Отчет по преддипломной практике

Реализация процедуры оценивания динамической структуры инвестиционного портфеля хедж-фонда

Андрей Квасов

МГУ им. М. В. Ломоносова

12 февраля 2016

Задача распознавания сигналов

- Объектом распознавания являются сигналы $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, N$. Целевая переменная - $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$.
- Рассматривается модель нестационарной линейной регрессии, где искомой величиной является сигнал $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$, связанный с целевым вектором $\mathbf{y}_t = \mathbf{x}_t^{\mathsf{T}} \beta_t + \varepsilon_t$.
- Модель динамики изменения сигнала $\beta_t = V_t \beta_{t-1} + \varepsilon'_t$

Обзор предметной области

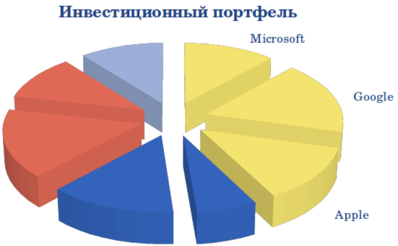
Style analysis инвестиционного портфеля

Returns Based Style Analysis model

z_t^i - цена актива в портфеле

m_t^i - количество активов в портфеле, данного вида

$x_t^i = \frac{z_t^i - z_{t-1}^i}{z_{t-1}^i}$ - доходности активов в портфеле



Обзор предметной области

Style analysis инвестиционного портфеля

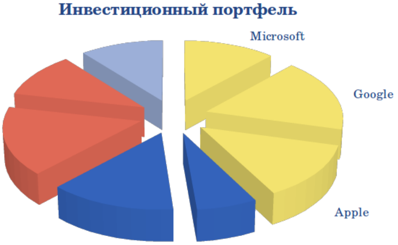
Returns Based Style Analysis model

$\hat{y}_t = \sum_{i=1}^{n} m_t^i z_t^i$ - стоимость инвестиционного портфеля (скрытая величина)

$y_t = \frac{\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}}{\hat{y}_{t-1}}$ - доходность портфеля (наблюдаемая величина)

$\hat{\beta}_t^i = \frac{m_t^i z_t^i}{\sum_{i=1}^{n} m_t^i z_t^i}$ - доля актива i в портфеле

x_t^0 — доходность безрискового актива ($x_t^0 \approx x^0 \; \forall t = 1, \ldots, N$)



$$\begin{cases} y_t = \mathbf{x}_t^{\mathsf{T}} \beta_t + \varepsilon_t^1, \text{ где } \beta_t \approx \hat{\beta}_t \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_t^i = 1 \end{cases}$$

Постановка задачи

Модели нестационарной регрессии и динамики изменения сигнала

Модель наблюдения, нестационарно регрессии: узловые функции

$$\sum_{t=1}^{N} q(y_t, \mathbf{x}_t, \beta_t) = \sum_{t=1}^{N} (y_t - \beta_t^T \mathbf{x}_t)^2$$

Модель динамики: функции связи

$$\sum_{t=2}^{N} \nu(\beta_t, \beta_{t-1}|\lambda) = \sum_{t=2}^{N} (\beta_t - \mathbf{V}_t\beta_{t-1})^\mathsf{T}\mathbf{U}_t(\beta_t - \mathbf{V}_t\beta_{t-1})$$

$\mathrm{U}_t = \mathrm{Diagonal}(\lambda)$, где λ — параметр сглаживания V_t — матрица динамики сигнала, $V_t = E$ — едничная

Постановка задачи

Полный критерий обучения

Общий критерий для оценивания состава портфеля

$$J(\beta_1, \ldots, \beta_N|\lambda) = \sum_{t=1}^{N} q(y_t, \mathbf{x}_t, \beta_t) + \sum_{t=2}^{N} \nu(\beta_t, \beta_{t-1}|\lambda)$$

Задача программирования с парно-сепарабельной функцией

$$\begin{cases} \mathrm{J}(\beta_1, \ldots, \beta_N|\lambda) \to \min\left((\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathbb{R}^{n \times N}\right) \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_t^i = 1,\ \ t = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Постановка задачи преддипломной практики

Исследование методов подбора структурного параметра λ для модели нестационарной регрессии в задаче восстановления скрытой стратегии

Динамические методы обучения
Метод прогонки

Учет ограничений равенств

$\beta_t^0 = 1 - \sum_{i=1}^n \beta_t^i$ приходим к выражению $y_t - x_t^0 = \sum_{i=1}^n (x_t^i - x_t^0)\beta_t^i$, т.о. $\tilde{y}_t^i = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_t^i \beta_t^i$. Переобозначим обратно.

