Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Отчет по учебной практике

студента 2 курса 213 группы

Направления 01.03.02 "Прикладная математика и информатика"

механико-математического факультета

Шарова Александра Вадимовича

Место прохождения практики: кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики

Сроки прохождения практики: с 1 Июля 2016 г. по 14 июля 2016 г.

Оценка ______________

Руководитель практики
к.ф.-м.н., доцент ______________ В. А. Халова
подпись, дата

Саратов, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной практики - изучить основы работы в системе компьютерной математике Maxima.

Maxima — система для работы с символьными и численными выражениями, включающая дифференцирование, интегрирование, разложение в ряд, преобразование Лапласа, обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений, многочлены, множества, списки, векторы, матрицы и тензоры. Maxima производит численные расчеты высокой точности, используя точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности. Система позволяет строить графики функций и статистических данных в двух и трех измерениях.

Maxima — потомок Macsyma, легендарой системы компьютерной алгебры, разработанной в начале 60-х в MIT . Это единственная основанная на Macsyma система, все еще публично доступная и имеющая активное сообщество пользователей благодаря своей открытости. Macsyma произвела в свое время переворот в компьютерной алгебре и оказала влияние на многие другие системы, в числе которых Maple и Mathematica.

Работу над Maxima вел Уильям Шелтер с 1982 года и до своей кончины в 2001 году. В 1998 году он получил разрешение на публикацию исходного кода под лицензией GPL. Выживание Maxima стало возможным только благодаря его усилиям и способностям, мы очень благодарны ему за уделенные проекту время и знания эксперта, которые поддерживали код DOE Macsyma актуальным и качественным. После его кончины была сформирована группа пользователей и разработчиков, ставящая своей целью донести Maxima до широкой аудитории.

Maxima имеет широчайший набор средств для проведения аналитических вычислений, численных вычислений и построения графиков. По набору возможностей система близка к таким коммерческим системам, как Maple и Mathematica. В то же время она обладает высочайшей степенью переносимости: может работать на всех основных современных операционных системах на компьютерах, начиная от наладонных, и вплоть до самых мощных.

1 Простые вычисления

Упростить выражения: № 1.013, № 1.028, № 1.043 [Из сборника задач по математике для поступающих во втузы, под редакцией Сканави М. И.]. Для упрощения выражения воспользуемся командой **ratsimp(Функция)**.

№ 1.013

Упростить выражение:

$(x^2 + 2x - \frac{11x-2}{3x+1}) : (x + 1 - \frac{2x^2+x+2}{3x+1});\ \ x = 7,(3)$

```
ratsimp((x^2+2*x+(11*x-2)/(3*x+1))/(x+1-(2*x^2+x+2)/(3*x+1)));
```

Ответ: $\frac{-2+13x+7x^2+3x^3}{x^2+3x-1}$

Вычислим при $x = 3$:

```
ratsubst(3, x, (-2+13*x+7*x^2+3*x^3)/(x^2+3*x-1));
```

Ответ: $\frac{181}{17}$

Вычислим при $x = 7$:

```
ratsubst(7, x, (-2+13*x+7*x^2+3*x^3)/(x^2+3*x-1));
```

Ответ: $\frac{487}{23}$

№ 1.028

Упростить выражение:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{(r^2+4)\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}} - \sqrt[3]{\sqrt{(r^2-4)\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$$

```
ratsimp((((r^2+4)*sqrt(1+4/r^2))^(1/3)
-((r^2-4)*sqrt(1-4/r^2))^(1/3))/(r^2-sqrt(r^4-16)));
```

Ответ: $-\frac{\sqrt{r^2+4}-\sqrt{r^2-4}}{\sqrt{r^4-16}|r|^{\frac{1}{3}}-r^2|r|^{\frac{1}{3}}}$

№ 1.043

Упростить выражение:

$\frac{x-1}{x+x^{0.5}+1} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{-0.5}}$

```
ratsimp(((x-1)/(x+x^(1/2)+1))/((x^(1/2)+1)/(x^(3/2)-1))+2/(x^(-1/2)
```

Ответ: $x + 1$

2 Алгебра матриц

1. Найти произведение матриц A и B. Произведение двух матриц в *Maxima* обозначается символом "."

