ряда. Встает вопрос, насколько эти модели близки к экономической реальности, отраженной во временном ряду, насколько обосновано применение этих моделей для анализа и прогнозирования изучаемого экономического явления.

3 Тема 3. Теория массового обслуживания и её применимость в исследовании менеджмента

Теория массового обслуживания представляет собой область прикладной математики, использующую методы теории случайных процессов и теории вероятностей для исследования различной природы сложных систем. Теория массового обслуживания непосредственно не связана с оптимизацией. Назначение ее состоит в том, чтобы на основе результатов наблюдений за «входом» в систему предсказать ее возможности и организовать наилучшее обслуживание для конкретной ситуации и понять, как последнее отразится на стоимости системы в целом.

Для систем, относящихся к системам массового обслуживания, существует определенный класс задач, решение которых позволяет ответить на актуальные для сегодняшнего времени вопросы. С какой интенсивностью должно проходить обслуживание или должен выполняться процесс при заданной интенсивности и других параметрах входящего потока требований, чтобы минимизировать очередь или задержку в подготовке документа или другого вида информации? Какова вероятность появления задержки или очереди и ее величина? Сколько времени требование находится в очереди и каким образом минимизировать его задержку? Какова вероятность потери требования (клиента)? Какова должна быть оптимальная загрузка обслуживающих каналов? При каких параметрах системы достигаются минимальные потери прибыли? К этому перечню можно добавить еще целый ряд задач.

Система массового обслуживания (СМО) включает следующие структурообразующие объекты: источник требований; входной поток требований (поступление заявок); очередь; обслуживающую систему как совокупность каналов обслуживания заявок; выходной поток (обслуженные заявки или удовлетворенные требования). Рассмотрим их модели.

Источник требований. По месту нахождения источника, формирующего требования, СМО делятся на разомкнутые, когда источник находится вне системы, и замкнутые, когда источник находится внутри системы.

Входной поток требований. Подавляющее большинство теоретических разработок по исследованию систем массового обслуживания выполнено для условия, когда входной поток требований является пуассоновским (простейшим). Этот поток обладает рядом важных свойств. Он стационарен, ординарен и не имеет последствий.

Модель входного пуассоновского потока представляется функцией вида:

$$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{\lambda T}}{n!}, \tag{1}$$

где $P_n(T)$ — вероятность поступления требований в течение заданного интервала времени T;
λ — интенсивность поступления требований в систему, т.е. математическое ожидание числа требований, поступивших за единицу времени:

$$\lambda = \frac{1}{M(t)}, \tag{2}$$

где $M(t)$ — математическое ожидание случайной величины t_i, равной интервалу времени между i и $i+1$ поступлениями требований в систему;
λT — математическое ожидание количества требований в период T;
n — количество поступлений требований в систему.

Следующее важное для исследования свойство, которым обладает пуассоновский поток, заключается в том, что процедура разделения и объединения дает снова пуассоновские потоки. Тогда, если входной поток формируется из N независимых источников, каждый из которых порождает пуассоновский поток интенсивностью $\lambda_i (i = 1{,}2{,}...{,} N)$, то его интенсивность будет определяться по формуле:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_N. \tag{3}$$

В случае разделения пуассоновского потока на N независимых потоков получим, что интенсивность потока λ_i будет равна $r_i \lambda$, где r_i — доля i-го потока во входном потоке требований.

Очередь. Очереди, определяемые как множество требований, ожидающих обслуживания, представляются несколькими моделями: очередь с отказами, с ограниченным временем ожидания (заявка ждет определенное время), ограниченной длиной и, наконец, неограничен-ным временем ожидания. Порядок поступления заявок на обслуживание называется дисциплиной очереди. Требования могут приниматься по мере поступления, случайным порядком, с приоритетом, по принципу «последняя — первой», по определенным каналам.

