(Der har været tre kursister om at skrive denne projektrapport)

TREKANTER

Indledning

Vi har valgt at bruge denne projektrapport til at udarbejde en oversigt over det mest grundlæggende materiale vi har arbejdet med.
Vi har prøvet at forklare og opstille en så simpel "formelsamling" som muligt, så vi kunne få en bedre forståelse af emnet.
Vi har gjort således at vi til at starte med har opstillet og tegnet forskellige trekanter som vi undervejs i rapporten henviser til og gør brug af.

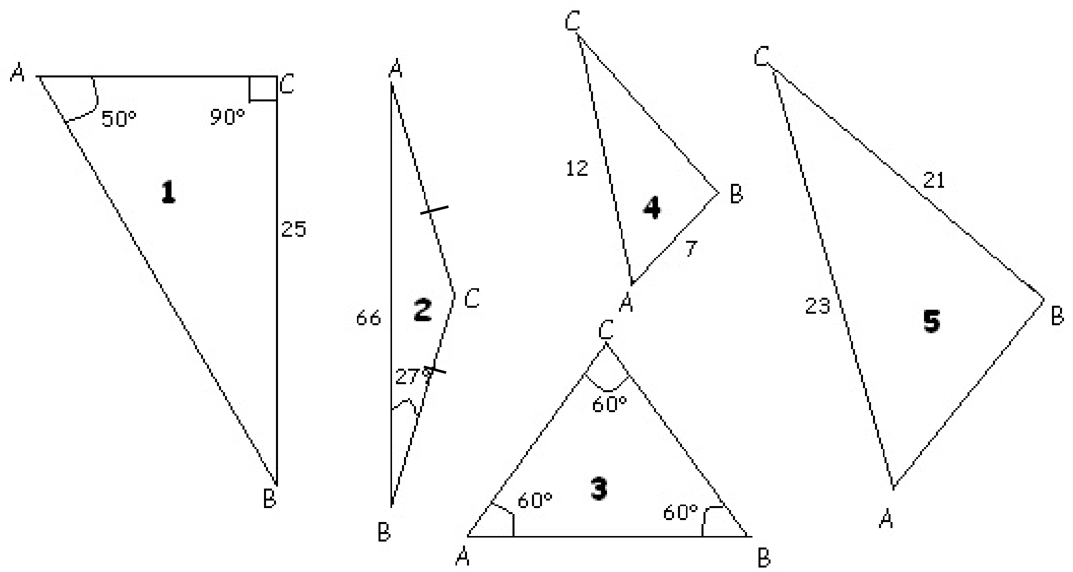
Vi vil i dette lærerige geometriprojekt komme nærmere ind på:

- trekantstyper
- vinkler og grader
- forklaring og brug af cosinus og sinus og tangens
- udregning med pythagoras
- bevis for pythagoras
- arealudregning
- forklaring om brugen af forstørrelsesfaktoren

Vores problemformulering for arbejdet har været tredelt. Vi har arbejdet på at besvare:

1. Hvordan regner man i retvinklede trekanter?
2. Hvordan kan man bevise Phytagoras' sætning?
3. Hvordan udregner man areal, og hvordan regner man med ensvinklede trekanter?

Typer af trekanter



Vi har herover tegnet nogle eksempler på forskellige trekanter for bedre at kunne forklare hvilken trekant vi bruger i vores eksempler. Vi vil så i løbet af rapporten henvise til de enkelte figurer.

Trekant 1	Er en retvinklet trekant, da vinkel *C* er 90 grader. Det er udelukkende i retvinklede trekanter, man kan bruge Pythagoras' sætning. Og det er ligeledes kun i de rette trekanter, at siderne hedder henholdsvis hypotenuse og kateter.
Trekant 2	Er en ligebenet trekant - siderne *AC* og *BC* er lige lange (de to små streger viser det.
Trekant 3	Er en ligesidet trekant, da alle tre sider er lige lange. I disse trekanter er hver enkelt vinkel altid 60 grader.
Trekant 4 + 5	Er ensvinklede trekanter, da alle deres vinkler er lige store. Men i forskellige størrelsesforhold.

En *ret* vinkel er når vinklen er *præcis* 90 grader. Tag fx vinkel *C* i figur 1.

En *spids* vinkel er når vinklen er *mindre* end 90 grader. Tag fx vinkel B i figur 2.

En *stump* vinkel er når vinklen er mellem 90 og 180 grader. Tag fx vinkel *C* i figur 2.

Generelt for alle trekanter er, at den totale vinkelsum i en trekant altid er 180 grader.

Retvinklede trekanter

Man kan udregne de forskellige sider og vinkler i en retvinklet trekant ved hjælp af:

- **Pythagoras sætning:**

  $$\textbf{hypotenusen}^2 = \textbf{den ene katete}^2 + \textbf{den anden katete}^2$$

  Ved hjælp af denne formel kan man altid udregne en hvilken som helst af siderne, hvis bare man har målene på de to andre sider i trekanten.

