Úkol 2

pátek 27. listopadu 2020 11:31

Příklad 1 (2 *body*). V pondělní polední nabídce restaurace Burger House byla polévka, burger, salát a dezert. Hosté si mohli objednávat libovolné kombinace sestávající z těchto chodů, přičemž každý host měl alespoň jeden chod a od každého chodu nejvíce jeden kus. Restaurace ten den prodala celkem 35 polévek, 58 burgerů, 16 salátů a 25 dezertů. O objednávkách víme následující informace (např. "PB" n značí, že n hostů si objednalo **alespoň** polévku a burger): PB 21, PS 7, PD 8, BS 13, BD 19, SD 0, PBS 7, PBD 2, PSD 0, BSD 0, PBSD 0.

1. Kolik hostů obědvalo v pondělí v Burger House?
2. Kolik hostů si objednalo jenom polévku?

Rozdělme si množinu ~~hostů~~ všech hostů, kteří v pondělí přišli do Burger House na následující disjunktní podmnožiny:

[p, b, s, d, pb, ps, pd, bs, bd, sd, pbs, pbd, psd bsd, pbsd]

kde význam např. **pb** je množina hostů, kteří si dali právě jednu polévku a burger, nic víc, nic míň.

Tyto množiny jsou tedy určitě disjunktní a navíc pokrývají všechny hosty (vyplývá ze zadání – každý min. 1 chod, max. 1 kus)

V zadání máme např.

PB... lidé, kteří si dali alespoň polévku a burger

=> lidé, kteří si dali právě polévku a burger, polévku, burger a salát, ..., vše.

Počet prodaných (polévek, burgerů, salátů, dezertů) odpovídá jistě počtu lidí, kteří si dali: právě polévku, polévku a burger, ..., vše.

Můžeme tedy sestavit následující rovnice

(od této chvíle počítejme s p, b, s, d, ..., pbsd ne jako s množinami ale počty jejich prvků)

$PBSD = pbsd$ $\quad PBS = pbs + pbsd$ $\quad PBD = pbd + pbsd$

$PSD = psd + pbsd$ $\quad BSD = bsd + pbsd$

$PB = pb + pbs + pbd + pbsd$

$PS = ps + pbs + psd + pbsd$

$PD = pd + pbd + psd + pbsd$

$BS = bs + pbs + bsd + pbsd$

$BD = bd + pbd + bsd + pbsd$

$SD = sd + psd + bsd + pbsd$

$P = p + pb + ps + pd + pbs + pbd + psd + pbsd$

$B = b + pb + bs + bd + pbs + pbd + bsd + pbsd$

$S = s + ps + bs + sd + pbs + psd + bsd + pbsd$
$D = d + pd + bd + sd + pbd + psd + bsd + pbsd$

(Z podtržených částí je patrné, že jsme v podstatě využili princip inkluze a exkluze – vícekrát podtržené části jsou právě ty, které by byly započteny více/méně – násobně)

Nyní řešme dosazovací metodou:

$PBSD = pbsd = 0$

$PBS = pbs + pbsd = pbs + 0 = pbs = 7$
$PBD = pbd + pbsd = pbd + 0 = pbd = 2$
$PSD = psd + pbsd = psd + 0 = psd = 0$
$BSD = bsd + pbsd = bsd + 0 = bsd = 0$

$PB = pb + pbs + pbd + pbsd = pb + 7 + 2 + 0$
$\Rightarrow PB = pb + 9 \Rightarrow pb = 12$

$PS = ps + pbs + psd + pbsd = ps + 7 + 0 + 0$
$\Rightarrow PS = ps + 7 \Rightarrow ps = 0$

$PD = pd + pbd + psd + pbsd = pd + 2 + 0 + 0$
$\Rightarrow PD = pd + 2 \Rightarrow pd = 6$

$BS = bs + pbs + bsd + pbsd = bs + 7 + 0 + 0$

$\Rightarrow BS = bs + 7 \Rightarrow \underline{bs = 6}$

$BD = bd + pbd + bsd + pbsd = bd + 2 + 0 + 0$

$\Rightarrow BD = bd + 2 \Rightarrow \underline{bd = 17}$

$SD = sd + psd + bsd + pbsd = sd + 0 + 0 + 0$

$\Rightarrow SD = \underline{sd = 0}$

$P = p + pb + ps + pd + pbs + pbd + psd + pbsd =$
$= p + 12 + 0 + 6 + 7 + 2 + 0 + 0 = p + 27 \Rightarrow \underline{p = 8}$

