NI-MPI část 1

Ondřej Wrzecionko

ZS 2022/2023

Obsah

1 Úvod

1.1 Organizace předmětu

Zápočet

- 2 kvízy v MARASTu po 6 bodech *(nutno splnit)*
- 10 minikvízů po 1 bodu *(min. 7 bodů)*
- vesměs programovací domácí úkol za 6 bodů *(min. 1 bod)*

Zkouška

- zkoušková písemka za max 40 bodů *(2x 20 bodů)*
- minimum 50 % bodů z první části a celkově
- ústní zkouška za max 40 bodů *(právo veta)*
- dvě otázky, na které se půjde písemně připravit

Kvízy budou 5. a 10. týden semestru, minikvízy od 2. týdne, úkol po 6. týdnu semestru, měkký termín před Vánocemi.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\} \tag{1}$$

V NI-MPI bude do přirozených čísel patřit i nula.

1.2 Témata

Vícerozměrné funkce a optimalizace

Mnoho problémů lze formulovat jako optimalizační problémy, kde minimalizujeme funkci určující zisk, vzdálenost nebo třeba dobu běhu algoritmu.

Pokud je tato funkce *(která může být více proměnných)* zadaná analyticky, dá se optimum hledat.

Strojová čísla a numerika

Spojitá matematika na počítači a stabilita numerických algoritmů. Jak probíhá ukládání čísel a intervalů čísel v počítači a jak lze odhadovat chyby, které zde vznikají. Z této části bude onen *(programovací)* úkol.

Obecná algebra – grupy, tělesa

Konečné grupy a tělesa jsou zdrojem nástrojů pro kryptografii, hashovací funkce, generování náhodných čísel a další…

2 Funkce více proměnných

2.1 Vícerozměrný prostor a funkce

2.1.1 Norma a vzdálenost

Norma na vektorovém prostoru V je zobrazení $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_0^+$ splňující, že norma nulového vektoru je 0, lze z ní vytknout skalár α a platí zde trojúhelníková nerovnost. **Vzdálenost** vektorů $x, y \in V$ pak definujeme jako $d(x, y) = ||x - y||$.

Platí zde tedy triviálně $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, symetrie a trojúhelníková nerovnost.

Obecně, pro libovolné $p \geq 1$ je

$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \tag{2}$$

norma (pro $p = 2$ jde o euklidovskou normu, $p = 1$ součtová norma).

2.1.2 Okolí bodu

Pokud volím normu, pak δ-okolí bodu x je množina

$$H_\delta(x) = \{b \in \mathbb{R}^n : ||x - b|| < \delta\} \tag{3}$$

takzvaná **otevřená koule** o středu x a poloměru δ. Obecně pro všechna okolí píšeme jednoduše $H(x)$.

O $x \in \mathbb{R}^n$ řekneme, že je **hromadným bodem** M, pokud pro všechna $r > 0$ platí

$$H_r(x) \setminus \{x\} \cap M \neq \emptyset \tag{4}$$

Bod M, který není hromadný, se nazývá **izolovaný**.

2.1.3 Limita posloupnosti a funkce

O posloupnosti $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ řekneme, že má **limitu** $L \in \mathbb{R}^n$, pokud

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)(x_n \in H_\epsilon(L)) \tag{5}$$

Reálná funkce více proměnných je zobrazení $f : D_f \to \mathbb{R}$, kde $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ (pro kladné celé n), opět zde platí definiční obor a obor hodnot.

Graf funkce f je množina bodů z funkce.

Řekneme, že **funkce** $f : D_f \to \mathbb{R}$ má **limitu** $L \in \mathbb{R}$ v hromadném bodě b množiny D_f pokud

$$\forall H(L) \quad \exists H(b) \quad x \in (D_f \cap H(b)) \setminus \{b\} \Longrightarrow f(x) \in H(L) \tag{6}$$

2.1.4 Spojitost funkce

Řekneme, že funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ je **spojitá** v bodě $x_0 \in D_f$, pokud:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x \in (D_f \cap H_\epsilon(x_0)) \Longrightarrow f(x) \in H_\epsilon(f(x_0)) \tag{7}$$

V izolovaném bodě je každá funkce spojitá.

