ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9 | сентябрь 2022

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 9
сентябрь
2022

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА И ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

БЕЗЗАКОНИЕ НА ЦВЕТКАХ

ЦИКЛОНЫ И АНТИЦИКЛОНЫ

Enter

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

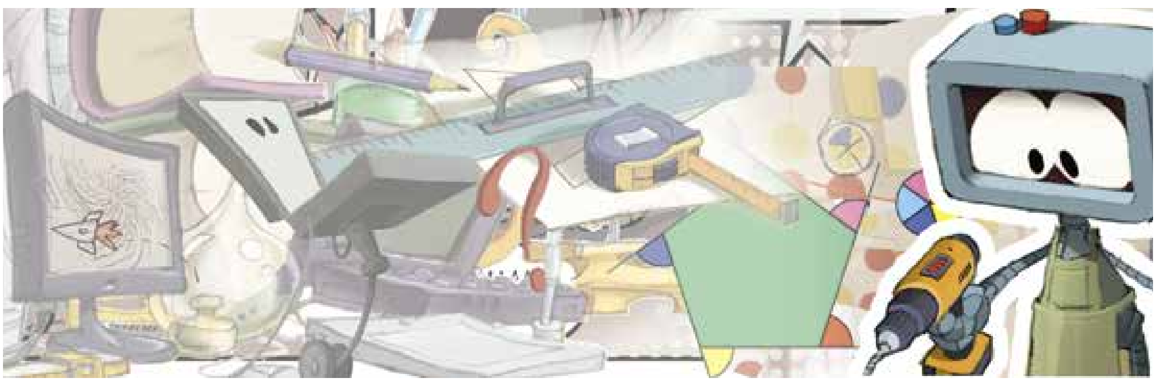
Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 29.07.2022
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

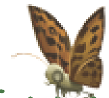
6+

СОДЕРЖАНИЕ



Сергей Лысенков

БЕЗЗАКОНИЕ НА ЦВЕТКАХ



Насекомые, кружащиеся вокруг цветущих растений, – привычная картина тёплых времён года. Что они там делают? Ответ вроде бы известен – кормятся нектаром и пыльцой и опыляют растения, то есть переносят пыльцу с тычинок одного цветка на рыльце пестика другого цветка, благодаря чему, в конечном итоге, образуются семена. Это один из самых ярких примеров *мутуализма* – взаимовыгодного сотрудничества между разными видами. Но вдумайтесь – опыляемые животными растения доверили своё размножение другим организмам! Однако распространённость этого явления свидетельствует о его успешности. Самые частые опылители – насекомые, но в переносе пыльцы могут участвовать и птицы (прежде всего колибри), летучие мыши, а в крайне редких случаях – даже нелетающие млекопитающие (например, медовые поссумы опыляют австралийскую банксию).

Зачем опыление нужно растениям – понятно. А вот какая от него выгода насекомым (и другим животным)? Вообще говоря, никакая – это лишь побочный продукт их пищевого поведения, умело использованный растениями! И потому неудивительно, что далеко не всегда посещение насекомым цветка сопровождается опылением. Поэтому в биологии опыления (или, как её ещё называют, *антэкологии*, от древнегреческого *anthos* – цветок) принято говорить о *посетителях* цветков какого-либо вида растений, которые могут быть опылителями, а могут и не быть. И тут биологическая терминология начинает перекликаться с юридической.

Тех насекомых, которые, посещая цветок, не только пачкаются в пыльце, но ещё и пачкают ею рыльце пестика, называют *законными опылителями*. А тех посетителей, которые пользуются ресурсами цветка, не опыляя его, антэкологи «обвиняют» в преступлениях против собственности – воровстве и грабеже! Впрочем, юристы, скорее всего, отметили бы, что биологи употребляют эти термины некорректно.

Воровством называется тайное хищение чужого имущества, а грабежом – открытое, когда законный собственник или кто-то ещё видит, что происходит. Есть в уголовном кодексе и более тяжкое преступление – разбой, когда присвоение происходит с применением (или угрозой применения) опасного для жизни и здоровья насилия. То есть незаметно вытащить кошелёк из кармана – это кража, выхватить его из рук – грабёж, а если при этом ещё и угрожать ножом – то разбой.