- ***Cosinus*: cos(vinkel)** $= \dfrac{\textbf{hosliggende katete}}{\textbf{hypotenusen}}$

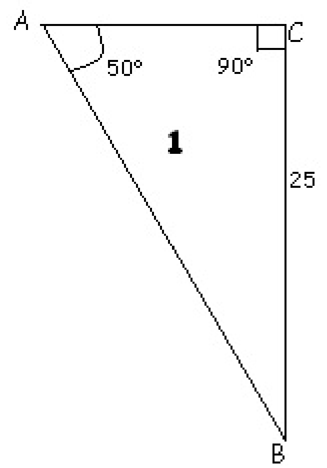
- ***Sinus*: sin(vinkel)** $= \dfrac{\textbf{modstående katete}}{\textbf{hypotenusen}}$

- ***Tangens*: tan(vinkel)** $= \dfrac{\textbf{modstående katete}}{\textbf{hosliggende katete}}$

Ved hjælp af disse tre formler kan man udregne enten vinkler eller siderne i en trekant, og vi vil nu komme med nogle eksempler på de forskellige.

Eksempel:
Her har vi brugt trekant 1 som model til at vise hvordan man bruger sinus samt Pythagoras:

Til at starte med udregner vi den manglende side AB ved hjælp af sinus.
Vi vælger sinus fordi vi har fået oplyst graden på vinkel A samt længden på den modstående katete, og vil så gerne finde længden på hypotenusen:



Udregning af længden af siden AB (hypotenusen):

$\sin(50°) = \frac{25}{AB}$

Vi ganger nu med AB på begge sider af lighedstegnet:

$AB \cdot \sin(50°) = \frac{25}{AB} \cdot AB$

De to AB går op nu op med hinanden dvs.:

$AB \cdot \sin(50°) = 25$

Og vi kan nu isolere AB:

$AB = \frac{25}{\sin(50°)}$

$\boldsymbol{AB = 32,64}$

Vi har nu længden på de to sider og kan så nu bruge Pythagoras til at udregne længden af den sidste katete.

Udregning af længden af siden AC:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$ dvs. $32{,}64^2 = AC^2 + 25^2$

Skal udregnes som ligning, og derfor flytter vi over på den anden side af lighedstegnet:

$32{,}64^2 - 25^2 = AC^2$

$440{,}3596 = AC^2$

Vi har nu længden af siden AC ophævet i anden, og for at få tallet selv tager vi kvadratroden af resultatet fra før:

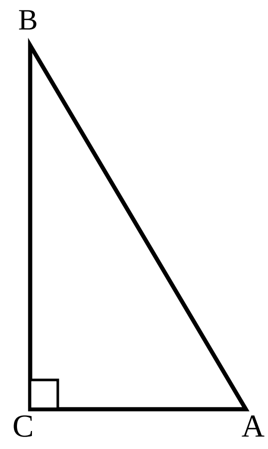
$AC = \sqrt{440{,}3696}$ dvs. $\boldsymbol{AC = 20,98}$

Udregning af vinkel B:

Fordi vi har to vinkler oplyst, kan vi let udregne den tredje vinkel:

$\angle B = 180° - 90° - 50° = \mathbf{40°}$

Bevis for Pythagoras sætning



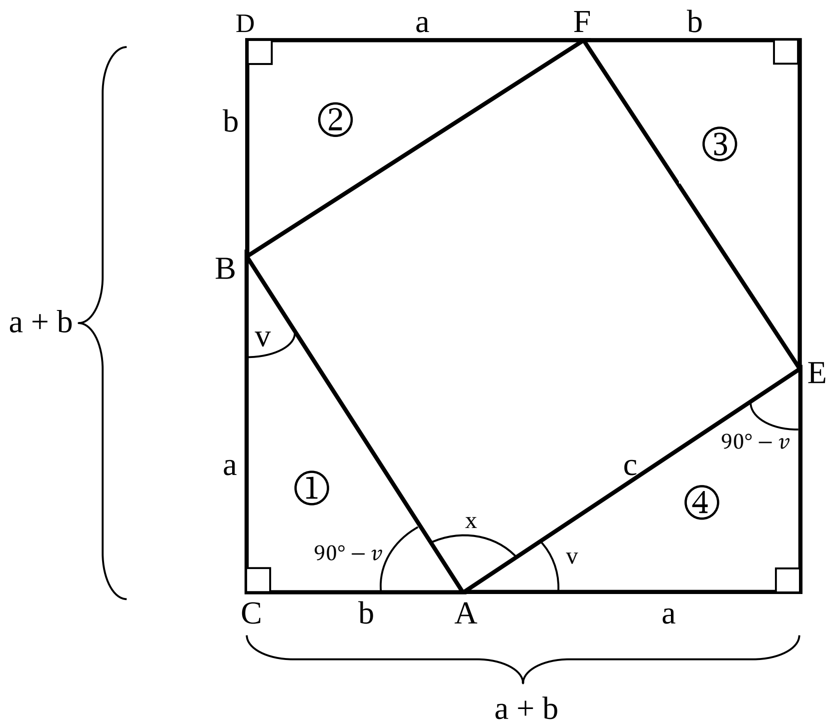
- Vi starter med at have en retvinklet trekant.
- Vi sætter den så sammen med tre trekanter, med nøjagtig samme mål, og vi får så et kvadrat (se tegningen nedenfor).
- Grunden til at vi ved at det er et kvadrat er fordi at alle siderne er lige lange og alle indeholder siderne a + b.

