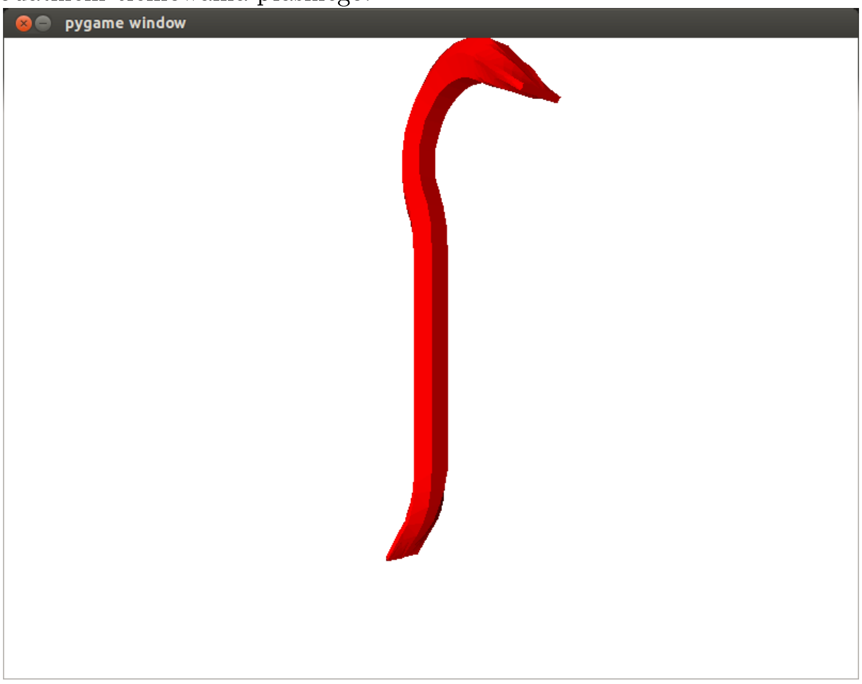
Grafika gier 3D od podstaw

Trójwymiarowe gry komputerowe już niemal od dwóch dekad rządzą się tymi samymi prawami. Spróbujemy zbudować minimalistyczny silnik 3D i zbadać podstawy jego działania.

1. Wprowadzenie

Tekst ten ma być tak prosty jak tylko to możliwe. Zarówno od strony programistycznej jak i matematycznej. W założeniu powinien być on zrozumiały dla bystrego dwunastolatka. Przynajmniej mam taką nadzieję.

W odróżnieniu od większości podobnych przewodników, skupimy się na podstawach, poczynając od pojedyńczych pikseli i trójkątów. Stworzymy całkowicie programowy silnik, bez pomocy OpenGL czy innych podobnych bibliotek. Ostatecznie będzie on wyświetlał ruchomy model łomu pobrany z pliku zewnętrznego z dodatkiem cieniowania płaskiego.



Nie będziemy się skupiać na operacjach na macierzach, tam gdzie nie jest to konieczne jak również nie będziemy zajmować się bardziej wymyślnymi rozwiązaniami w grafice 3D jak współrzędne jednorodne. Ludzie zajmujący się już tematyką grafiki 3D nie znajdą tutaj zapewne niczego ciekawago.

Całość powstanie w języku skryptowym Python. Wybór wydaje się mało sensowny dla silnika 3D, z uwagi na bardzo niską wydajność, ale przecież nie chodzi nam o wydajność a o prostotę i walory edukacyjne. Będziemy też unikać bardziej zaawansowanych elementów programowania jak klasy czy obiekty. Całość ma być zrozumiała nawet dla ludzi bez doświadczenia programistycznego, a kod ma się zamknąć w około 300 liniach i ma działać zarówno pod Linuksem jak i Windowsem.

Oprócz Pythona (użyłem wersji 2.7) wykorzystamy też bibliotekę PyGame, która pomoże nam wyłącznie w rysowaniu okna i wypełnianiu go pikseli. Python jest już zwykle domyślnie zainstalowany w większości dystrycucji, a PyGame można znaleźć w pakiecie *python-pygame*.

Po otwarciu konsoli i wpisaniu wywołaniu w niej Pythona, możemy zacząć eksperymentować widząc na bieżąco wyniki naszych prac:

```
$ python
Python 2.7.4 (default, Jul  5 2013, 08:21:57)  [GCC 4.7.3] on linux2 Type "help", "copy
>>>
```

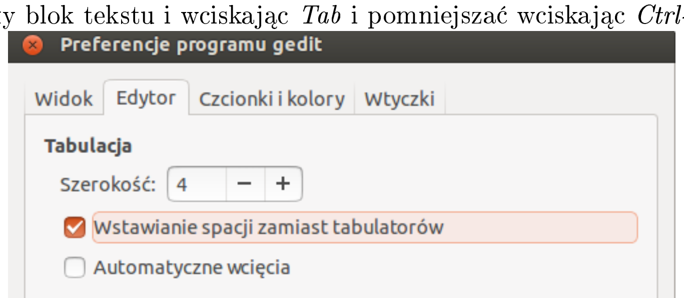
Wychodzimy z interpretera wciskając *Ctrl-D*. Możemy też zapisywać kod w plikać tekstowych i wywoływać je w następujący sposób:

```
$ python naszprogram.py
```

Na początek uruchomimy prosty program wyświetlający puste okno - umożliwi on sprawdzenie czy PyGame jest prawidłowo zainstalowane. Utwórzmy plik z rozszerzeniem *.py mający następującą treść:

```
import pygame

def main():

    xw = 800
    yw = 600
    screen = pygame.display.set_mode((xw, yw))

    running = True

    while running:
        for event in pygame.event.get(): #przerwanie petli
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False

main()
```

Warto zauważyć, że Python nie wykorzystuje nawiasów do zamykanie pętli (for, while), ani do instrukcji warunkowych (if). Jest za to wrażliwy na wcięcia. Proponuję używać czterech spacji jako wcięcia. Wiele edytorów tekstu ma też opcję umożliwiającą automatyczą konwersję tabulatorów na spacje. Poniżej ustawienia w edytorze *gedit*. Porada: wcięcia można powiększać zaznaczając cały blok tekstu i wciskając *Tab* i pomniejszać wciskając *Ctrl-Tab*.



Najważniejszą częścią powyższego programu jest pętla *while running:*, która będzie tak długo jak długo zmienna *running* będzie miała wartość *True* (prawda). To wewnątrz niej będziemy wpisywać nasz kod. Dalej jest widoczna druga pętla monitorująca zdarzenia pochodzące od okna:

```
for event in pygame.event.get(): #przerwanie petli
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False
```

Gdy wciśniemy "krzyżyk" by zamknąć okno, to zmiennej running zostanie przypisana wartość *False*, czyli fałsz. Wtedy główna pętla (*while running:*) zostanie przerwana, bo running nie będzie już prawdą, i program zakończony.

Omówmy sobie też najważniejsze linie programu:

import pygame stąd Python wie, że ma uwzględniać moduł PyGame,

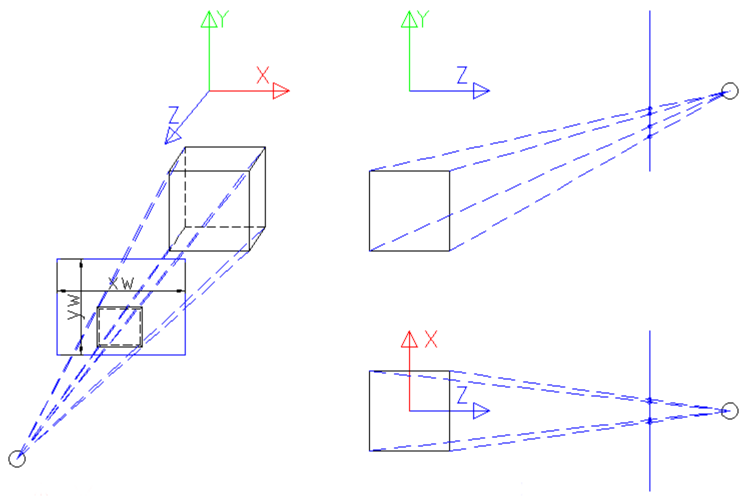
def main(): główna funkcja w programie, którą wywołujemy na końcu przez *main()*,

screen = pygame.display.set_mode((xw, yw)) korzystając z PyGame tworzymy okno o szerokości xw (tutaj 800 pikseli) i wysokości yw (600 pikseli).