Дифференцирование по аргументам критерия $(\beta_1, \dots, \beta_N)$, тогда получим реккурентное соотношение для каждого вектора $t = 1, \dots, N$: $A_t\beta_{t-1} + B_t\beta_t + C_t\beta_{t+1} = F_t$, где

$$A_t = -U_tV_t;\ \ B_t = \begin{cases} (x_tx_t^\intercal + U_{t+1}^\intercal U_{t+1}V_{t+1}),\ \ t = 1 \\ (x_tx_t^\intercal + U_t + U_{t+1}^\intercal U_{t+1}V_{t+1}),\ \ t = 2, \dots, N-1 \\ (x_tx_t^\intercal + U_t),\ \ t = N \end{cases};$$

$$C_t = -V_{t+1}^\intercal U_{t+1}; A_t \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ B_t \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ C_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Динамические методы обучения
Метод прогонки

$$Q = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & A_N & B_N \end{pmatrix}$$

Тогда считая $\hat{\beta} = (\beta_t^i,\ i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^{nN}$ и $\hat{\mathbf{x}} = (x_t^i,\ i = 1, \dots, n,\ t = 1, \dots, N) \in \mathbb{R}^{nN}$: Ищем решение системы $Q\hat{\beta} = \hat{\mathbf{x}}$

Динамические методы обучения
Метод Беллмана

Левые функции Беллмана

Частичный критерий:

$$J_t^-(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_t) = \sum_{i=1}^t \psi_i(\overline{\beta}_i) + \sum_{i=2}^t \gamma_i(\overline{\beta}_{i-1}, \overline{\beta}_i)$$

Функция Беллмана:

$$\tilde{J}_t^-(\overline{\beta}_t) = \min_{\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_{t-1}} J_t^-(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_t)$$

Рекуррентное соотношение:

$$\tilde{J}_t^-(\overline{\beta}_t) = \psi_t(\overline{\beta}_t) + \min_{\overline{\beta}_{t-1}}[\gamma_t(\overline{\beta}_{t-1}, \overline{\beta}_t) + \tilde{J}_{t-1}^-(\overline{\beta}_{t-1})]$$

Правые функции Беллмана

Частичный критерий:

$$J_t^+(\overline{\beta}_t, \ldots, \overline{\beta}_N) = \sum_{i=t}^N \psi_i(\overline{\beta}_i) + \sum_{i=t+1}^N \gamma_i(\overline{\beta}_{i-1}, \overline{\beta}_i)$$

Функция Беллмана:

$$\tilde{J}_t^+(\overline{\beta}_t) = \min_{\overline{\beta}_{t+1}, \ldots, \overline{\beta}_N} J_t^+(\overline{\beta}_t, \ldots, \overline{\beta}_N)$$

Рекуррентное соотношение:

$$\tilde{J}_t^+(\overline{\beta}_t) = \psi_t(\overline{\beta}_t) + \min_{\overline{\beta}_{t+1}}[\gamma_{t+1}(\overline{\beta}_t, \overline{\beta}_{t+1}) + \tilde{J}_{t+1}^-(\overline{\beta}_{t+1})]$$

Искомые значения $\overline{\beta}_t = \min\limits_{\overline{\beta}_t}[\tilde{J}_t^-(\overline{\beta}_t) + \tilde{J}_t^+(\overline{\beta}_t) - \psi(\overline{\beta}_t)]$

Оценки структурного параметра λ

Оценки по кросс-валидации, Predicted R2

Leave One Out

$$LOO = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \sum_{i=1}^{n}\tilde{\beta}_t^{ik} x_t^i)^2$$

, где $\tilde{\beta}_t^{ik}$ - обученные доли активов для контрольного объекта $\mathbf{x}_t$.

