

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Отчет по учебной практике

студента 2 курса 213 группы

Направления 01.03.02 "Прикладная математика и информатика"

механико-математического факультета

Шарова Александра Вадимовича

Место прохождения практики: кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

Сроки прохождения практики: с 1 Июля 2016 г. по 14 июля 2016 г.

Оценка _____

Руководитель практики

к.ф.-м.н., доцент

В. А. Халова

подпись, дата

Саратов, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Простые вычисления	4
2 Алгебра матриц	5
3 Функции математического анализа	7
4 Решение дифференциальных уравнений	13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	23
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	24

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной практики - изучить основы работы в системе компьютерной математике *Maxima*.

Maxima — система для работы с символьными и численными выражениями, включающая дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд, преобразование Лапласа, обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений, многочлены, множества, списки, векторы, матрицы и тензоры. *Maxima* производит численные расчеты высокой точности, используя точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности. Система позволяет строить графики функций и статистических данных в двух и трех измерениях.

Maxima — потомок *Macsyma*, легендарой системы компьютерной алгебры, разработанной в начале 60-х в MIT. Это единственная основанная на *Macsyma* система, все еще публично доступная и имеющая активное сообщество пользователей благодаря своей открытости. *Macsyma* произвела в свое время переворот в компьютерной алгебре и оказала влияние на многие другие системы, в числе которых *Maple* и *Mathematica*.

Работу над *Maxima* вел Уильям Шелтер с 1982 года и до своей кончины в 2001 году. В 1998 году он получил разрешение на публикацию исходного кода под лицензией GPL. Выживание *Maxima* стало возможным только благодаря его усилиям и способностям, мы очень благодарны ему за уделенные проекту время и знания эксперта, которые поддерживали код DOE *Macsyma* актуальным и качественным. После его кончины была сформирована группа пользователей и разработчиков, ставящая своей целью донести *Maxima* до широкой аудитории.

Maxima имеет широчайший набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как *Maple* и *Mathematica*. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных.

1 Простые вычисления

Упростить выражения: № 1.013, № 1.028, № 1.043 [Из сборника задач по математике для поступающих во втузы, под редакцией Сканави М. И.]. Для упрощения выражения воспользуемся командой **ratsimp(Функция)**.

№ 1.013

Упростить выражение:

$$(x^2 + 2x - \frac{11x-2}{3x+1}) : (x + 1 - \frac{2x^2+x+2}{3x+1}); \quad x = 7, (3)$$

$$\text{ratsimp}((x^2+2*x+(11*x-2)/(3*x+1))/(x+1-(2*x^2+x+2)/(3*x+1)));$$

$$\text{Ответ: } \frac{-2+13x+7x^2+3x^3}{x^2+3x-1}$$

Вычислим при $x = 3$:

$$\text{ratsubst}(3, x, (-2+13*x+7*x^2+3*x^3)/(x^2+3*x-1));$$

$$\text{Ответ: } \frac{181}{17}$$

Вычислим при $x = 7$:

$$\text{ratsubst}(7, x, (-2+13*x+7*x^2+3*x^3)/(x^2+3*x-1));$$

$$\text{Ответ: } \frac{487}{23}$$

№ 1.028

Упростить выражение:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{(r^2+4)}\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}} - \sqrt[3]{\sqrt{(r^2-4)}\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}} \right)^2}{r^2 - \sqrt{r^4-16}}$$

$$\text{ratsimp}((((r^2+4)*\text{sqrt}(1+4/r^2))^(1/3))$$

$$-((r^2-4)*\text{sqrt}(1-4/r^2))^(1/3))/(r^2-\text{sqrt}(r^4-16))));$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\sqrt{r^2+4}-\sqrt{r^2-4}}{\sqrt{r^4-16}|r|^{\frac{1}{3}}-r^2|r|^{\frac{1}{3}}}$$

№ 1.043

Упростить выражение:

$$\frac{x-1}{x+x^{0.5}+1} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{-0.5}}$$

$$\text{ratsimp}(((x-1)/(x+x^(1/2)+1))/((x^(1/2)+1)/(x^(3/2)-1))+2/(x^(-1/2)))$$

$$\text{Ответ: } x + 1$$

2 Алгебра матриц

1. Найти произведение матриц A и B. Произведение двух матриц в *Maxima* обозначается символом "."

