# Metody Numeryczne – Projekt „Aproksymacja Interpolacyjna”

Jakub Falk 193252

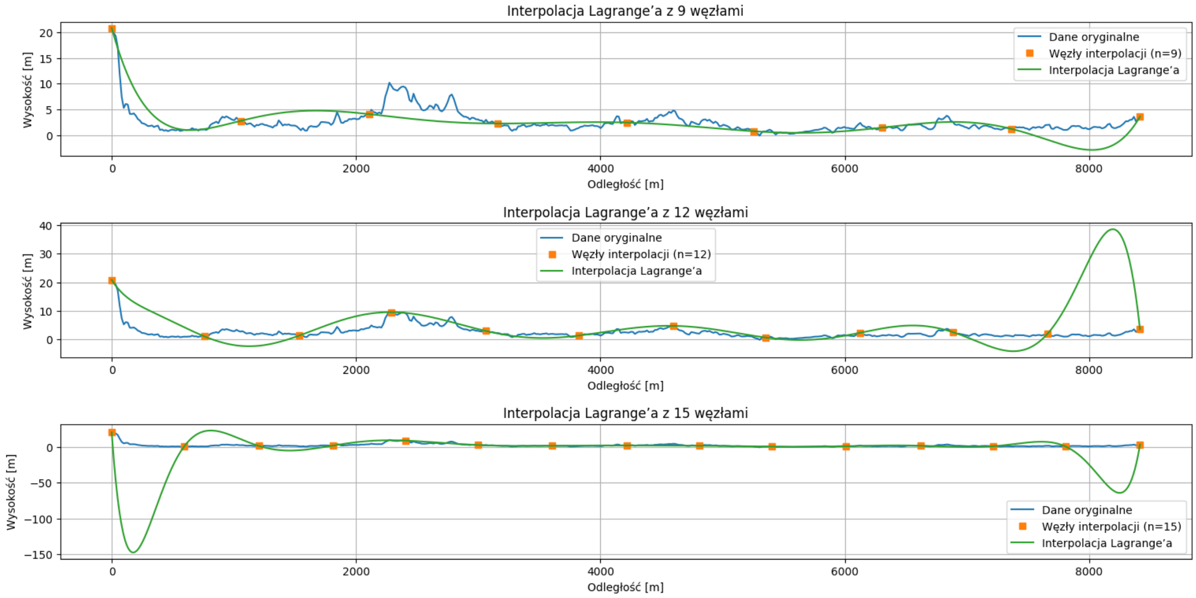
## Wstęp

Projekt miał na celu wdrożenie i ocenę dwóch algorytmów interpolacji na wybranych profilach wysokościowych: metody bazującej na wielomianie Lagrange'a oraz metody z użyciem funkcji sklejanych trzeciego stopnia. Implementacja została przeprowadzona w języku Python, z wykorzystaniem bibliotek matplotlib i pandas.

Interpolacja wielomianem Lagrange'a polega na znalezieniu wielomianu, który przechodzi przez zadane punkty. Metoda ta wykorzystuje bazowe wielomiany Lagrange'a, które są tak skonstruowane, że dla danego punktu mają wartość 1, a dla pozostałych 0. Dzięki temu można dokładnie dopasować wielomian do danych.