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

```
A: matrix([1,2,2,-1],[2,3,4,5],[1,3,2,5],[3,2,4,-3]);
B: matrix([-5,2,-1],[-1,7,3],[-2,4,-3],[1,3,2]);
```

$$A.B = \begin{pmatrix} -12 & 21 & -3 \\ -16 & 56 & 5 \\ -7 & 46 & 12 \\ -27 & 27 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель матрицы A. Для подсчета определителя матрицы воспользуемся командой **determinant(A)**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

```
determinant(matrix([1,2,3,4,5],[2,3,7,10,13],[3,5,11,16,21],
[2,-7,7,7,2],[1,4,5,3,10]));
```

Ответ: 52

3. Дана матрица A. Найти матрицу A^{-1} и установить, что $AA^{-1} = E$. Для начала обратим матрицу A, и запишем ее как матрица B. Чтобы обратить матрицу, существует команда **invert(A)**.

```
A: matrix([17,10,4],[1,1,0],[2,-3,3]);
```

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

```
B: invert(A);
```

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -42 & -4 \\ -3 & 43 & 4 \\ -5 & 71 & 7 \end{pmatrix}$$

Покажем, что произведение матриц A и B есть единичная матрица:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Получили единичную матрицу.

3 Функции математического анализа

1. Найти пределы выражений: № 746, № 761, № 776 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для нахождения предела воспользуемся командой **limit(функция, переменная, точка)**.

   № 746

   Найти предел:
   $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$$
   Запишем функцию:
   $$F=\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$$
   ```
   F: (2*x^2-1)/(3*x^2-4*x);
   limit(F, x, ∞);
   ```
   Ответ: $\frac{2}{3}$

   № 761

   Найти предел:
   $$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$
   Запишем функцию:
   $$F=\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$
   ```
   F: (2-sqrt(x-3))/(x^2-49);
   limit(F, x, 7);
   ```
   Ответ: $-\frac{1}{56}$

   № 776

   Найти предел:
   $$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$$
   Запишем функцию:
   $$F=\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$$
   ```
   F: (2*x*sin(x))/(sec(x)-1);
   limit(F, x, 0);
   ```
   Ответ: 4

2. Вычислить производные: № 886, № 901 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для вычисления производной

воспользуемся командой **diff(y(x), x)**, где y(x) - функция, x - переменная, по которой дифференцируем.

№ 886

Найти производную функции:

1) Дана функция:

$$y = \frac{1}{(1+\cos 4x)^5}$$

```
y(x):=1/(1+cos(4*x))^5;
diff(y(x),x);
```

Ответ:

$$\frac{20\sin(4x)}{(1+\cos(4x))^6}$$

№ 901

Найти производную функции:

$$s = \sqrt{\frac{t}{2} - sin\frac{t}{2}}$$

```
s(t):=sqrt(t/2-sin(t/2))
diff(s(t),t);
```

Ответ:

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}}{2\sqrt{\frac{t}{2} - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$$

3. Найти интегралы: № 1547, № 1562, № 1577 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для нахождения интеграла воспользуемся командой **integrate(y, x)**, где y - функция, x - переменная, по которой дифференцируем.

№ 1547

Найти интеграл:

$$\int \frac{\sin x dx}{b^2 + \cos^2 x}$$

```
integrate(sin(x)/(b^2+cos^2(x)),x);
```

Ответ:

$$-\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\cos(x)}{b}\right)}{b}$$

№ 1562

Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

```
integrate(1/(sqrt(x+a)+sqrt(x)),x);
```

Ответ: данный интеграл в системе wxMaxima не берётся. Посчитаем через wolfram alpha и получим ответ:

$$\frac{2(-x^{3/2}+a\sqrt{a+x}+x\sqrt{a+x})}{3a}$$

№ 1577

Найти интеграл:

$$\int e^{-\sqrt{x}}dx$$

```
integrate(e^sqrt(x),x);
```

Ответ:

$$-\frac{\left(2+2\log\left(e\right)\sqrt{x}\right)\ \%e^{-\log\left(e\right)\sqrt{x}}}{\log\left(e\right)^{2}}$$

Ответ в системе wolfram alpha: $-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)$

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: № 1637, № 1652, № 1667 [Из сборника задач по высшей математике, Минорский В. П.]. Для вычисления площади воспользуемся определенным интегралом.

