Úkol 1

pondělí 19. října 2020 10:11

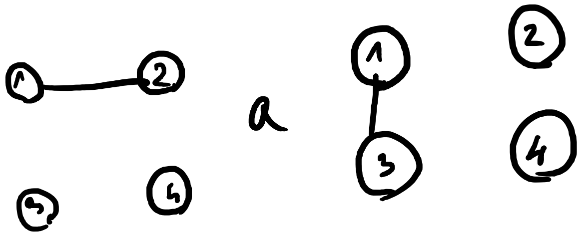
Úloha 1. *Definujte izomorfismus a automorfismus grafu. Určete počet neizomorfních podgrafů grafu K_4.*

Nechť $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou grafy. Bijekci $\varphi: V_1 \to V_2$ nazveme isomorfismem grafu, jestliže platí $\forall u, v \in V_1 : (u,v) \in E_1 \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$.

Automorfismem nazveme isomorfismus grafu sám se sebou. $(G_1 = G_2)$

Podgrafů celkem existuje $2^6 = 64$, jelikož si u každé hrany můžeme vybrat, zda-li do podgrafu bude či nebude patřit.

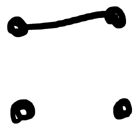
Z těchto 64 podgrafů jsou ale některé izomorfní. Například



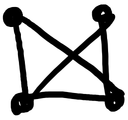
, zde φ:
$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 2$
$4 \to 4$

Odebrat 6/0 hran lze pouze 1 způsobem.

Při odebrání 5 hran vznikne jen 1 neizomorfní:



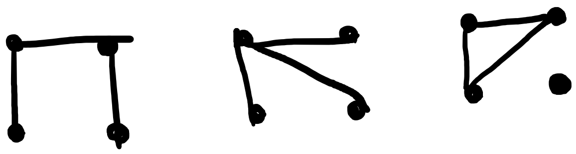
,



analogicky pro odebrání 1 hrany

Při odebrání 4 hran / 2 hran pouze 2.

Při odebrání 3 hran pouze 3.



Celkem tedy $3+2+2+1+1+1+1 = \underline{\underline{11}}$ NEIZOM.

Jiné opodstatnění: hledám unikátní rozdělení 2x počet hran mezi stupně vrcholů.

0 hran –	$\sum_{i=1}^{4} \deg v_i = 0$	$(0,0,0,0)$	1 NEIZO.
1 hrana –	$= 2$	$(1,1,0,0)$	1 NEIZO.
2	$= 4$	$(1,1,1,1)$ $(2,1,1,0)$	2 NEIZO.
3	$= 6$	$(2,2,1,1)$ $(3,1,1,1)$ $(2,2,2,0)$	3 NEIZO.
4	$= 8$	$(3,2,2,1)$ $(2,2,2,2)$	2 NEIZO.
5	$= 10$	$(3,3,2,2)$	1 NEIZO.
6	$= 12$	$(3,3,3,3)$	1 NEIZO.
			11 NEIZO.

Úloha 2. *Definujte strom. Dokažte, že souvislý graf $G = (V, E)$ je strom právě tehdy, když neobsahoval kružnici a přidáním libovolné hrany kružnice vznikne.*

G je strom <=> G acyklický + přidáním hrany cyklický

Důkaz:

(=>) SPOREM: Předpokládejme, že G je strom

a (má kružnici nebo přidáním lib. hrany
nevznikne kružnice)

① G je strom a má kružnici SPOR s definicí
(Strom je acyklický souvislý graf...)

② G je strom a přidáním libovolné hrany nevznikne kružnice. G je souvislý graf, tedy z každého vrcholu vede cesta do jiného vrcholu P. Pokud mezi lib. dvěma vrcholy přidáme hranu, pak se mezi nimi půjde dostat buď touto hranou nebo cestou P a vznikne tedy kružnice => SPOR

(⇐) SPOREM
Graf G neobsahuje kružnici, přidáním lib. hrany kružnice nevznikne a G není strom.

G je strom, pokud je acyklický a souvislý.
(z definice)
Víme, že neobsahuje kružnici,

stačí tedy ověřit souvislost.

