

Domáci úkol 2P

Jindřich Kvita (kvi0029)

Úloha 1

Překupník nabízí ve svém internetovém obchodě respirátory od výrobce ze země Růžového draka. Z celkové produkce tohoto výrobce je 22 % respirátorů vadných (rozlepují se ve švech, odpadávají gumičky apod.). Pro opatrné zákazníky má překupník v nabídce testovací balíčky po 4 kusech respirátorů. Náhodnou veličinou X popíšeme počet respirátorů v testovacím balíčku, které nemají žádnou vadu.

- a. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny. Pravděpodobnostní funkci zapište do tabulky a distribuční funkci zadejte předpisem.

Pravděpodobnostní funkce:

lze vypočít pomocí: $C(4, x) \cdot 0,22^x \cdot 0,78^{(4-x)}$ kde za x dosadíme počet kusů, tj. Postupně 0-4. Číslo 0,78 je počet procent bez vady a 0,22 s vadou. Následně dostaneme pravděpodobnostní funkci dostaneme jako tabulku:

x	0	1	2	3	4	součet
$P(X = x)$	0.370	0.418	0.177	0.033	0.002	1

Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty; 0) \\ 0.37 & x \in (0; 1) \\ 0.788 & x \in (1; 2) \\ 0.965 & x \in (2; 3) \\ 0.998 & x \in (3; 4) \\ 1 & x \in (4; \infty) \end{cases}$$

- b. Určete střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku náhodné veličiny X .

$$E(x) = 0 \cdot 0.370 + 1 \cdot 0.418 + 2 \cdot 0.177 + 3 \cdot 0.033 + 4 \cdot 0.002 = 0.88$$

$$E(x^2) = 0 \cdot 0.370 + 1^2 \cdot 0.418 + 2^2 \cdot 0.177 + 3^2 \cdot 0.033 + 4^2 \cdot 0.002 = 1.455$$

$$D(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 2.235$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} = 1.49505$$

Střední hodnota je 0.88, rozptyl 2.235, a směrodatná odchylka 1.495.

- c. Jaká je pravděpodobnost, že v testovacím balíčku je nejméně 1 respirátor vadný?

Díky předešlé otázce již víme pravdivostní hodnoty pro všechny hodnoty, tj stačí odečíst $P(0)$ od 1 a dostáváme pravděpodobnost 0.630.

Občas se nespokojený zákazník rozhodne pro reklamaci a (celý) balíček překupníkovi vrátí. Při vrácení balíčku v rámci reklamace překupník ztrácí 7 Kč na vadný vrácený respirátor. (S respirátory z vráceného balíčku, které jsou v pořádku, překupník ztráty nemá. Přidá je do jiných balení.)

- d. Vyjádřete ztrátu při reklamaci balíčku pomocí náhodné veličiny Z v závislosti na X . Určete střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku veličiny Z . Při výpočtu využijte vlastnosti střední hodnoty a rozptylu.

z	0Kč	7Kč	14Kč	21Kč	28Kč	součet
$P(X = x)$	0.370	0.418	0.177	0.033	0.002	1

díky vlastnostem směrodatné odchylky bude výpočet jen vynásobením předešlého výsledku směrodatné odchylky číslem 7=>

$$E(x) = 0.88 \cdot 7 = 6.16 \quad D(x) = 2.235 \cdot 7^2 = 109.515 \quad \sigma_x = \sqrt{D(x)} = 10.465$$

- e. Určete modus veličiny Z . Hodnotu interpretujte.

Dle pravděpodobnostní tabulky je nejčastěji vyskytující se hodnota (tj modus) hodnota 7Kč, z toho vyplývá, že s největší pravděpodobností přijde prodejce o 7Kč

Úloha 2

Spojitá náhodná veličina X je popsána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -2 \\ c(x - \frac{x^2}{2} + 4) & \text{pro } -2 < x \leq 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

a. Určete hodnotu konstanty c a запиšte $F(x)$ po dosazení za konstantu c

$$c(x - \frac{x^2}{2} + 4)' = c(1 - x)$$

Derivací distribuční funkce $F(x)$ získáme funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ c(1 - x) & -2 < x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Protože obsah prostoru pod křivkou hustoty pravděpodobnosti musí být rovný 1, můžeme integrací a následným vyřešením rovnice získat hodnotu konstanty c .

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{(-2)^0}^0 c(1 - x) dx = 1$$

$$[c - xc]_{(-2)^0}^0 = 1$$

$$(c - (-2) \cdot c) - (c - 0 \cdot c) = 1$$

$$2c = 1$$

$$c = \frac{1}{2}$$

Hodnota konstanty c je $\frac{1}{2}$. Výsledný tvar funkce $F(x)$ je:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -2 \\ \frac{x - \frac{x^2}{2} + 4}{2} & \text{pro } -2 < x \leq 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

Dál jsem, bohužel, nestihl přepsat z papíru.

- b. Určete funkci hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ a načrtněte její graf.
- c. Vypočtěte pravděpodobnosti $P(-3 \leq X \leq -12)$ a $P(X > -12)$
- d. Vypočtěte číselné charakteristiky SNV X . ($E(X)=?$, $D(X)=?$, $X=?$)
- e. Určete 75% kvantil, $x_{0,75}=?$
- f. Pro SNV Y platí, že $Y=5X+2$. Vypočtěte pravděpodobnost $P(Y < -3)$.