Процесс обслуживания. Основным параметром процесса обслуживания считается время обслуживания требования каналом j — $t_j (j = 1,2,...,m)$. Величина τ_j в каждом конкретном случае определяется рядом факторов: интенсивностью поступления заявок, квалификацией исполнителя, технологией работ, окружающей средой и т.д. Законы распределения случайной величины τ_j могут быть самыми различными, но наибольшее распространение в практических приложениях получил экспоненциальный закон распределения. Функция распределения случайной величины τ_j имеет вид:

$$F(t) = 1 - e^{m}, \tag{4}$$

где m — положительный параметр, определяющий интенсивность обслуживания требований;

$$m = \frac{1}{E(t)}, \tag{5}$$

где $E(t)$ — математическое ожидание случайной величины обслуживания требования τ_j.

Важнейшее свойство экспоненциального распределения заключается в следующем. При наличии нескольких однотипных каналов обслуживания и равной вероятности их выбора при поступлении заявки распределение времени обслуживания всеми m каналами будет показательной функцией вида:

$$F(\tau) = 1 - e^{(\mu_1+\mu_2+...+\mu_m)\tau}. \tag{6}$$

Если СМО состоит из неоднородных каналов, то $\mu = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j$, если же все каналы однородные, то $\mu = m\mu_j$.

Выходной поток обслуженных требований. Выходной поток — это поток результатов деятельности, представленных выполненными требованиями в виде той или иной продукции или услуги. К основным параметрам выходного потока относятся интенсивность выхода из системы обслуженных требований и характер распределения времени между моментами выпуска продукции. В общем случае эти параметры определяются моделью входного потока, дисциплиной очереди и моделью обслуживания. Для СМО с параллельными каналами и однофазным обслуживанием существует теорема о том, что при пуассоновском входном потоке с параметром λ и одинаковым для каждого канала распределением времени обслуживания с параметром μ в стационарном состоянии выходной поток имеет пуассоновское распределение с параметром g. В многофазных системах выходной поток одного канала служит входным потоком для другого канала. Параметр g в простейшем случае определяется по формуле:

$$g = \frac{1}{W_s}, \tag{7}$$

где W_s — среднее время пребывания требования в системе.

Особенность моделей СМО связана с достаточно строгим математическим описанием функционирования систем, что достигается благодаря их унификации по ряду признаков. Так, в зависимости от модели ожидания требованием начала обслуживания различают следующие СМО:

— системы с потерями или отказами;

— системы с ожиданием;

— системы с ограниченным временем ожидания (ВО);

— системы с ограниченной длиной очереди (ДО).

По числу каналов обслуживания системы делятся на одноканальные ($m = 1$) и многоканальные ($m > 1$). Структура СМО и характеристика ее объектов приведены на рисунке 1.

Одной из форм классификации СМО служит кодовая классификация Д. Кендалла. В соответствии с этой классификацией характеристику СМО записывают в виде трех, четырех или пяти символов. Например, $a/b/c$, где a — тип распределения входного потока требований, b — тип распределения времени обслуживания, c — число каналов обслуживания. Для пуассоновского и экспоненциального распределений принимают символ M, для любого произвольного распределения — символ M. Например, запись $M/M/2$означает, что входной поток требований пуассоновский, время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, в системе имеются два канала. Четвертый символ (d) указывает допустимую длину очереди, пятый (e) — порядок отбора требований.

Модели СМО могут быть детерминированными или вероятностными. В первом случае параметры и переменные модели — это постоянные величины, во втором — случайные.