$B = b + pb + bs + bd + pbs + pbd + bsd + pbsd =$
$= b + 12 + 6 + 17 + 7 + 2 + 0 + 0 = b + 44 \Rightarrow \underline{b = 14}$

$S = s + ps + bs + sd + pbs + psd + bsd + pbsd =$
$= s + 0 + 6 + 0 + 7 + 0 + 0 + 0 = s + 13 \Rightarrow \underline{s = 3}$

$D = d + pd + bd + sd + pbd + psd + bsd + pbsd =$
$= d + 6 + 17 + 0 + 2 + 0 + 0 + 0 = d + 25 \Rightarrow \underline{d = 0}$

Kolik hostů tedy objednalo celkem?

Jelikož víme, že množiny $p, b, s, d, \dots, pbsd$ jsou disjunktní a tvoří množinu všech hostů, platí:

celkem $= p+b+s+d+pb+ps+pd+bs+bd+sd+$
$+pbs+pbd+psd+bsd+pbsd=$
$= 8+14+3+0+12+0+6+6+17+0+$
$+7+2+0+0+0 =$ 75 hostů $\boxed{A}$

Kolik hostů si objednalo jen polévku?
To je naše p, tedy 8 hostů. $\boxed{B}$

Příklad 2 (3 *body*). Nalezněte předpis pro posloupnost $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 12a_n = 4n - 7 + (-2)^{n+4}$$

a $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 6$.

① Řešení přidružené homogenní LRR

$$a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 12a_n = 0$$

↳ CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

Kořen: odhadem dělitel 12.. třeba -3?

$-27 - 9 + 24 + 12 = -36 + 36 = 0$ ✓

$$(\lambda^3-\lambda^2-8\lambda+12):(\lambda+3)=\lambda^2-4\lambda+4$$
$$-\ \lambda^3-3\lambda^2$$
$$-4\lambda^2-8\lambda+12$$
$$+\ 4\lambda^2+12\lambda$$
$$4\lambda+12$$

TEDY:

$$(\lambda+3)(\lambda^2-4\lambda+4)=0$$
$$(\lambda+3)(\lambda-2)^2=0$$

$\lambda_1=-3 \quad \lambda_2=2$ ... dvojnásobný

Řešením přidružené homogenní LRR bude:

$$z_n=u\cdot(-3)^n+v\cdot 2^n+w\cdot n\cdot 2^n \ ; \ u,v,w\in\mathbb{R}$$

② Partikulární řešení

$$b_n=4n-7+(-2)^{n+4}$$

lze popsat jako součet dvou kvazipolynomů $P(n)\cdot\lambda^n$

$b_1=4n-7 \qquad P(n)=4n-7 \quad \lambda=1 \quad m=0$

NÁSOBNOST λ

$b_2=16\cdot(-2)^n \qquad P(n)=16 \quad \lambda=-2 \quad m=0$

Řešením tedy bude součet

$$n^0 \cdot Q_1(n) \cdot 1^n + n^0 \cdot Q_2(n) \cdot (-2)^n$$

Nalezněme $Q_1(n)$:

stupeň 1 ... tvar $An+B$

→ dosadíme do LRR, na pravou stranu

$1 \cdot Q_1(n) \cdot 1^n$ $\quad P(n) = 4n+7$.

$$[A(n+3)+B] - [A(n+2)+B] - 8[A(n+1)+B]$$
$$+ 12[An+B] = 4n-7$$

$$An + 3A + B - An - 2A - B - 8An - 8A - 8B$$
$$+ 12An + 12B = 4n - 7$$

$$4An - 7A + 4B = 4n - 7$$
$$(4A)n + (-7A + 4B) = (4)n + (-7)$$

$$4A = 4$$
$$-7A + 4B = -7$$

Řešením je:

$A = 1,\ B = 0$

$Q_1(n) = n$ TEDY 1. ČÁST ŘEŠENÍ JE n.

