Metody Numeryczne – Projekt “Układy równań liniowych”

Jakub Falk 193252

Wstęp

Głównym celem projektu było zaimplementowanie oraz analiza dwóch metod iteracyjnych - metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidla, jak również jednej metody bezpośredniej, tj. faktoryzacji LU, do rozwiązywania układów równań liniowych.

Do zrealizowania projektu użyłem języku Python. Testy każdej z tych metod zostały przeprowadzone na różnych układach równań.

Konstrukcja układu równań

Układ równań liniowych ma następującą postać:

Ax = b

gdzie **A** jest macierzą systemową, **b** jest wektorem pobudzenia, natomiast **x** jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną.

Macierz **A**, o rozmiarze N × N jest zdefiniowana poniżej. Struktura macierzy **A** obejmuje pięć diagonali - główną z elementami a1, dwie sąsiednie z elementami a2 oraz dwie skrajne diagonale z elementami a3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}$$

Wektor residuum

Ważnym aspektem analizy metod iteracyjnych jest określenie momentu zatrzymania algorytmu. W tym celu wykorzystałem wektor residuum, który w każdej iteracji stanowi różnicę między iloczynem macierzy **A** i wektora **x** oraz wektorem **b**.

$$\mathbf{res}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}.$$

Poprzez badanie normy euklidesowej residuum w kolejnych iteracjach, możliwe jest oszacowanie błędu przybliżenia rozwiązania. Norma euklidesowa residuum jest obliczana jako pierwiastek sumy kwadratów jego elementów. Kryterium zakończenia iteracji ustalaliłem na osiągnięcie normy residuum poniżej progu 10^{-9}.

Tworzenie układu równań

W punkcie A stworzyłem układ równań zgodnie z zadanymi parametrami, uwzględniając wartości współczynników w macierzy **A**: a1 = 7, a2 = a3 = -1 oraz rozmiar macierzy **A**: N = 952.

Wektor **b** o długości N zawiera elementy, gdzie n-ty element ma wartość sin(4*n).

Dla tak dobranych parametrów macierz **A** jest przekątniowo dominująca, czyli wartości bezwzględne elementów na przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w każdym wierszu.

Macierze przekątniowo dominujące są ważne w metodach numerycznych, ponieważ często mogą poprawić zbieżność wielu algorytmów iteracyjnych, takich jak metoda Jacobiego czy Gaussa-Seidla, w rozwiązywaniu układów równań liniowych. Ich stosowanie może przyspieszyć proces obliczeń oraz zmniejszyć liczbę iteracji potrzebnych do uzyskania dokładnego rozwiązania.

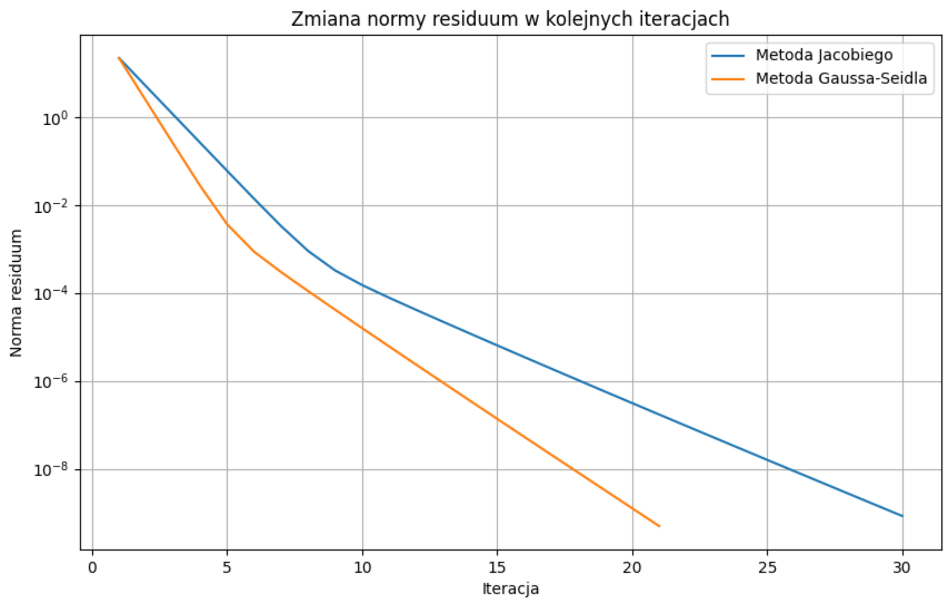
Działanie metody Jacobiego i Gaussa-Seidla

W ramach zadania B zaimplementowałem metody iteracyjne: Jacobiego i Gaussa-Seidla. Poniżej przedstawiam liczbę iteracji potrzebną do wyznaczenia rozwiązania układu równań dla normy residuum mniejszej niż 10^{-9} oraz porównanie czasu trwania obu algorytmów.

```
Metoda Jacobiego:
Liczba iteracji: 29
Czas wykonania: 9.648663520812988

Metoda Gaussa-Seidla:
Liczba iteracji: 20
Czas wykonania: 6.691123723983765
```