Исследование СМО заключается в нахождении показателей, характеризующих качество и условия работы обслуживающей системы и показателей,

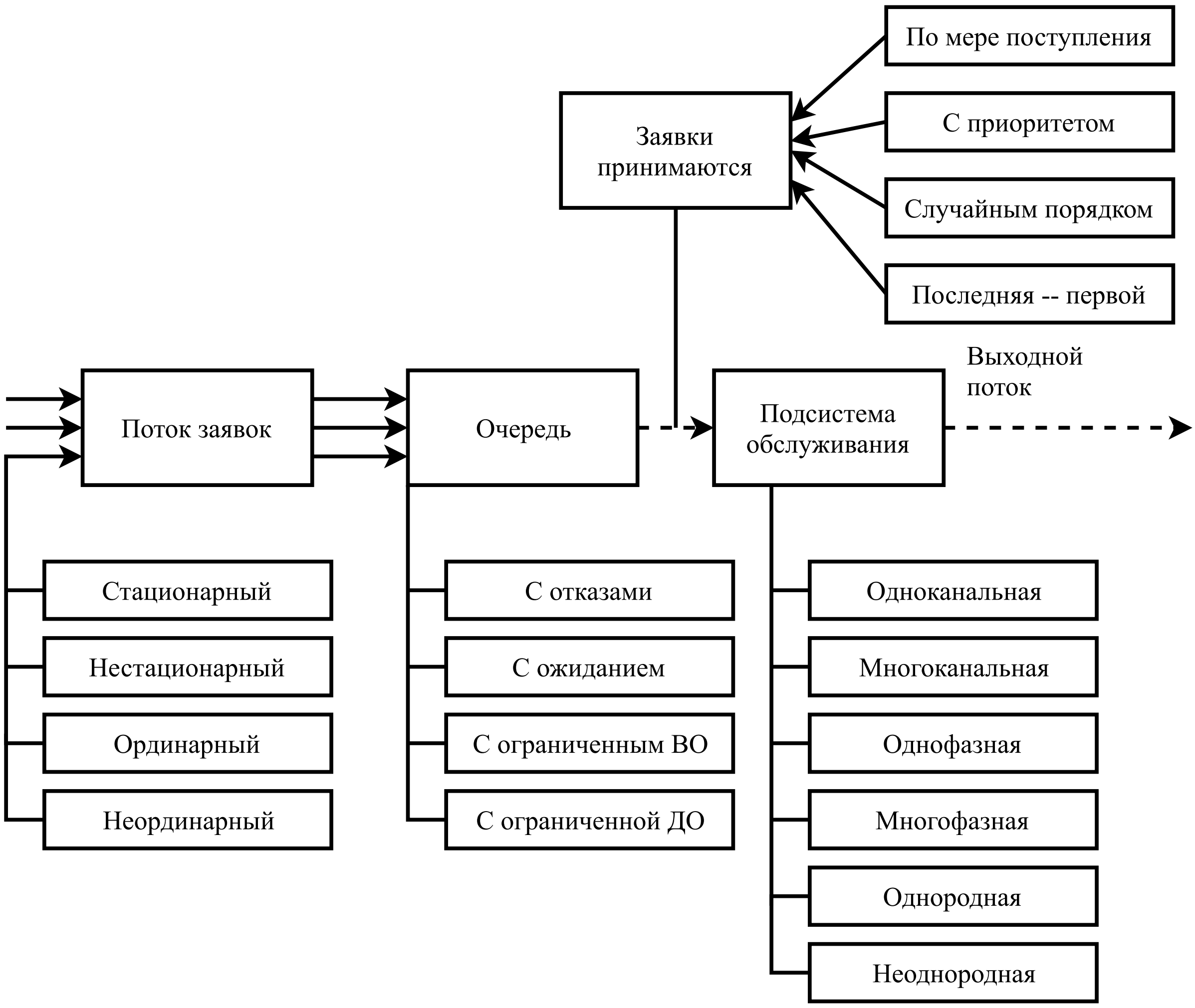

Рис. 1: Структура и характеристика объектов СМО

отражающих экономические последствия принятых решений согласно первым показателям. К показателям первой группы относятся следующие.