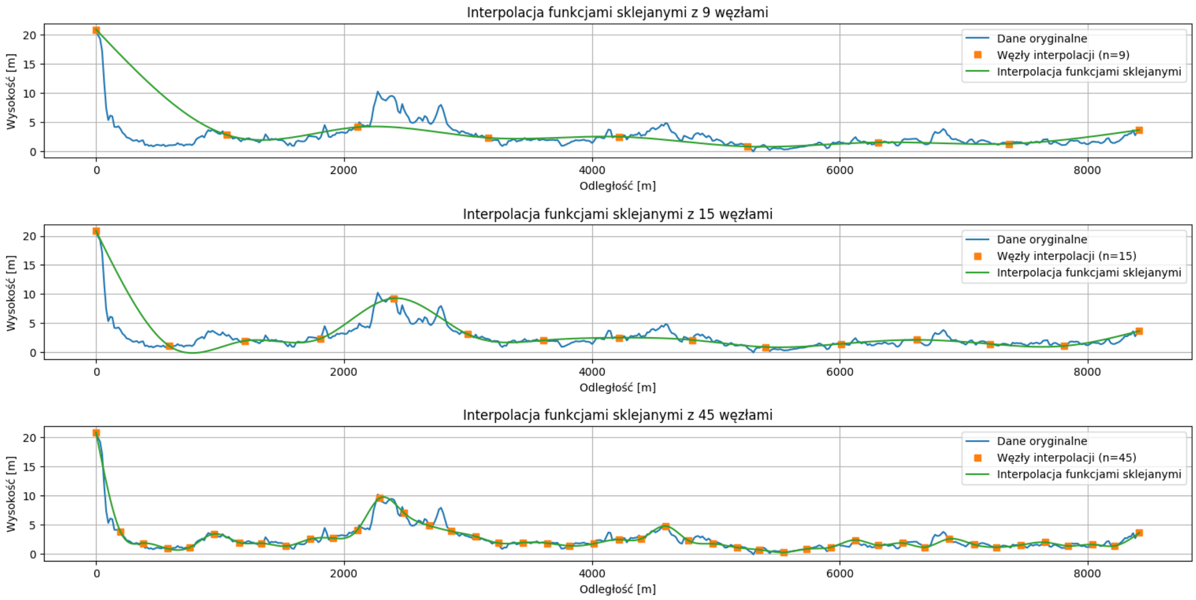
Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia (spline cubic) dzieli dane na przedziały i na każdym z nich dopasowuje wielomian trzeciego stopnia. Funkcje te są gładko połączone w węzłach, zapewniając ciągłość oraz płynność przejścia między przedziałami, co eliminuje oscylacje charakterystyczne dla wielomianów wyższych stopni.

# Trasa po Gdańsku (małe różnice wysokości)




Zaprezentowana trasa charakteryzuje się płaskim profilem (drobne spadki i wzniesienia). W przypadku interpolacji wielomianowej przy użyciu 9 punktów obserwujemy dokładne odwzorowanie przebiegu funkcji na terenie płaskim (z pominięciem wspomnianych drobnych spadków). Jednakże ze względu na niekorzystne rozmieszczenie węzłów w okolicach wzniesień, krzywa interpolacyjna mniej precyzyjnie odwzorowuje profil terenu. Jakość interpolacji w miejscach nagłych wzniesień silnie zależy od rozmieszczenia punktów, podczas gdy tereny płaskie są ogólnie dobrze odwzorowane i rozmieszczenie punktów nie ma tak istotnego znaczenia.