   № 1637 Вычислить площадь, ограниченную линиями:

$$a^2y^2 = x^3(2a-x)$$

Перепишем уравнение в виде:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3(2a-x)}{a^2}},\ \ g(x)=0$$

Запишем в Maxima:

```
f(x):=sqrt((x^3*(2*a-x))/a^2);
g(x):=0;
```

Найдем точки пересечения этих графиков:

```
solve(f(x)=g(x),x);
```

Таким образом точки пересечения это $x = 0,\ x = 2$

Посчитаем определённый интеграл между этими двумя точками:

```
integrate(f(x)-g(x), x, 0, 2);
```

Таким образом получим ответ:

$$\frac{\frac{\pi a^3}{2} - \frac{\sqrt{2a-2}\left(3\sqrt{2}\,a^2+2^{\frac{3}{2}}a-2^{\frac{7}{2}}\right)+6a^3\ \mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{2a-2}}{\sqrt{2}}\right)}{6}}{|a|}$$

№ 1652

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

Петлей декартового листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Геометрический параметр $t = \frac{y}{x}$ угловой коэффициент полярного радиуса OM, где точка $M(x, y)$ опишет всю петлю кривой при изменении t от 0 до $+\infty$.

Преобразуя криволинейный интеграл формулы $S = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx$ в обыкновенный интеграл с переменной t , получим $S = \frac{1}{2}\oint\limits_{+C} xdy - ydx = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}\lim\limits_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^{\beta}(1+t^3)^{-2}d(1+t^3) = \frac{3a^2}{2}\lim\limits_{\beta\to+\infty}\frac{1}{1+t^3}\Big|_{\beta}^{0}$

В итоге, считая последний предел в Maxima получим ответ: $S = \frac{3a^2}{2}$

№ 1667

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

Общей части эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Заданы уравнения двух одинаковых эллипсов со взаимно перпендикулярными фокальными осями. Найдем точки пересечения эллипсов:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \end{cases}$$

Преобразуем систему в вид:

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\ a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

Так как $a \neq b$, то $x^2 = y^2$, т.е. $\pm x = \pm y$. Получили 4 точки, лежащие на биссектрисах координатных углов.

Перейдем к полярной системе координат. Используя формулы перехода $x = \rho \cos\phi, y = \rho \sin\phi$:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2\rho^2\cos^2\phi + a^2\rho^2\sin^2\phi = a^2b^2, \rho_1^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi}$;

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2\rho^2\cos^2\phi + b^2\rho^2\sin^2\phi = b^2a^2, \rho_2^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}$;

Учитывая симметрию полученной области относительно координатных осей, вычислим сначала площадь ее четвертой части. Она равна сумме площадей S_1 и S_2, разделённых лучом $\phi = \frac{\pi}{4}$. Исходя из симметрии задачи, площади S_1 и S_2 должны быть равны.

Убедимся в этом, вычислив каждую из них в отдельности:

$S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \rho_2^2 d\phi$ и $S_1 = \frac{a^2b^2}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_1^2 d\phi$

Произведём вычисления в системе Maxima и получим :

$$S_2 = \frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\; S_1 = \frac{ab}{2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Площади таким образом равны. Теперь найдем площадь общей части эллипсов

$$S = 4(S_1 + S_2) = 4ab\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Ответ:

$$S = 4(S_1 + S_2) = 4ab\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Перепишем уравнения в виде:

$$f(x) = \sqrt{(1-\frac{x^2}{a^2})b^2}, \quad g(x) = \sqrt{(1-\frac{x^2}{b^2})a^2}$$

5. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

№ 1681

$y = \sin x$(одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси Ox.