1. При установленных или проектных параметрах входящего потока:
   а) вероятность поступления n требований в систему за период $t(P_n(T))$;
   б) вероятность наличия n требований в системе (P_n).
2. При установленных или проектных параметрах обслуживания:
   а) вероятность того, что все обслуживающие m каналы свободны (P_0);
   б) вероятность того, что обслуживанием занято определенное число каналов (менеджеров, агентов) (P_m);
   в) вероятность того, что r требований находится в очереди (P_{m+r}).
3. При установленных или проектных параметрах входящего потока и системы обслуживания:
   а) загрузка одноканальной системы (r); загрузка канала при многоканальной системе $(\dfrac{\rho}{m})$;

б) среднее число каналов m, занятых обслуживанием: $E(m) = m_k$;

в) среднее число простаивающих каналов: $E(m_0) = (m - m_k)$;

г) коэффициент использования (занятости) канала (K_s);

д) коэффициент простоя (отказ) канала (K_0);

е) относительная (Q) и абсолютная (A) пропускная способность СМО;

ж) среднее число требований, находящихся в системе (L_s);

з) среднее число требований, ожидающих в очереди (L_q);

и) среднее время ожидания требования в очереди (W_q);

к) среднее время пребывания требования в системе (W_s).

Рассмотрим приемы вычисления показателей первой группы на примере наиболее распространенной модели СМО $(//m \geq 2)$ с ожиданием, содержащей m параллельных обслуживающих каналов. Здесь поступающие требования не теряются и оставляют систему лишь после обслуживания. Каналы выполняют однородные операции, и время обслуживания каждым каналом t распределено по экспоненциальному закону с параметром m (5), а входящий поток — пуассоновский с параметром λ (1); дисциплина очереди не регламентирована, и отсутствует ограничение на число поступающих требований. Модель СМО представляется в виде системы уравнений для стационарного состояния.

Определение вероятности наличия n требований (P_n) в системе зависит от соотношения числа поступающих требований (n) за единицу времени и количества каналов обслуживания (m).

1. Для условияю когда $m = 1$, P_n определяется по формуле математического ожидания дискретной случайной величины.

2. Для условия, когда $1 \leq n \leq m$ (вероятность, что все требования находятся на обслуживании или очереди нет), P_n рассчитывается по формуле

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0. \tag{8}$$

3. Для условия, когда $n \geq m$, имеем, что m требований находятся на обслуживании, а $(n - m)$ ожидают в очереди, и соответственно вероятность P_n определяется по формуле

$$P_n = \frac{\rho^n}{m^{n-m} m!} P_0, \tag{9}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E(\tau)}{E(t)}, \tag{10}$$

где λ — интенсивность входного потока требований;
μ — интенсивность обслуживания требований одним каналом.

Если $\rho/m < 1$, то вероятность отсутствия требований в системе P_0 определяется по формуле для стационарного режима:

$$P_0 = \left[\sum_{n=1}^{m-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^m}{m!\left(1 - \frac{\rho}{m}\right)}\right]. \tag{11}$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов определяется по формуле

$$E(m_k) = m_k = \rho \tag{12}$$

или по формуле математического ожидания дискретной случайной величины:

$$m_k = \sum_{n=1}^{n=m} nP_n. \tag{13}$$

Тогда среднее число простаивающих каналов будет рассчитываться следующим образом:

$$E(m_0) = m - \rho. \tag{14}$$

Коэффициенты использования (загрузка канала) и простоя канала соответственно определяются по формулам

$$K_s = \frac{\rho}{m} \text{ и } K_s = 1 - \frac{\rho}{m}. \tag{15}$$

Среднее число требований, ожидающих в очереди, находится из выражения:

$$L_a = \frac{\rho^{m+1}}{(m-1)!(m-\rho)^2} P_0. \tag{16}$$

Среднее время ожидания в очереди составит:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}. \tag{17}$$

Среднее время пребывания требования в системе рассчитывается по формуле

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}. \tag{18}$$

Среднее число требований, находящихся в системе, определяется следующим образом:

$$L_s = L_q + \rho. \tag{19}$$

Для общего случая L_s определяется по формуле математического ожидания дискретной случайной величины:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n. \tag{20}$$