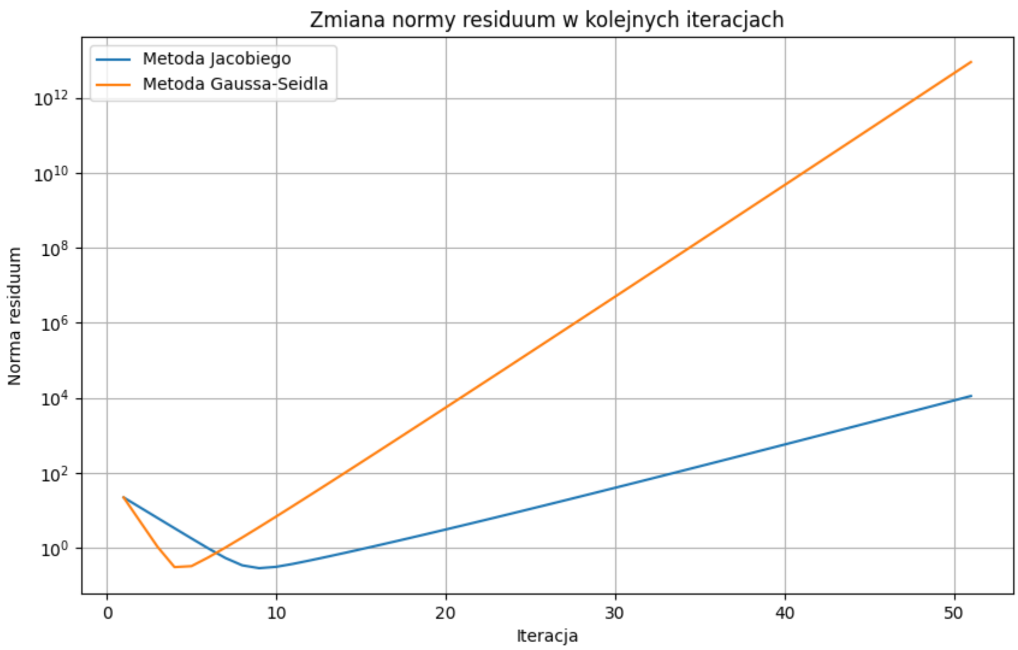
Na wykresie przedstawiłem zmianę normy residuum w kolejnych iteracjach.



Metoda Gaussa-Seidla wykazała się efektywniejsza niż metoda Jacobiego, wymagając mniejszej liczby iteracji do osiągnięcia zadanej dokładności oraz krótszego czasu działania algorytmu w procesie wyznaczania rozwiązania układu równań liniowych.

Analiza zbieżności metod iteracyjnych

Zadanie C polegało na stworzeniu układu równań dla wartości
a1 = 3, a2 = a3 = -1. Zmiana ta spowodowała, że macierz nie była już przekątniowo dominująca, czyli nie było gwarancji zbieżności metod iteracyjnych. Dlatego sprawdziłem zbieżność oraz przedstawiłem zmianę normy residuum w 50 iteracjach na wykresie w celu oceny efektywności tych metod dla nowych wartości elementów macierzy A.



Z wykresu zmiany normy residuum dla metod Jacobiego i Gaussa-Seidla wynika, że obie metody nie zbiegają się dla układu równań z nowymi wartościami elementów macierzy A. Zarówno dla Jacobiego, jak i Gaussa-Seidla, norma residuum osiąga minimum w okolicach 5-10 iteracji, po czym wartość błędu rezydualnego zaczyna wzrastać, co oznacza brak zbieżności tych metod dla tego konkretnego układu równań. Dodatkowo, można zauważyć, że metoda Gaussa-Seidla rozbiega się szybciej niż metoda Jacobiego.

