Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$H_0: \theta = 1$ — ряд является нестационарным

- содержит единичный корень,
- описывается процессом случайного блуждания

$H_1: |\theta| < 1$ — ряд является стационарным

- не содержит единичный корень,
- описывается стационарным авторегрессионным процессом первого порядка

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\theta - 1) * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $\theta - 1 = b$. $\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\theta - 1) * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $\theta - 1 = b$. $\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$

В этом случае:

$H_0: \theta = 1 \Rightarrow b = 0$. Если ряд содержит единичный корень, то коэффициент $\boldsymbol{b}$ должен быть незначимым.

$H_1: |\theta| < 1 \Rightarrow b < 0$. Если ряд стационарен, то коэффициент $\boldsymbol{b}$ должен быть значимым и отрицательным.

Тестирование стационарности для AR(1)

$$\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$$

$H_0: b = 0.$ $H_1: b < 0.$

Идея теста: давайте оценим уравнение обычным МНК и проверим значимость коэффициента b при помощи обычной t-статистики:

$$\frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$$

$H_0: b = 0.$ $H_1: b < 0.$

Идея теста: давайте оценим уравнение обычным МНК и проверим значимость коэффициента b при помощи обычной t-статистики:

$$\frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

Проблема: если верна гипотеза H_0, то эта статистика не будет иметь t-распределение Стьюдента $\Rightarrow$ нужны другие критич. значения

Тестирование стационарности для AR(1): тест Дики — Фуллера (DF)

Оцениваем уравнение:

$$\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$$

$H_0: b = 0.$ $H_1: b < 0.$

Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (см., например, табл. 8.1. в Вербике)

Тестирование стационарности для AR(1): тест Дики — Фуллера (DF)

Вычисляем критическую статистику: $\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (см., например, табл. 8.1. в Вербике)

Если расчетное значение отрицательное и меньше критического (то есть по модулю больше!), то гипотеза H_0 отвергается $\Rightarrow$ делаем вывод о том, что ряд стационарен.

В остальных модификациях теста процедура принятия решения будет аналогичной

Таблица 8.1. 1%-ые и 5%-ые критические значения для тестов Дики—Фуллера (Fuller, 1976, p. 373)

	Без константы Без тренда		Константа Без тренда		Константа Тренд	
Объем выборки	1%	5%	1%	5%	1%	5%
$T = 25$	−2,66	−1,95	−3,75	−3,00	−4,38	−3,60
$T = 50$	−2,62	−1,95	−3,58	−2,93	−4,15	−3,50
$T = 100$	−2,60	−1,95	−3,51	−2,89	−4,04	−3,45
$T = 250$	−2,58	−1,95	−3,46	−2,88	−3,99	−3,43
$T = 500$	−2,58	−1,95	−3,44	−2,87	−3,98	−3,42
$T = \infty$	−2,58	−1,95	−3,43	−2,86	−3,96	−3,41

Тест Дики — Фуллера с константой

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \delta + \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta + (\theta - 1) * y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $\theta - 1 = b$.

Оцениваем уравнение $\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$

Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (для теста с константой)

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)

Результаты оценивания в gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a - 1): -0,00125568
тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626
P-значение 0,6782

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)

Результаты оценивания в gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a - 1): **-0,00125568**
тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626
P-значение 0,6782

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)

Результаты оценивания в gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a - 1): -0,00125568
тестовая статистика: **tau_c(1) = -1,19626**
P-значение 0,6782

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)

Результаты оценивания в gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM

объем выборки 1866

нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой

модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e

коэф. автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059

оценка для (a - 1): -0,00125568

тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626

Р-значение 0,6782 => нестационарность

Тест Дики — Фуллера с константой и трендом

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

$\boldsymbol{H_0: \theta = 1}$ — ряд является нестационарным описывается процессом случайного блуждания с дрейфом

Также в этом случае говорят, что ряд содержит *стохастический* тренд.

$\boldsymbol{H_1: |\theta| < 1}$ — ряд является стационарным.