Jelikož by přidáním hrany mezi lib. vrcholy $u, v \in V(G)$ vznikla kružnice, musí již mezi nimi existovat nějaká cesta. Pak ale ex. cesta mezi každými dvěma vrcholy, graf je souvislý a jelikož i acyklický, je strom.

$\Rightarrow$ SPOR

Úloha 3. *Navrhněte algoritmus, který pro zadaný neorientovaný graf $G = (V, E)$ zjistí, zda je tento graf bipartitní.*

Nechť $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \emptyset$

Pro každé $u \in V(G)$

- pokud $(u, v) \notin E$ pro každé $v \in M_1$
  a $(u, w) \in E$ pro každé $w \in M_2$
  - pak $M_1 = M_1 \cup \{u\}$
- jinak, pokud $(u, v) \in E$ pro každé $v \in M_1$
  a $(u, w) \notin E$ pro každé $w \in M_2$

└ pak $M_2 = M_2 \cup \{u\}$

└ jinak <u>GRAF NENÍ BIPARTITNÍ</u>, KONEC.

Pokud $|M_1| \neq 0$ a $|M_2| \neq 0$, <u>GRAF JE BIPARTITNÍ</u>

Tento algoritmus pro každý vrchol zkontroluje stav jeho hran s vrcholy z jednotlivých partit, je tedy zajištěno, že opravdu bude mít hrany mezi partitami a nebude v rámci jedné.

Úloha 4. *Dokažte, že je-li K kostra grafu $G = (V, E)$, potom pro každé $e \in E \setminus E(K)$ existuje $e_0 \in E(K)$ tak, že $(V, (E(K) \setminus \{e_0\}) \cup \{e\})$ je opět kostra grafu G.*

Pro důkaz tohoto tvrzení budeme vycházet z algoritmu tvorby kostry.

DFS pro hledání kostry

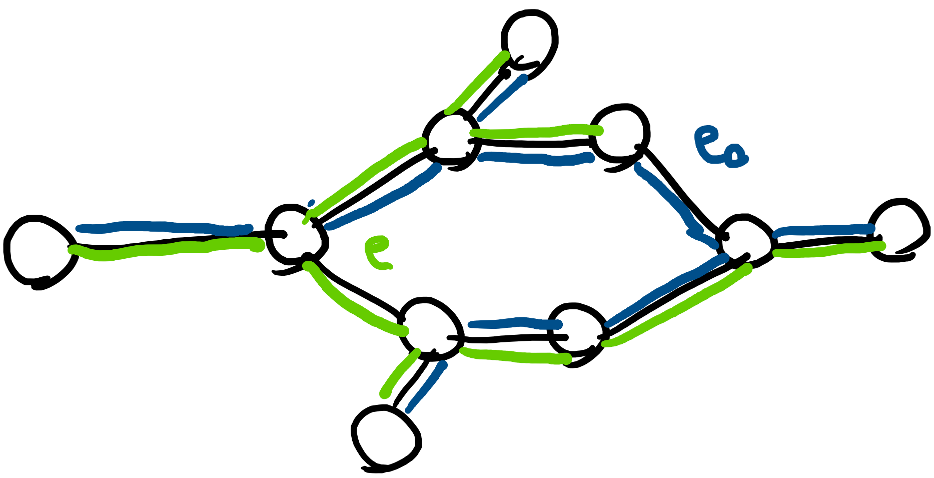
```
Algoritmus DFS_kostra(G)
    Pro každý vrchol u ∈ V(G):
        stav(u) := nenalezený          // = nepřipojený
    Zvol libovolný s ∈ V(G)
    DFS_kr(s)

DFS_kr (vrchol v):
    stav(v) := otevřený                 //žlutý
    Pro každého souseda w vrcholu v:
        Pokud stav(w) = nenalezený:
            vypiš hranu {v,w}           // = připojení w
            DFS_kr(w)
```

Při tvorbě kostry vybíráme libovolného souseda daného vrcholu, tedy vždy lze

```
(10)    stav(v) := uzavřený                                  //zelený
```


volit hranu e_0 tak, aby dokázala nahradit. Jinak na toto lze také nahlížet tak, že odstraňujeme kružnice z grafu G. Při odstraňování hrany e tedy existovala jiná podcesta kružnice tvořená hranou e_0 tak, že se stále jedná o kostru.



Např. zde to lze hezky vidět.