Что же делают незаконопослушные насекомые? *Нектарными грабителями* называют тех, кто добывает нектар, повреждая цветок, прокалывая или прогрызая венчик (юридически корректнее было бы называть их разбойниками, но в русском языке закрепился термин «грабители»). Нектар у многих растений труднодоступен, спрятан в глубине цветка, и чтобы добраться до него, насекомым приходится прямо-таки протискиваться, пачкаясь в пыльце – поэтому некоторые выбирают такой обходной путь, как шмель на мыльнянке (рис. 1). А вот *нектарные воры* – так называют насекомых, которые потребляют нектар, не повреждая цветок, но и не перенося пыльцу, – могут быть и на лёгких в обращении цветках. Воровство нектара очень распространено, часто меньше половины всех посетителей оказываются законными опылителями! Обычно это поведение в каком-то смысле непреднамеренно – например, из-за мелких размеров насекомое может добраться до нектара, не испачкавшись в пыльце, как жук-долгоносик на веронике дубравной (рис. 2).

Рис. 1

Рис. 2

А вот нектарные грабители вполне намеренно добывают нектар не так, как это надо растению. В этом замечены лишь некоторые пчёлы, прежде всего шмели. Интересно, что такое поведение – не видовая особенность и даже не индивидуальная. Одна и та же особь может то залезать в цветок как законный опылитель, то прогрызать венчик как грабитель. Понаблюдайте за шмелями, посещающими иван-да-марью: насекомые то залезают в цветок, то садятся на него сверху.

Медоносные пчёлы (их разводят на пасеках) сами не прогрызают цветки, но могут, добывая нектар, пользоваться чужими дырками – таких насекомых называют *вторичными нектарными грабителями*.

Рис. 3

Рис. 4

Интересный пример воровства нектара, отчасти близкого к грабительству, можно наблюдать на жёлтых ирисах. Шмели добывают нектар, расположенный в основании цветка, двумя способами. Чаще всего они честно протискиваются вглубь венчика (рис. 3), а пыльца пачкает им спину. Но иногда они подбираются к цветку сбоку, засовывая хоботок в нектарник (рис. 4) – не прогрызая венчик (то есть это не «грабёж»), но и не соприкасаясь с пыльцой (то есть всё-таки «воровство»). Такое поведение чаще можно видеть у более крупных шмелей, которым, видимо, труднее залезать в цветок.

Для защиты от нектарных грабителей растения могут использовать несколько приспособлений: густые соцветия (в этом случае насекомое не может подлезть к цветку сбоку), плотный венчик (его сложнее прогрызть), большой объём нектара (чтобы его хватало и для привлечения настоящих опылителей). Впрочем, исследования показывают, что как нектарные грабители, так и нектарные воры довольно часто не очень вредят растениям: число семян в плодах, завязавшихся из посещённых ими цветков, не отличается от такового в плодах, завязавшихся из цветков, посещённых только настоящими опылителями.

Присмотритесь к цветкам с длинными венчиками (иван-да-марья, мыльнянка, жимолость) – вдруг и вам доведётся увидеть грабёж нектара?

Авторы фото:
1 – Елена Устинова,
2 – Сергей Лысенков,
3 и 4 – Наталья Рятова
Художник Мария Усеинова

Математический КРУЖОК

Григорий Мерзон

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧЕРЕПАХА и ЧИСЛА СОЧЕТАНИЙ

Таблица математической черепахи

В нижней левой клетке доски сидит математическая черепаха. Каждым ходом она умеет сдвигаться на клетку вправо или на клетку вверх (рис. 1). Запишем в каждой клетке таблицы, сколькими способами до неё может добраться черепаха.

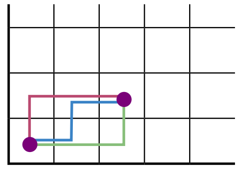


Рис. 1. Все пути черепахи в третью клетку второй строки

Ясно, что в любой клетке первой строки стоит число 1 (в неё можно попасть, только двигаясь всё время вправо). Догадались, какие числа стоят во второй строке? Правильно – последовательные натуральные: 1, 2, 3, ... (рис. 2).

1	3	?	?	?
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Рис. 2. Начинаем заполнять «таблицу математической черепахи»

Удобно заполнять клетки числами одну за другой: в каждую клетку черепаха может прийти либо слева, либо снизу – поэтому число в каждой клетке равно сумме чисел в её «соседях» слева и снизу (рис. 3).

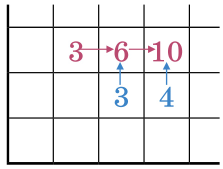
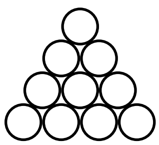
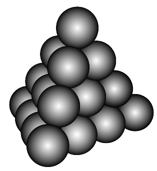


Рис. 3. Число 6 получается как сумма чисел под ним и слева от него; далее аналогично получается число 10...