Для оценки параметров вероятностной системы и ее случайных процессов с позиции устойчивости предусматривается использование найденных значений характеристик случайных функций, являющихся неслучайными функциями аргумента t. К ним относят математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, коэффициент вариации, характеризующий некоторую среднюю реализацию случайного процесса (или случайной функции) по множеству наблюдений. Статистики находятся через параметры СМО. Например, дисперсия (D) для числа требований, находящихся в системе, рассчитывается по формуле

$$D = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}. \tag{21}$$

Показателя, характеризующие экономические последствия от принятия решений по совершенствованию обслуживания клиентов (потребителей), сводится к определению экономической эффективности и потерям в связи с отказом системы от обслуживания и ожиданием обслуживания (22)– (24).

Экономическая эффективность функционирования системы массового обслуживания составит:

$$E = (P_n \lambda c - e_k m_k)T - U, \tag{22}$$

где c — средний доход, полученный при обслуживании одного требования; e_k — стоимость эксплуатации одного канала за единицу времени; T — рассматриваемый интервал времени; U — величина потерь в системе.

Величина потерь определяется по следующим выражениям:

а) система с отказами:

$$U = \left[e_u P_{(n-m)}\lambda + e_t(m - m_k)\right] T, \tag{23}$$

где e_u — стоимость убытков в результате ухода требований из системы за единицу времени;
e_t — стоимость простоя канала за единицу времени;

б) система с ожиданием:

$$U = [e_q L_q + e_t(m - m_k)]T. \tag{24}$$

Для того, чтобы продемонстрировать полезность использования методов теории массового обслуживания для решения управленческих задач, рассмотрим пример оценки СМО малой размерности, которая по своим характеристикам удовлетворяет условиям применения формул (11)–(19).

Пример. Требуется провести оценку эффективности централизации нескольких отделов или служб с однородными функциями. В качестве объекта рассматриваются две службы такси, которые приобрела компания «Автосервис». Заявки клиентов между службами распределяются поровну. Спрос на такси к диспетчеру поступает с частотой 10 вызовов в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 11,5 мин. Вызовы такси распределены во времени по пуассоновскому закону, а продолжительность обслуживания одного клиента — по экспоненциальному закону. Каждая служба такси оснащена двумя автомобилями.

Возникает вопрос об экономической целесообразности централизации управления таксопарком. Для этого необходимо сравнить два варианта:

1. вариант с независимым обслуживанием системами типа $(M/M/2)$ при $\lambda = 10$ вызовов/ч, $\tau = 11{,}5$мин. и $m = 2$;
2. вариант с одной очередью типа $(M/M/4)$ при $\lambda = 10 \cdot 2 = 20$ вызовов / ч, $\tau = 11{,}5$ мин. и $m = 4$.

Для начала определим коэффициенты загруженности службы по первому и второму вариантам по формуле (15). При $m = 2$ имеем:

$$K_s = \frac{\rho}{m} = 100\frac{\lambda}{\mu m} = 100\frac{10}{2(60:11{,}525)} = 95{,}8\%.$$

Как видно из расчета, коэффициент загруженности службы такси достаточно высок. Очевидно. что он не изменяется и в варианте с $m = 4$, так как и числитель и знаменатель увеличиваются в два раза. На первый взгляд объединение не приводит к экономическому эффекту, а так как исследование эффективности функционирования СМО ориентировано на повышение качества удовлетворения требований потребителя, то необходимо оценить и параметры, характеризующие это направление деятельности.

Вычислим W_q (среднее время ожидания клиентом автомобиля-такси). Для расчета W_q воспользуемся формулами (11), (16), (17).

