Квадратичные формы и их приложения

Шаров Александр Вадимович

«Прикладная информатика и математика»

Содержание

Целью работы является рассмотрение понятия квадратичных форм, связанных с этим определёний, а так же изучениям их свойств.

В 628-м году индийский математик Брахмагупта написал «Brahmasphutasiddhanta», которое включало в себя уравнение вида

$$x^2 - ny^2 = c.$$

Сейчас это уравнение называется уравнением Пелля и записывается в виде

$$x^2 - ny^2 = 1.$$

В Европе проблему решения этого уравнения изучали такие ученые как Эйлер, Лагранж, Браункер и многие другие. В частности, Лагранж в своих трудах значительно расширил теорию квадратичных форм изучая кривые второго порядка. В 1801 году Гаусс опубликовал «Disquisitiones Arithmeticae», большая часть которого была посвещена полной теории бинарных квадратичных форм над целыми числами. С тех пор эта концепция была обобщена, и связана с квадратичными числовыми полями, модулярным группами и другими областями математики.

Теорема 1

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с матрицей A линейным однородным преобразованием $X = BY$ переводится в квадратичную форму $\phi(y_1, y_2, ..., y_n)$ с матрицей $C = B^T AB$.

Следствие 1.

Определители матриц конгруэнтных невырожденных действительных квадратичных форм имеют одинаковые знаки.

Следствие 2.

Конгруэнтные квадратичные формы имеют одинаковые ранги.

Теорема 2 (Лагранжа).

Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Теорема 3

Всякая квадратичная форма с матрицей A может быть приведена к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

при помощи преобразования переменных с ортогональной матрицей. При этом коэффициенты λ_k канонического вида являются корнями характеристического многочлена матрицы A каждый из которых взят столько раз, какова его кратность.

Теорема 4

Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная действительная квадратичная форма невырожденным действительным линейным преобразованием, не зависит от выбора преобразования.

Теорема 5

Две действительные квадратичные формы от n переменных тогда и только тогда конгруэнтны, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.

Теорема 6

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ является положительно-определенной тогда и только тогда, когда она принимает положительные значения при любой ненулевой системе значений переменных $x_1, x_2 \ldots, x_n$.

Теорема 7

Квадратичная форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ с действительной матрицей является положительно-определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны.

Теорема 8

Квадратичная форма является отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда ее главные миноры четного порядка положительны, а нечетного - отрицательны.

-