2.1.5 Extrémy funkce

O funkci f řekneme, že má v bodě $b \in D_f$:

- **lokální minimum**, pokud $\exists \delta > 0, \forall x \in (D_f \cap H_\delta(b)), f(x) \geq f(b)$;
- **ostré lokální minimum**, pokud $\exists \delta > 0, \forall x \in (D_f \cap H_\delta(b)), f(x) > f(b)$;
- **globální minimum**, pokud $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(b)$.

Pokud máme $D_f \subset \mathbb{R}^n$, která je **omezená** (je podmnožinou nějaké otevřené koule) a **uzavřená** (obsahuje i svou hranici – body, jejichž každé okolí obsahuje bod z D_f i bod mimo D_f), pak má spojitá funkce $D_f \to \mathbb{R}$ v D_f globální minimum/maximum.

2.2 Parciální derivace

2.2.1 Definice

Parciální derivace funkce $f$ve směru osy x_i v bodě $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in D_f$ takovém, že $\exists H(b) \subset D_f$, je

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(b_1, b_2, \ldots, b_i + h, \ldots, b_n) - f(b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n)}{h} = L, \tag{8}$$

pokud tato limita existuje.

Značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(b) = L$, jedná se o sm. tečny ke grafu funkce f ve směru osy x_i.

2.2.2 Gradient funkce

Gradient funkce f v bodě $b \in D_f$ je vektor

$$\nabla f(b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b), \frac{\partial f}{\partial x_2}(b), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(b) \right). \tag{9}$$

Představuje směr nejvyššího růstu funkce f (kde je ”nejstrmější”).

2.2.3 Derivace ve směru

Derivace funkce f ve směru $v \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n, ||v|| = 1$ v bodě $b \in D_f$ takovém, že $\exists H(b) \subset D_f$, je

$$\nabla_v f(b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(b + hv) - f(b)}{h} \tag{10}$$

Platí, že pokud jsou všechny parciální derivace f na nějakém okolí bodu b spojité, pak

$$\nabla_v f(b) = \nabla f(b) \cdot v. \tag{11}$$

2.2.4 Tečná nadrovina

Jedná se o jakési sjednocení tečen ve všech směrech v daném bodě. Její rovnicí je pak

$$z = \frac{\partial f}{\partial x_1}(b)(x_1 - b_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b)(x_2 - b_2) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(b)(x_n - b_n) + f(b) \tag{12}$$

2.2.5 Nutná podmínka lokálního extrému

Nechť má funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$, v bodě b parciální derivaci podle i-té proměnné.

Pokud f má v bodě b lokální extrém, pak

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(b) = 0. \tag{13}$$

2.2.6 Stacionární bod

Pokud existuje gradient funkce f v bodě b, pak existence lokální extrému implikuje $\nabla f(b) = 0$.

Body $b \in D_f$ splňující $\nabla f(b) = 0$ se nazývají **stacionární**.

2.2.7 Kritický bod

Kritickým bodem (podezřelým z extrému) je ten, kde je gradient nulový (stacionární bod) nebo gradient neexistuje.

2.3 Postačující podmínky extrému

2.3.1 Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace je pořád funkce více proměnných, můžu ji tedy stále derivovat a dostáváme tak parciální derivaci druhého řádu.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(b) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(b) \tag{14}$$

Pokud se x_i, x_j nerovnají, jedná se o smíšenou parciální derivaci. Pokud se rovnají, píšeme x_i^2.

Druhé derivace jsou **zaměnitelné, pokud** existuje nějaká druhá parciální derivace, která je spojitá. Hessova matice je tedy často symetrická.