2. Rzutowanie perspektywiczne

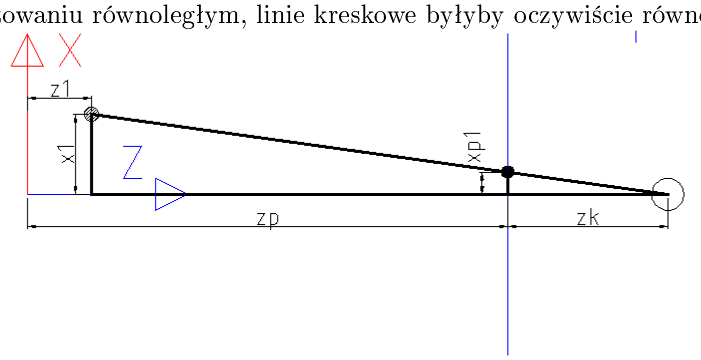
W grach stosowane jest rzutowanie perspektywiczne, odpowiadające rzeczywistości, gdzie dalsze obiekty wydają się mniejsze. W innych zastosowaniach, np. oprogramowanie CAD, można spotkać też rzutowanie równoległe, którym nie będziemy się tutaj zajmować.

Wyobraźmy sobie, że nie patrzymy na ekran komputera a na obiekt znajdujący się za oknem. Szyba tego okna jest odpowiednikiem naszego ekranu, którego nazywać też będziemy płaszczyzną rzutowania. Za oknem znajduje się kartonowe pudło. Bierzemy flamaster do ręki i zaczynamy zaznaczać na szybie punkty tak aby się pokrywały z wierzchołkami (narożnikami) pudła. Potem łączymy liniami narysowane punkty i ostatecznie zamalowujemy obszary zamknięte przez te linie. Właśnie utworzyliśmy na szybie rzut perspektywiczny naszego obiektu 3D (pudła).



Rysunek powyżej przedstawia taką sytuację. Widzimy tam nasz sześcian, obserwatora (czarny okrąg) i płaszyznę rzutowania (nasze okno) pod postacią niebieskiego prostokątu. Do tego wprowadzimy układ współrzędnych z X kierowanym w prawo, Y w górę i Z w kierunku obserwatora.

Po prawej stronie widzimy tę samą sytuację rozbitą na widoki: z boku (YZ) u z góry (XZ). Plaszczyzna rzutowania jest teraz widoczna jako niebieska linia, a w miejscu jej przecięcia z kreskowymi liniami, od obiektu do obserwatora, powstają rzutowane punkty. Tutaj ciekawostka, we wspominanym wcześniej rzutowaniu równoległym, linie kreskowe byłyby oczywiście równoległe.



Będziemy musieli, znając współrzędne x, y, z, wyliczyć współrzędne (nazwijmy je xp i yp) położenie projekcji punktu na ekranie. Przyjrzyjmy się rysunkowi powyżej odpowiadającemu na widok z góry na nasz "świat". Chcemy wyliczyć współrzędną poziomą projekcji xp1 mając współrzędne punktu w przestrzeni x1 i z1. Przyglądając się dokładniej możemy zobaczyć dwa trójkąty prostkątne. Jeden o przyprostokątnych zk i xp1, drugi o przyprostokątnych zp + zk - z1 oraz x1. Wyjaśniając: zp to odległość od środka układu współrzędnych do płaszczyzny rzutowania, zk to odległość od tej płasczyzny do obserwatora. Potrzebną wielkość xp1 można wyliczyć z proporcji dwóch trójkątów:

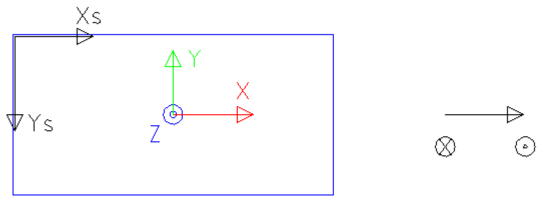
$xp1 = x1 \cdot \frac{zk}{zp+zk-z1}$

Analogicznie będzie dla wpółrzędnej y projekcji:

$yp1 = y1 \cdot \frac{zk}{zp+zk-z1}$

Zapiszemy to w naszym kodzie jako:

```
xp = zk * x /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla x-ów
yp = zk * y /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla y-ów
```



Trzeba ominąć jeszcze jedną pułapkę. Współrzędne okna (nazwane powyżej xs, ys) mają początek w lewym górnym narożniku i nie są spójne z wprowadzonym wcześniej układem. Trzeba dokonać konwersji, przy okazji mnożąc wartości przez jakąś skalę. Skala będzie mówić ilu pikselom ekranowym odpowiada jednostka w przestrzeni 3D.

$xps1 = \frac{xw}{2} + xp1 \cdot skala$

$yps1 = \frac{yw}{2} - yp1 \cdot skala$

W kodzie:

```
xps = int((xw / 2) + (xp * skala)) #wysrodkowanie, skalowanie oraz konwersja do liczby
yps = int((yw / 2) - (yp * skala)) #wysrodkowanie, skalowanie i odwrócenie y oraz konwe
```

Warto zwrócić uwagę na konwersję z liczby zmiennoprzecinkowej do całkowitej za pomocą *int()*. Położenie piksela musi być określone liczbami całkowitymi.

Wyświetlanie wierzchołków

Utwórzmy program wyświetlający projekcję wierzchołków sześcianu jak na powyższym zrzucie ekranu. Poniżej znajduje się pełny listing kodu.

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

import pygame, math, sys

def main():

    xw = 800
    yw = 600
    screen = pygame.display.set_mode((xw, yw))
    fizxw = 2.0 #"fizyczna" (w jednostach przestrzeni 3D) szerokość okna wid
    fov = math.radians(75) #określenie szerokości pola widzenia
    zp = 6.0 #odległość od środka układu współrzędnych do "ekranu"
    zk = fizxw / (2 * math.tan(fov / 2)) #odległość od "ekranu" do obserwato
    skala = int(xw / fizxw) #skala n pikseli na 1 jednostkę przestrzeni

    background_colour = (255,255,255)
    screen.fill(background_colour)

    p0 = (1.0, -3.0, 1.0) #punkt pierwszy - krotka, w odróżnieniu od listy n
    p1 = (1.0, -1.0, 1.0)
    p2 = (-1.0, -3.0, 1.0)
    p3 = (-1.0, -1.0, 1.0)
    p4 = (1.0, -3.0, -1.0)
    p5 = (1.0, -1.0, -1.0)
    p6 = (-1.0, -3.0, -1.0)
    p7 = (-1.0, -1.0, -1.0)

    chmura = (p0, p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7) #zebranie wszystkich krotek do

    running = True #start głównej pętli programu
    while running:
        screen.fill(background_colour) #czyszczenie klatki

        for i in range(0, len(chmura)): #pętla 8-elementowa, 0-7, bo ostatni
            print i
            punkt = chmura[i] #wybranie kolejnej krotki z nadrzędnej
            print punkt
            x = punkt[0] #wybrana pierwsza współrzedna
            y = punkt[1]
            z = punkt[2]
            xp = zk * x /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla x-ów
            yp = zk * y /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla y-ów
            xps = int((xw / 2) + (xp * skala)) #wyśrodkowanie, skalowanie or
            yps = int((yw / 2) - (yp * skala)) #wyśrodkowanie, skalowanie i
            print "x"+str(xps) #wypisanie wartości w konsoli
            print "y"+str(yps)
            screen.set_at((xps, yps), (0, 0, 0)) #narysowanie punktu w zadany
            pygame.draw.circle(screen, (0, 0, 0), (xps, yps), 10, 1) #obryso

        pygame.display.flip()
        for event in pygame.event.get(): #przerwanie pętli
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False

main()
```

Omówmy jego działanie krok po kroku. Najpierw wypełniony został cały ekran kolorem białym:

```
background_colour = (255,255,255)
screen.fill(background_colour)
```

Trzy następujące się liczby to składowe (liczby całkowite 0 - 255): kolor czerwony, zielony i niebieski.

Należało wprowadzić współrzędne (x, y, z) dla każdego z wierzchołków:

```
p0 = (1.0, -3.0, 1.0)
```

Są one reprezentowane za pomocą trzech liczb zmiennoprzecinkowych, Python liczbę „z przecinkiem" automatycznie traktuje jako zmiennoprzecinkową, zebranych do krotki. Krotka to struktura danych pozwalająca zbierać kilka zmiennych różnych typów (np. liczba całkowita, ciąg znaków), ale w odróżnieniu od listy nie może być modyfikowana po utworzeniu. Krotki w Pythonie zbudowane są z użyciem nawiasów okrągłych (), listy z użyciem nawiasów kwadratowych [].

Dalej zbieramy wszystkie wierzchołki od p0 do p7 w jedną wspólną krotkę nazwaną chmura:

```
chmura = (p0, p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7)
```

Tu warto wspomnieć, że wszystko można by zrobić w jednym przypisaniu:

```
chmura = ((1.0, -3.0, 1.0), (1.0, -1.0, 1.0), (-1.0, -3.0, 1.0), (-1.0, -1.0, 1.0), (1.
```

Wewnątrz głównej pętli programu tworzymy podrzędną, której każde przejście będzie odpowiadało za narysowaniu punktu piksela postałego w wyniku projekcji każdego kolejnego wierzchołka:

```
for i in range(0, len(chmura)):
    punkt = chmura[i]
    x = punkt[0]
    y = punkt[1]
    z = punkt[2]
```

len zwraca długość zmiennej, w tym przypadku, dla naszej krotki będzie to 8. Pętla zostanie wykonana dla *i* równego 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7. zobaczmy przypadek, gdy *i* równa się 3. Z krotki *chmura* zostanie wybrany czwarty element (bo są numerowane od 0, nie od 1), czyli czwarty wierzchołek, i zmienna punkt będzie wtedy równa (-1.0, -1.0, 1.0). Następnie kolejnym współrzędnym x, y, z, zostanie przypisamy pierwszy [0], drugi [1] i trzeci [2] element krotki *punkt*, czyli x = -1.0, y = 0.0, z = 1.0.

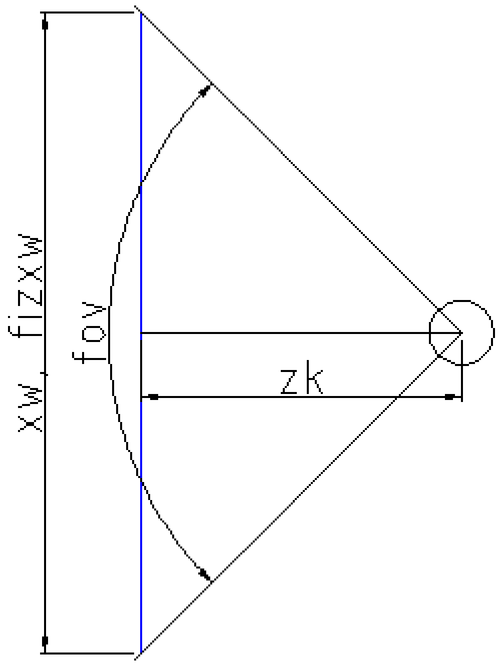
Dalej mamy wyliczenie projekcji, które zostało omówione wyżej. Przy okazji wypisuję wartości niektórych zmiennych do konsoli używając *print*. To nie jest konieczne, ale potrafi być przydatne, gdy program nie działa prawidłowo i szuka się błędu. Ostatecznie wstawiam czarny piksel w zaadanym miejscu:

```
screen.set_at((xps, yps), (0, 0, 0))
```

Oraz, już po wyjściu z pętli for, dokonuję wyświetlenia tego co narysowałem:

```
pygame.display.flip()
```

Przy okazji pojawił się kod rysujący okręgi - tak wysokopoziomowe funkcje nie będą nam ostatecznie potrzebne. Tutaj został tylko wykorzystany by położenie wierzchołków było lepiej widoczne.



Dodatkowo, na początku programu wprowadziłem odległość (zk) obserwator - płaszczyzna rzutowania zależną od kąta widzenia (fov):

```
fov = math.radians(75)
zk = fizxw / (2 * math.tan(fov / 2))
```

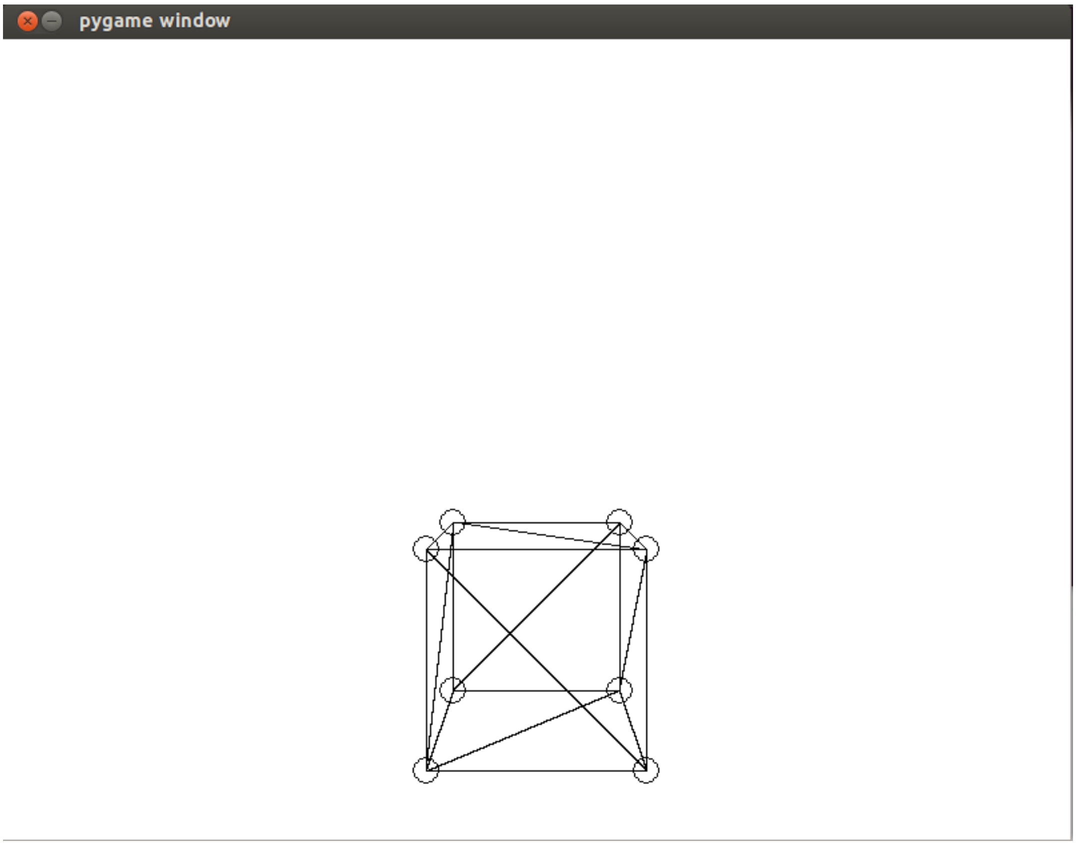
Pierwsza linia to konwersja ze stopni na, używane przez Pythona, radiany. Drugą można wyprowdzić z wykorzystaniem odrobiny trygonometrii:

$\frac{0{,}5 \cdot fizxw}{zk} = \tan\left(\frac{fov}{2}\right)$

$0,5 \cdot fizxw = zk \cdot \tan\left(\frac{fov}{2}\right)$

$zk = \frac{0{,}5 \cdot fizxw}{\tan\left(\frac{fov}{2}\right)} = \frac{fizxw}{2 \cdot \tan\left(\frac{fov}{2}\right)}$

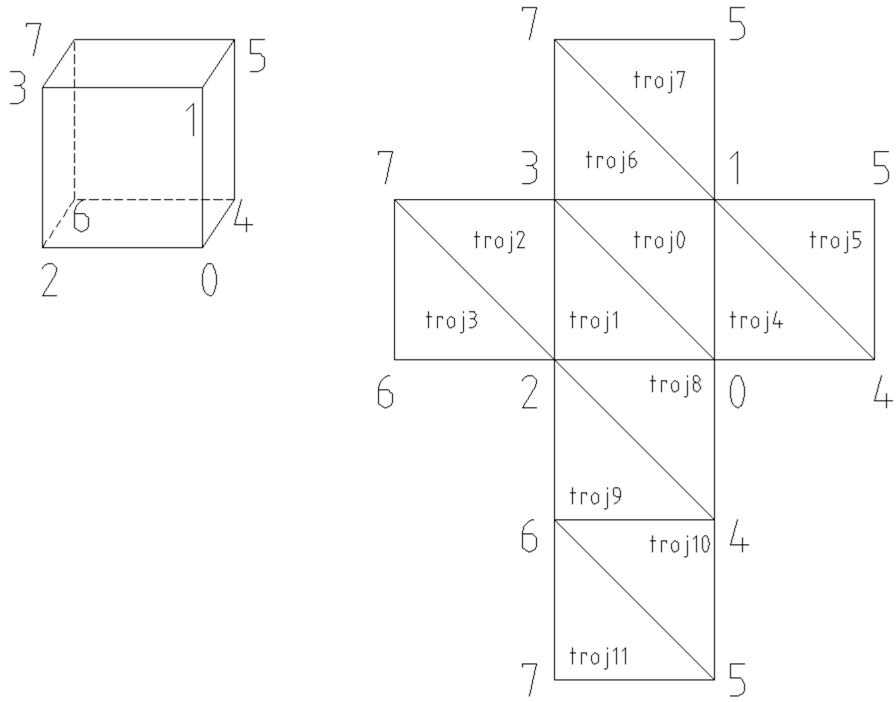
Model drutowy, trójkąty