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A: matrix([1,2,2,-1],[2,3,4,5],[1,3,2,5],[3,2,4,-3]);

B: matrix([-5,2,-1],[-1,7,3],[-2,4,-3],[1,3,2]);

$$A.B = \begin{pmatrix} -12 & 21 & -3 \\ -16 & 56 & 5 \\ -7 & 46 & 12 \\ -27 & 27 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы A. Для подсчета определителя матрицы воспользуемся командой **determinant(A)**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

determinant(matrix([1,2,3,4,5],[2,3,7,10,13],[3,5,11,16,21],[2,-7,7,7,2],[1,4,5,3,10]));

Ответ: 52

3. Дана матрица A. Найти матрицу A^{-1} и установить, что $AA^{-1} = E$. Для начала обратим матрицу A, и запишем ее как матрица B. Чтобы обратить матрицу, существует команда **invert(A)**.

A: matrix([17,10,4],[1,1,0],[2,-3,3]);

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

B: `invert(A);`

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -42 & -4 \\ -3 & 43 & 4 \\ -5 & 71 & 7 \end{pmatrix}$$

Покажем, что произведение матриц A и B есть единичная матрица:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили единичную матрицу.

3 Функции математического анализа

1. Найти пределы выражений: № 746, № 761, № 776 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для нахождения предела воспользуемся командой **limit(функция, переменная, точка)**.

№ 746

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$$

Запишем функцию:

$$F = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$$

F: (2*x^2-1)/(3*x^2-4*x);

limit(F, x, ∞);

Ответ: $\frac{2}{3}$

№ 761

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

Запишем функцию:

$$F = \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

F: (2-sqrt(x-3))/(x^2-49);

limit(F, x, 7);

Ответ: $-\frac{1}{56}$

№ 776

Найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$$

Запишем функцию:

$$F = \frac{2x \sin x}{\sec x - 1}$$

F: (2*x*sin(x))/(sec(x)-1);

limit(F, x, 0);

Ответ: 4

2. Вычислить производные: № 886, № 901 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для вычисления производной

воспользуемся командой **diff(y(x), x)**, где $y(x)$ - функция, x - переменная, по которой дифференцируем.

№ 886

Найти производную функции:

1) Дана функция:

$$y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$$

`y(x):=1/(1+cos(4*x))^5;`

`diff(y(x),x);`

Ответ:

$$\frac{20 \sin(4x)}{(1 + \cos(4x))^6}$$

№ 901

Найти производную функции:

$$s = \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}$$

`s(t):=sqrt(t/2-sin(t/2))`

`diff(s(t),t);`

Ответ:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2}}{2\sqrt{\frac{t}{2} - \sin(\frac{t}{2})}}$$

3. Найти интегралы: № 1547, № 1562, № 1577 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для нахождения интеграла воспользуемся командой **integrate(y, x)**, где y - функция, x - переменная, по которой дифференцируем.

№ 1547

Найти интеграл:

$$\int \frac{\sin x dx}{b^2 + \cos^2 x}$$

`integrate(sin(x)/(b^2+cos^2(x)),x);`

Ответ:

$$-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\cos(x)}{b}\right)}{b}$$

№ 1562

Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

`integrate(1/(sqrt(x+a)+sqrt(x)),x);`

Ответ: данный интеграл в системе wxMaxima не берётся. Посчитаем через wolfram alpha и получим ответ:

$$\frac{2(-x^{3/2} + a\sqrt{a+x} + x\sqrt{a+x})}{3a}$$

№ 1577

Найти интеграл:

$$\int e^{-\sqrt{x}} dx$$

`integrate(e^sqrt(x),x);`

Ответ:

$$-\frac{(2 + 2 \log(e) \sqrt{x}) e^{-\log(e) \sqrt{x}}}{\log(e)^2}$$

Ответ в системе wolfram alpha: $-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1)$

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: № 1637, № 1652, № 1667 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для вычисления площади воспользуемся определенным интегралом.