Leave Half Out

$$LHO = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}\left((y_t - \sum_{i=1}^{n}(\tilde{\beta}_t^i)' x_t^i)^2 + (y_t - \sum_{i=1}^{n}(\tilde{\beta}_t^i)'' x_t^i)^2\right)$$

, где $(\tilde{\beta}_t^i)'$ - доли активов, в обучении участвуют объекты с нечетным индексом , а $(\tilde{\beta}_t^i)''$ - доли ... с четным индексом t

Оценки структурного параметра λ

Модификация информационного критерия Акаике, общий случай (AIC)

AIC

$$\hat{\lambda}(\mathbf{y},\mathbf{X}) = \arg\min_{\lambda}\Big\{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}^T\hat{\beta}_\lambda(\mathbf{y},\mathbf{X})\right)^T\left(\mathbf{y}-\mathbf{X}^T\hat{\beta}_\lambda(\mathbf{y},\mathbf{X})\right)$$
$$+\Delta(\lambda,\mathbf{X})\Big\}, \text{где} \Delta(\lambda,\mathbf{X}) = Tr\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T(Q)^{-1}\right]$$

$\mathbf{X}$ составлена из векторов x_t стоящих своими элменетами в виде столбца в $t*n$ столбике матрицы $\mathbf{X}$, по строкам позициях с $t*n$ по $(t+1)*n$. σ^2 - дисперсия нормального распределения $\Phi(y_t|\mathbf{x_t})$.
[5] *Обобщение информационного критерия Акаике для выбора значений непрерывного параметра в моделях данных* / В. В. Моттль, О. В. Красоткина, Е. О. Ежова (Черноусова)

Исходные данные

- Данные предоставленные компанией "Markov Processe Int.": Доходности (в процентах) для 158 фондов, 12 активов, 120 дней (конец 2014, первый квартал 2015 года)
- Используются 60 дней, все 12 активов (включая и безрисковый)
- Эксперименты проводятся с каждым фондом отдельно, для исследования в отчете используется первый фонд "Wells Fargo Funds Trust: Wells Fargo Advantage Opportunity Fund; Investor Class Shares".
- Для поиска оптимума λ выбиралась сетка с 13 значениями от 1 до 800 в логарифмической шкале (по основанию 2)

Исходные данные

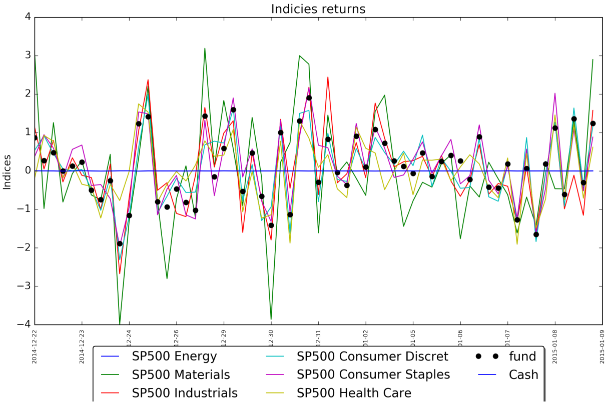
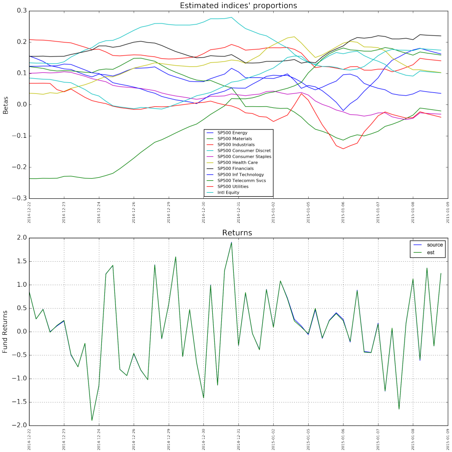


Рис. : Индекс SP500 в разных сферах (первые 6 признаков), доходность портфеля фонда (черные кружки)

