

Domáci úkol 3P

Jindřich Kvita (kvi0029)

Úloha 1

Trenér delfínů ze zkušenosti ví, že jeho milovaný cvičený delfín provede úspěšně artistický kousek s pravděpodobností 0,83 (pokusy delfína o provedení artistického kousku lze považovat za nezávislé). Publiku je slíbeno, že artistický kousek delfína uvidí dvakrát (úspěšně provedené pokusy se mohou střídát s těmi neúspěšnými). Jakmile je úspěšně proveden artistický kousek podruhé, delfín si plave odpočinout a přichází na řadu lachtani.

- a) Jaký je očekávaný počet pokusů potřebných k provedení dvou úspěšných artistických kousků?

Zde se snažíme zjistit počet potřebných pokusů do druhého úspěchu. Na tuhle problematiku je vhodné použít negativně binomické pravděpodobnosti.

$$X \sim NBi(k; \pi)$$

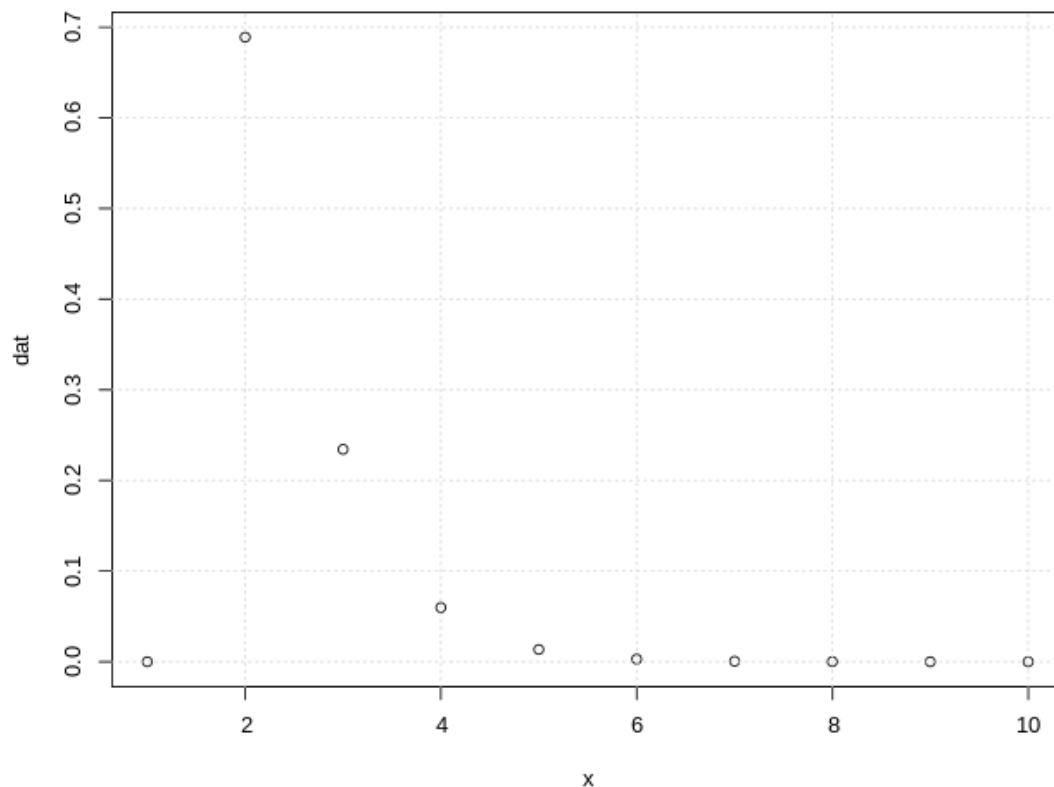
kde :

k = počet úspěchů

π = pravděpodobnost úspěchu

pak :

$$X \sim NBi(2; 0.83)$$



Dle grafu pravdivostní funkce vyplývá, že na 70% nám budou stačit 2 pokusy na splnění tohoto triku.

- b) Jaká je pravděpodobnost, že delfín bude muset pokus o artistický kousek opakovat více než třikrát, aby byl slib daný publiku splněn?