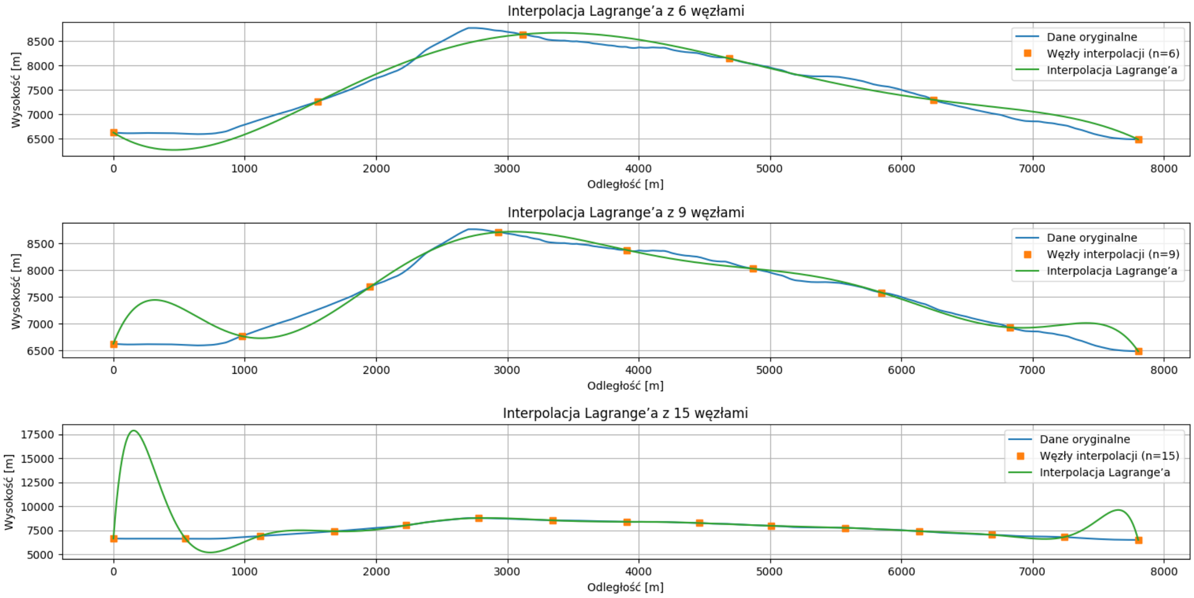
Dla uzyskania lepszej interpolacji, efekt Rungego pojawia się szybko, szczególnie widoczny już przy 12 punktach węzłowych, gdzie odchylenia od oczekiwanej wartości funkcji są znaczne. Efekt ten nasila się wraz ze wzrostem liczby punktów węzłowych. Ostatecznie, dla równomiernie rozmieszczonych węzłów metoda Lagrange'a nie pozwala na uzyskanie satysfakcjonującej interpolacji dla tego terenu.



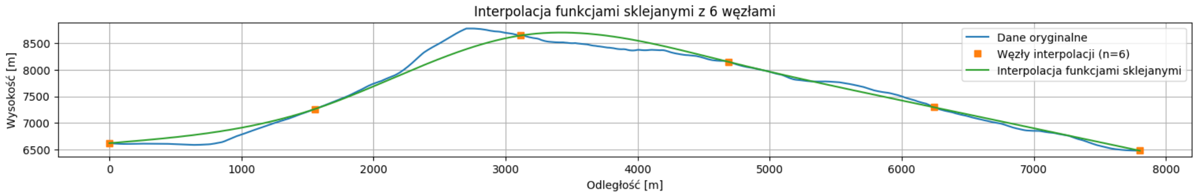

W przypadku metody krzywych sklejanych dla 9 punktów, problemem są drobne oscylacje wysokości występujące na poziomie odległości 2000 m. Niemniej jednak, zwiększenie liczby punktów węzłowych do 15 pozwala na lepsze przybliżenie tych chwilowych przeskoków. W przypadku tej metody możemy pozwolić sobie na jeszcze większe zwiększenie liczby punktów węzłowych. Dla 45 punktów błędy są już praktycznie niezauważalne dla tej trasy.

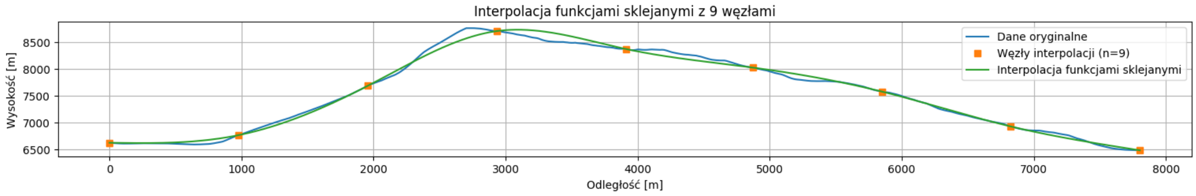
W przeciwieństwie do metody z wielomianem Lagrange'a, metoda krzywych sklejanych osiąga dobre rezultaty dla tego terenu.

