push-relabel 算法的基本属性定义：

h：对每个结点，规定高度 $h: V \to N$，其中 $h(s)=|V|$，$h(t)=0$.

且若 $(u,v) \in E_f$，则规定这时必须满足 $h(u) \le h(v)+1$

e：在 push-relabel algorithm 中没有严格遵守流量守恒法则、

对于 $u \in V-\{s,t\}$ 定义：

$$e(u) = \sum_{v \in V} f(v,u) - \sum_{v \in V} f(u,v) \ge 0.$$

为超额流 若 $e(u)>0$ 则称 u 溢出。

三个基本步骤：

① push：若 $c_f(u,v)>0$ 且 $h(u)=h(v)+1$ 且 $e(u)>0$，显然 $e(u)$ 可

以按照边 $c_f(u,v)$ 推送成 $e(v)$

① 饱和推送：推送之后 $e(u)>0$　　对于 $c_f(u,v)$ 的饱和

② 非饱和推送：推送之后 $e(u)=0$.

② relabel：若 $e(u)>0$，且若 $c_f(u,v) \in E_f$，则 $h(u) \le h(v)$

则将 $h(u)$ 设为 $1+\min\{h(v), c_f(u,v) \in E_f\}$

即 $h(u) = 1+\min\{h(v) \mid c_f(u,v) \in E_f\}$.

③ 初始化

即沿着 s 的出边 push 一遍（这时不需要管那个 h）.

主流程：

初始化

看看有哪些点可以 push 或者 relabel

push 或者 relabel

没有可进行的操作，算法结束。

复杂度：若可以 $O(V)$ 进行 relabel，$O(1)$ 进行 push

$O(1)$ 找到可以进行的操作，那么总复杂度为 $O(V^2E)$。

正确性证明：

定理一：若对于 G，正确维护了 h 函数，则 G 中没有一条从 s 到 t 的路。

考虑反证法，假设存在一条从 s 到 t 的路径 p，则对于路径 p 中相邻结点，有 $h(p_i) \le h(p_{i+1})+1$ 考虑进行合并得到

$h(s) \le h(t) + |p|-1$ 且 $|p| \le |V|$ 与 $h(t)=0$，$h(s)=|V|$ 矛盾。

定理二：若 G 上无法进行 push 或 relabel 操作，那么对于 $V-\{s,t\}$ 中结点，

$e(u)=0$。

假设 $e(u)>0$，若 G_f 上存在 $(u,v)\in E_f$，则有 $h(u)\le h(v)+1$

若 push 适用于 u，

若不适用且 $h(u)\le h(v)$ 适用于 relabel。

定理三：由之前条件，

① G_f 中无增广路

② f 是最大流

③ $\exists f(S,T)$，s.t. $|f|=f(S,T)$。

且由定理一，得知结束时得到了最大流。

复杂度分析：

引理（前置高能）：在 G_f 中若 $e(u)>0$，则一定存在一条从 s 到 x 的路径。

考虑反证法：定义 $U=\{u \mid x \to u \text{ 在 } G_f \text{ 上}\}$。

在 U 上对映射 e 求和，得到

$$\sum_{u\in U} e(u) = \sum_{u\in U}\left(\sum_{v\in V} f(v,u) - \sum_{v\in V} f(u,v)\right)$$

$$\sum_{u\in U} e(u) = \sum_{u\in U}\left(\sum_{v\in V} f(v,u) - \sum_{v\in V} f(u,v)\right)$$

$$= \sum_{\substack{u\in U\\ v\in V}} f(v,u) - \sum_{\substack{u\in U\\ v\in V}} f(u,v) \qquad \text{由于 } V = U + \bar{U}$$

$$= \sum_{\substack{u\in \bar{V}\\ v\in V}} f(v,u) - \sum_{\substack{u\in \bar{U}\\ v\in V}} f(v,u) > 0$$

故一定有 $f(v,u)>0$, $v\in V$, $u\in \bar{V}$. 与U的定义矛盾, 故一定存在该路径.

下面考虑在整个算法中relabel执行的次数. 若要对u进行relabel, 则 $e(u)>0$, 则u到s有至少一条简单路径. 直接归纳即可得到 单个次数 $\leq 2|V|-1$

故总次数 $\leq |V|(2|V|-1)$

再考虑push操作的次数. 如上文所写, push操作分为两类, 一类是饱和push

另一类是非饱和push.

饱和push. 考虑一组反向边的饱和push次数. $u \rightleftarrows v$

每进行一次饱和push后必须进行一次relabel才可能再进行饱和push. 故这一对反向边push的总次数 ≤ 关键 relabel次数之和, +1

即 次数 $\leq 4|V|-1$ 故总次数 $\leq |E|(4|V|-1)$

非饱和push的次数, 需要使用势能函数. 定义势能函数为.

$$\Phi = \sum_{u\in\{e(u)>0\}} h(u)$$ 显然, relabel与饱和push均会使Φ变大.

现考虑一个Φ的上界.

对于relabel部分. $\leq |V|(2|V|-1)$

对于饱和push部分 $\leq |E||V|(2|V|-1) \rightarrow$ push一次后会扩充集合.

下证对于非饱和push，每次至少会使 Φ 减少1、考虑沿 (u,v) 进行push，

则有 $(u,v)\in E_f$，故有 $h(u)\le h(v)+1$ 成立 即 $h(u)-1=h(v)$

且非饱和push会使 $\{\}\setminus\{u\}$，$\{\}+\{v\}$ 故 Φ 至少会减一

故非饱和push至多会进行 $|V|(2|V|-1)+|E||V|(2|V|-1)$ 次

故总复杂度为 $O(n^2m)$ 即 $O(|V|^2|E|)$