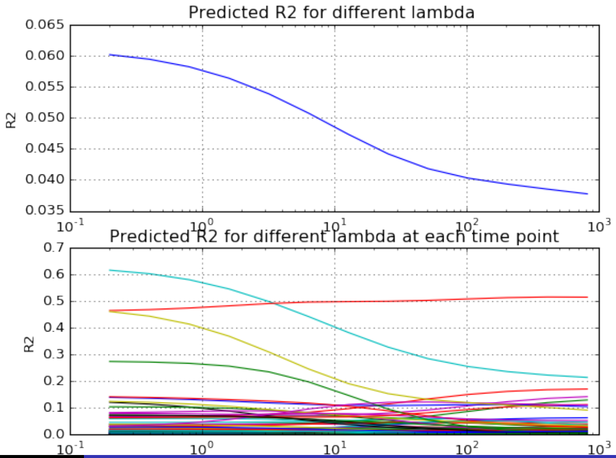
Применение модели нестационарной регрессии

Пример применения модели с $\lambda = 1$



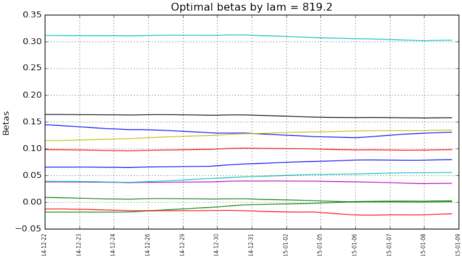
Применение модели нестационарной регрессии

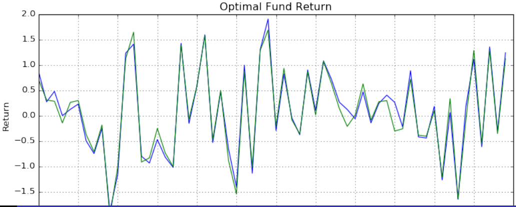
Leave One Out и проблема коррелированных признаков



Применение модели нестационарной регрессии

Leave One Out и проблема коррелированных признаков





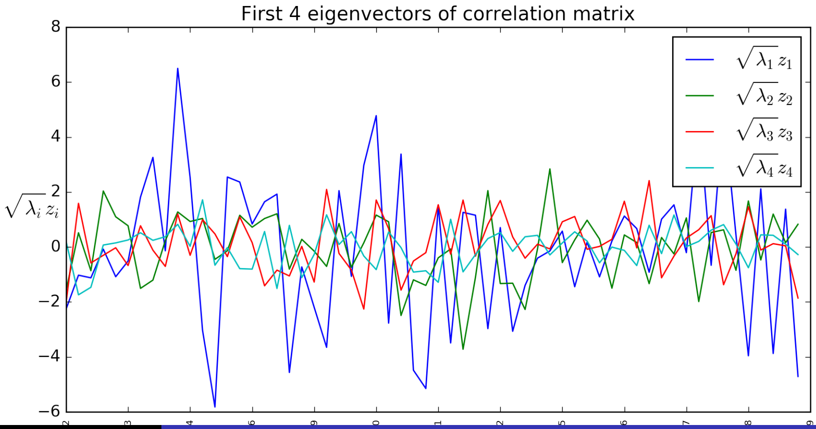
Применение модели нестационарной регрессии

Проблема коррелированных признаков, переход к пространству скрытых факторов

- Рассмотрим собственные вектора $\mathbf{z}_i, \ i = 1, \ldots, N$ матрицы $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ корреляции данных $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{N \times N} : \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^\mathsf{T}$
- Все кроме первых $n = 11$ наибольших собственных значений близки к нулю, тогда берем первые $m \leq n$ векторов $\mathbf{z}_i$, так что $\mathbf{Z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m)$ - выборка скрытых факторов, которые выражают любой наш исходный сигнал с помощью матрицы $\mathbf{A} : \mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{z}_t, \ t = 1, \ldots, N$.
- $\mathbf{A}$ — матрица с собственными векторами матрицы $\mathbf{M}' = \sum_{t=1}^{N} x_t^\mathsf{T} x_t$ в виде столбцов.