Zde se snažíme zjistit $P(X > 3)$ což vypočítáme jako $1 - P(X \leq 2)$ v R zápisu by se následně jednalo o `1-pnbinom(3-2, 2, 0.83)` Výsledkem je následně 0.076874

Pravděpodobnost, že bude potřebovat více, než tři pokusy, je 7.67%

- c) Jaká je pravděpodobnost, že delfín bude muset pokus o artistický kousek opakovat alespoň třikrát ale méně než šestkrát, aby byl slib daný publiku splněn?

Zde se snažíme zjistit $P(3 \leq X < 6)$ což se dá zapsat jako $P(X \leq 5) - P(X \leq 2)$ v R zápisu: `pnbinom(5-2, 2, 0.83) - pnbinom(3-2, 2, 0.83)`

Pravděpodobnost, že bude delfín potřebovat alespoň tři a nanejvýš 6 skoků je 7.32%

- d) Po vystoupení je trenér s delfínem na tréninku, kde jej nechá provést 10 pokusů o provedení artistického kousku. Jaká je pravděpodobnost, že z 10 pokusů bude alespoň polovina úspěšných?

Zde se jedná o pravděpodobnost $P(X > 5)$, což se dá přepsat jako $1 - P(X \leq 4)$. pak poslouží funkce `pbinom(4, 10, 0.83)`

Delfínovi se s pravděpodobností 99.73% povede více, než 5 skoků z 10.

Úloha 2

V populaci České republiky je 10 % obyvatel Rh negativní (Rh faktor pozitivní/negativní určuje společně se systémem krevních skupin AB0 typ krve člověka). V rámci experimentu pracujeme s 300 obyvateli malé vesničky, kde procentuální zastoupení Rh pozitivních/negativních odpovídá celorepublikovému údajům.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že mezi náhodně vybranými 100 lidmi z vesničky bude alespoň 85 lidí Rh pozitivní?

$$X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$$

$$N = 300$$

$$M = 300 \cdot 0.9$$

$$n = 100$$

v R zápisu by se jednalo o funkci `1-phyper(84, 300*0.9, 300-(300*0.9), 100)`

Pravděpodobnost, že ze 100 vybraných bude alespoň 85 Rh pozitivních, je 98,59%.

- b) Jaká je pravděpodobnost, že mezi náhodně vybranými 100 lidmi z vesničky bude alespoň 90 lidí Rh pozitivní, jestliže už 80 Rh pozitivních ve výběru je?

Zde se jedná o podmíněnou pravděpodobnost hypergeometrického rozdělení.

$$P(X \geq 90 | X \geq 80) = \frac{P(X \geq 90 \wedge X \geq 80)}{P(X \geq 80)}$$

$$\frac{P(X \geq 90)}{P(X \geq 80)} = \frac{1 - P(X \leq 89)}{1 - P(X \leq 79)}$$

pak při použití hypergeometrického rozdělení (`(1-phyper(89, 300 * 0.9, 300-(300 * 0.9), 100)) / (1-phyper(79, 300 * 0.9, 300-(300 * 0.9), 100))`) dostáváme výsledek 0.5875713.

Pravděpodobnost, že RH pozitivních bude právě maximálně 90, pokud jich je aspoň 80, je rovna 58.76%

- c) Jaká je pravděpodobnost, že mezi náhodně vybranými 100 lidmi bude alespoň 85 lidí Rh pozitivní, jestliže tentokrát vybíráme z celé populace ČR?

Zde se jedná o využití binomické věty.

$$X \sim Bi(n; \pi)$$

$$n = velikost_{bru}$$

$$\pi = pravdpodobnost_{pozitivity}$$

v R kódu by výpočet vypadal takto: `1-pbinom(84, 100, 0.9)`

Pravdděpodobnost, že Rh pozitivních bude aspoň 85 je 96.01%.

- d) Určete očekávaný počet Rh pozitivních ze 100 vybraných lidí, kteří byli náhodně vybráni z celé populace ČR.