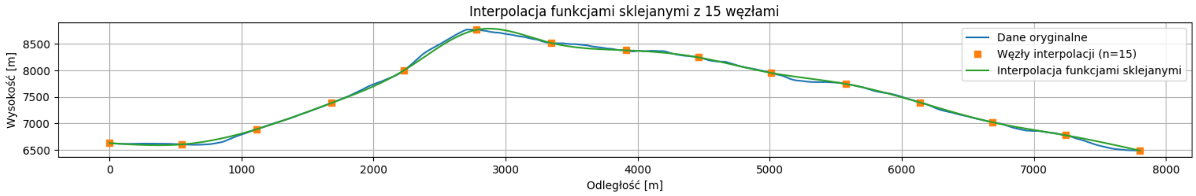
# Trasa na Mount Everest (jedno wyraźne wzniesienie)




Powyżej zamieszczono wykresy ilustrujące wpływ zwiększania liczby równomiernie rozmieszczonych węzłów interpolacji na jakość wyznaczanych wartości. Przede wszystkim należy zauważyć, że dla tej trasy uzyskujemy szybko dobre odwzorowanie odcinków o stałym nachyleniu. Problem pojawia się w przypadku nagłych spadków lub wzrostów nachylenia, jak to ma miejsce w przypadku osiągania szczytu - przy mniejszej liczbie węzłów interpolacyjnych możemy nie trafnie określić charakterystyczny punkt zmiany nachylenia, co może prowadzić do niewiernego odwzorowania rzeczywistej funkcji. Takie zjawisko występuje dla 6 punktów węzłowych. Dodatkowo, już dla 9 punktów węzłowych obserwuje się nasilenie efektu Rungego. W miarę zwiększania liczby węzłów interpolacyjnych jakość interpolacji na krawędziach przedziału pogarsza się (choć w środku przedziału obserwuje się poprawę).