```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

import pygame, math, sys

def main():

    xw = 800
    yw = 600
    screen = pygame.display.set_mode((xw, yw))
    fizxw = 2.0 #"fizyczna" (w jednostach przestrzeni 3D) szerokość okna widzen
    fov = math.radians(75) #określenie szerokości pola widzenia
    zp = 6.0 #odległość od środka układu współrzędnych do "ekranu"
    zk = fizxw / (2 * math.tan(fov / 2)) #odległość od "ekranu" do obserwatora
    skala = int(xw / fizxw) #skala n pikseli na 1 jednostkę przestrzeni

    background_colour = (255,255,255)
    screen.fill(background_colour)

    p0 = (1.0, -3.0, 1.0) #punkt pierwszy - krotka, w odróżnieniu od listy niez
    p1 = (1.0, -1.0, 1.0)
    p2 = (-1.0, -3.0, 1.0)
    p3 = (-1.0, -1.0, 1.0)
    p4 = (1.0, -3.0, -1.0)
    p5 = (1.0, -1.0, -1.0)
    p6 = (-1.0, -3.0, -1.0)
    p7 = (-1.0, -1.0, -1.0)

    chmura = (p0, p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7) #zebranie wszystkich krotek do je
```

```
    troj0 = (0, 1, 3) #indeks wierzchołków wybranych z krotki "chmura, dal pier
    troj1 = (0, 3, 2)
    troj2 = (2, 3, 7)
    troj3 = (2, 7, 6)
    troj4 = (4, 1, 0)
    troj5 = (1, 4, 5)
    troj6 = (1, 7, 3)
    troj7 = (1, 5, 7)
    troj8 = (4, 0, 2)
    troj9 = (4, 2, 6)
    troj10 = (5, 4, 6)
    troj11 = (5, 6, 7) #na szesciobok potrzeba 12 trójkątów

    zbiortroj = (troj0, troj1, troj2, troj3, troj4, troj5, troj5, troj7, troj8,
#alternatywnie zbiortroj = ((0, 1, 3), (0, 2, 3), itd)

    running = True #start głównej pętli programu
    while running:
        screen.fill(background_colour) #czyszczenie klatki

        for tr in range(0, len(zbiortroj)): #pętla 12-elemetowa, 0-11, bo ostan
            trojkat = zbiortroj[tr]
            xps = [0, 0, 0] #tymczasowa lista punktów [] to listy, () to krotki
            yps = [0, 0, 0]
            for i in range (0, 3):
                numerpunktu = trojkat[i] #pobranie indeksu punktu, "zbiortroj"
                punkt = chmura[numerpunktu] #wybranie kolejnej krotki z krotki
                x = punkt[0] #wybrana pierwsza współrzedna
                y = punkt[1]
                z = punkt[2]
                xp = zk * x /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla x-ów
                yp = zk * y /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla y-ów
                xps[i] = int((xw / 2) + (xp * skala)) #wysrodkowanie, skalowani
                yps[i] = int((yw / 2) - (yp * skala)) #wysrodkowanie, skalowani
                screen.set_at((xps[i], yps[i]), (0, 0, 0)) #narysowanie punktu
                pygame.draw.circle(screen, (0, 0, 0), (xps[i], yps[i]), 10, 1)

            pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[0], yps[0]), (xps[1], yps[
            pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[1], yps[1]), (xps[2], yps[
            pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[2], yps[2]), (xps[0], yps[

        pygame.display.flip()
        for event in pygame.event.get(): #przerwanie pętli
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False

main()
```

Kolejnym etapem jest podział naszego sześcianu na wielokąty. Będą to najprostsze możliwe wielokąty, czyli trójkąty, co ułatwi nam pracy na póżniejszym etapie, gdy będziemy budować rasteryzer. Każda ściana sześcianu zostanie podzielona na dwa trójkąty.



Trójkąt zdefiniowany jest za pomocą trzech wierzchołków, ale zamiast ich współrzednych zostały zapisane pozycje w wcześniej zdefiniowanym zbiorze wierzchołków *chmura*:

```
troj0 = (0, 1, 3)
```

Według powyższego kodu, pierwszy trójkąt wykorzystuje wierzchołki o numerach 0, 1 i 3, czyli (1.0, -3.0, 1.0), (1.0, -1.0, 1.0) i (-1.0, -1.0, 1.0). Zrobiłem to w ten sposób, dlatego, że te same wierzchołki są wykorzystywane w wielu trójkątach. Mamy 12 trójkątów, każdy po 3 wierzchołki, co daje aż 36 wierchołków. Większość się pokrywa, dzięki czemu potrzebujemy tylko 8, nie 36.

Dla każdego trójkąta wykonywana jest następująca pętla:

```
for i in range (0, 3):
    numerpunktu = trojkat[i]
    punkt = chmura[numerpunktu]
    x = punkt[0]
    y = punkt[1]
    z = punkt[2]
```

Wewnątrz tej pętli, dla każdego z wierzchołków trójkąta, odczytywane są współrzędne x, y i z. Dodatkową różnicą w stosunku do poprzedniego kodu jest wprowadzenie trójelementowych list, które będą zapisywać położenie projekcji wszystkich trzech wierzchołków:

```
xps = [0, 0, 0]
yps = [0, 0, 0]
xps[i] = int((xw / 2) + (xp * skala))
yps[i] = int((yw / 2) - (yp * skala))
```

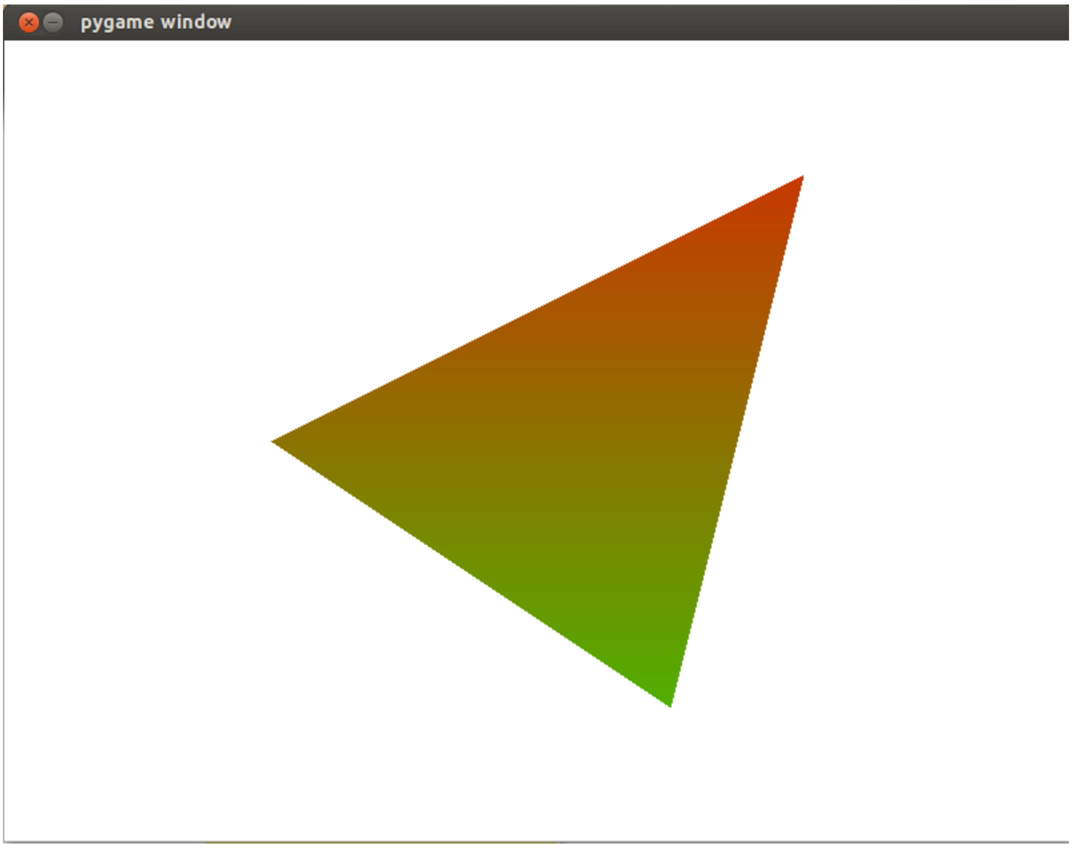
Listy te są odczytywane już po wyjściu z wyżej opisywanej pętli i wykorzystywane do rysowania krawędzi łączących wierzchołki trójkąta (0 z 1, 1 z 2, 2 z 0):

```
pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[0], yps[0]), (xps[1], yps[1]), 1)
pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[1], yps[1]), (xps[2], yps[2]), 1)
pygame.draw.line(screen, (0, 0, 0), (xps[2], yps[2]), (xps[0], yps[0]), 1)
```

Poszliśmy tu nieco na skróty wykorzystując wbudowaną funkcję PyGame. Silniki gier nie działały zwykle w ten sposób, a implementowały własne rasteryzatory linii, które składały linie z pojedyńczych pikseli. Przykładem może tu być algorytm Brasenhama.

3. Rasterizer trójkąta

Rasteryzacja pojedyńczego trójkąta

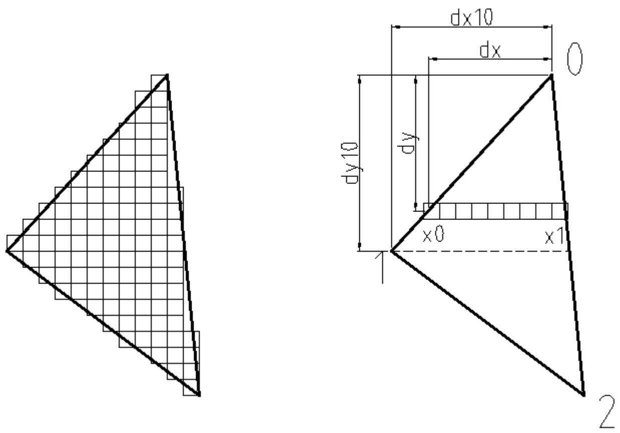



```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

import pygame, math, sys

def main():

    xw = 800
    yw = 600
    screen = pygame.display.set_mode((xw, yw))
    background_colour = (255,255,255)
    screen.fill(background_colour)

    running = True

    while running:
        xps0 = 600 #od lewej do prawej
        yps0 = 100 #z góry na dół
        zf0 = -10.0 #głębość Z w float

        xps1 = 200 #współrzedne wierzchołków trojkąta od najmwyzsze (najmniejsz
        yps1 = 300
```

```
        zf1 = -7.0
#        xps1 = 600
#        yps1 = 300

        xps2 = 500
        yps2 = 500
        zf2 = -4.0

        dx10 = xps1 - xps0
        dx21 = xps2 - xps1
        dx20 = xps2 - xps0
        dy10 = yps1 - yps0
        dy21 = yps2 - yps1
        dy20 = yps2 - yps0
        dzf10 = zf1 - zf0
        dzf21 = zf2 - zf1
        dzf20 = zf2 - zf0

        dwyp10 = math.sqrt(float(math.pow(dx10,2)+math.pow((dy10),2))) #początk
        dwyp21 = math.sqrt(float(math.pow(dx21,2)+math.pow((dy21),2)))
        dwyp20 = math.sqrt(float(math.pow(dx20,2)+math.pow((dy20),2)))

        zprop10 = dzf10 / dwyp10 #proporcja przesunięcia XY dla 10 do przesunie
        zprop21 = dzf21 / dwyp21
        zprop20 = dzf20 / dwyp20

#rasterizer buduje trójkąty z linii poziomych
        if ((float(dx10) / float(dy10)) < (float(dx20) / float(dy20))):#przypad
            for y in range(yps0, yps2):
                if y < yps1: #gdy jest się między 0 a 1
                    x0 = xps0 + (y-yps0) * dx10 / dy10
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                    dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps1 - x0,2)+math.pow((yps1
                    z0 = zf1 - dwyp * zprop10 #z każdym krokiem mniejsza odległ
                    dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2
                    z1 = zf2 - dwyp * zprop20

                else: #gdy jest się między 1 a 2
                    x0 = xps1 + (y-yps1) * dx21 / dy21
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                    dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2
                    z0 = zf2 - dwyp * zprop21
                    dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2
                    z1 = zf2 - dwyp * zprop20

                for x in range(x0, x1):
                    if x >=0 and x < xw and y >=0 and y < yw: #ograniczenie tyl
                        #screen.set_at((x, y), (0, 0, 0))
                        z = z1 - ((z1 - z0) / float(x1 - x0)) * float(x1 - x)


                        screen.set_at((x, y), (int(abs(z * 20)), 255 - int(abs(
        else:
            for y in range(yps0, yps2):
                if y < yps1: #gdy jest się między 0 a 1
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx10 / dy10 #zamiana początku z konc
                    x0 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                    dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps1 - x1,2)+math.pow((yps1
                    z1 = zf1 - dwyp * zprop10 #z każdym krokiem mniejsza odległ
```

