ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Шаров Александр Вадимович

«информатика и вычислительная техника»

11 Июня 2019 г.

Открытая проблема

Существует ли полином g над $\mathbb{Z}_2$ такой что композиция

$$f(x) = g\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \tag{1}$$

транзитивна по $\pmod{2^k}$ для всех k.

Гипотеза Коллатца

Берём любое натуральное число $n \in \mathbb{N}$. Если оно чётное, то делим его на 2, а если нечётное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n+1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза заключается в том, что какое бы начальное число n мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

Гипотеза Коллатца

Для постановки задачи в терминах p-адического анализа переформулируем гипотезу в виде следующей формулы:

$$\Phi_3(x) = \begin{cases} 3x+1, x \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{x}{2}, x \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, x \equiv 1 \\ \frac{x}{2}, x \equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Далее можно рассматривать вопрос о том, сохраняет ли функция T_3 меру Хаара и, если дополнительно ввести следующие функции:

$$F : x \longmapsto \left[\frac{x}{2}\right], F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$G : x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots, x \longmapsto \frac{x - x_0}{p}$$

то можно рассматривать задачу об их биективности, совместимости и 1-липшицевости.

Построение автомата для функции вида $f(x) = cx$

Для любого рационального числа $c = \frac{n}{m}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ и где p не является делителем m, существует ограниченно-детерминированная функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ такая, что $f(x) = cx$. Обозначим через $\mathfrak{A}_c$ соотвествующий приведенный конечный автомат. Легко видеть, что для любой детерминированной функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ и слова $\alpha = a(1)a(2)\dots a(l) \in E_p^l$ для соответствующей остаточной функции $f_\alpha(x)$ выполняется следующее соотношение:

$$f([\alpha] + p^l x) = [\beta] + p^l f_\alpha(x) \tag{3}$$

где $\beta = b(1)b(2)\dots b(l) = f(\alpha) \in E_p^l$:

$$\overbrace{\underbrace{a(1)\dots a(l)}_{\alpha}\,\underbrace{x(1)x(2)\dots}_{x}}^{[\alpha]+p^l x} \to \boxed{f} \to \overbrace{\underbrace{b(1)\dots b(l)}_{\beta}\,\underbrace{x(1)x(2)\dots}_{x}}^{[\beta]+p^l f_\alpha(x)} \tag{4}$$

Построение автомата для функции вида $f(x) = cx$

Из соотношения непосредственно следует формула для $f_\alpha(x)$:

$$f_\alpha(x) = \frac{f([\alpha] + p^l x) - [\beta]}{p^l}. \tag{5}$$

Для начала опишем автомат $\mathfrak{A}_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Применив формулу к функции $f(x) = nx$, получим:

$$(nx)_\alpha = \frac{n([\alpha] + p^l x) - [\beta]}{p^l} = nx + \frac{n[\alpha] - [\beta]}{p^l}, \tag{6}$$

где $[\beta] = n[\alpha] \pmod{p^l}$ (так как $f(\alpha) = \beta$). Следовательно, $n[\alpha] - [\beta]$ делится на p^l, и мы получаем более короткое представление:

$$(nx)_\alpha = nx + q, \tag{7}$$

где $q = \left[\frac{n[\alpha]}{p^l}\right] \in \{0, \dots, n-1\}$, так как $n[\alpha] = p^l q + [\beta]$ и $[\alpha], [\beta] \in [0, p^l)$. Покажем, что $\forall q \in \{0, \dots, n-1\} \quad \exists \alpha : \alpha \in E_p^l$, что $q = \frac{n[\alpha]}{p^l}$.

Построение автомата для функции вида $f(x) = cx$

Действительно, последнее эквивалентно следующему выражению:

$$p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + p^l. \tag{8}$$

Возьмем теперь достаточно больше l так, чтобы выполнялось неравенство $p^l > n$, и положим $\alpha \in E_p^l$ равным p-ичной зависи числа $\left[\frac{p^l q}{n}\right]$, т.е. $[\alpha] = \left[\frac{p^l q}{n}\right]$. Тогда:

$$\frac{p^l q}{n} \leq [\alpha] < \frac{p^l q}{n} + 1 \Rightarrow p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + n \Rightarrow p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + p^l. \tag{9}$$

Следовательно, слово α удовлетворяет условию (4) и $q = \left[\frac{n[\alpha]}{p^l}\right]$.

Таким образом, показано что остаточные функции для $f(x) = nx$ полностью исчерпываются функциями $f^{(q)}(x) = nx + q$, где $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Более того, все эти функции различны, поскольку $f^{(q)}(0) \neq f^{(q')}(0)$ при $q \neq q'$.

Построение автомата для функции вида $f(x) = cx$

Такое наблюдение позволяет выбрать в качестве множества состояний приведенного автомата $\mathfrak{A}_n$, реализующего ограниченно-детерминированная функцию nx, множество $Q = \{0, \dots, n-1\}$. Опишем функцию переходов и функцию выходов автомата $\mathfrak{A}_n$. Применив формулу к функции $f^{(q)}(x) = nx + q$ и однобуквенному слову $\alpha = a$, получим:

$$(nx+q)_\alpha = \frac{n(px+a)+q-b}{p} = nx + \frac{q+na-b}{p} \tag{10}$$

где $b = na + q \pmod{p}$. Тогда $(nx+q)_\alpha = nx + q^{'}$, где $q^{'} = \frac{q+na-b}{p}$, и в автомате $\mathfrak{A}_n$ переход $q \xrightarrow{a/b} q^{'}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$q + na = pq^{'} + b \tag{11}$$

Участие в научной конференции «Presenting Academic Achievements to the World»

Было подготовлено и реализовано выступление на английском языке для конференции «Presenting Academic Achievements to the World». Тема: «How to reduce the AWS costs by using Kubernetes»

Спасибо за внимание!

ОТЧЕТ О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

Шаров Александр Вадимович

«информатика и вычислительная техника»

11 Июня 2019 г.