СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной научно-исследовательской работы - попытка разобраться с гипотезой, которая была поставлена В. С. Анашиным и А. Ю. Хренниковым в книге Applied Algebraic Dynamics[1] и подробно описана в первом разделе. Поскольку данная гипотеза - это открытая проблема, то нельзя заранее сказать о том, будет она доказана или опровергнута.

В течение семестра гипотеза была рассмотрена, а затем, чтобы в дальнейшем рассматривать гипотезу в терминах автоматов, была проведена работа по созданию алгоритма для преобразования детерминированных функций $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ в конечные автоматы. Задача о построение конечного автомата для детерминированной функции была поставлена и решена в курсовой работе для частной функции вида $f(x) = cx, c = \frac{n}{m}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ближе к концу семестра была рассмотрена гипотеза Коллатца, которая, если ее переложить на язык p-адических функций, очень схожа с гипотезой рассмотренной в первом разделе.

Основной список используемой литературы для построения функции $f(x) = cx$ приведен в курсовой работе.

1 Основная открытая проблема

В книге [1] В. С. Анашин и А. Ю. Хренников ставят следующую проблему, которую отмечают как открытую.

Проблема 1. Существует ли полином g над $\mathbb{Z}_2$ такой что композиция

$$f(x) = g\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) \tag{1}$$

транзитивна по $\pmod{2^k}$ для всех k.

В начале семестра было рассмотрено предположение о том, что данную задачу можно рассматривать в терминах рядов Ван дер Пута и Т-функций, но в последствии от этого было решено отказаться в пользу рассмотрения задачи в терминах автоматов. В терминах автоматов функцию $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ можно рассматривать как некоторый ассинхронный автомат, а функцию g как некоторый синхронный автомат.

2 Гипотеза Коллатца (проблема $3x + 1$)

Помимо рассмотрения проблемы 1 в терминах автоматов был рассмотрен вариант переложения гипотезы Коллатца на термины p-адического анализа. После переложения гипотеза очень сильно стала напоминать исходную решаемую проблему.

Перед постановкой гипотезы Коллатца в терминах p-адического анализа кратко объясним суть гипотезы. Для этого рассмотрим следующую последовательность чисел, называемую сиракузской последовательностью. Берём любое натуральное число $n \in \mathbb{N}$. Если оно чётное, то делим его на 2, а если нечётное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза заключается в том, что какое бы начальное число n мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

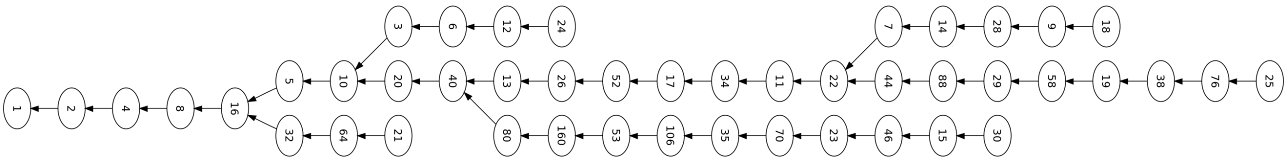

Рисунок 1 – Пример сиракузской последовательности

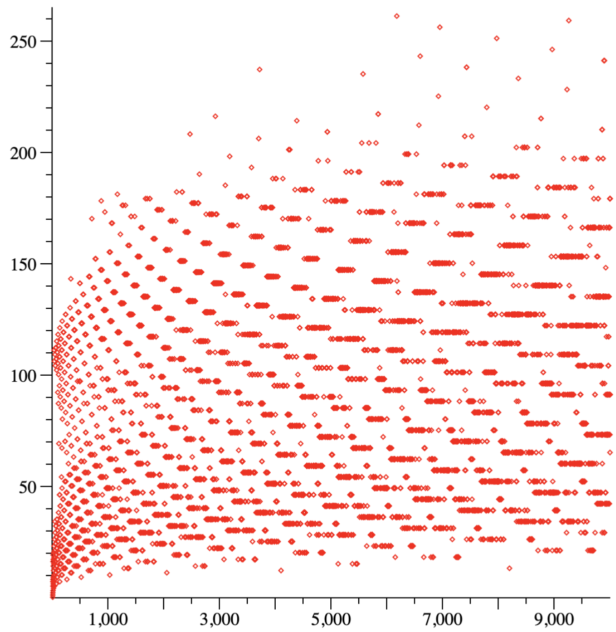

Рисунок 2 – Длины сиракузских последовательностей для чисел от 1 до 9999

Для постановки задачи в терминах p-адического анализа переформулируем гипотезу в виде следующей формулы:

$$\Phi_3(x) = \begin{cases} 3x+1, x \equiv 1 \pmod 2 \\ \frac{x}{2}, x \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+1}{2}, x \equiv 1 \\ \frac{x}{2}, x \equiv 0 \end{cases} \tag{2}$$

Далее можно рассматривать вопрос о том, сохраняет ли функция T_3 меру Хаара и, если дополнительно ввести следующие функции:

$$F : x \longmapsto \left[\frac{x}{2}\right], F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$G : x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots, x \longmapsto \frac{x - x_0}{p}$$

то можно рассматривать задачу об их биективности, совместимости и 1-липшицевости.

В данных терминах гипотеза Коллатца очень напоминает гипотезу 1.