Для нахождения объема тела, образованного вращением фигуры вокруг оси Oy воспользуемся определённым интегралом $\int\limits_{y_1}^{y_1} \pi\phi^2(y)dy$, где $x = \phi(y)$ наша функция и $y_1 = 0$, $y_2 = 2\pi$.

```
%pi*integrate(sin(x),x,0,2*%pi);
```

Ответ: 0

4 Решение дифференциальных уравнений

1. Найти решение дифференциальных уравнений. Для того, чтобы решить дифференциальное уравнение, используем команду **ode2(F,y(x),x)**, где F - наша функция, y(x) - зависимая переменная, x - независимая переменная.

   Пример 1. Запишем уравнение как

   $$(2x + y)dy = ydx + 4ln(y)dy$$

   Перепишем в виде:

   $$(2x + 4 - 4ln(y))\frac{dy}{dx} = y$$

   Так как $\frac{dy}{dx} = y'$, то наше уравнение запишется в виде:

   $$(2x + 4 - 4ln(y))y' = y$$

   ```
   F: (2*x+y-4*log(y))*'diff(y(x),x)=y;
   ode2(F,y(x),x);
   ```
   Ответ:

   $$\mathrm{y}(x) = \frac{y\,\log\left(4\log\left(y\right) - y - 2x\right)}{2} + \%c$$

   Пример 2. Запишем уравнение как F: $y^{IV} + 2y'' + y = 0$
   ```
   F: 'diff(y(x),x,4)+2*'diff(y(x),x,2)+y=0;
   ode2(F,y(x),x);
   ```
   Ответ:
   Таким образом возможностей wxMaxima не хватает.
   Решим с помощью wolframAplha и получим ответ:

   $$y(x) = c_3 \sin x + c_4 x \sin x + c_1 \cos x + c_2 x \cos x$$

Пример 3. Запишем уравнение как F: $y'' + y = x\sin(x)$

```
F: 'diff(y(x),x,2)+'diff(y(x),x)=x*sin(x);
ode2(F,y(x),x);
```

Ответ:

$$\mathrm{y}(x) = -\frac{(x+1)\,\cos(x) + (x-2)\,\sin(x)}{2} + \%k2\,\%e^{-x} + \%k1$$

2 Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям. Для нахождения решения используем команду **bc2(ode2(F, y, x), начальные условия)**, где F - наша функция, y - зависимая переменная, x - независимая переменная.

Пример. Запишем уравнение как:

$$y'' + y = 2x - \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

```
G: 'diff(y,x,2)+y=2*x-%pi;
bc2(ode2(G, y, x), x=0, y=0, x=%pi, y=0);
```

Ответ:

$$y = \%r1\,\sin(x) + \pi\cos(x) + 2x - \pi$$

3 Решить задачу Коши $y' = y - x, y(0) = 1.5$ на отрезке [0,1] с шагом h методами Эйлера, Эйлера-Коши, Рунге-Кутты.

Пример. Метод Эйлера.

Зададим концы отрезка, на котором будем искать решение, и шаг:

```
a:0$b:0.8$ h:0.2$;
```

Найдем количество точек разбиения отрезка с шагом h :

```
n:1+floor((b-a)/h)$;
```

Сформируем два пустых одномерных массива размера $n+1$ для хранения значения координат точек [x, y] искомого решения:

```
x1:make_array(flonum, n+1)$
y1:make_array(flonum, n+1)$;
```

Зададим начальное условие:

```
x1[0]:a$ x1[1]:a+h$y1[0]:1.5$;
```

Заполним массив x1 значениями, начиная с 0.2 до 1 с шагом h. Для этого используем цикл с параметром.

```
for i:2 thru n step 1 do (x1[i]:x1[i -1]+h)$;
```