Например, в третьей строке стоят числа 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, ... – их ещё называют *треугольными* (рис. 4, *а*). А в четвёртой строке стоят суммы последовательных треугольных чисел – это количества шариков в пирамидках (рис. 4, *б*).



а) 4-е треугольное число $1+2+3+4=10$



б) 4-е «тетраэдральное число» $1+3+6+10=20$

Рис. 4.

Задача 1. Найдите формулу для N-го треугольного числа.

Задача 2. Докажите, что в черепашьей таблице все числа на диагонали (кроме левого нижнего) – чётные.

Кодируем пути

Каждый путь черепахи можно закодировать «программой» (последовательностью) из букв П («вправо») и В («вверх»). Если конец пути расположен на X клеток правее и на Y клеток выше начала, то в программе будет X букв «П» и Y букв «В», всего $X+Y$ (рис. 5).

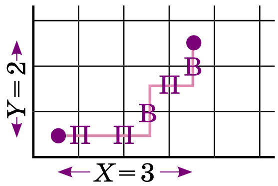


Рис. 5. Путь черепахи в 4-ю клетку 3-й строки («в клетку (3,2)»), соответствующий «программе» ППВПВ

Так значит, каждой клетке можно дать своё имя! Оно состоит из двух чисел: первое – сколько на пути черепахи в эту клетку будет ходов вправо, а второе – сколько ходов будет вверх. Числа будем записывать в скобках через запятую. Например, (0, 0) – это левый угол (никуда идти не надо).

Итак, в клетке (X, Y) черепашьей таблицы стоит количество программ из X букв «П» и Y букв «В». Чтобы задать такую программу, нужно выбрать, на каких позициях будет стоять буква «В». У нас Y букв «В», а мест для них имеется $X+Y$. Значит, программ столько же, сколько есть способов выбрать Y предметов из $X+Y$.

Например, в N-й клетке второй строки («клетке $(N-1,\ 1)$») стоит число N: выбрать, какой из N ходов будет ходом вверх, можно как раз N способами.

Задача 3. Заменим в программе, ведущей в клетку (X, Y), все «П» на «В», а все «В» на «П». В какую клетку приведёт новая программа?

Треугольник Паскаля

Количество способов выбрать k предметов из n обозначают $\binom{n}{k}$ или C_n^k (в двух обозначениях k и n действительно в разных местах, это не опечатка). А «таблицу математической черепахи» обычно поворачивают и рисуют в виде треугольника из чисел, который называют *треугольником Паскаля* (рис. 6). Будем нумеровать и его строки, и числа в строках, причём счёт начинаем с нуля. Например, самое верхнее число треугольника – это нулевое число нулевой строки (а, скажем, 2-е число 5-й строки равно 10). Тогда k-е число в n-й строке треугольника Паскаля – это как раз число $\binom{n}{k}$.

Мы уже умеем вычислять эти числа последовательно, строка за строкой: на левой и правой сторонах треугольника Паскаля стоят единицы, а каждое число внутри – сумма двух чисел над ним. Другими словами, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (на рисунке 6 эти числа соединены стрелочками для $n=4$, $k=2$).

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

$\longrightarrow$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рис. 6. Таблица математической черепахи и треугольник Паскаля

Задача 4. Как связаны числа $\binom{n}{k}$ и $\binom{n}{n-k}$? Как эту связь объяснить?

Задача 5. Найдите суммы чисел в первых нескольких строках треугольника Паскаля. Что получается? Почему?

Задача 6. Выпишите первые 10 строк треугольника Паскаля и обведите в них все нечётные числа. Разберитесь, в каких строках будут обведены все числа.

Если внимательно посмотреть на треугольник Паскаля, можно обнаружить ещё массу замечательных закономерностей (попробуйте!).

Строки треугольника Паскаля

Решим такую задачу: сколькими способами можно выбрать в классе из n человек команду из k обычных игроков и одного капитана?

Можно сначала выбрать обычных игроков – одним из $\binom{n}{k}$ способов, а потом назначить одного из оставшихся $n-k$ людей капитаном. Получаем ответ $\binom{n}{k}\cdot(n-k)$.

Но можно рассуждать иначе! Сначала выберем всю команду из $k+1$ игроков – одним из $\binom{n}{k+1}$ способов, а потом пусть они выберут среди себя капитана – одним из $k+1$ способов. Получаем ответ $\binom{n}{k+1}\cdot(k+1)$.