Vi ved at vinkel C i trekant 1 er 90 grader, altså er den ret. Vi kalder den anden vinkel for v, og så må den sidste vinkel (vinkel A) være 90° - v (fordi vi ved at vinkel summen i en trekant altid er 180 grader).

Når vi lægger fire ens retvinklede trekanter op med skiftevis side a og b, skabes derved både en "ydre" firkant og en "indre" firkant.

Den "ydre" firkant er et kvadrat fordi den samme rette længde går igen pga. de fire retvinklede trekanter.

Den "indre" firkant er et kvadrat fordi de sammenstødende trekanters spidser skaber en vinkel på 90 grader.



For at udregne arealet af det store kvadrat ganger vi den ene side af kvadratet med den anden.
dvs.: $(a + b) \cdot (a + b)$
Hvis vi ganger parenteserne sammen, får vi (vi skal gange alle led med hinanden):

$$a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b$$

Det regner vi sammen til:

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

- Nu vil vi udregne det samme areal - bare på en anden måde. Det gør vi ved at udregne arealet af det lille kvadrat, samt arealerne af de fire trekanter:

  Arealet af de fire trekanter udregnes ved at sige:

  $$4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b\right) = 2ab$$

  (Vi ved jo at et areal på én trekant er = $\frac{1}{2} \cdot højde \cdot grundlinje$)

  Arealet af det lille kvadrat:

  $$c \cdot c = c^2$$

  Altså ligger vi de to resultater sammen og får så arealet af det store kvadrat:

  $$2ab + c^2$$

- Vi har nu udregnet arealet af det store kvadrat på to forskellige måder, men

  resultaterne er ens, dvs.:

  $$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 2ab + c^2$$

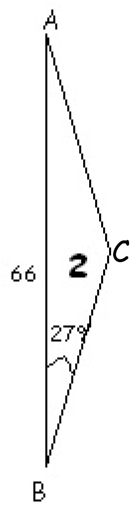
  Dvs.:

  $$a^2 + b^2 = c^2$$

  Altså har vi nu bevist Pythagoras sætning! ☺

Areal-udregning

Vi vil i vores næste forsøg prøve at vise, hvordan man kan regne arealet ud for en trekant, hvor vi kun ved den ene vinkels grader, og den ene sides længde. Vi bruger i dette eksempel trekant 2.



Arealet af en trekant finder vi således: ***½ højde x grundlinjen.***

For at finde højden i trekanten bliver vi nødt til at finde de sidste vinkler og siders mål.
Vi ved at trekanten er ligebenet, og derfor er vinkel B og vinkel A ens. Og vi ved at den totale vinkelsum er $180°$.
Derfor: $27° + 27° = 54°$
Og for at finde den sidste vinkel (vinkel C) siger vi: $180° - 54° = 126°$
Nu har vi fundet alle vinklerne, så mangler vi bare de sidste to sider.

For at finde længderne af siderne AC og BC (ved hjælp af Pythagoras) bliver vi nødt til at dele trekanten i to. Det gør vi ved at lave en streg fra vinkel C, som skal stå vinkelret på siden AB. Så får vi to identiske retvinklede trekanter.
Og længden af siden AB deles i to – vi kalder punktet for D.

Den nye vinkel vi får herefter, kan vi betegne for ∠ACD, og vi udregner:

$$\angle ACD = 180° - 90° - 27° = 63°$$

Ved hjælp af **Pythagoras** (som vi tidligere har forklaret) kan vi nu beregne længderne af AC og CD (som jo også er højden).