Nalezněme $Q_2(n)$: stupeň 0 ... tvar K

↳ dosadíme do LRR $1 \cdot K \cdot (-2)^n$

a na pravou stranu $16 \cdot (-2)^n$

$$k\cdot(-2)^{n+3} - k\cdot(-2)^{n+2} - 8\cdot k\cdot(-2)^{n+1}$$
$$+ 12\cdot k\cdot(-2)^n = 16\cdot(-2)^n$$

$$-\frac{1}{2}\cdot k\cdot\cancel{(-2)^{n+4}} - \frac{1}{4}\cdot k\cdot\cancel{(-2)^{n+4}} + 1\cdot k\cdot\cancel{(-2)^{n+4}}$$
$$+ \frac{3}{4}\cdot k\cdot\cancel{(-2)^{n+4}} = 1\cdot\cancel{(-2)^{n+4}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}\right) = 1 \Rightarrow \underline{k=1}$$

$\underline{Q_2(n)=1}$ TEDY 2. ČÁST ŘEŠENÍ JE $1\cdot 1\cdot \underline{(-2)^n}$

Partikulární řešení je tedy ve tvaru

$$\underline{\tilde{a}_n = n + (-2)^n}$$

③ Řešení:

$u, v, w \in \mathbb{R}$

$$a_n = z_n + \hat{a}_n =$$
$$= \underline{u\cdot(-3)^n + v\cdot 2^n + w\cdot n\cdot 2^n + n + (-2)^n}$$

④ Počáteční podmínky:

$a_0 = 1 \quad a_1 = -1 \quad a_2 = 6$

$$u\cdot\cancel{(-3)^0} + v\cdot\cancel{2^0} + \cancel{w\cdot 0}\cdot 2^0 + 0 + (-2)^0 = 1$$

$$u+v+1=1 \Rightarrow \underline{u+v=0}$$

$$u\cdot(-3)^1+v\cdot 2^1+w\cdot 1\cdot 2^1+1+(-2)^1=-1$$

$$-3u+2v+2w-1=-1$$

$$\Rightarrow \underline{-3u+2v+2w=0}$$

$$u\cdot(-3)^2+v\cdot 2^2+w\cdot 2\cdot 2^2+2+(-2)^2=6$$

$$9u+4v+8w+6=6$$

$$\Rightarrow \underline{9u+4v+8w=0}$$

Řešme SLR:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{ř2 += 3ř1 \\ ř3 -= 9ř1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{ř3 += ř2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \\ w=0 \end{array}}$$

Řešení dané LRRsKK s danými počátečními podmínkami je tedy

$$\boxed{a_n = n+(-2)^n}$$

(Důkaz správnosti řešení: INDUKCÍ pro $\forall n \geq 0$

① $n=0$: $a_0 = 0+1 = 1$ ✓

$n=1$: $a_1 = 1-2 = -1$ ✓

$n=2$: $a_2 = 2+4 = 6$ ✓

② Platí pro a_n, a_{n+1}, a_{n+2}

$\Rightarrow$ platí pro a_{n+3}

$$a_{n+3} - a_{n+2} - 8a_{n+1} + 12a_n = 4n - 7 + (-2)^{n+4}$$

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 8a_{n+1} - 12a_n + 4n - 7 + (-2)^{n+4} =$$

$$\overset{\text{I.u.}}{=} \underline{(n+2)} + (-2)^{n+2} + \underline{8(n+1)} + 8(-2)^{n+1}$$
$$- \underline{12n} - 12(-2)^n + \underline{4n-7} + (-2)^{n+4} =$$

$$= n + 8n - 12n + 4n + 2 + 8 - 7$$
$$+ (-2)^{n+2} + 8(-2)^{n+1} - 12(-2)^n + (-2)^{n+4} =$$

$$= n+3 - \tfrac{1}{2}(-2)^{n+3} + 2(-2)^{n+3} + \tfrac{3}{2}(-2)^{n+3}$$
$$- 2(-2)^{n+3} = n+3 + (-2)^{n+3} \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + 2 + \tfrac{3}{2} - 2\right) =$$

$$= n+3 + (-2)^{n+3}$$ ✓ PLATÍ.