Для первого случая при $m = 2$ имеем $\rho = 1{,}917$. Определим по формуле (11) вероятность того, что в системе нет требований (P_0):

$$P_0 = \left[\frac{1{,}917^0}{0!} + \frac{1{,}917^1}{1!} + \frac{1{,}917^2}{2!(1 - 1{,}917/2)} = 0{,}0212\right]^{-1}$$

.

Используя значение P_0, определим W_q по формулам (16) и (17):

$$W_q = \frac{1}{10}\left[\frac{1{,}917^3 \cdot 0{,}0212}{(2-1)!(2-1{,}917)^2}\right] = 2{,}16\text{ч}$$

.

Для второго при $m = 4$ имеем $\rho = 3{,}83$ и определим P_0:

$$P_0 = \left[\frac{3{,}83^0}{0!} + \frac{3{,}83^1}{1!} + \frac{3{,}83^2}{2!} + \frac{3{,}83^3}{3!} + \frac{3{,}83^4}{4!(1 - 3{,}83/4)}\right]^{-1} = 0{,}0042$$

.

При значении $P_0 = 0{,}0042$ получим, что:

$$W_q = \frac{1}{20}\left[\frac{1{,}917^5 \cdot 0{,}0212}{3!(4-3{,}83)^2}\right] = 1{,}05\text{ч}$$

.

Приведенные оценки показывают, что централизация служб позволяет сократить среднее время ожидания клиентом вызванного по телефону такси примерно вдвое. Это не гарантия, что клиент откажется от заказа, но существенное сокращение времени ожидания. В дальнейшем, кроме создания единой службы такси, необходимо рассматривать вопросы увеличения парка такси. При решении задач с размерностью $m > 5$ методами теории массового обслуживания потребуется автоматизированное вычисление.

Подводя итоги, отметим, что теория массового обслуживания предоставляет исследователю множество разнообразных моделей и методов решения задач по повышению эффективности обслуживания потребителей, клиентов.

4 Тема 4. Игры в чистых стратегиях

Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называются матричными играми.

Итак, матричная игра — это конечная игра двух лиц с нулевой суммой (т. е. сумма выигрышей игроков в каждой ситуации равна нулю). Такая игра полностью определяется матрицей

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой строки соответствуют чистым стратегиям игрока 1, столбцы — чистым стратегиям игрока 2, на их пересечении стоит выигрыш игрока 1 в соответствующей ситуации, т. е. ситуации $s = (i, j)$ соответствует выигрыш $H_1(s) \equiv H(i, j) = h_{ij}$. Тогда выигрыш игрока 2 равен $H_2(s) = -H_1(s)$ для всех $s \in S$.

Здесь игрок 1 имеет m стратегий, игрок 2 имеет n стратегий. Такая игра называется $m \times n$-игрой. Матрица H называется матрицей игры или матрицей выигрышей (платежной матрицей).

Цель игрока 1 — максимизировать свой возможный выигрыш, при этом увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 2 (так как игра антагонистическая). Аналогичное можно отметить и для игрока 2: увеличение его выигрыша ведет к уменьшению выигрыша игрока 1. Поэтому при выборе стратегии игрок 1 (разумный игрок, действующий рационально) будет руководствоваться следующими соображениями. При стратегии i игрока 1 игрок 2 выберет стратегию j_*, максимизирующую его (игрока 2) выигрыш (тем самым минимизирующую выигрыш игрока 1):

$$h_{ij*} = \min_j h_{ij}.$$

Тогда оптимальная стратегия игрока 1, которая обеспечит ему наибольший из возможных выигрышей $h_{ij*}, i = 1, 2, ..., m$, (т. е. при любой стратегии игрока 2), будет состоять в выборе стратегии i_*, для которой выполняется:

$$h_{i*j*} = \max_i h_{ij*} = \max_i \min_j h_{ij}.$$

Аналогичными соображениями будет руководствоваться игрок 2 при выборе стратегии: обеспечить наибольший возможный выигрыш при любом выборе стратегии игрока 1, т. е. выбрать стратегию, которая обеспечит ему max из возможных выигрышей

$$-h_{i*j}, j = 1, 2, ..., n, \text{ здесь } h_{i*j} = \max_i h_{ij},$$

причем для второго игрока выигрыш равен $\breve{}h$, где h — выигрыш игрока 1.