Какое из этих рассуждений правильное? Оба правильные! На самом деле, мы доказали тождество

$$\binom{n}{k}\cdot(n-k) = \binom{n}{k+1}\cdot(k+1).$$

Задача 7. Докажите похожим образом, что

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{n}{k}.$$

Возможно, вы уже заметили, что числа в строках треугольника Паскаля сначала возрастают (до середины), а потом убывают – такое свойство называется *унимодальность*. Можно объяснить это так: по только что доказанному, $(k+1)$-е число в n-й строке получается из k-го умножением на $(n-k)/(k+1)$; пока $k<(n+1)/2$, числитель больше знаменателя и следующее число больше предыдущего (а потом наоборот).

Задача 8. Докажите, что при $1<k<n-1$ число $\binom{n}{k}$ не может быть простым.

Формула для числа сочетаний

Те, кто решили задачу 6, доказали фактически и явную формулу для чисел сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \binom{n-2}{k-2} = \ldots =$$

$$= \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+2}{2} \cdot \binom{n-k+1}{1} = \frac{n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

(где $k!$ – обозначение для произведения $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$).

Можно объяснить эту формулу и по-другому. Будем выбирать k предметов из n последовательно всевозможными способами и записывать каждый выбор на бумажку. Первый предмет можно выбрать одним из n способов; после того как первый выбран, второй можно выбрать $n-1$ способами (любой из оставшихся) и так далее. То есть мы запишем на бумажке всего $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ строк. Но в них каждый из $\binom{n}{k}$ наборов предметов будет встречаться $k!$ раз: переставленный всевозможными способами. Вот и получается, что

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Эта явная формула не всегда удобна. Так, если мы хотим найти число способов выбрать 99 предметов из 100, вряд ли разумно сначала вычислять 100! и 99!, а потом делить одно на другое... Для вычислений (в том числе компьютерных) обычно удобнее рекуррентное задание (последовательное вычисление строки за строкой). А для доказательства разных фактов про числа сочетаний полезно помнить про их комбинаторный смысл (выбор k предметов из n, количество путей...).

Художник Мария Усеинова

Складушки – «нескладушки»

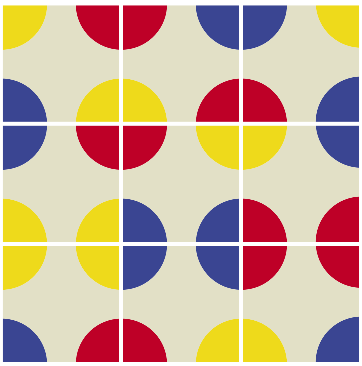
Владимир Красноухов

«Складушки» – вид головоломок, состоящих из набора квадратных фишек с нанесёнными на них фрагментами рисунка или символами. За рубежом их называют Card Matching Puzzles. Фишки нужно расположить так, чтобы их углы или стороны подходили друг к другу, в этом цель игры. Первую такую головоломку запатентовал в 1893 году Тёрстон (E. L. Thurston). Начиная с 1920 года, складушки широко выпускаются промышленностью на Западе для рекламы автомобилей, банков, различных товаров.

В 1996 году Жак Хаубрих (Jacques Haubrich) из нидерландского города Эйндховена издал сборник «Compendium of Card Matching Puzzles», где описал более тысячи образцов складушек со всего мира. Он разработал стройную систему классификации складушек, разделив их на 6 типов и 136 групп.

Со складушкой «Морское путешествие» В. Красноухова вы уже знакомы (см. «Квантик» № 6, 2022). В этом номере – ещё одна головоломка этого автора, «Складушки 3×3».

Изготовить её просто. Аккуратно вырежьте из фанеры или плотного картона 9 квадратиков и раскрасьте тремя красками по схеме справа. Рекомендуемый размер квадратиков: 80×80 мм.



А теперь задача и для детей, и для взрослых.

Используя все девять фишек, соберите квадрат 3×3 так, чтобы все части разноцветных кружков совпадали по цвету.

Задача эта достаточно сложна. Из миллиардов вариантов возможного расположения фишек в квадрате 3×3 лишь несколько вариантов дают решение. Даже захотелось переименовать эти складушки в «нескладушки»... Так что берите в помощь и логику, и усидчивость.

Желаем успехов!