№ 1637 Вычислить площадь, ограниченную линиями:

$$a^2 y^2 = x^3(2a - x)$$

Перепишем уравнение в виде:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3(2a - x)}{a^2}}, \quad g(x) = 0$$

Залишем в Maxima:

`f(x):=sqrt((x^3*(2*a-x))/a^2);`

`g(x):=0;`

Найдем точки пересечения этих графиков:

`solve(f(x)=g(x), x);`

Таким образом точки пересечения это $x = 0, x = 2$

Посчитаем определённый интеграл между этими двумя точками:

`integrate(f(x)-g(x), x, 0, 2);`

Таким образом получим ответ:

$$\frac{\frac{\pi a^3}{2} - \frac{\sqrt{2a-2} \left(3\sqrt{2} a^2 + 2^{\frac{3}{2}} a - 2^{\frac{7}{2}} \right) + 6a^3 \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2a-2}}{\sqrt{2}}\right)}{6}}{|a|}$$

№ 1652

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

Петлей декартового листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Геометрический параметр $t = \frac{y}{x}$ угловой коэффициент полярного радиуса OM , где точка $M(x, y)$ опишет всю петлю кривой при изменении t от 0 до $+\infty$.

Преобразуя криволинейный интеграл формулы $S = \frac{1}{2} \oint xdy - ydx$ в обыкновенный интеграл с переменной t , получим $S = \frac{1}{2} \oint xdy -$
 $+C$

$$ydx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} (1+t^3)^{-2} d(1+t^3) = \frac{3a^2}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t^3} \Big|_0^{\beta}$$

В итоге, считая последний предел в Махита получим ответ: $S = \frac{3a^2}{2}$

№ 1667

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

Общей части эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Заданы уравнения двух одинаковых эллипсов со взаимно перпендикулярными фокальными осями. Найдём точки пересечения эллипсов:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \end{cases}$$

Преобразуем систему в вид:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

Так как $a \neq b$, то $x^2 = y^2$, т.е. $\pm x = \pm y$. Получили 4 точки, лежащие на биссектрисах координатных углов.

Перейдем к полярной системе координат. Используя формулы перехода $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 \rho^2 \cos^2 \phi + a^2 \rho^2 \sin^2 \phi = a^2 b^2, \rho_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \phi + a^2 \sin^2 \phi};$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 \rho^2 \cos^2 \phi + b^2 \rho^2 \sin^2 \phi = b^2 a^2, \rho_2^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi};$$

Учитывая симметрию полученной области относительно координатных осей, вычислим сначала площадь ее четвертой части. Она равна сумме площадей S_1 и S_2 , разделённых лучом $\phi = \frac{\pi}{4}$. Исходя из симметрии задачи, площади S_1 и S_2 должны быть равны.

Убедимся в этом, вычислив каждую из них в отдельности:

$$S_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho_2^2 d\phi \text{ и } S_1 = \frac{a^2 b^2}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_1^2 d\phi$$

Произведём вычисления в системе Maxima и получим :

$$S_2 = \frac{ab}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \quad S_1 = \frac{ab}{2} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Площади таким образом равны. Теперь найдем площадь общей части эллипсов

$$S = 4(S_1 + S_2) = 4ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Ответ:

$$S = 4(S_1 + S_2) = 4ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

Перепишем уравнения в виде:

$$f(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2}, \quad g(x) = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)a^2}$$

5. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

№ 1681

$y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси Ox .