Ze zadání: “V populaci České republiky je 10 % obyvatel Rh negativní”. Z tohoto tvrzení vyplývá, že očekávaný počet pozitivních bude 90.

Úloha 3

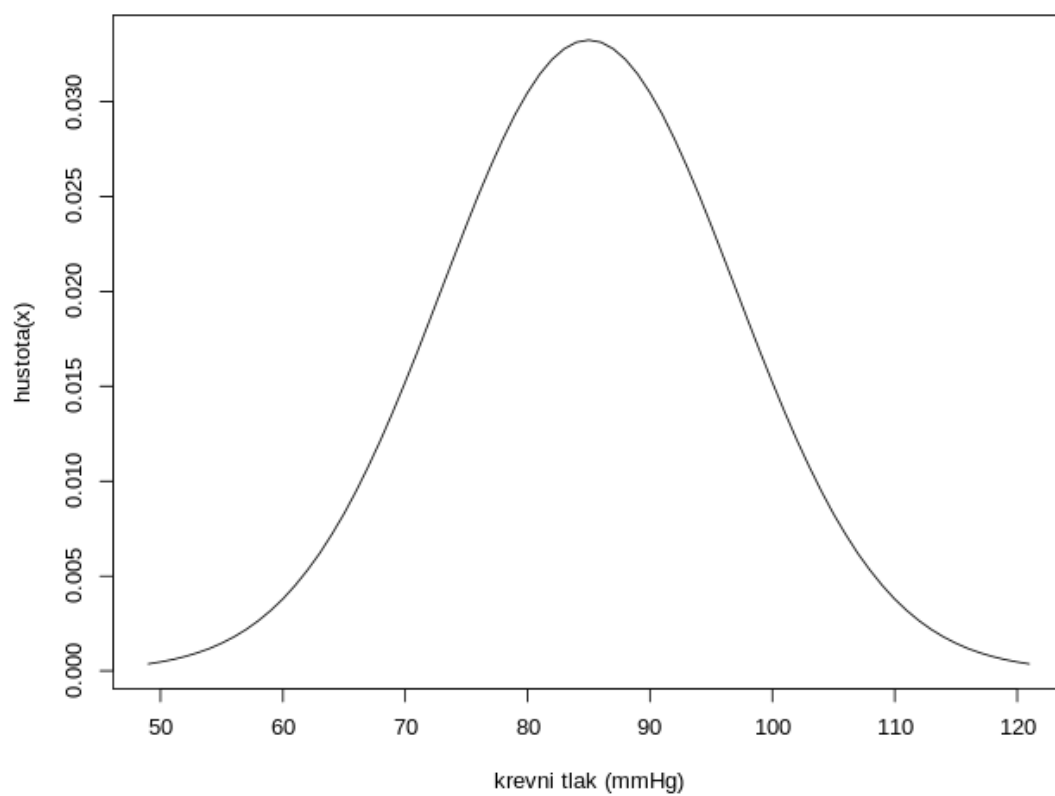
Při výzkumu bylo sledováno, zda a za jak dlouho od expozice nákazou se nemoc projeví. U probandů, u kterých se nemoc skutečně projevila, lze dobu od expozice do projevu nemoci (dny) modelovat Weibullovým rozdělením s parametrem měřítka 5 a parametrem tvaru 0,7.