```
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2
                z0 = zf2 - dwyp * zprop20

            else: #gdy jest się między 1 a 2
                x1 = xps1 + (y-yps1) * dx21 / dy21
                x0 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2
                z1 = zf2 - dwyp * zprop21
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2
                z0 = zf2 - dwyp * zprop20
            for x in range(x0, x1):
                if x >=0 and x < xw and y >=0 and y < yw: #ograniczenie tyl
                    #screen.set_at((x, y), (0, 0, 0))
                    z = z1 - ((z1 - z0) / float(x1 - x0)) * float(x1 - x)

                    screen.set_at((x, y), (int(abs(z * 20)), 255 - int(abs(


        for event in pygame.event.get(): #przerwanie pętli
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False

        pygame.display.flip()

main()
```

Mając projekcje wierzchołków trójkąta musimy wypełnić jego obszar pikselami. Proces ten nazywa się rasteryzacją i polega na przedstawieniu figury płaskiej za pomocą skończonej liczby elementów (pikseli). Napiszmy prosty program do rateryzacji pojedyńczego trójkąta.



Będziemy składać trójkąty z poziomych odcinków rysowanych w kolejności od góry do dołu ekranu. Każdy z tych odcinków zbudowany jest z pikseli wstawianych od lewej (punkt *x0*) do prawej (punkt *x1*).

Zakładamy, że wierzchołki „0“, „1“ i „2“ są numerowane od góry. Trójkąt należy podzielić na dwa mniejsze za pomocą poziomemej linii (kreskowa na rysunku) przechodzącej przez wierzchołek „1“.

Górny trójkąt:

Wyliczamy *x0* znajdujące się na linii 0-1 oraz *x1* znajdujące się na linii 0-2:

```
x0 = xps0 + (y-yps0) * dx10 / dy10
x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
```

y jest znane i w pierwszym kroku równe *yps0*, czyli współrzędnej wierzchołka „*0*“. Z każdym przejściem *y* zostaje zwiększone o 1, co odpowiada kolejnemu (położonemu niżej) odcinkowi.

Podobny proces będzie zachodził dla dolnego trójkąta:

Wyliczamy *x0* znajdujące się na linii 1-2 oraz *x1* znajdujące się na linii 0-2:

```
x0 = xps1 + (y-yps1) * dx21 / dy21
x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
```

Ostatnią częścią jest narysowanie pikseli z których zbudowany jest poziomy odcinek (druga linia sprawdza też czy punkt znajduje się w obszarze ekranu):

```
for x in range(x0, x1):
    if x >=0 and x < xw and y >=0 and y < yw:
        screen.set_at((x, y), (0, 0, 0))
```

Pozostaje jeszcze jeden problem, a mianowicie współrzędna *z*. Nie przejmowaliśmy się nią przy modelu drutowym, ale teraz, gdy wypełnianiane są całe powierzchnie musimy sprawdzać ich głębokość. Ostatecznie będziemy wyświetlać tylko te piksele, które odpowiadają punktom znajduącym się najbliżej obserwatora.

Załóżmy, że chcemy wyliczyć współrzędną *z0* punktu znajdującego się na odcinku między wierzchołkami „0“ i „1“. Mamy współrzędne wierzchołka „0“, czyli (xps0, yps0 i zf0), współrzedne wierzchołka 1 (xps1, yps1 i zf1), odległości wzdłuż osi x i y między tymi wierzchołkami (dx10 i dy20) oraz dwie współrzędne naszego punktu (x0 i y). Za znalezienie z0 odpowiada:

```
dzf10 = zf1 - zf0
dwyp10 = math.sqrt(float(math.pow(dx10,2)+math.pow((dy10),2)))
zprop10 = dzf10 / dwyp10
dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps1 - x0,2)+math.pow((yps1 - y),2)))
z0 = zf1 - dwyp * zprop10
```

Co jest zapisem równania:

$$z0 = zf1 - \sqrt{(xps1 - x0)^2 + (yps1 - y)^2} \cdot \frac{zf1 - zf0}{\sqrt{dx10^2 + dy20^2}}$$

Lub inaczej:

$$z0 = zf1 - \frac{\sqrt{(xps1-x0)^2 + (yps1-y)^2}}{\sqrt{dx10^2 + dy20^2}} \cdot (zf1 - zf0)$$

gdzie:

$\sqrt{dx10^2 + dy20^2}$ to odległość między wierzchołkami „0“ i „1“ na płaszczyźnie XY

$\sqrt{(xps1 - x0)^2 + (yps1 - y)^2}$ odległość od wierzchołka „1“ punktu, którego współrzędnej z0 szukamy.

Wyliczając w ten sam sposób z1, możemy poznać współrzędną z dla każdego punktu poziomego odcinka, dla którego znamy x i y:

```
z = z1 - ((z1 - z0) / float(x1 - x0)) * float(x1 - x)
```

Nasz przykładowy program zmienia kolor piksela w zależoności od współrzędnej z punktu, któremu ten piksel odpowiada:

```
screen.set_at((x, y), (int(abs(z * 20)), 255 - int(abs(z * 20)), 0))
```

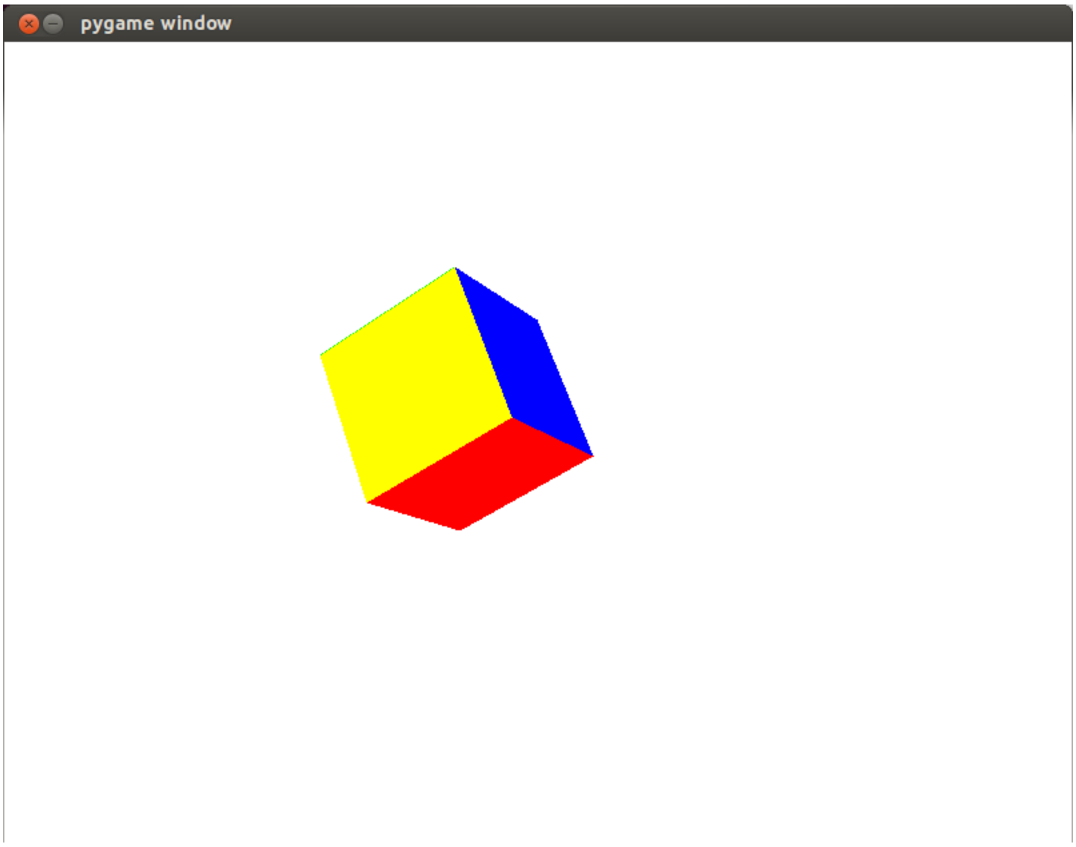
Ten prosty test powala stwierdzić czy rasteryzer działa prawidłowo. Na zrzucie ekranu widoczne jest płynne przejście pomiędzy kolorami, co oznacza, że *z* zmienia się płynnie.

Omówimy przypadek, gdy wierzchołek „1“ znajduje się po lewej stronie odcinka 0-2, ale kod będzie musiał też uwzględnić odmienną sytuację. Za sprawdzenie z którą sytuacją mamy do czynienie odpowiada kod:

```
if ((float(dx10) / float(dy10)) < (float(dx20) / float(dy20)))
```

Konwersja (float()) typów z liczb całkowitych na zmiennoprzecinkowe została wykonana w celu zwiększenia precyzji dzielenia.

Projekcja i rasteryzacja bryły




```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

import pygame, math, sys

def main():

    xw = 800
    yw = 600
    screen = pygame.display.set_mode((xw, yw))
    lipx = xw * yw #całkowita liczba pikseli
    fizxw = 2.0 #"fizyczna" (w jednostach przestrzeni 3D) szerokość okna widzen
    fov = math.radians(75) #określenie szerokosci pola widzenia
    zp = 7.0 #odległość od środka układu współrzednych do "ekranu"
    zk = fizxw / (2 * math.tan(fov / 2)) #odległość od "ekranu" do obserwatora
    skala = int(xw / fizxw) #skala n pikseli na 1 jednostkę przestrzeni

    bufram = [] #z-bufor

    for i in range(0, lipx):
        bufram.append(-100000.0) #tworzenie nowej czystej listy dla koloru głęb

    background_colour = (255,255,255)
    screen.fill(background_colour)

    p0 = (1.0, -3.0, 1.0) #punkt pierwszy - krotka, w odróżnieniu od listy niez
    p1 = (1.0, -1.0, 1.0)
    p2 = (-1.0, -3.0, 1.0)
    p3 = (-1.0, -1.0, 1.0)
    p4 = (1.0, -3.0, -1.0)
```

```
p5 = (1.0, -1.0, -1.0)
p6 = (-1.0, -3.0, -1.0)
p7 = (-1.0, -1.0, -1.0)

chmura = (p0, p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7) #zebranie wszystkich krotek do je

zbiorkolor = ((0, 0, 255), (0, 255, 0), (255, 0, 0), (0, 255, 255), (255, 2

troj0 = (0, 1, 3, 0) #indeks wierzchołków wybranych z krotki "chmura, dal p
troj1 = (0, 3, 2, 0)
troj2 = (2, 3, 7, 1)
troj3 = (2, 7, 6, 1)
troj4 = (4, 1, 0, 2)
troj5 = (1, 4, 5, 2)
troj6 = (1, 7, 3, 3)
troj7 = (1, 5, 7, 3)
troj8 = (4, 0, 2, 4)
troj9 = (4, 2, 6, 4)
troj10 = (5, 4, 6, 5)
troj11 = (5, 6, 7, 5) #na szesciobok potrzeba 12 trójkątów

zbiortroj = (troj0, troj1, troj2, troj3, troj4, troj5, troj6, troj7, troj8,

running = True #start główeje pętli programu

krok = 0

while running:
    screen.fill(background_colour) #czyszczenie klatki
    for i in range(0, lipx):
        bufram[i] = -100000.0 # wypełnianie Z bufora bardzo małymi wartości


    for tr in range(0, len(zbiortroj)): #pętla 12-elementowa, 0-11, bo osta
        trojkat = zbiortroj[tr]
        #print trojkat
        xps = [0, 0, 0] #tymczasowa lista punktów [] to listy, () to krotki
        yps = [0, 0, 0]
        zf = [0.0, 0.0, 0.0]
        for i in range (0, 3):
            numerpunktu = trojkat[i] #pobranie indeksu punktu, "zbiortroj"
            punkt = chmura[numerpunktu] #wybranie kolejnej krotki z krotki
            x = punkt[0] #wybrany pierwsza współrzedna
            y = punkt[1]
            z = punkt[2]
            x, y, z = transformacja(x, y, z, krok) #wywołanie funcji transf

            xp = zk * x /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla x-ów
            yp = zk * y /(zp + zk - z) #wyliczenie projekcji dla y-ów
            #skala = 100 #skala 100 pikseli na 1 jednostkę przestrzeni
            xps[i] = int((xw / 2) + (xp * skala)) #wysrodkowanie, skalowani
            yps[i] = int((yw / 2) - (yp * skala)) #wysrodkowanie, skalowani
            zf[i] = z
        kolortrojk = zbiorkolor[trojkat[3]] #czwarty zrgument trojkata to k
        #print [xps[0], yps[0], zf[0]], [xps[1], yps[1], zf[1]], [xps[2], y
        bufram = rysujtrojk([xps[0], yps[0], zf[0]], [xps[1], yps[1], zf[1]
    pygame.display.flip()
    krok = krok + 1
    for event in pygame.event.get(): #przerwanie pętli
```

```
            if event.type == pygame.QUIT:
                running = False

def rysujtrojk(wierz0, wierz1, wierz2, kolortrojk, xw, yw, screen, bufram, zp):

    while 1: #prosty algorytm sortowania 3 elementów
        if wierz0[1] > wierz1[1]:
            wierztemp = wierz0
            wierz0 = wierz1
            wierz1 = wierztemp

        if wierz1[1] > wierz2[1]:
            wierztemp = wierz1
            wierz1 = wierz2
            wierz2 = wierztemp

        if wierz0[1] <= wierz1[1] and wierz1[1] <= wierz2[1]: #przerwanie gdy u
            break

    #print wierz0, wierz1, wierz2

    xps0 = wierz0[0] #od lewej do prawej
    yps0 = wierz0[1] #z góry na dół
    zf0 = wierz0[2] #głębość Z w float
    xps1 = wierz1[0] #współrzedne wierzchołków trojkąta od najmwyzsze (najmnie
    yps1 = wierz1[1]
    zf1 = wierz1[2]
    xps2 = wierz2[0]
    yps2 = wierz2[1]
    zf2 = wierz2[2]

    dx10 = xps1 - xps0
    dx21 = xps2 - xps1
    dx20 = xps2 - xps0
    dy10 = yps1 - yps0
    dy21 = yps2 - yps1
    dy20 = yps2 - yps0
    dzf10 = zf1 - zf0
    dzf21 = zf2 - zf1
    dzf20 = zf2 - zf0

    if dx10 != 0 or dy10 != 0:
        dwyp10 = math.sqrt(float(math.pow(dx10,2)+math.pow((dy10),2))) #początk
        zprop10 = dzf10 / dwyp10 #proporcja przesunięcia XY dla 10 do przesunie
    else:
        zprop10 = 0

    if dx21 != 0 or dy21 != 0:
        dwyp21 = math.sqrt(float(math.pow(dx21,2)+math.pow((dy21),2)))
        zprop21 = dzf21 / dwyp21
    else:
        zprop21 = 0

    if dx20 != 0 or dy20 != 0:
        dwyp20 = math.sqrt(float(math.pow(dx20,2)+math.pow((dy20),2)))
        zprop20 = dzf20 / dwyp20
    else:
        zprop20 = 0
```