Для нахождения объема тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Oy воспользуемся определённым интегралом $\int_{y_1}^{y_2} \pi \phi^2(y) dy$,

где $x = \phi(y)$ наша функция и $y_1 = 0$, $y_2 = 2\pi$.

`%pi*integrate(sin(x),x,0,2*pi);`

Ответ: 0

4 Решение дифференциальных уравнений

1. Найти решение дифференциальных уравнений. Для того, чтобы решить дифференциальное уравнение, используем команду **ode2(F,y(x),x)**, где F - наша функция, y(x) - зависимая переменная, x - независимая переменная.

Пример 1. Запишем уравнение как

$$(2x + y)dy = ydx + 4\ln(y)dy$$

Перепишем в виде:

$$(2x + 4 - 4\ln(y))\frac{dy}{dx} = y$$

Так как $\frac{dy}{dx} = y'$, то наше уравнение запишется в виде:

$$(2x + 4 - 4\ln(y))y' = y$$

F: (2*x+y-4*log(y))*diff(y(x),x)=y;
ode2(F,y(x),x);

Ответ:

$$y(x) = \frac{y \log(4 \log(y) - y - 2x)}{2} + \%c$$

Пример 2. Запишем уравнение как F: $y^{IV} + 2y'' + y = 0$

F: 'diff(y(x),x,4)+2*'diff(y(x),x,2)+y=0;
ode2(F,y(x),x);

Ответ:

Таким образом возможностей wxMaxima не хватает.

Решим с помощью wolframAlpha и получим ответ:

$$y(x) = c_3 \sin x + c_4 x \sin x + c_1 \cos x + c_2 x \cos x$$

Пример 3. Запишем уравнение как F: $y'' + y = x \sin(x)$

```
F: 'diff(y(x),x,2)+'diff(y(x),x)=x*sin(x);  
ode2(F,y(x),x);
```

Ответ:

$$y(x) = -\frac{(x+1) \cos(x) + (x-2) \sin(x)}{2} + k_2 e^{-x} + k_1$$

- 2 Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Для нахождения решения используем команду

bc2(ode2(F, y, x), начальные условия), где F - наша функция, y - зависимая переменная, x - независимая переменная.

Пример. Запишем уравнение как:

$$y'' + y = 2x - \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

```
G: 'diff(y,x,2)+y=2*x-%pi;  
bc2(ode2(G, y, x), x=0, y=0, x=%pi, y=0);
```

Ответ:

$$y = r_1 \sin(x) + \pi \cos(x) + 2x - \pi$$

- 3 Решить задачу Коши $y' = y - x, y(0) = 1.5$ на отрезке $[0,1]$ с шагом h методами Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Кутты.

Пример. Метод Эйлера.

Зададим концы отрезка, на котором будем искать решение, и шаг:

```
a:0$b:0.8$ h:0.2$;
```

Найдем количество точек разбиения отрезка с шагом h :

```
n:1+floor((b-a)/h)$;
```

Сформируем два пустых одномерных массива размера $n+1$ для хранения значения координат точек $[x, y]$ искомого решения:

```
x1:make_array(flonum, n+1)$
```

```
y1:make_array(flonum, n+1)$;
```

Зададим начальное условие:

```
x1[0]:a$ x1[1]:a+h$y1[0]:1.5$;
```

Заполним массив x1 значениями, начиная с 0.2 до 1 с шагом h. Для этого используем цикл с параметром.

```
for i:2 thru n step 1 do (x1[i]:x1[i-1]+h)$;
```

Используя расчетную формулу Эйлера, заполним массив y1:

```
for i:1 thru n step 1 do
```

```
(y1[i]:float(y1[i-1]+h*(y1[i-1]-x1[i-1])));$;
```

Выведем полученное решение на экран:

```
for i:0 thru n step 1 do (display(x1[i]), display(y1[i]));
```