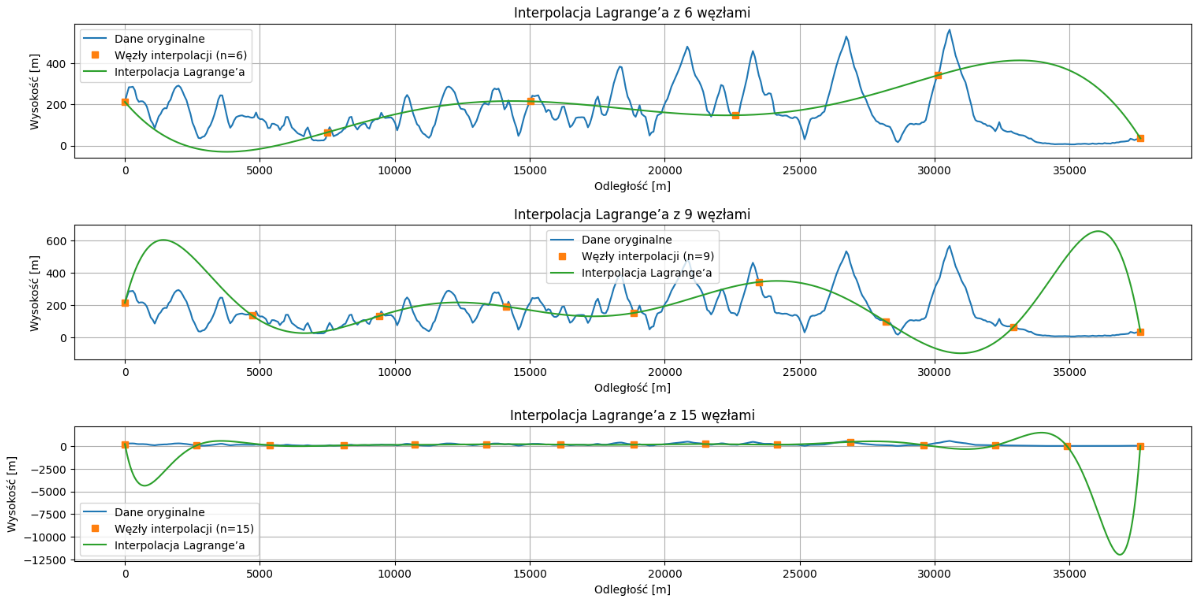



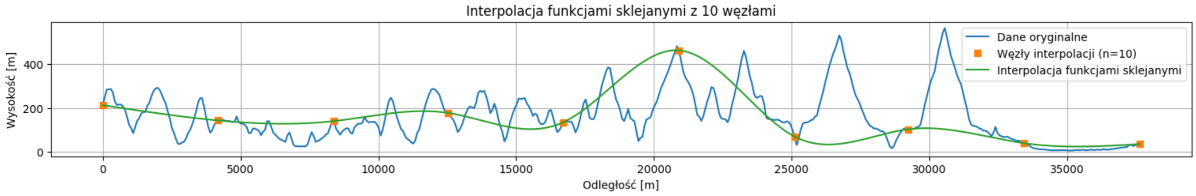

Mimo że w momencie osiągania szczytu nie obserwujemy dużych różnic w porównaniu do metody Lagrange'a, korzyścią jest eliminacja efektu Rungego przy użyciu metody krzywych sklejanych. Dzięki temu możemy poprawić jakość interpolacji poprzez zwiększanie liczby równomiernie rozmieszczonych punktów węzłowych, nie narażając się na pogorszenie aproksymacji na brzegach przedziału. Już dla 15 punktów węzłowych zostało osiągnięte niemal perfekcyjne odwzorowanie zmian wysokości na trasie.

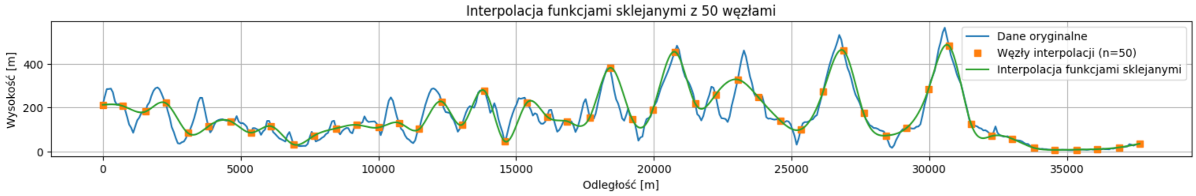
W tym przypadku również metoda krzywych sklejanych osiąga lepsze wyniki niż metoda z wielomianem Lagrange'a.

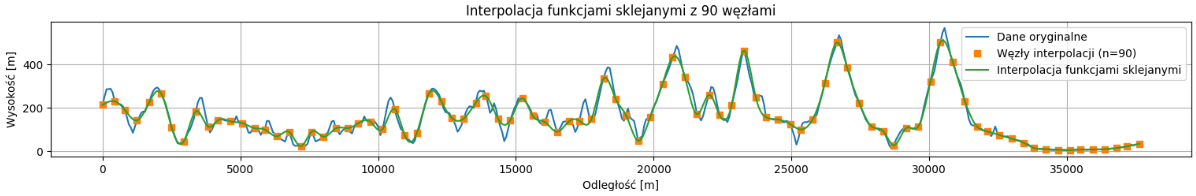
# Trasa Genua - Rapallo (wiele stromych wzniesień)




Analizowany profil wysokościowy jest wyjątkowo nieregularny, zawierający nagłe i gwałtowne spadki oraz wzrosty nachylenia. Widać, że w tym przypadku duży efekt Rungego występuje już przy 9 węzłach, co potwierdza, że oscylacje są wynikiem nie tylko liczby punktów węzłowych, ale także charakteru interpolowanej funkcji. Dla 6 węzłów możemy zaobserwować, dlaczego dla nieregularnych funkcji konieczna jest większa liczba punktów węzłowych do uzyskania dokładnej interpolacji - zbyt mała liczba "próbek" nie zapewnia wystarczającej ilości informacji do dokładnego odwzorowania profilu.