Используя расчетную формулу Эйлера, заполним массив y1:

```
for i:1 thru n step 1 do
(y1[i]:float(y1[i-1]+h*(y1[i-1]-x1[i-1])))$;
```

Выведем полученное решение на экран:

```
for i:0 thru n step 1 do (display(x1[i]), display(y1[i]));
```

$x1_0 = 0$

$y1_0 = 1.5$

$x1_1 = 0.2$

$y1_1 = 1.8$

$x1_2 = 0.4$

$y1_2 = 2.12$

$x1_3 = 0.6000000000000001$

$y1_3 = 2.464$

$x1_4 = 0.8$

$y1_4 = 2.8368$

$x1_5 = 1.0$

$y1_5 = 3.244160000000001$

Дифференциальное уравнение запомним под именем eq1:

```
eq1: 'diff(y(t),t)=y(t)-t;
```

$\frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(t) - t$

Задаем начальное условие:

```
atvalue(y(t),t=0, 1.5);
```

1.5

Находим точное решение задачи Коши:

```
desolve(eq1,y(t));
```

$rat : replaced - 1.5\ by - 3/2 = -1.5$

$\mathrm{y}(t) = \frac{e^t}{2} + t + 1$

Вычислим значения функции в точках отрезка [0,1] с шагом h=0.2

```
for i:0 thru n do (z1[i]:%e^x1[i]/2+x1[i]+1, display(z1[i]));
```

$z1_0 = \frac{3}{2}$

$z1_1 = 1.810701379080085$

$z1_2 = 2.145912348820635$

$z1_3 = 2.511059400195255$

$z1_4 = 2.912770464246234$

$z1_5 = 3.359140914229522$

Найдем величину абсолютной погрешности:

```
for i:1 thru n do (display(abs(z1[i]-y1[i])));
```

$|0.01070137908008495| = 0.01070137908008495$

$|0.02591234882063498| = 0.02591234882063498$

$|0.04705940019525423| = 0.04705940019525423$

$|0.07597046424623333| = 0.07597046424623333$

$|0.1149809142295215| = 0.1149809142295215$

Метод Эйлера-Коши.

Для решения приведенной задачи Коши сформируем еще 3 пустых массива x2, y2 и вспомогательный массив z.

```
x2:make_array(flonum, n+1)$
z:make_array(flonum, n+1)$
y2:make_array(flonum, n+1)$;
```

Зададим начальное условие:

```
x2[0]:a$x2[1]:a+h$y2[0]:1.5$z[0]:1.5$;
```

Заполним массив x2 значениями, начиная с 0.2 до 1 с шагом h. Для этого используем цикл с параметром.

```
for i:2 thru n step 1 do (x2[i]:x2[i-1]+h)$;
```

Теперь воспользуемся расчетной формулой Коши-Эйлера и найдем решение:

```
for i:1 thru n step 1 do(z[i]:float(y2[i-1]+
+h*(y2[i-1]-x2[i-1])),y2[i]:float(y2[i-1]+
+h*(y2[i-1]-x2[i-1]+z[i]-x2[i])/2))$;
```

Выведем найденное решение на экран:

```
for i:0 thru n step 1 do (display(x2[i]), display(y2[i]));
```

$x2_0 = 0$

$y2_0 = 1.5$

$x2_1 = 0.2$

$y2_1 = 1.81$

$x2_2 = 0.4$

$y2_2 = 2.1442$

$x2_3 = 0.6000000000000001$

$y2_3 = 2.507924$

$x2_4 = 0.8$

$y2_4 = 2.90766728$

$x2_5 = 1.0$

$y2_5 = 3.3513540816$

Найдем величину абсолютной погрешности:

```
for i:1 thru n do (display(abs(z1[i]-y2[i])));
```

$\left|7.01379080084940710^{-4}\right| = 7.01379080084940710^{-4}$

$|0.0017123488206349 79| = 0.0017123488206349 79$

$|0.003135400195254601| = 0.003135400195254601$

$|0.005103184246233905| = 0.005103184246233905$

$|0.007786832629522067| = 0.007786832629522067$

Заметим, что метод Коши-Эйлера дает более точный результат, чем метод Эйлера. Максимальная погрешность вычислений составляет 0.7%.