$x1_0 = 0$

$y1_0 = 1.5$

$x1_1 = 0.2$

$y1_1 = 1.8$

$x1_2 = 0.4$

$y1_2 = 2.12$

$x1_3 = 0.60000000000000001$

$y1_3 = 2.464$

$x1_4 = 0.8$

$y1_4 = 2.8368$

$x1_5 = 1.0$

$y1_5 = 3.2441600000000001$

Дифференциальное уравнение запомним под именем eq1:

```
eq1: 'diff(y(t),t)=y(t)-t;
```

$$\frac{d}{dt}y(t) = y(t) - t$$

Задаем начальное условие:

```
atvalue(y(t),t=0, 1.5);
```

1.5

Находим точное решение задачи Коши:

```
desolve(eq1,y(t));
```

rat : replaced - 1.5 by - 3/2 = -1.5

$$y(t) = \frac{e^t}{2} + t + 1$$

Вычислим значения функции в точках отрезка $[0,1]$ с шагом $h=0.2$

```
for i:0 thru n do (z1[i]:%e^x1[i]/2+x1[i]+1, display(z1[i]));
```

$$z1_0 = \frac{3}{2}$$

$z1_1 = 1.810701379080085$

$z1_2 = 2.145912348820635$

$z1_3 = 2.511059400195255$

$z1_4 = 2.912770464246234$

$$z1_5 = 3.359140914229522$$

Найдем величину абсолютной погрешности:

```
for i:1 thru n do (display(abs(z1[i]-y1[i])));
|0.01070137908008495| = 0.01070137908008495
|0.02591234882063498| = 0.02591234882063498
|0.04705940019525423| = 0.04705940019525423
|0.07597046424623333| = 0.07597046424623333
|0.1149809142295215| = 0.1149809142295215
```

Метод Эйлера-Коши.

Для решения приведенной задачи Коши сформируем еще 3 пустых массива x2, y2 и вспомогательный массив z.

```
x2:make_array(flonum, n+1)$
z:make_array(flonum, n+1)$
y2:make_array(flonum, n+1)$;
```

Зададим начальное условие:

```
x2[0]:a$x2[1]:a+h$y2[0]:1.5$z[0]:1.5$;
```

Заполним массив x2 значениями, начиная с 0.2 до 1 с шагом h. Для этого используем цикл с параметром.

```
for i:2 thru n step 1 do (x2[i]:x2[i-1]+h)$;
```

Теперь воспользуемся расчетной формулой Коши-Эйлера и найдем решение:

```
for i:1 thru n step 1 do(z[i]:float(y2[i-1]+
+h*(y2[i-1]-x2[i-1])),y2[i]:float(y2[i-1]+
+h*(y2[i-1]-x2[i-1]+z[i]-x2[i])/2))$;
```

Выведем найденное решение на экран:

```
for i:0 thru n step 1 do (display(x2[i]), display(y2[i]));
```

$$x2_0 = 0$$

$$y2_0 = 1.5$$

$$x2_1 = 0.2$$

$$y2_1 = 1.81$$

$$x2_2 = 0.4$$

$$y2_2 = 2.1442$$

$$x2_3 = 0.60000000000000001$$

$$y_2_3 = 2.507924$$

$$x_2_4 = 0.8$$

$$y_2_4 = 2.90766728$$

$$x_2_5 = 1.0$$

$$y_2_5 = 3.3513540816$$

Найдем величину абсолютной погрешности:

```
for i:1 thru n do (display(abs(z1[i]-y2[i])));
```

$$|7.01379080084940710^{-4}| = 7.01379080084940710^{-4}$$

$$|0.001712348820634979| = 0.001712348820634979$$

$$|0.003135400195254601| = 0.003135400195254601$$

$$|0.005103184246233905| = 0.005103184246233905$$

$$|0.007786832629522067| = 0.007786832629522067$$

Заметим, что метод Коши-Эйлера дает более точный результат, чем метод Эйлера. Максимальная погрешность вычислений составляет 0.7%.

Метод Рунге-Кутты.