Oto prezentacja wyników dla krzywych sklejanych. Dla 10 punktów węzłowych jest zbyt mało próbek, aby dokładnie odwzorować kształt tego profilu wysokościowego, co dotyczy obu metod interpolacji. Potencjalnie użyteczne zjawisko obserwujemy dla 50 punktów, gdzie mimo że interpolacja nie jest jeszcze dokładna, stanowi to dobrą filtrację wartości szybkozmiennych. Dla 90 punktów węzłowych uzyskujemy dokładne odwzorowanie oryginalnej funkcji.

Ponownie można wywnioskować, że metoda krzywych sklejanych jest znacznie lepsza od metody Lagrange'a. W metodzie krzywych sklejanych możemy bezkarnie zwiększać liczbę punktów węzłowych, co prowadzi do dokładniejszej interpolacji, jak to widać w przypadku uzyskania dokładnego odwzorowania. W przeciwieństwie do tej metody, w metodzie Lagrange'a zwiększanie liczby punktów węzłowych szybko prowadzi do pogorszenia jakości interpolacji przez wzrost efektu Rungego, co uniemożliwia dokładne odwzorowanie profilu wysokościowego.

## Dodatkowa analiza interpolacji

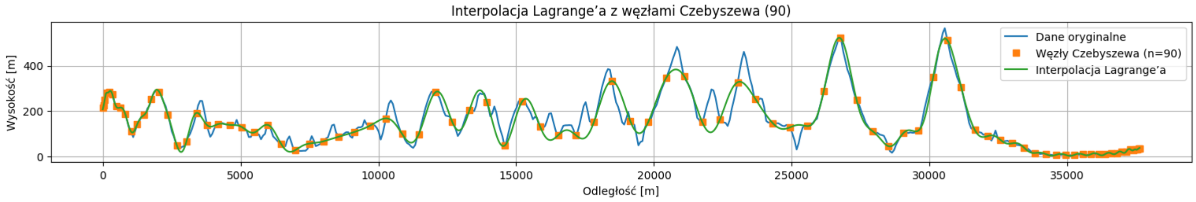
We wszystkich powyższych podpunktach głównym problemem metody interpolacji wielomianowej był efekt Rungego.

Aby skutecznie zniwelować ten efekt w procesie interpolacji wielomianowej, kluczowym krokiem jest odpowiednie rozmieszczenie punktów węzłowych. Zamiast stosować równomierne rozmieszczenie punktów na przedziale, można zastosować punkty Czebyszewa.

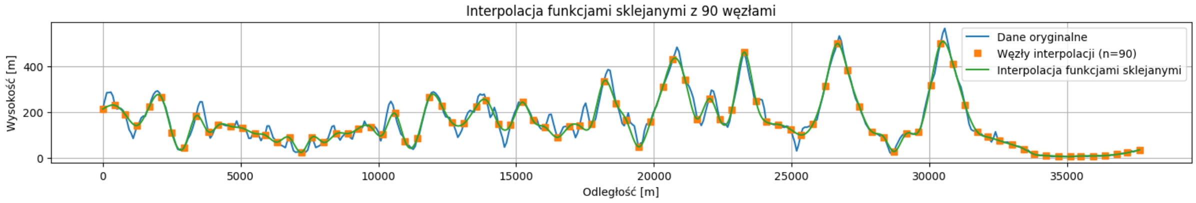
Rozmieszczenie punktów według pierwiastków wielomianu Czebyszewa stopnia n pozwala minimalizować efekt Rungego, ponieważ gęstość punktów jest większa na krańcach przedziału i zmniejsza się w jego środkowej części. Dzięki temu interpolacja staje się bardziej stabilna i dokładna, zwłaszcza w obszarach, gdzie funkcja interpolowana wykazuje gwałtowne zmiany.

Zastosowanie punktów Czebyszewa jest szczególnie skuteczne przy interpolacji funkcji o nieregularnym kształcie lub wysokich częstotliwościach zmian wartości, gdzie tradycyjne równomierne rozmieszczenie punktów mogłoby prowadzić do wystąpienia oscylacji i niestabilności interpolacji.