2.3.2 Hessova matice

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce f v bodě b, můžeme je zaznamenat do **Hessovy matice**. *(Prvně derivuji podle sloupce, druze podle řádku.)*

$$\nabla^2 f(b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(b) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(b) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(b) \end{pmatrix} \tag{15}$$

2.3.3 Druhá derivace ve směru

Stejně tak, jako šlo znova derivovat první derivaci, tak stejně lze derivovat i druhou derivaci funkce f ve směru v v bodě $b \in D_f$ takovém, že $\exists H(b) \subset D_f$, je

$$\nabla_v(\nabla_v f)(b). \tag{16}$$

Mějme $v \in \mathbb{R}^{n,1}$, $||v|| = 1$. Mějme funkci f a bod b a nechť existuje okolí $H(b)$ takové, že tam jsou spojité všechny druhé parciální derivace, pak

$$\nabla_v(\nabla_v f)(b) = v^T \cdot \nabla^2 f(b) \cdot v \tag{17}$$

2.3.4 Definitnost matic

Mějme $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbb{A}$ je

- pozitivně semidefinitní, pokud $x^T \mathbb{A} x \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^{n,1}$;
- pozitivně definitní, pokud $x^T \mathbb{A} x > 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^{n,1}, x \neq 0$;
- negativně semidefinitní, pokud $x^T \mathbb{A} x \leq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^{n,1}$;
- negativně definitní, pokud $x^T \mathbb{A} x < 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}^{n,1}, x \neq 0$;
- indefinitní, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická matice. Pak platí:

- matice A je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná
- matice A je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná
- matice A je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná
- matice A je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná
- matice A je indefinitní právě tehdy, když existuje alespoň jedno kladné i záporné vlastní číslo

Pokud má matice $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ na diagonále dva prvky s různým znaménkem (kladný a záporný), pak je indefinitní.

2.3.5 Sylvestrovo kritérium

Buď $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symetrická matice. Pro matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definujeme matice $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takto: $A_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ je čtvercová matice v levém horním rohu matice $\mathbb{A}$. Platí:

- Matice $\mathbb{A}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kladný (> 0)
- Matice $\mathbb{A}$ je negativně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic $A_1, A_2, \ldots, A_n$ záporný pro k liché a kladný pro k sudé

2.3.6 Postačující podmínka existence extrému

Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce f spojité všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým bodem**.

Nechť $b \in D_f$ je stacionární bod funkce f a existuje okolí $H(b)$ takové, že f má na $H(b)$ spojité všechny druhé parciální derivace, pak:

- je-li $\nabla^2 f(b)$ pozitivně definitní, pak b je ostré lokální minimum;
- je-li $\nabla^2 f(b)$ negativně definitní, pak b je ostré lokální maximum;
- je-li $\nabla^2 f(b)$ indefinitní, pak b je sedlový bod;

2.3.7 Nutná podmínka existence extrému

Nechť $b \in D_f$ je stacionární bod funkce f a existuje okolí $H(b)$ takové, že f má na $H(b)$ spojité všechny druhé parciální derivace, pak:

- je-li b lokální minimum, pak $\nabla^2 f(b)$ je pozitivně semidefinitní
- je-li b lokální maximum, pak $\nabla^2 f(b)$ je negativně semidefinitní

2.4 Postup analytického hledání extrémů

1. najít kritické body: stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje
2. pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu b spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice:
   (a) pozitivně definitní, pak je b bodem ostrého lokálního minima;
   (b) negativně definitní, pak je b bodem ostrého lokálního maxima;
   (c) indefinitní, pak je bod b sedlovým bodem (není extrémem)

2.5 Konvexní funkce

2.5.1 Definice

Funkce je konvexní, pokud

$$\forall b_1, b_2 \in D_f, \forall t \in [0,1] : f(tb_1) + (1-t)b_2) \leq tf(b_1) + (1-t)f(b_2) \tag{18}$$

Platí, že funkce f, která má spojité všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku D_f (množina bez své hranice).