В системе *Maxima* для нахождения численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта (четвертого порядка точности) есть встроенная функция **rk**. Для того, чтобы она стала активной, требуется подключить пакет **dynamics** с помощью команды:

```
load("dynamics")$;
```

Теперь задаем команду для нахождения решения:

```
sol: rk(y-x, y, 1.5, [x, 0, 1, 0.2]);
```

```
[0.0, 1.5],
```

```
[0.2, 1.8107],
```

```
[0.4, 2.14590898],
```

```
[0.600000000000000001, 2.511053228172],
```

```
[0.8, 2.91276041288928],
```

```
[1.0, 3.359125568302967]
```

Сделаем вывод, что метод Эйлера дает самое плохое приближение к точному решению задачи Коши.

4. Найти решение уравнения $y'' + y' - xy = 2x^2$ на отрезке $[0.6; 0.9]$ ($n=3$)

с начальными условиями: $y'(0.6) = 0.57, y(0.9) - 0.95y'(0.9) = 3$

Вводим обозначения и задаем значения переменных:

```
p(x):=1$ q(x):=-x$ f(x):=2*x^2$
alfa1:-1$ alfa2:0$ ac:0.57$ bc:3$
beta1:1$ beta2:-0.95$
a1:0.4$ b1:0.7$;
```

Разбиваем отрезок $[a, b]$ на равные части с шагом $h = 0.1, n = 3$.

```
n:3$ h:0.1$;
```

Формируем список, содержащий все точки отрезка:

```
x:makelist (a1+(k-1)*h,k,1,n+1);
```

```
[0.4, 0.5, 0.600000000000000001, 0.700000000000000001]
```

Формируем пустую квадратную матрицу a размера $n+1$:

```
a:genmatrix(lambda([i,j],0),n+1,n+1);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь заполним матрицу a по формулам:

$$a_{k,k} = h^2 q_k - h p_k + 1, a_{k,k+1} = h p_k - 2, a_{k,k+2} = 1, k = 1, n-1,$$

$$a_{n,1} = \alpha_1 h - \alpha_2, a_{n,2} = \alpha_2, a_{n+1,n} = -\beta_2, a_{n+1,n+1} = \beta_1 h + \beta_2,$$

$$k = n, n+1.$$

Для заполнения коэффициентами первых двух уравнений системы воспользуемся циклом с параметром:

```
for i:1 thru n-1 do for j:1 thru n+1 do
  (if i=j then a[i,j]:h*h*q(x[i])-h*p(x[i])+1
  else if j=i+1 then a[i,j]:h*p(x[i])-2
  else if j=i+2 then a[i,j]:1 else 0);
done
```

В двух последних уравнениях поменяем значения некоторых элементов с помощью оператора присваивания:

```
a[n,1]:alfa1*h-alfa2$ a[n,2]:alfa2$
```

```
a[n+1,n]:-beta2$ a[n+1,n+1]:beta1*h+beta2$;
```

Теперь заполним столбец свободных членов:

```
b:=makelist(if k<=3 then h^2*f(x[k])
```

```
else 0,k,1,n+1)$
```

```
b[n]:h*ac$ b[n+1]:h*bc$;
```

Выведем полученные матрицы на экран:

```
b;
```

```
[0.0032000000000000001,0.0050000000000000001,0.0072000000000000003,0]
```

```
a;
```

$$\begin{pmatrix} 0.896 & -1.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0.895 & -1.9 & 1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & -0.85 \end{pmatrix}$$

Получили систему линейных уравнений, записанную в матричном виде $ay = b$, где y -искомое решение. Найдём его матричным способом:

```
invert(a).b;
```

$$\begin{pmatrix} -0.072000000000000007 \\ -0.09801786176031834 \\ -0.1185219373446047 \\ -0.1324656946792641 \end{pmatrix}$$

5. Найти решение системы дифференциальных уравнений и исследовать особые точки. Начертить на фазовой плоскости траектории системы.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4y - 6x \end{cases}$$

Запишем первое уравнение как $F1$, а второе как $F2$

$$F1: 3x(t) = \text{diff}(x(t), t) + 2y(t);$$

$$3x(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2y(t)$$

$$F2: 4y(t) = \text{diff}(y(t), t) - 6x(t);$$

$$4y(t) = \frac{d}{dt}y(t) - 6x(t)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся выражением:

$$\text{dsolve}([F1, F2], [x(t), y(t)]);$$

$$x(t) = e^{\frac{7t}{2}} \left(\frac{(7x(0) + 2(-2y(0) - 4x(0))) \sin\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)}{\sqrt{47}} + x(0) \cos\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right) \right)$$

$$y(t) = e^{\frac{7t}{2}} \left(\frac{(2(6x(0) - 3y(0)) + 7y(0)) \sin\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)}{\sqrt{47}} + y(0) \cos\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right) \right)$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни. Для этого зададим матрицу.

$$\text{matrix}([3-\text{lambda}, -2], [-6, 4-\text{lambda}]);$$

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -6 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы и найдем собственные значения матрицы.

$$\text{determinant}(\%);$$

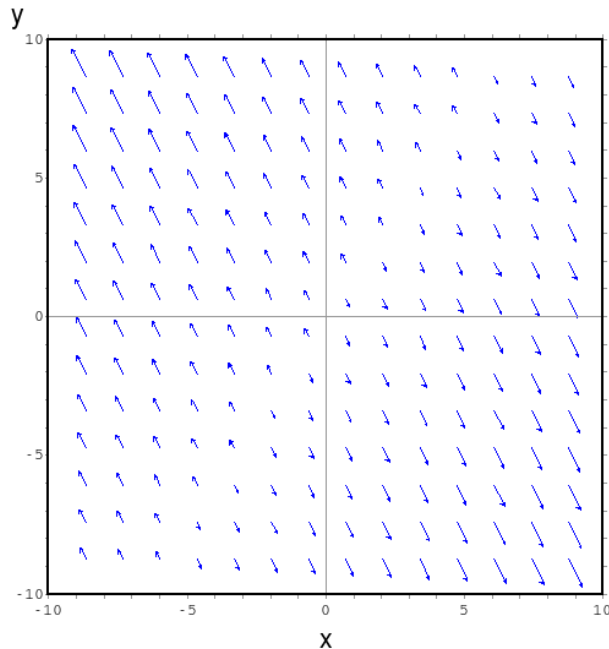
$$(3 - \lambda)(4 - \lambda) - 12$$

$$\text{solve}([(3-\text{lambda})*(4-\text{lambda})-12=0], [\text{lambda}]);$$

$$[\lambda = 0, \lambda = 7]$$

Задаем команду для построения поля направлений:

```
plotdf([3*x-2*y, 4*y-6*x],[x,y],
[tstep,0.01],[x,-10,10],[y,-10,10],
[direction,forward],[nsteps,300]);
```



Так как корни характеристического уравнения это действительные положительные числа, то точка покоя неустойчива и называется неустойчивым узлом(рисунок).

6. Реализация метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 1.

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{a^2}u_{tt}, & 0 \leq x \leq m, \quad 0 \leq y \leq n \\ u(x, 0) = \sin(\pi x/50) \cos(\pi x), & u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = u(m, t) = 0. \end{cases}$$

Вводим сетку: $m=100$, $n=200$, $h=1$. Создаем нулевой массив значений $U(i, j)$ размера $m \times n$.

```
$m:42$n:30$ h:1$;
```

```
for i:1 thru m do for j:1 thru n do
(arraymake (u,[i,j]), u[i,j]:0)$;
```

Задаем значения $a=1$, $k=0,01$.

```
a:1$k:0.01$;
```

Заполняем первую и вторую строки массива U начальными условиями $u(x, 0) = \sin(\pi x/9) \cos(\pi x)$, $u_t(x, 0) = 0$ (нулевой начальной скорости соответствует совпадение значений (смещений) в первом и втором столбцах).