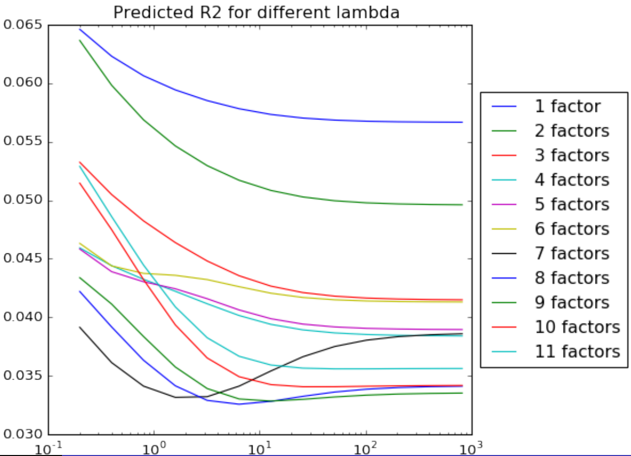
Применение модели нестационарной регрессии

Переход к пространству скрытых факторов



Применение модели нестационарной регрессии

Leave One Out в пространстве скрытых факторов



Применение модели нестационарной регрессии
Leave One Out в пространстве скрытых факторов

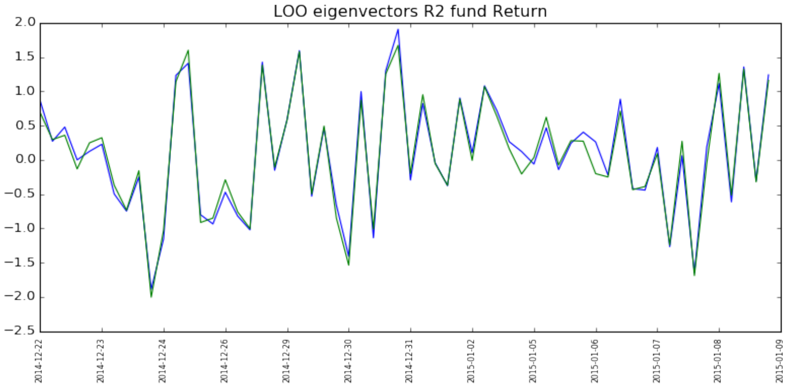
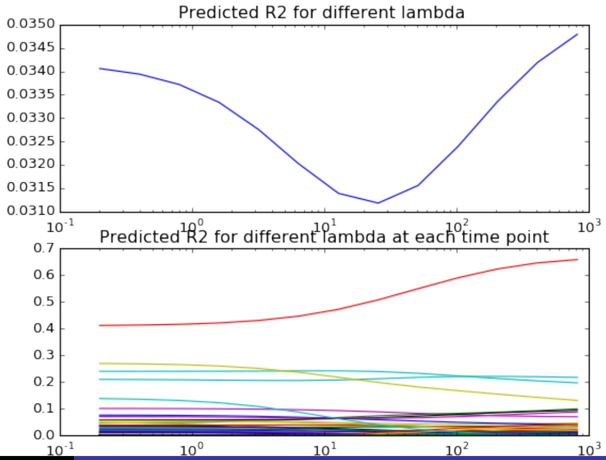


Рис. : Доходность портфеля при выборе оптимума $m = 8, \lambda = 6.4$ методом LOO_eigen

Применение модели нестационарной регрессии
Leave Half Out



Применение модели нестационарной регрессии

Leave Half Out

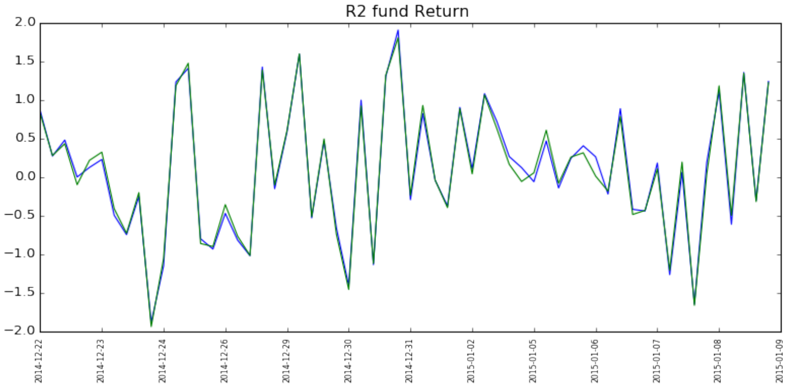
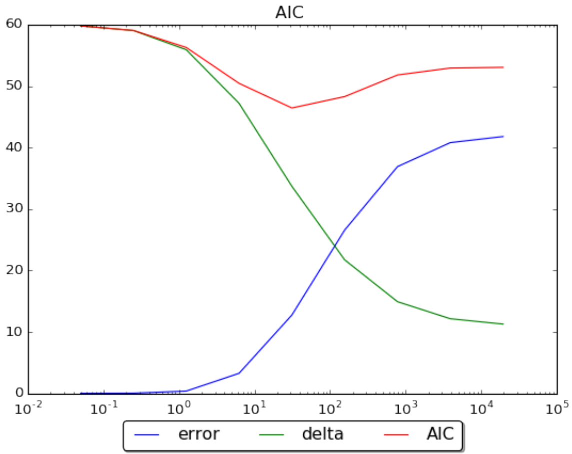