Lokální minimum konvexní funkce je globálním minimem.

2.6 Příklady – hledání extrémů

Příklad 1

$f(x,y) = x^2 + y^2$ – je docela zřejmé, že zde bude jedno globální minimum v bodě $(0,0)$.

Gradient musí být nulový: $\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = \vec{0}$ a to nastane právě tehdy, když $x = 0, y = 0$.

Hessova matice *(obecná)*: $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Konkrétní v bodě $(0,0)$ bude zrovna v tomto případě stejná.

Syllvestrovo kritérium říká, že pokud je matice symetrická, pak je pozitivně definitní, pokud má jak ta "malá", tak ta "velká" matice kladný determinant, což platí *(2 je kladné, 4 je kladné)*, tedy $(0,0)$ je **ostrým lokálním minimem**.

Nyní chceme parciální derivaci ve směru přímky $y = x$. Potřebujeme normalizovat $(1,1)$ tak, aby byla jeho velikost 1, což vyjde na $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. To vynásobíme gradientem v bodě $(1,1)$, což vychází na $(2,2) \cdot \ldots = 2\sqrt{2}$.

Příklad 2

$g(x,y) = x^2 - y^2$, pro gradient platí $\nabla g(x,y) = (2x, -2y)$, což je nulové opět právě tehdy, když $x = 0, y = 0$.

Hessova matice nám vyjde $\nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ a dosadíme tam bod $(0,0)$, čímž dostaneme stejnou matici.

Vidíme, že na diagonále je jeden kladný a jeden záporný prvek, matice je tedy indefinitní a $(0,0)$ je **sedlovým bodem**.

Opět hledáme parciální derivaci ve směru, násobíme našim vektorem v bodě $(1,1)$, čímž získáváme $(2,-2) \cdot \ldots = 0$.

Příklad 3

$h(x,y) = x^2 - y^3$, pro gradient platí $\nabla h(x,y) = (2x, 3y^2)$, což je nulové opět právě tehdy, když $x = 0, y = 0$.

Hessova matice nám vyjde $\nabla^2 h(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ a dosadíme tam bod $(0,0)$, čímž dostaneme $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Přímo z definice vidíme, že matice je pozitivně semidefinitní, takže nevíme, jestli to je nebo není extrém *(maximálně víme, že tam nebude maximum)*.

Příklad 4

$u(x,y) = xy$, pro gradient platí $\nabla u(x,y) = (y,x)$, což je nulové opět právě tehdy, když $x = 0, y = 0$.

Hessova matice nám vyjde $\nabla^2 u(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Zkusím vynásobit obecným vektorem $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2ab$, což jsme schopni nastavit tak, aby to bylo kladné i záporné, matice je tedy indefinitní a jedná se o **sedlový bod**.

Příklad 5

$w(x,y) = (x+y)^2$, pro gradient platí $\nabla w(x,y) = (2(x+y), 2(x+y))$, což je nulové právě tehdy, když $x = -y, y \in \mathbb{R}$.

Hessova matice nám vyjde $\nabla^2 u(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Zkusím vynásobit obecným vektorem $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 + 4ab + 2b^2 =$

$2(a+b)^2 \geq 0$, matice je tedy pozitivně semidefinitní a funkce zde může mít lokální minimum *(z kouknu a vidím vyplývá, že $y = -x$ opravdu je).*

Příklad 6

$z(x,y) = x^4 + y^4$, pro gradient platí $\nabla z(x,y) = (4x^3, 4y^3)$, což je nulové právě tehdy, když $x = 0, y = 0$.

Hessova matice nám vyjde $\nabla^2 z(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$, což je v bodě $(0,0)$ nulovou maticí. Matice je tedy pozitivně a negativně semidefinitní a nevíme tedy, co a jak.