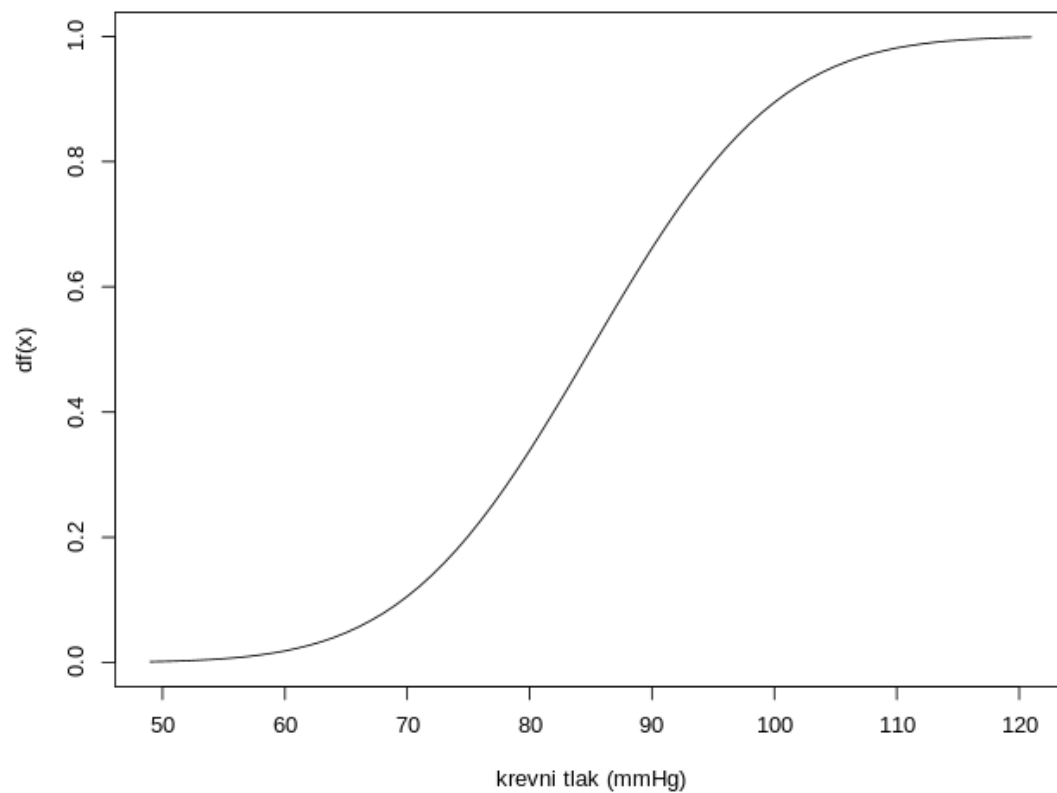
- a) Na základě uvedených parametrů rozdělení určete, zda je riziková funkce uvedené náhodné veličiny klesající, konstantní, nebo rostoucí. Rozhodnutí zdůvodněte.
- b) Jaká je pravděpodobnost, že se nemoc projeví po více než 4 dnech od expozice?
- c) Jaká doba od expozice do projevu nemoci bude překročena u 70 % pacientů?
- d) Uplynuly 2 dny od expozice bez projevu nemoci, jaká je pravděpodobnost, že se nemoc projeví během následujícího dne?

Úloha 4

Diastolický krevní tlak dospělých má normální rozdělení se střední hodnotou 85 mmHg a směrodatnou odchylkou 12 mmHg.

- a) Načrtněte hustotu pravděpodobnosti uvedené náhodné veličiny a její distribuční funkci.