Metoda bezpośrednia - metoda faktoryzacji LU

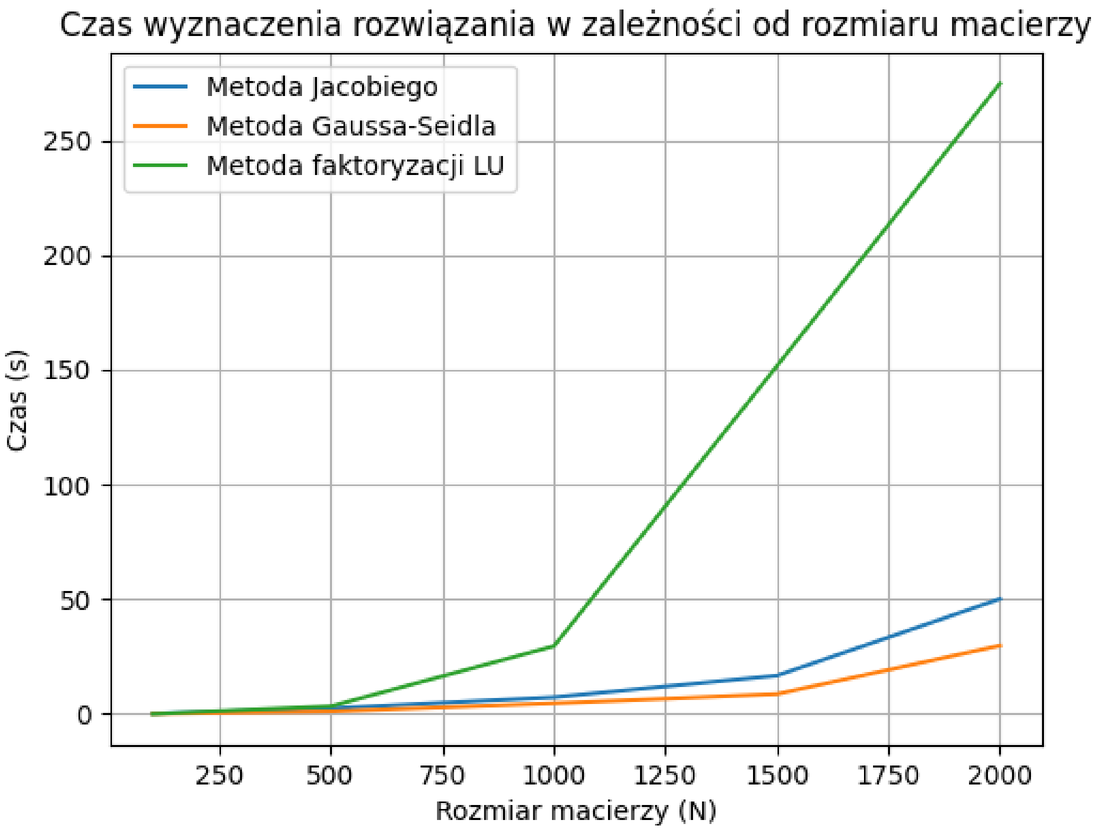
Zadanie D polegało na zaimplementowaniu metody bezpośrednią - metodę faktoryzacji LU do rozwiązania układów równań liniowych oraz zastosowaniu jej do równania badanego w punkcie C. Po wykonaniu obliczeń, wartość normy residuum dla tego przypadku wynosiła:

```
LU: residuum=3.9808743424662616e-13
```

Można zauważyć, że uzyskałem bardzo niską wartość normy residuum wynoszącą około $4*10^{-13}$. Tak mała wartość normy residuum sugeruje, że uzyskane rozwiązanie układu równań jest bardzo bliskie dokładnemu rozwiązaniu.

Analiza czasu wyznaczenia rozwiązania

W zadaniu E stworzyłem wykres zależności czasu wyznaczania rozwiązania dla trzech badanych metod (Jacobiego, Gaussa-Seidla i faktoryzacji LU) w zależności od liczby niewiadomych N. Przeprowadziłem analizę dla różnych wartości N, które obejmują: 100, 500, 1000, 1500, 2000.



Na wykresie widać, że dla mniejszych rozmiarów macierzy wszystkie trzy badane metody wykonują się w podobnym czasie. Jednakże, wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy, obserwujemy różnice w czasie wykonania między poszczególnymi metodami. Metoda Gaussa-Seidla wykonuje się szybciej niż metoda Jacobiego dla coraz większych rozmiarów macierzy. Natomiast, metoda faktoryzacji LU wydaje się być skuteczna dla mniejszych rozmiarów macierzy, ale zaczyna wykazywać drastyczny wzrost czasu wykonania dla macierzy o rozmiarze większym niż 500, co może sugerować, że dla dużych rozmiarów macierzy inne metody mogą być bardziej efektywne.

Podsumowanie

W projekcie analiza przeprowadzona na trzech badanych metodach - Jacobiego, Gaussa-Seidla i faktoryzacji LU - wykazała, że każda z tych metod ma swoje zalety i ograniczenia. Metoda faktoryzacji LU zapewnia dokładniejsze wyniki rozwiązania, kosztem wysokiej złożoności obliczeniowej, co sprawia, że dla dużych macierzy może być mniej efektywna ze względu na długi czas wykonania.

Dla większych macierzy, bardziej opłacalne może być zastosowanie jednej z metod iteracyjnych, lecz należy pamiętać, że mogą one zawodzić i prowadzić do rozbieżności, jak miało to miejsce w jednym z zadań.

Ponadto, pomimo tego, że metoda Gaussa-Seidla jest szybsza, to w przypadku rozbieżności może szybciej osiągać większy błąd rezydualny.

Dlatego też, wybór odpowiedniej metody rozwiązania układów równań liniowych powinien być dokładnie przemyślany, uwzględniając specyfikę problemu oraz priorytety dotyczące dokładności i szybkości wykonania.