Таким образом, оптимальная стратегия игрока 2 будет состоять в выборе стратегии $j*$, для которой выполняется:

$$-h_{i*j*} = \max_j(-h_{i*j}) = \max_j(-\max_i h_{ij}) = -\min_j \max_i h_{ij},$$

отсюда получим:

$$h_{i*j*} = \min_j \max_i h_{ij}.$$

5 Тема 5. Сетевое планирование проекта

Сетевое планирование и управление (СПУ), система планирования и управления разработкой крупных народно-хозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путём применения сетевых графиков. Система СПУ позволяет устанавливать взаимосвязь планируемых работ и получаемых результатов, более точно рассчитывать план, а также своевременно осуществлять его корректировку. СПУ — основа использования ЭВМ в управлении и создании АСУ.

Сущность СПУ состоит в составлении логико-математической модели управляемого объекта в виде сетевого графика (рисунок 2) или модели, находящейся в памяти ЭВМ, в которой отражаются взаимосвязь и длительность определённого комплекса работ. Сетевой график после его оптимизации средствами прикладной математики и вычислительной техники используется для оперативного управления работами.

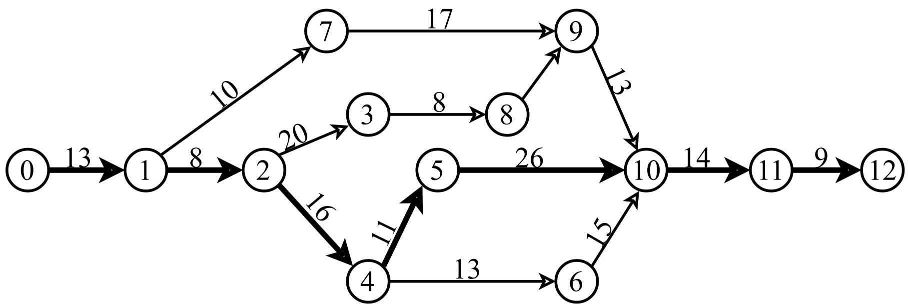

Рис. 2: Сетевой график

На график нанесены работы и события. Каждое событие характеризует завершение или начало работы, а работа означает действие, которое нужно совершить, чтобы перейти от предшествующего события к последующему. События на графике обозначаются кружками, а работы — стрелками, показывающими связь между событиями (возможен и другой вариант: работы изображаются кружками, а связи между ними стрелками). Работа должна быть конкретной, четко описанной и иметь ответственного исполнителя; продолжительность её измеряется количеством дней, недель, декад и др., наносимых над стрелкой. Временные оценки даются ответственными исполнителями соответствующих работ. Все работы в графике ведут к конечному событию — цели планирования.

При планировании длительности работ пользуются действующими нормативами и опытными данными, но во многих случаях (в частности, когда рассматриваются программы по освоению новых видов продукции или проблемные научные исследования) время работы не может быть выражено одной достоверной оценкой; ответственный исполнитель обычно даёт 3 оценки. Оптимистическая оценка времени (минимальная продолжительность работы t_{min}) — минимальный срок, в течение которого будет выполнена работа в наиболее благоприятных условиях, если ничто не помешает её выполнению. Пессимистическая оценка времени (максимальная продолжительность работы t_{max}) характеризуется продолжительностью времени, необходимого для выполнения работы при наиболее неблагоприятных условиях, если в процессе её выполнения возникнут трудности. Наиболее вероятная продолжительность времени ($t_{\text{нв}}$) показывает время выполнения работы в нормальных условиях.