Použitím znalostí o pozitivní semidefinitnosti a konvexitě jsme ale schopni říct, že se bude jednat o **globální minimum**.

Příklad 7

Máme $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$. Gradientem je $\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2)$. Kdy to bude nulové?

$$\begin{array}{llll} 3x^2 & +12y & & = 0 \\ 12x & +2y & & = 0 \\ & & 2z+2 & = 0 \end{array}$$

Z poslední rovnice je zřejmé, že $z = -1$, pak $y = -6x$, tedy $x^2 - 24x = 0$ …body jsou $(0,0,-1), (24,-144,-1)$.

Hessova matice je $\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, v prvním bodě v levém horním rohu bude 0, v druhém 144.

Po vynásobení obecným vektorem a dosazením zjistíme, že je tato matice v bodě $(0,0,-1)$ indefinitní a jedná se tedy o **sedlový bod**. V druhém bodě $(24,-144,-1)$ je matice pozitivně definitní a jedná se o **ostré lokální minimum**.

2.7 Vázané extrémy

Co to je: hledáme extrémy jen v rámci nějakých omezených rovností (*(například na kružnici)*.

Úloha vázaného extrému je obecně následující úloha:
minimalizuj $f(x)$, za podmínek $g_j(x) = 0, j \in m$, $h_k(x) \leq 0$
g_j: rovnostní podmínka, h_k nerovnostní podmínka

Pokud jsou všechny funkce lineární, jedná se o **úlohu lineárního programování**, pokud jsou všechny lineární a f kvadratická, je to úloha **kvadratického** programování, jinak úloha **nelineárního** programování.

Množinu přípustných řešení $\mathcal{M}$ nazveme množinu všech prvků takových, že $g_j(x) = 0$ a pro každé k platí $h_k(x) \leq 0$.

Funkce f má v bodě $x^* \in \mathcal{M} \cap D_f$ lokální minimum **vzhledem k množině** $\mathcal{M}$ pokud existuje okolí $H(x^*)$ takové, že

$$\forall x \in (H(x^*) \cap \mathcal{M}) f(x^*) \leq f(x) \tag{19}$$

Lagrangeova funkce: $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$

TL;DR : mám m rovností, p nerovností, hledám extrémy. Pro každou tu rovnost a nerovnost dokážu najít lambdy a mý takové, aby to bylo kolmé.

Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima: nechť f, g_j mají spojité všechny druhé parciální derivace na otevřené nadmnožině $M \subset M$. Pokud dvojice $(x^*; \lambda^*) \in \mathbb{R}^n$ x $\mathbb{R}^m$ splňuje:

- $x^* \in M$ *(leží v množině, nultá derivace)*
- $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$ *(je to kolmé)*
- pro každé $k \in p, \mu_k = 0$ nebo $h_k(x^*) = 0$; jsem uvnitř, nebo vně vazby? *(aktivní / neaktivní)*
- pro každý nenulový vektor $v \in \mathbb{R}^n$, který je kolmý na gradient vazeb, platí, že je to kladné *(zjednodušení pozitivní definitnosti)*
- správný směr od hranice M : $\mu_k \geq 0$ pro minimum a $\mu_k \leq 0$ pro maximum **!!!** *(nerovnostní vazby)*

Aktivní omezení nebo neaktivní omezení závisí na tom, zda se omezení zrovna aplikuje na základě toho, jestli to je nebo není na hranici množiny.

Hledáme lokální extrémy $\frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínek: $g(x, y) = y - 1 = 0$. *(Odpovídá hledání na řezu, 1D úloha)*. Při řešení naší úlohy: $L(x, y, \lambda) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 + \lambda * (y - 1)$, $\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \iff (x^2 - 1, 2y + \lambda, y - 1) = (0, 0, 0)$. Body podezřelé z extrému jsou tedy $(1, 1, -2)$ a $(-1, 1, -2)$.