Метод Рунге-Кутты.

В системе *Maxima* для нахождения численного решения задачи Коши методом Рунге-Кутта (четвертого порядка точности) есть встроенная функция **rk**. Для того, чтобы она стала активной, требуется подключить пакет **dynamics** с помощью команды:

```
load("dynamics")$;
```

Теперь задаем команду для нахождения решения:

```
sol: rk(y-x, y, 1.5, [x, 0, 1, 0.2]);
```

$[0.0, 1.5]$,

$[0.2, 1.8107]$,

$[0.4, 2.14590898]$,

$[0.6000000000000001, 2.511053228172]$,

$[0.8, 2.91276041288928]$,

$[1.0, 3.359125568302967]$

Сделаем вывод, что метод Эйлера дает самое плохое приближение к точному решению задачи Коши.

4. Найти решение уравнения $y''+y'-xy = 2x^2$ на отрезке [0.6; 0.9] (n=3)

с начальными условиями: $y'(0.6) = 0.57, y(0.9) - 0.95y'(0.9) = 3$

Вводим обозначения и задаем значения переменных:

```
p(x):=1$ q(x):=-x$ f(x):=2*x^2$
alfa1:-1$ alfa2:0$ ac:0.57$ bc:3$
beta1:1$ beta2:-0.95$
a1:0.4$ b1:0.7$;
```

Разбиваем отрезок [a, b] на равные части с шагом $h = 0.1, n = 3$.

```
n:3$ h:0.1$;
```

Формируем список, содержащий все точки отрезка:

```
x:makelist (a1+(k-1)*h,k,1,n+1);
```

$$[0.4, 0.5, 0.6000000000000001, 0.7000000000000001]$$

Формируем пустую квадратную матрицу a размера *n+1*:

```
a:genmatrix(lambda([i,j],0),n+1,n+1);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь заполним матрицу a по формулам:

$a_{k,k} = h^2 q_k - hp_k + 1, a_{k,k+1} = hp_k - 2, a_{k,k+2} = 1, k = 1, n-1,$

$a_{n,1} = \alpha_1 h - \alpha_2, a_{n,2} = \alpha_2, a_{n+1,n} = -\beta_2, a_{n+1,n+1} = \beta_1 h + \beta_2,$

$k = n, n+1.$

Для заполнения коэффициентами первых двух уравнений системы воспользуемся циклом с параметром:

```
for i:1 thru n-1 do for j:1 thru n+1 do
(if i=j then a[i,j]:h*h*q(x[i])-h*p(x[i])+1
else if j=i+1 then a[i,j]:h*p(x[i])-2
else if j=i+2 then a[i,j]:1 else 0);
```

done

В двух последних уравнениях поменяем значения некоторых элементов с помощью оператора присваивания:

```
a[n,1]:alfa1*h-alfa2$ a[n,2]:alfa2$
```

```
a[n+1,n]:-beta2$ a[n+1,n+1]:beta1*h+beta2$;
```

Теперь заполним столбец свободных членов:

```
b:makelist(if k<=3 then h^2*f(x[k])
else 0,k,1,n+1)$
b[n]:h*ac$ b[n+1]:h*bc$;
```

Выведем полученные матрицы на экран:

```
b;
```

$$[0.003200000000000001, 0.005000000000000001, 0.007200000000000003, 0]$$

```
a;
```

$$\begin{pmatrix} 0.896 & -1.9 & 1 & 0 \\ 0 & 0.895 & -1.9 & 1 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & -0.85 \end{pmatrix}$$

Получили систему линейных уравнений, записанную в матричном виде $ay = b$, где y-искомое решение. Найдем его матричным способом:

```
invert(a).b;
```

$$\begin{pmatrix} -0.07200000000000007 \\ -0.09801786176031834 \\ -0.1185219373446047 \\ -0.1324656946792641 \end{pmatrix}$$

5. Найти решение системы дифференциальных уравнений и исследовать особые точки. Начертить на фазовой плоскости траектории системы.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4y - 6x \end{cases}$$

Запишем первое уравнение как $F1$, а второе как $F2$

