Úkol 1

WRZECOND

sobota 31. října 2020 11:39

Příklad 1 (1 *bod*). Uvažujme nasledující hru pro dva hráče. Ve hře jsou dvě hromádky zápalek. V každém tahu jeden hráč z právě jedné hromádky odebere alespoň jednu a nanejvýše všechny zápalky. Hráči se pravidelně střídají. Hru vyhrává ten hráč, který odebere poslední zápalku.

Dokažte matematickou indukcí, že pokud obě hromádky obsahují na začátku stejný počet zápalek, potom hráč, který hraje jako druhý, může hru vždy vyhrát (druhý hráč má vyhrávající strategii).

Označme počet zápalek v hromádkách n.

① n=1: 1. hráč musí vzít 1 zápalku z jedné
2. hráč vezme 1 zápalku z druhé hromádky
a vyhrál. ✓

② Vyhraju pro n zápalek, vyhraju i pro n+1:

- Hráč 1 opět odebere 1 zápalku z jedné a hráč 2 jednu z druhé hromádky, čímž jsme na n zápalkách, pro které vyhrajeme ✓

Algoritmus: dokud hra neskončí:
① hráč 1 vezme 1...n zápalek
② hráč 2 vezme stejně zápalek z druhé hromádky (n-krát indukční krok)

Příklad 2 (2 *body*). Pro funkce $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$ a $g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$ ukažte z definice, že platí

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Důkaz:

($\Rightarrow$) Triviálně platí (pokud $a < b$, pak $a \leq b$)

($\Leftarrow$) Pokud pro $\forall c \in \mathbb{R}^+$ $f(n) \leq c \cdot g(n)$, platí buď

$f(n) < c \cdot g(n)$ nebo $f(n) = c \cdot g(n)$

S $f(n) < c \cdot g(n)$ není problém – ten by nastal, pokud by nastala $f(n) = c \cdot g(n)$. Pak:

1. $f(n) = c \cdot g(n)$ může nastat max. jednou

↳ pokud by to totiž nastalo vícekrát (pro $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$), pak by určitě $\exists n \geq n_{0(c_1)}, n_{0(c_2)}$ tak, že:

$$f(n) = c_1 \cdot g(n) = c_2 \cdot g(n) \Rightarrow c_1 = c_2$$

2. c_0 lze určitě napsat jako $\frac{c_1 + c_2}{2}$, $c_1 \neq c_0$, $c_2 \neq c_0$ o kterých víme, že $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq n_0$ $f(n) < c_1 \cdot g(n)$, $f(n) < c_2 \cdot g(n)$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq n_0 \quad 2 \cdot f(n) < (c_1 + c_2) g(n)$$

A TEDY $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) < c_0 \cdot g(n)$

PLATÍ. ✓

Příklad 3 (2 *body*). Najděte universum $\mathcal{U}$ a v něm neprázdné množiny A a B takové, že platí

$$(A \setminus B) \times (A \cap B) = A \times B$$

nebo dokažte, že takové množiny neexistují.

$$(A \setminus B) \times (A \cap B) = A \times B \iff$$

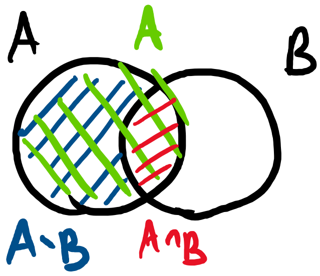
$$\iff (A \setminus B = A) \wedge (A \cap B = B)$$

Využijeme znalost o rovnosti kartézských součinů.

$A \setminus B = A \iff A \cap B = \emptyset$

a zároveň

$A \cap B = B$



$A \cap B = B = \emptyset$, tedy $B = \emptyset$.

To je ale ve sporu se zadáním neprázdných množin A, B $\Rightarrow$ NEEXISTUJÍ

Alternativně: $A \cap B = B \iff A \subseteq B$

a zároveň $A \setminus B = A$.

$A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset = A$, opět spor s neprázdností A, B.