Художник Екатерина Жиркова

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Он пройдёт в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, г. Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

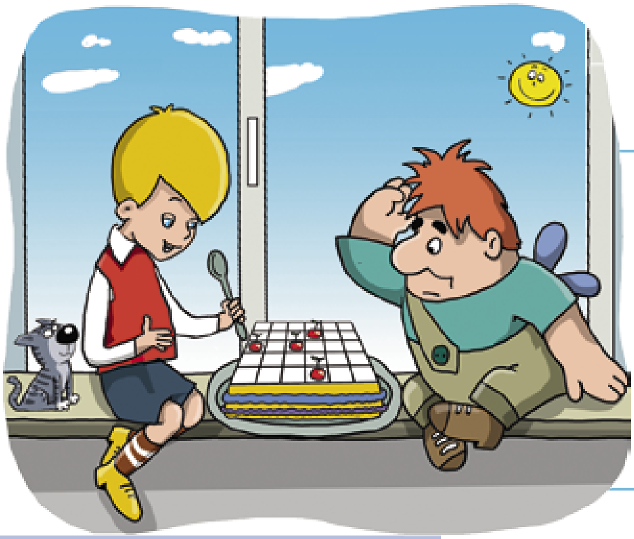
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

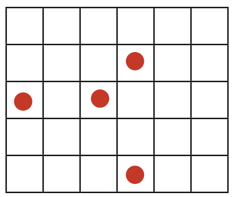
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. На чаепитии всех угощали конфетами. И Петя, и Вася взяли себе по две конфеты каждого вида, но съели только по 10 конфет каждый, а остатки принесли домой. Сколько всего видов конфет было на чаепитии, если Петя принёс домой конфеты только трёх видов, а Вася – шести?

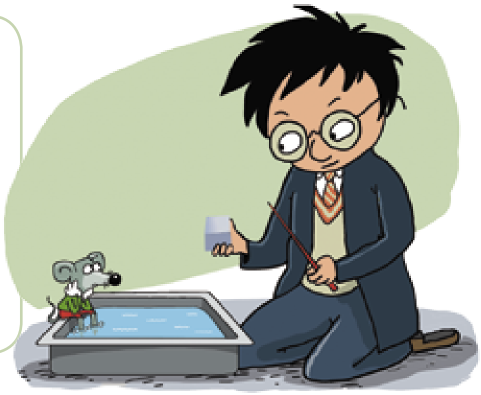


2. Малыш и Карлсон делят торт 5×6, украшенный вишенками (см. рисунок). Может ли Карлсон так разрезать торт на две одинаковые по форме и размеру части, что все вишенки достанутся ему?



Авторы: Сергей Дориченко (1), Михаил Евдокимов (2), Алексей Канель-Белов (3), Борис Френкин (4), Фёдор Нилов (5)

3. Гарри Поттер поместил в толщу воды неподвижный ледяной кубик со стороной 1 см, после чего вся вода, находящаяся не дальше, чем на 1 см хоть от какой-то точки кубика, тоже замёрзла. Докажите, что получившийся кусок льда можно разрезать на части и сложить из них всех несколько фигур, каждая из которых – кубик, цилиндр или шарик.



4. На острове 99 жителей, и каждый – либо спорщик, либо подпевала. Всех по очереди спросили, кого на острове больше – спорщиков или подпевал. Каждый, кроме первого, отвечал так: если он подпевала, повторял ответ предыдущего, а если спорщик – отвечал наоборот. В результате 75 островитян ответили неправильно. Можно ли только по этим данным определить, кого на острове больше: спорщиков или подпевал?

5. В вершинах куба расставили 8 чисел так, что на любых двух параллельных рёбрах общая сумма чисел одна и та же. Сколько среди этих 8 чисел может быть различных? (Укажите все варианты, сколько различных чисел может быть, и докажите, что других вариантов нет.)

Художник Николай Крутиков

Дидона и треугольник

По легенде, беглая царица Дидона, приплыв в чужие края, попросила у местного племени участок земли – хотя бы столько, сколько можно охватить воловьей шкурой. Получив согласие, Дидона разрезала шкуру на тонкие ремешки и огородила ими целый холм! Так начинался Карфаген…

А древнюю задачу – *какая фигура с данным периметром имеет наибольшую площадь* – называют задачей Дидоны. Ответ простой – круг (доказательство, правда, сложное).

Опираясь на этот факт, попробуйте разобраться в совсем другом, на первый взгляд, вопросе.

Дан равносторонний треугольник. Какая линия, делящая его площадь пополам, имеет наименьшую длину?

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986 22009
9 772227 798220