```
F1: 3*x(t)=diff(x(t),t)+2*y(t);
```

$$3\,\mathrm{x}(t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) + 2\,\mathrm{y}(t)$$

```
F2: 4*y(t)=diff(y(t),t)-6*x(t);
```

$$4\,\mathrm{y}(t) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) - 6\,\mathrm{x}(t)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений воспользуемся выражением:

```
desolve([F1,F2],[x(t),y(t)]);
```

$$\mathrm{x}(t) = e^{\frac{7t}{2}}\,\left(\frac{(7\,\mathrm{x}(0) + 2\,(-2\,\mathrm{y}(0) - 4\,\mathrm{x}(0)))\,\sin\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)}{\sqrt{47}} + \mathrm{x}(0)\,\cos\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)\right)$$

$$\mathrm{y}(t) = e^{\frac{7t}{2}}\,\left(\frac{(2\,(6\,\mathrm{x}(0) - 3\,\mathrm{y}(0)) + 7\,\mathrm{y}(0))\,\sin\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)}{\sqrt{47}} + \mathrm{y}(0)\,\cos\left(\frac{\sqrt{47}t}{2}\right)\right)$$

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни. Для этого зададим матрицу.

```
matrix([3-lambda,-2], [-6,4-lambda]);
```

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы и найдем собственные значения матрицы.

```
determinant(%);
```

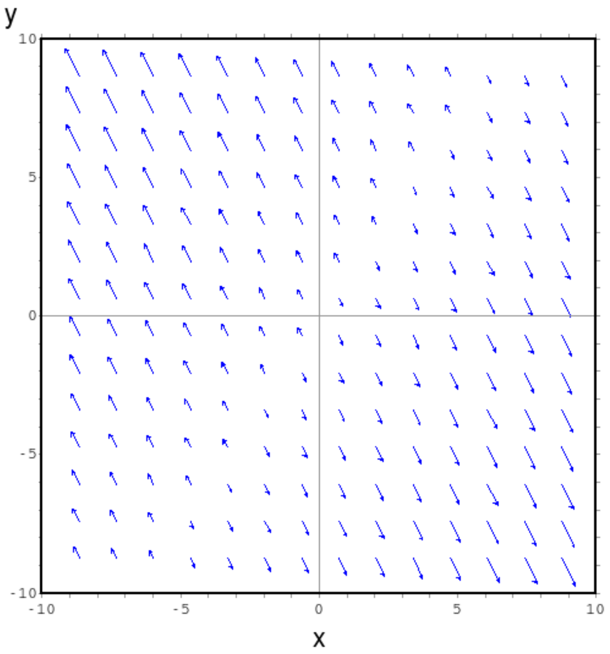
$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 12$$

```
solve([(3-lambda)*(4-lambda)-12=0],[lambda]);
```

$$[\lambda = 0, \lambda = 7]$$

Задаем команду для построения поля направлений:

```
plotdf([3*x-2*y, 4*y-6*x],[x,y],
[tstep,0.01],[x,-10,10],[y,-10,10],
[direction,forward],[nsteps,300]);
```



Так как корни характеристического уравнения это действительные положительные числа, то точка покоя неустойчива и называется неустойчивым узлом(рисунок).

6. Реализация метода сеток для дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 1.

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{a^2} u_{tt}, \ \ 0 \leq x \leq m, \ \ 0 \leq y \leq n \\ u(x,0) = \sin(\pi x/50)\cos(\pi x), \ \ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(m,t) = 0. \end{cases}$$

Вводим сетку: m=100 , n=200 , h=1 . Создаем нулевой массив значений $U(i,j)$ размера m x n.

```
$m:42$n:30$ h:1$;
for i:1 thru m do for j:1 thru n do
(arraymake (u,[i,j]), u[i,j]:0)$;
```

Задаем значения a=1, k=0,01.