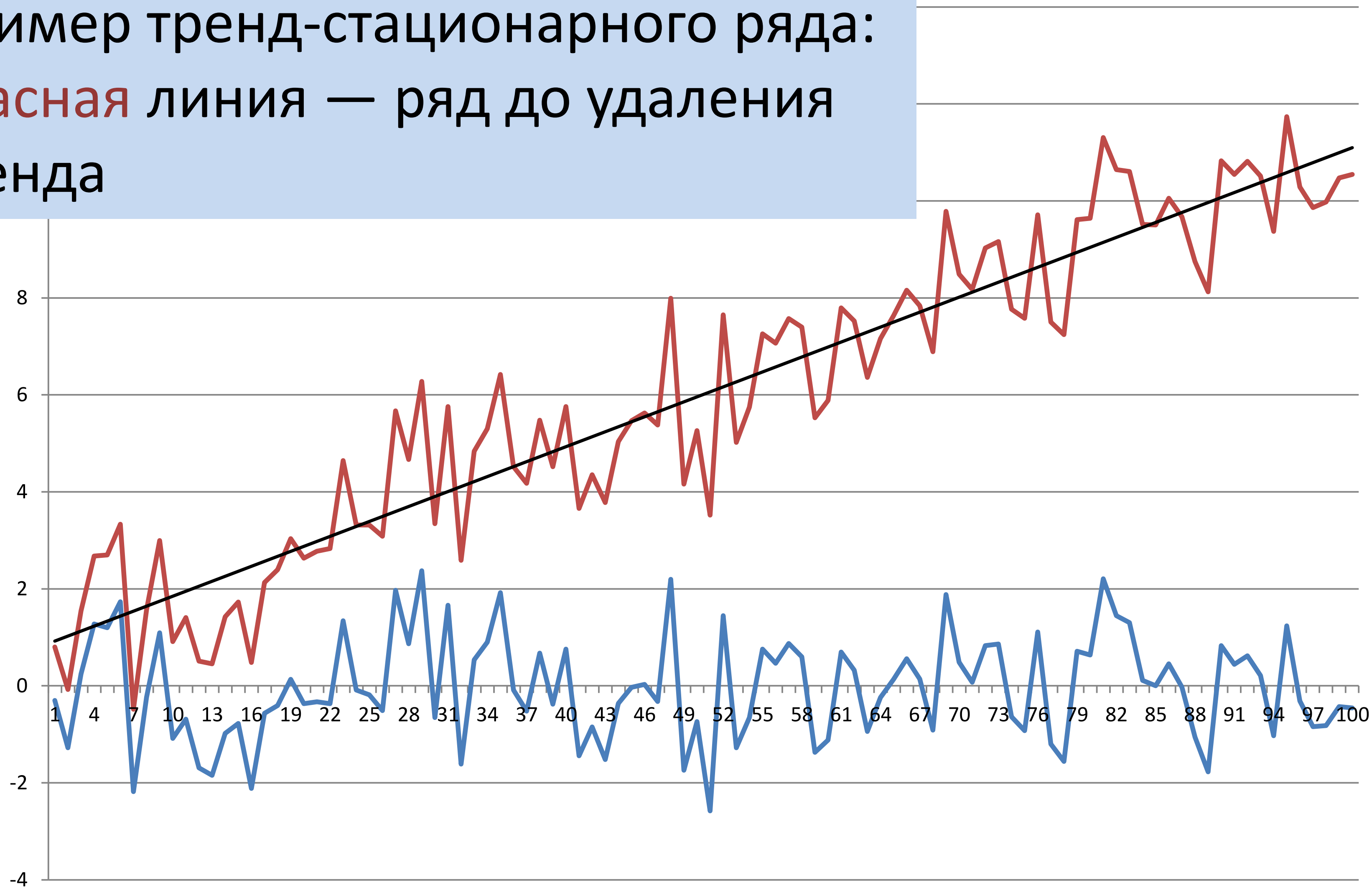
При $|\theta| < 1$ и $\varphi \neq 0$ ряд y_t называется стационарным относительно линейного тренда (тренд-стационарным, trend-stationary)

Также в этом случае говорят, что ряд содержит только *детерминированный* тренд.

В этом случае ряд $z_t = y_t - \varphi t$ стационарен

Тест Дики — Фуллера с константой и трендом

Пример тренд-стационарного ряда: красная линия — ряд до удаления тренда



Тест Дики — Фуллера с константой и трендом

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \delta + \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta + (\theta - 1) * y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

Обозначим $\theta - 1 = b$.

Оцениваем уравнение $\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{b} * \boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{\varphi t} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$

Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (для теста с константой и трендом)

Расширенный тест Дики — Фуллера
(Augmented DF-test, ADF-test)

Рассмотрим более общий случай авторегрессионного процесса

$$y_t = \theta_1 * y_{t-1} + \cdots + \theta_p * y_{t-p} + \varepsilon_t$$

H_0: ряд является нестационарным, содержит единичный корень

H_1: ряд является стационарным процессом AR(p).

Расширенный тест Дики — Фуллера

Оцениваем уравнение

$$\Delta \boldsymbol{y_t} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{y_{t-1}} + \boldsymbol{c_1}\Delta \boldsymbol{y_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{c_{p-1}}\Delta \boldsymbol{y_{t-p+1}} + \boldsymbol{\varepsilon_t}$$

Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{\hat{b}}{se(\hat{b})}$$

- Аналогично можно осуществлять ADF-тест с добавлением константы и тренда.
- Порядок лага для ADF-теста можно выбирать при помощи информационного критерия Шварца, который мы обсудим на следующей лекции