```
for j:1 thru n do
```

```
(u[1,j]:sin(%pi*j/9)*cos(%pi*j), u[2,j]:u[1,j])$;
```

Заполняем первый и последний столбец массива U граничными условиями $u(0, t) = u(m, t) = 0$ (на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени).

```
for i:1 thru m do (u[i,1]:0, u[i,n]:0)$;
```

Находим решение, используя разностную схему

$$u_{i+1,j} = \frac{a^2 k^2}{h^2} [u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}.$$

```
for i:2 thru m-1 do for j:2 thru n-1 do
```

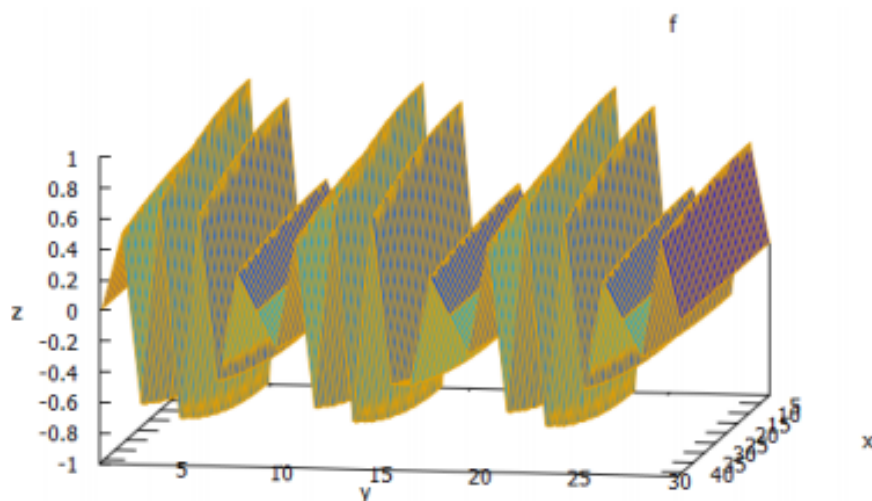
```
u[i+1,j]:float((a*k/h)^2*(u[i,j+1]-  
2*u[i,j]+u[i,j-1])+2*u[i,j]-u[i-1,j]),numer$;
```

Для вывода полученного решения в виде поверхности преобразуем наш массив U в функцию двух переменных:

```
f(x,y):=float(u[round(x),round(y)])$;
```

Теперь выполняем построение:

```
plot3d(f, [x,1,m], [y,1,n], [plot_format, gnuplot])$;
```



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы я познакомился с системой компьютерной алгебры Maxima. В ходе работы была использована графическая оболочка wxMaxima, которая очень сильно облегчила выполнение данных мне заданий.

Во время прохождения практики я получил новый опыт работы с системами компьютерной алгебры и открыл для себя бесплатный аналог Wolfram Mathematica. Значительных трудностей в переходе от одной системы к другой не возникло.

Maxima очень гибкий инструмент, который предоставляет очень широкий набор средств и доступен под множество операционных систем. Мне очень понравилась возможность копирования решения из среды wxMaxima прямо в L^AT_EX.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Ильин В.А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М. : Наука, 1984. 294 с.
- 2 Берсенов, С.М. О вычислительных схемах метода регуляризации / С.М. Берсенов, И.О. Иванов // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. – 1984. – Т. 24, № 9. – С. 1402-1405.
- 3 Фомин А.Е. О компонентах групп // Исследования по теории групп: Сб. науч. тр. Свердловск, 1984. - С. 136–148.
- 4 Хромов А.П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
- 5 Губина Т.Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математике Mathia: Учебное пособие. Елец. 2009. 99 с.
- 6 Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических вычислений Mathia: Учебное пособие. М. 2008. 86 с.
- 7 Виноградов И.М. Математическая энциклопедия. Том 1. М.: Советская энциклопедия. 1977—1985. 576 с.