Ожидаемая продолжительность работы определяется на основании 3 или 2 оценок по одной из следующих формул:

$$t_{\text{ож}} = \frac{t_{min} + 4 \cdot t_{\text{нв}} + t_{max}}{6} \text{ или } t_{\text{ож}} = \frac{3 \cdot t_{min} + 2 \cdot t_{max}}{5}$$

Важный элемент разработки сетевого графика — определение продолжительности путей. На рисунке 2 пути представлены линиями, образуемыми стрелками взаимосвязанных работ, концы которых указывают на начальные и конечные события. Различают полные и критические пути: полным называется путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец — с её завершающим событием; критическим — путь, имеющий наибольшую продолжительность и характеризующий время выполнения всего комплекса работ, проекта в целом, т. е. время достижения конечной цели (на рисунке обозначен жирными стрелками).

Критический путь расценивается как самый важный в системе СПУ, т. к. представляет собой основу для выбора оптимального плана и организации контроля за ходом работ. Отношение продолжительности любого пути к продолжительности критического пути характеризует степень его напряжённости. Если критический путь является наиболее продолжительным по времени от начального до конечного события, то все др. события и работы должны лежать на путях более коротких.

Совершенные формы СПУ содержат информацию относительно движения материальных затрат и наращивания издержек по объекту. СПУ проводится примерно в следующей очерёдности: расчленение комплекса работ на отдельные последовательные этапы, каждый из которых закрепляется за ответственным исполнителем; выявление и описание всех событий и работ, необходимых для достижения неконечной цели; построение сетевого графика; определение времени выполнения каждой работы в сети на основе системы оценок; расчёт критического пути и резервов времени; анализ сети и оптимизация графика, разработка мероприятий по сокращению времени критического пути; управление ходом работ с помощью сетевого графика.

Каждый исполнитель определяет состав и последовательность закрепленного за ним этапа работ. Затем ответственное за проект лицо составляет первичные сетевые графики, которые после их корректировки «сшиваются» в сводный сетевой график. Этот график завершается событием, соответствующим заданной конечной цели. При этом особое внимание уделяется устранению неувязок на стыках между первичными сетевыми графиками, т. е. этапами комплекса работ.

По мере движения ко всё более высокому уровню выполнения работ планы-графики укрупняются. Если они предназначены для руководителей предприятий, то в них включаются только сроки свершения граничных событий, являющихся выходными для одних предприятий и входными для других, с указанием времени начала и окончания работ критической зоны. Планы-графики руководителей промежуточных ступеней дополняются сведениями о сроках свершения граничных событий между отдельными ответственными исполнителями.

В процессе выполнения планов-графиков осуществляются непрерывный контроль, корректировка и регулирование сетевой модели. Для устранения расхождений между запланированным и фактическим ходом работ проводятся организационно-технические мероприятия.

Т. о., СПУ создаёт в конечном счёте условия для выполнения всего комплекса работ в их логической последовательности. С помощью сетевых графиков осуществляется системный подход к вопросам организации управления заданными процессами, поскольку коллективы различных подразделений участвуют в них как звенья единой сложной организационной системы, объединённые общностью задачи.

Список использованных источников

1. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под ред. В. В. Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 328 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/F1ED488F-DE26-4F3D-BD14-B5DE28846453.

2. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. В. Королев. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 280 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/05CB5B2D-5625-4F53-8E26-B0A5A951365F.

3. Кремлев, А. Г. Основные понятия теории игр : учебное пособие / А.Г. Кремлев. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016.— 144 с.

4. Крылатков, П. П. Исследование систем управления : учеб. пособие для вузов / П. П. Крылатков, Е. Ю. Кузнецова, С. И. Фоминых. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 127 с. — (Серия : Университеты России).

5. Фрейдина, Е. В. Исследование систем управления : учеб. пособие / Е. В. фрейдина ; под. ред. Ю. В. Гусева. — Москва : Издательство «Омега-Л», 2008. — 367 с. — (Высшая школа менеджмента).