Рис. : Доходность портфеля при выборе оптимума $\lambda = 25.6$

Применение модели нестационарной регрессии
AIC



Применение модели нестационарной регрессии
AIC

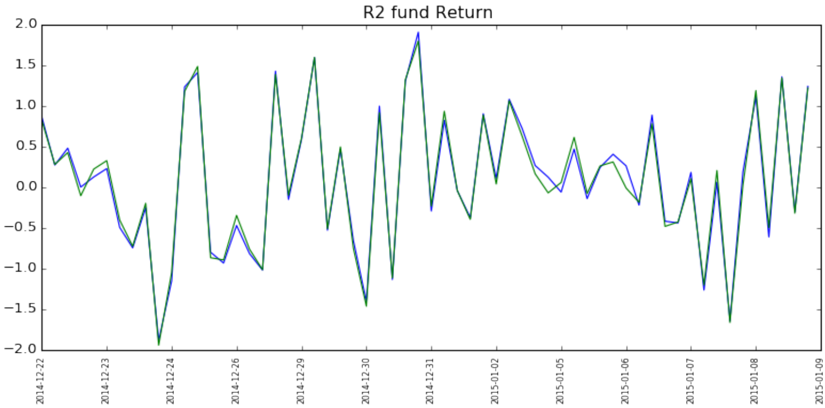
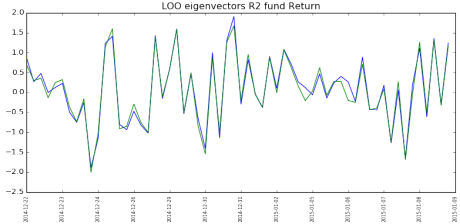
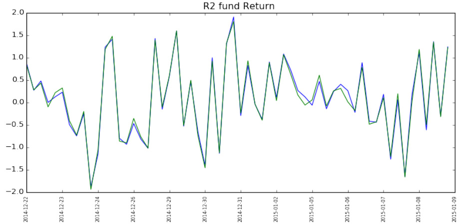


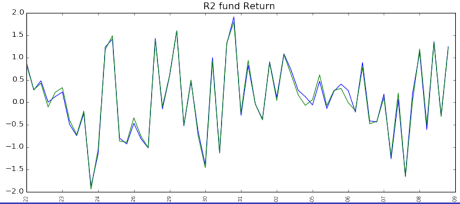
Рис. : Доходность портфеля при выборе оптимума $\lambda = 31.25$

Применение модели нестационарной регрессии

Return Based Style Analysis







- Реализованы программные средства для решения задачи восстановления скрытого управления инвестиционным портфелем
- Реализованы методы оценивания структурного параметра λ, проведен анализ применимости методов к реальным данным инвестиционных портфелей.
- Произведена подготовительная исследовательская работа на тему ВКР "Использование критерия обоснованности модели для подбора структурных элементов в задаче восстановления скрытой стратегии управления инвестиционным портфелем".

- Bellman R. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1957.
- Алгоритмы Динамического Программирования для Анализа Нестационарны сигналов / В.В. Моттль, А.А. Костин, О.В. Красоткина
- Беспереборная кросс-валидация отбора признаков в линейной регрессионной модели / О. В. Красоткина, В. В. Моттль, Н. А. Разин, Е. О. Черноусова // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2013. – Вып. 7. – No. 2. – С. 88-98.

Akaike, H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. // Proc. 2nd Intern. Symp. Inf. Theory, Petrov P.N. and Csaki F. eds. Budapest. – 1973. – P. 267-281.

Обобщение информационного критерия Акаике для выбора значений непрерывного параметра в моделях данных / В. В. Моттль, О. В. Красоткина, Е. О. Ежова (Черноусова) // Труды 51 научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2008. — Т. 3. — С. 58-60.