Vi kan se at længden af siden AD er halvdelen af længden af AB, altså 33.

$$|AC| = \frac{33}{\sin(63°)} = 37{,}04$$

$$|CD| = 37{,}04 \cdot \cos(63°) = 16{,}81$$

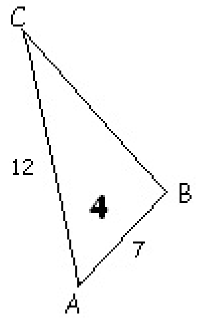
Som tidligere skrevet, beregner vi arealet ved at ved at **gange ½ højde med grundlinjen.**

Areal af trekant ABC $= \frac{1}{2} \cdot 16{,}81 \cdot 66 = \mathbf{554,7}$

Ensvinklede trekanter

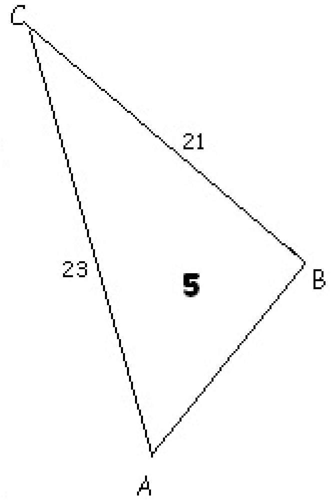
Forstørrelsesfaktoren

Vi vil klargøre for hvordan man regner de ubekendte sider ud på trekant 4 og 5 ved hjælp af forstørrelsesfaktoren.



Trekant 4 og 5 er ensvinklede.
På trekant 4 har vi fået oplyst to af sidernes længde; 12 og 7
På trekant 5 har vi også fået oplyst to af sidernes længde: 21 og 23.

Vi mangler at finde to sider, to forskellige sider på de respektive trekanter.



For at finde forstørrelsesfaktoren (F) dividerer vi de to længder på de "ens" sider i trekanterne 4 og 5 som vi har fået oplyst.

$$F = \frac{23}{12} = 1{,}9$$

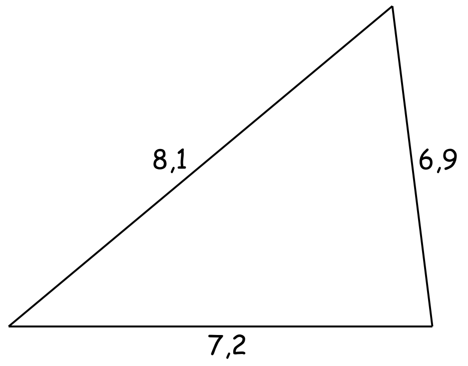
Så har vi forstørrelsesfaktoren og kan nu regne videre med den. Den manglende sidelængde i trekant 4, |BC|, finder vi ved at gange den tilsvarende side på trekant 5 med forstørrelsesfaktoren:

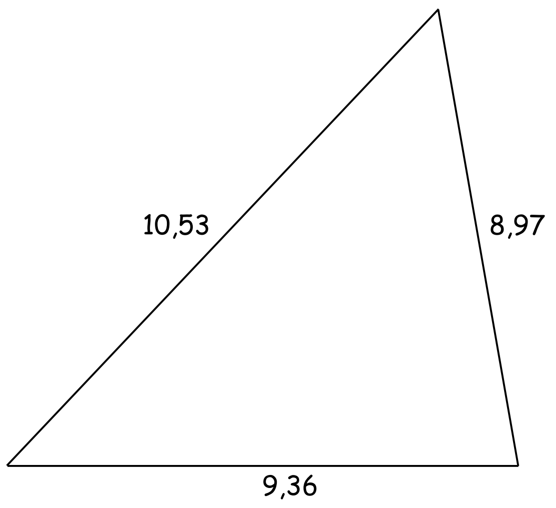
$$|BC| = 7 \cdot 1{,}9 = 13{,}3$$

Den manglende sidelængde i trekant 5, |AB|, regner vi ud ved at dividere den tilsvarende side på trekant 4 med forstørrelsesfaktoren

$$|AB| = \frac{21}{1{,}9} = 11{,}1$$

At forstørre et objekt (fx en trekant) med en vis procentdel





I dette eksempel vil vi forstørre med 30%.
For at forstørre ovenstående trekant bruger vi forstørrelsesfaktoren som vi kender den fra procentregning også kaldet fremskrivningsfaktoren.
Dvs. 1 + 0,30 = 1,30, og denne formel ganger vi med sidelængderne:

$$8{,}1 \cdot 1{,}3 = 10{,}53$$
$$6{,}9 \cdot 1{,}3 = 8{,}97$$
$$7{,}2 \cdot 1{,}3 = 9{,}36$$

Det samme gør vi hvis vi skal formindske med f.eks. 30%
Vi bruger samme trekant som eksempel. Denne gang bruger vi også forstørrelsesfaktoren/ "fremskrivningsfaktoren" men med omvendte fortegn.

Dvs. 1 - 0,30 = 0,70 og dette ganger vi også med de sider vi i forvejen har:

$$8{,}1 \cdot 0{,}70 = 5{,}67$$
$$6{,}9 \cdot 0{,}70 = 4{,}83$$
$$7{,}2 \cdot 0{,}70 = 5{,}04$$