```
a:1$k:0.01$;
```

Заполняем первую и вторую строки массива U начальными условиями $u(x,0) = \sin(\pi x/9)\cos(\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$ (нулевой начальной скорости соответствует совпадение значений (смещений) в первом и втором столбцах).

```
for j:1 thru n do
(u[1,j]:sin(%pi*j/9)*cos(%pi*j), u[2,j]:u[1,j])$;
```

Заполняем первый и последний столбец массива U граничными условиями $u(0,t) = u(m,t) = 0$ (на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени).

```
for i:1 thru m do (u[i,1]:0, u[i,n]:0)$;
```

Находим решение, используя разностную схему

$u_{i+1,j} = \dfrac{a^2k^2}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] + 2u_{i,j} - u_{i-1,j}$.

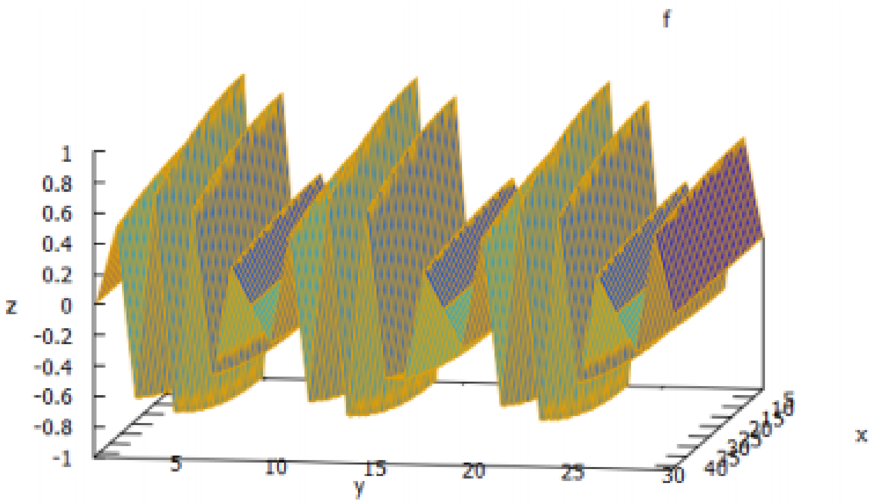
```
for i:2 thru m-1 do for j:2 thru n-1 do
u[i+1,j]:float((a*k/h)^2*(u[i,j+1]-
2*u[i,j]+u[i,j-1])+2*u[i,j]-u[i-1,j]),numer$;
```

Для вывода полученного решения в виде поверхности преобразуем наш массив U в функцию двух переменных:

```
f(x,y):=float(u[round(x),round(y)])$;
```

Теперь выполняем построение:

```
plot3d(f, [x,1,m], [y,1,n], [plot_format, gnuplot])$;
```



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы я познакомился с системой компьютерной алгебры Maxima. В ходе работы была использована графическая оболочка wxMaxima, которая очень сильно облегчила выполнение данных мне заданий.

Во время прохождения практики я получил новый опыт работы с системами компьтерной алгебры и открыл для себя бесплатный аналог Wolfram Mathematica. Значительных трудностей в переходе от отдой системы к другой не возникло.

Maxima очень гибкий инструмент, который предоставляет очень широкий набор средств и доступен под множество операционных систем. Мне очень понравилась возможность копирования решения из среды wxMaxima прямо в LaTeX.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М. : Наука, 1984. 294с.

2 Берсенев С. М., Иванов И. О. О вычислительных схемах метода регуляризации // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 9. 1402–1405с.

3 Фомин А. Е. О компонентах групп // Исследования по теории групп: сб. науч. тр. Свердловск, 1984. 136–148с.

4 Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242с.

5 Губина Т. Н., Андропова Е.В. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математике Maxima: Учебное пособие. Елец. 2009. 99с.

6 Стахин Н. А. Основы работы с системой аналитических вычислений Maxima: Учебное пособие. М. 2008. 86с.

7 Виноградов И. М. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1977—1985.