Vyjde nám $\nabla_x^2 L = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, což je pro náš bod $(1, 1, -2)$ pozitivně definitní a je tam lokální minimum, pro bod $(-1, 1, -2)$ už vychází matice indefinitní, **ALE**! $\nabla g(x, y) = (0, 1)$ a při dosazení $(-1, 1)$ dostáváme toto, obecně tedy hledám vektory $(a, 0)$, pronásobím s maticí a získávám $-2a^2$, což je vždy menší než 0 (ostře menší, protože $a \neq 0$, jedná se tedy o lokální maximum.

Opět hledáme lokální extrémy $\frac{x^3}{3} - x + y^2$, ale tentokrát máme funkci $x^2 + 2x + y^2 = 0$. Pořád platí $L(x, y, \lambda) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 + \lambda \cdot (x^2 + 2x + y^2)$. O gradientu platí: $\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = (x^2 - 1 + 2\lambda x + 2\lambda, 2y + 2y\lambda, x^2 + 2x + y^2)$, což se má rovnat $(0, 0, 0)$.

Řešením soustavy těchto rovnic zjistíme, že: $y = 0 \vee \lambda = -1$. Pokud $y = 0$, pak vychází body $(0, 0, \frac{1}{2})$ a $(-2, 0, \frac{3}{2})$. Pokud $\lambda = -1$, pak vychází body $(-1, 1, -1)$ a $(-1, -1, -1)$.

Vyjde nám $\nabla_x^2 L = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$ a dosadím konkrétní body: v $(0, 0, \frac{1}{2}$ vychází pozitivně definitní $\rightarrow$ je minimem, v $(-2, 0, \frac{3}{2})$ počítáme gradient $\nabla g(x, y) = (2x + 2, 2y)$, v bodě $(-2, 0)$ bude kolmý $(0, b)$, po vynásobení zjistíme, že vychází $5b^2$, takže tam je také lokální minimum. V bodě $(-1, 1, -1)$ počítáme, dostáváme gradient $(0, 2)$, na ten jsou kolmé vektory $(a, 0)$, po dosazení dostáváme $-4a^2$, je zde lokální maximum. A finálně v bodě $(-1, -1, -1)$ dostáváme gradient $(0, -2)$, na ten jsou zase kolmé $(a, 0)$ a bude to opět lokální maximum.

Nerovnostní vazba: hledáme extrémy $f(x, y) = 2x^2 + y$ za podmínky $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$. Lagrangeova funkce se tentokrát bude jmenovat $L(x, y, \mu) = 2x^2 + y + \mu(x^2 + y^2 + 1)$, vazbu si tedy dělím na dva případy, kdy je to rovno nebo menší.

a) vazba neaktivní: $h(x, y) < 0, \mu = 0$, počítám tedy v podstatě pouze gradient funkce x. Platí $\nabla_x(x, y, \mu) = (4x + 2\mu x, 1 + 2\mu y)$, což zde nelze splnit.

b) vazba **aktivní**: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, gradient je stále $\nabla_x(x, y, \mu) = (4x + 2\mu x, 1 + 2\mu y)$, řešíme tedy soustavu těchto rovnic. To řeší body $(0, \pm 1, \pm \frac{1}{2})$ a také $(\pm \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}, -2)$. Hessova matice je $\nabla_{x,y}^2 L = \begin{pmatrix} 4 + 2\mu & 0 \\ 0 & 2\mu \end{pmatrix}$. Pro bod $(0, \pm 1, -\frac{1}{2})$ to vychází indefinitní, po spočítání gradientu $3a^2 > 0$, je to lokální maximum ..? Musíme zkontrolovat znaménko μ, což je zde **záporné** !!!, tedy **NENÍ**. Pro bod $(0, \pm 1, +\frac{1}{2}$ to už vychází pozitivně definitní a $\mu > 0$ a zde je opravdu lokální minimum.