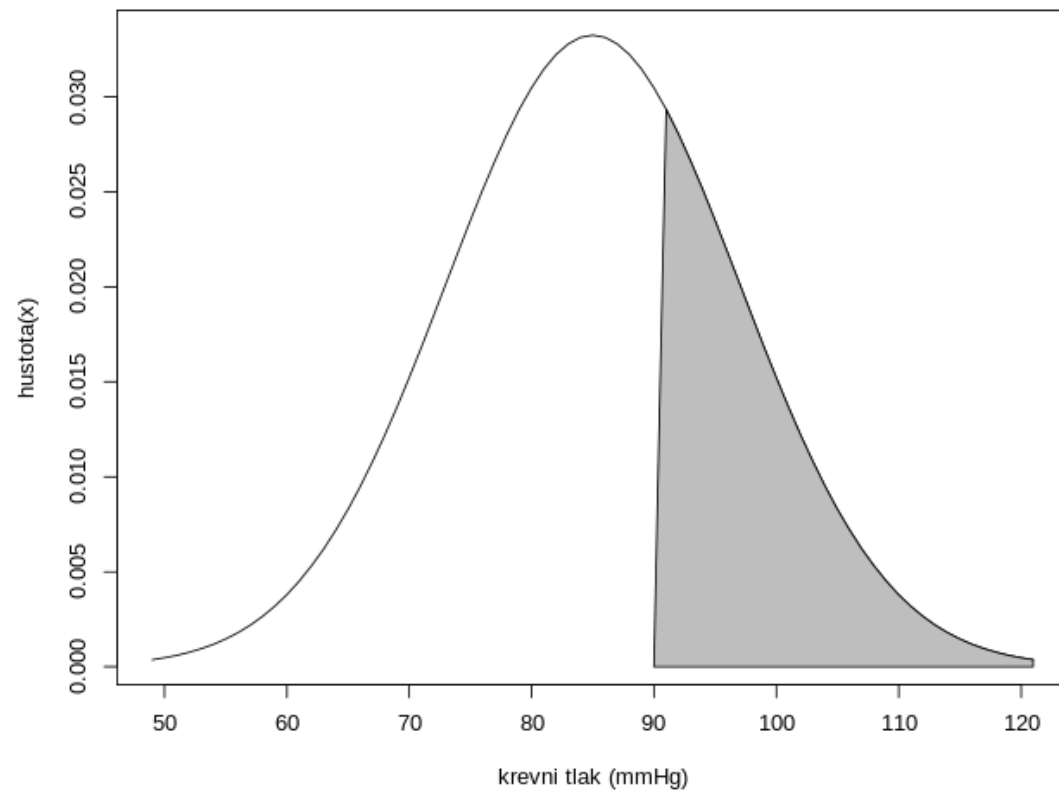




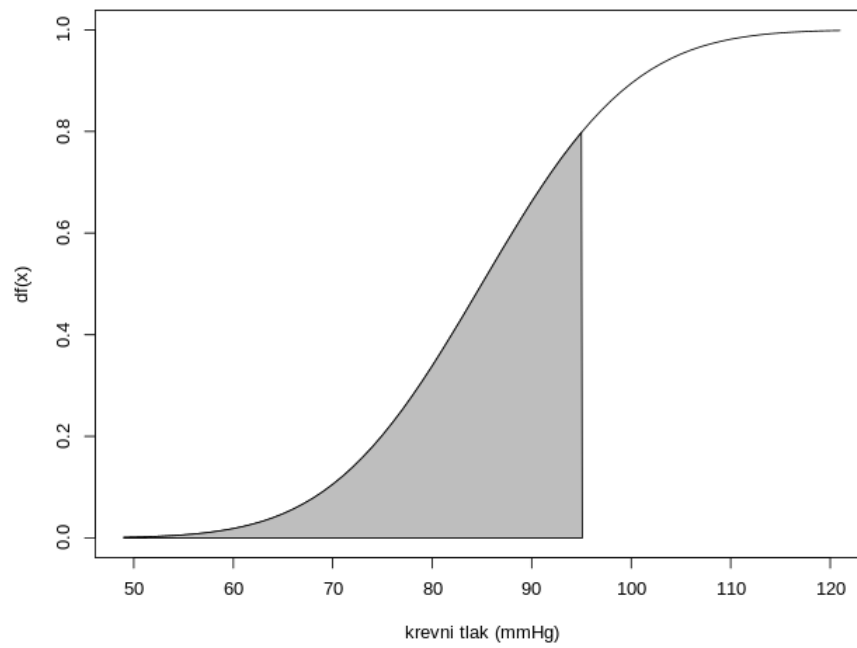
- b) Kolik procent dospělých má diastolický krevní tlak nad hranicí hypertenze 90 mmHg? Výsledek zaznačte do náčrtku hustoty pravděpodobnosti z bodu a).

Na vypočítání použijeme vzoreček $1 - \text{pnorm}(90, \text{mean} = 85, \text{sd}=12)$

Nad hranicí krevního tlaku 90 mmHg je 33.8% dospělé populace.



- c) Určete hodnotu 8. decilu uvedené náhodné veličiny. Zakreslete ji do náčrtku distribuční funkce z bodu a) a slovně ji interpretujte.



8. decil je roven 95.10 mmHg a odpovídá tlaku, který je vyšší než kolik má 80% dospělých jedinců.