3 Построение автомата для функции вида $f(x) = cx$

Для решения задачи 1 в терминах автоматов очень важно построить способ, который будет давать нам однозначное представление функции в виде автомата. Для этого были сделаны следующие шаги.

Для любого рационального числа $c = \frac{n}{m}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ и где p не является делителем m, существует ограниченно-детерминированная функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ такая, что $f(x) = cx$. Обозначим через $\mathfrak{A}_c$ соотвествующий приведенный конечный автомат. Легко видеть, что для любой детерминированной функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ и слова $\alpha = a(1)a(2)\dots a(l) \in E_p^l$ для соответствующей остаточной функции $f_\alpha(x)$ выполняется следующее соотношение:

$$f([\alpha] + p^l x) = [\beta] + p^l f_\alpha(x) \tag{3}$$

где $\beta = b(1)b(2)\dots b(l) = f(\alpha) \in E_p^l$:

$$\overbrace{\underbrace{a(1)\dots a(l)}_{\alpha}\underbrace{x(1)x(2)\dots}_{x}}^{[\alpha]+p^l x} \to \boxed{f} \to \overbrace{\underbrace{b(1)\dots b(l)}_{\beta}\underbrace{x(1)x(2)\dots}_{x}}^{[\beta]+p^l f_\alpha(x)} \tag{4}$$

Из соотношения 3 непосредственно следует формула для $f_\alpha(x)$:

$$f_\alpha(x) = \frac{f([\alpha] + p^l x) - [\beta]}{p^l}. \tag{5}$$

Для начала опишем автомат $\mathfrak{A}_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Применив формулу 5 к функции $f(x) = nx$, получим:

$$(nx)_\alpha = \frac{n([\alpha] + p^l x) - [\beta]}{p^l} = nx + \frac{n[\alpha] - [\beta]}{p^l}, \tag{6}$$

где $[\beta] = n[\alpha] \pmod{p^l}$ (так как $f(\alpha) = \beta$). Следовательно, $n[\alpha] - [\beta]$ делится на p^l, и мы получаем более короткое представление:

$$(nx)_\alpha = nx + q, \tag{7}$$

где $q = \left[\frac{n[\alpha]}{p^l}\right] \in \{0, \dots, n-1\}$, так как $n[\alpha] = p^l q + [\beta]$ и $[\alpha], [\beta] \in [0, p^l)$. Покажем, что $\forall q \in \{0, \dots, n-1\} \quad \exists \alpha : \alpha \in E_p^l$, что $q = \frac{n[\alpha]}{p^l}$.

Действительно, последнее эквивалентно следующему выражению:

$$p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + p^l. \tag{8}$$

Возьмем теперь достаточно больше l так, чтобы выполнялось неравенство $p^l > n$, и положим $\alpha \in E_p^l$ равным p-ичной зависи числа $\left[\frac{p^l q}{n}\right]$, т.е. $[\alpha] = \left[\frac{p^l q}{n}\right]$. Тогда:

$$\frac{p^l q}{n} \leq [\alpha] < \frac{p^l q}{n} + 1 \Rightarrow p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + n \Rightarrow p^l q \leq n[\alpha] < p^l q + p^l. \tag{9}$$

Следовательно, слово α удовлетворяет условию (4) и $q = \left[\frac{n[\alpha]}{p^l}\right]$. Таким образом, показано что остаточные функции для $f(x) = nx$ полностью исчерпываются функциями $f^{(q)}(x) = nx + q$, где $q \in \{0, \ldots, n-1\}$. Более того, все эти функции различны, поскольку $f^{(q)}(0) \neq f^{(q^{'})}(0)$ при $q \neq q^{'}$.

Такое наблюдение позволяет выбрать в качестве множества состояний приведенного автомата $\mathfrak{A}_n$, реализующего ограниченно-детерминированная функцию nx, множество $Q = \{0, \ldots, n-1\}$. Опишем функцию переходов и функцию выходов автомата $\mathfrak{A}_n$. Применив формулу 5 к функции $f^{(q)}(x) = nx + q$ и однобуквенному слову $\alpha = a$, получим:

$$(nx+q)_\alpha = \frac{n(px+a)+q-b}{p} = nx + \frac{q+na-b}{p} \tag{10}$$

где $b = na + q \pmod p$. Тогда $(nx+q)_\alpha = nx + q^{'}$, где $q^{'} = \frac{q+na-b}{p}$, и в автомате $\mathfrak{A}_n$ переход $q \xrightarrow{a/b} q^{'}$ существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$$q + na = pq^{'} + b \tag{11}$$

Так как $q^{'} \in [0, n)$ и $b \in [0, p)$, то из равенства 11 следует, что

$$q^{'} = p^{-1}(q-a) \pmod n, b = n^{-1}(a-q) \pmod p \tag{12}$$

где p^{-1} - это обратный элемент для p в кольце целых чисел по модулю n, а n^{-1} - это обратный элемент для элемента n в кольце целых чисел по модулю

p. Оба элемента существуют, поскольку n и p - взаимно простые числа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В дальнейшей научной работе планируется формализовать способ получения автомата для любого полинома и последующее применение полученных результатов к проблеме 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Anashin, V. Applied Algebraic Dynamics / V. Anashin, A Khrennikov. Berlin, Germany : Walter de Gruyter, 2009. 557 p.