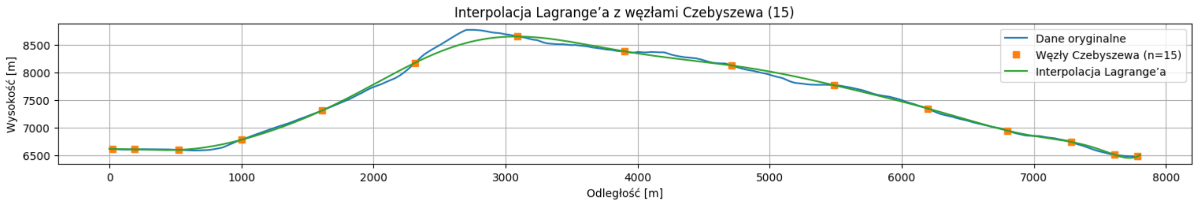
Trasa Genua – Rapallo (wiele stromych wzniesień) z wykorzystaniem punktów Czebyszewa.



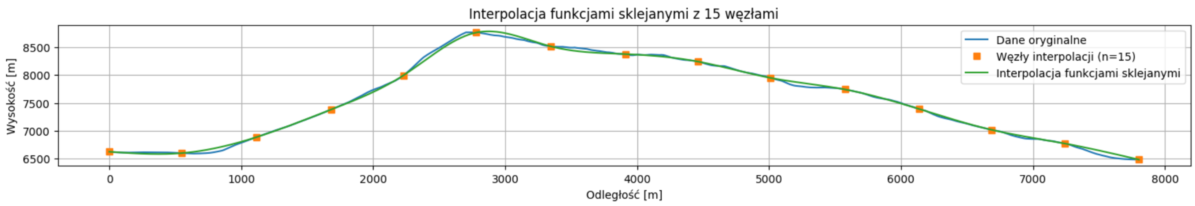

Trasa Genua – Rapallo (wiele stromych wzniesień) z wykorzystaniem krzywych sklejanych.




Trasa na Mount Everest (jedno wyraźne wzniesienie) z wykorzystaniem punktów Czebyszewa.




Trasa na Mount Everest (jedno wyraźne wzniesienie) z wykorzystaniem krzywych sklejanych.




Na powyższych wykresach widać, że efekt Rungego został skutecznie wyeliminowany, ale mimo to interpolacja dla 90 punktów dla trasy z wieloma wzniesieniami oraz 15 punktów dla trasy z jednym wyraźnym wzniesieniem jest gorsza niż gdybyśmy użyli krzywych sklejanych. Dlatego nawet jeśli udało się nam pozbyć efektu Rungego, należałoby rozważyć, czy dla naszego zastosowania nie lepiej byłoby jednak użyć metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia.

## Podsumowanie

Podsumowując, obie metody mają swoje zastosowania, wady i zalety, jednak użyteczność interpolacji wielomianowej przy użyciu wielomianu Lagrange'a jest ograniczona przez efekt Rungego. Ten efekt powoduje oscylacje na krawędziach przedziału wraz ze wzrostem liczby punktów węzłowych, co pogarsza jakość interpolacji. Funkcje sklejane nie mają tych wad i są ogólnie lepsze od metody wielomianowej. Używając funkcji sklejanych, uzyskujemy dokładniejsze wartości interpolacji, a wierność odwzorowania rośnie wraz z liczbą węzłów. Funkcje sklejane sprawdzają się zarówno na obszarach o łagodnym nachyleniu, jak i przy nagłych zmianach nachylenia, co nie zawsze jest możliwe przy użyciu metody wielomianowej, szczególnie w przypadku "ostrych" krawędzi funkcji (gwałtownych zmian). Efekt Rungego można eliminować stosując węzły Czebyszewa, co zwiększa zakres zastosowania interpolacji wielomianowej. Dla dokładnego odwzorowania profilu wysokościowego zarówno metoda wielomianowa, jak i krzywe sklejane potrzebują większej liczby węzłów im bardziej nieregularna jest powierzchnia.