```
#rasterizer buduje trójkąty z linii poziomych

    lewy = False #pomocnicza zmienna, jeśli true, to 1 jest po lewej 0-2
    if dy10 != 0  and dy21 != 0 and dy20 != 0: #tylko gdy y są różne, bez dziel
        if ((float(dx10) / float(dy10)) < (float(dx20) / float(dy20))):#przypad
            lewy = True
        else:
            lewy = False
    elif dy10 == 0 and dy21 != 0 and dy20 != 0: #gdy poziomo miedzy 0-1
        if dx10 < 0:
            lewy = True
        else:
            lewy = False
    elif dy10 != 0 and dy21 == 0 and dy20 != 0: #gdy poziomo miedzy 2-1
        if dx21 > 0:
            lewy = True
        else:
            lewy = False
    else: #zwykle gdy poziomo miedzy 2-0, to 1-0 i 2-1, linia prosta pozioma
        if dx20 > 0:
            lewy = True
        else:
            lewy = False



    if (lewy == True):#przypadek gdy 1 jest po lewej 0-2
        for y in range(yps0, yps2):
            if y < yps1: #gdy jest się między 0 a 1
                if dy10 != 0:
                    x0 = xps0 + (y-yps0) * dx10 / dy10 #x0 zawsze po lewej w st
                else:
                    x0 = xps1
                if dy20 != 0:
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                else:
                    x1 = xps0
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps1 - x0,2)+math.pow((yps1 - y
                z0 = zf1 - dwyp * zprop10 #z każdym krokiem mniejsza odległośc,
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2 - y
                z1 = zf2 - dwyp * zprop20
                #print x0, y, z0

            else: #gdy jest się między 1 a 2
                if dy21 != 0:
                    x0 = xps1 + (y-yps1) * dx21 / dy21
                else:
                    x0 = xps1
                if dy20 != 0:
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                else:
                    x1 = xps2
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2 - y
                z0 = zf2 - dwyp * zprop21
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2 - y
                z1 = zf2 - dwyp * zprop20
                #print x0, y, z0
            for x in range(x0, x1):
                if x >=0 and x < xw and y >=0 and y < yw: #ograniczenie tylko o
```

```
                    #screen.set_at((x, y), (0, 0, 0))
                    z = z1 - ((z1 - z0) / float(x1 - x0)) * float(x1 - x)
                    #print x, y, z
                    pozpix = x + y * xw
                    if (z > bufram[pozpix] and z < zp): #zapisuje piksel tylko
                        screen.set_at((x, y), (kolortrojk))
                        bufram[pozpix] = z
    else:
        for y in range(yps0, yps2):
            if y < yps1: #gdy jest się między 0 a 1
                if dy10 != 0:
                    x1 = xps0 + (y-yps0) * dx10 / dy10 #zamiana początku z konc
                else:
                    x1 = xps1
                if dy20 != 0:
                    x0 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                else:
                    x0 = xps0
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps1 - x1,2)+math.pow((yps1 - y
                z1 = zf1 - dwyp * zprop10 #z każdym krokiem mniejsza odległośc ,
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2 - y
                z0 = zf2 - dwyp * zprop20

            else: #gdy jest się między 1 a 2
                if dy21 != 0:
                    x1 = xps1 + (y-yps1) * dx21 / dy21
                else:
                    x1 = xps1
                if dy20 != 0:
                    x0 = xps0 + (y-yps0) * dx20 / dy20
                else:
                    x0 = xps2
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x1,2)+math.pow((yps2 - y
                z1 = zf2 - dwyp * zprop21
                dwyp = math.sqrt(float(math.pow(xps2 - x0,2)+math.pow((yps2 - y
                z0 = zf2 - dwyp * zprop20
            for x in range(x0, x1):
                if x >=0 and x < xw and y >=0 and y < yw: #ograniczenie tylko o
                    #screen.set_at((x, y), (0, 0, 0))
                    z = z1 - ((z1 - z0) / float(x1 - x0)) * float(x1 - x)
                    pozpix = x + y * xw
                    if (z > bufram[pozpix] and z < zp): #zapisuje piksel tylko
                        screen.set_at((x, y), (kolortrojk))
                        bufram[pozpix] = z

    #pygame.display.flip()
    return bufram


def transformacja(x, y, z, krok):
    wzrostx = 0.01 * krok
    wzrosty = 0.03 * krok
    wzrostz = -0.02 * krok
    #x = x * (1 + wzrostx) #skalowanie w x
    #y = y * (1 + wzrosty) #skalowanie w y
    #z = z * (1 + wzrostz) #skalowanie w z

    katXY = 0.05 * krok #w radianach, obracanie wokół osi Z
    x, y, z = obrotXY(x, y, z, katXY)
```

```
    katXZ = 0.05 * krok #w radianach, obracanie wokół osi Y
    x, y, z = obrotXZ(x, y, z, katXZ)

    katYZ = 0.05 * krok #w radianach, obracanie wokół osi X
    x, y, z = obrotYZ(x, y, z, katYZ)

    przesx = 0.05 * krok
    przesy = 0.025 * krok
    przesz = - 0.15 * krok
    #x = x + przesx  #przesuwanie w kierunku x
    #y = y + przesy  #przesuwanie w kierunku y
    z = z + przesz #przesuwanie w kierunku z

    return x, y, z

def obrotXY(x, y, z, katXY):
    xt = x * math.cos(katXY) - y * math.sin(katXY) #konieczny import biblioteki
    yt = x * math.sin(katXY) + y * math.cos(katXY)
    zt = z
    return xt, yt, zt

def obrotXZ(x, y, z, katXZ):
    xt = x * math.cos(katXZ) + z * math.sin(katXZ)
    yt = y
    zt = -x * math.sin(katXZ) + z * math.cos(katXZ)
    return xt, yt, zt

def obrotYZ(x, y, z, katYZ):
    xt = x
    yt = y * math.cos(katYZ) - z * math.sin(katYZ)
    zt = y * math.sin(katYZ) + z * math.cos(katYZ)
    return xt, yt, zt

main()
```

Powyżej widoczny jest pełny kod programu wyświetlającego ruchomy (transformacje opiszę w dalszej części) sześcian z wypełnionymi, kolorowymi ścianami.

Rasteryzer trójkątów zamknięty jest w osobnej funkcji:

```
def rysujtrojk(wierz0, wierz1, wierz2, kolortrojk, xw, yw, screen, bufram, zp):
```

Jej zrgumentami wejściowymi są współrzędne wierchołków danego trójkąta (wierz0, wierz1, wierz2), jego kolor(kolortrojk), wielkość okna (xw, yw), obszar rysowania (screen), lista współrzędnych z (bufram) i odległość płaszczyzny rzutowania od układu współrzędnych (zp).

Funkcja modyfikuje obszar rysowania wstawiając kolejne piksele i dla każdego z nich zapisuje współrzędną z w liście bufram. Dzieje się to jednak tylko w przypadku, gdy nowo rzutowany punkt znajduje się bliżej obserwatora i wcześniej zapisany pod danym pikselem:

```
if (z > bufram[pozpix] and z < zp):
    screen.set_at((x, y), (kolortrojk))
    bufram[pozpix] = z
```

pozpix to pozycja piksela wyliczona według:

```
pozpix = x + y * xw
```

bufram jest wypełniany bardzo małymi wartościami (co odpowiada barzdo dużej odległości od obserwatora) na początku głównej pętli programu:

```
for i in range(0, lipx):
        bufram.append(-100000.0)
```

Jego wartość jest też zwracana po wykonaniu funckji rasteryzacji każdego z trójkątów:

```
bufram = rysujtrojk([xps[0], yps[0], zf[0]], [xps[1], yps[1], zf[1]], [xps[2], yps[2],
```

Lista bufram zawierająca współrzędne z dla wszystkich punktów, którym odpowiadają wyświetlane piksele, jest prostą implementacją bufora głębi (Z-bufora). By sprawdzić co się dzieje w wyniku jego braku, wystarczy usunąć warunek $z >$ *bufram[pozpix]*. Wtedy widoczne i niewidoczne ściany bryły zaczną się wzajemnie nakładać i ruchomy sześcian zacznie różnokolorowo migotać.

Funkcja rasteryzatora zawiera jeszcze jeden ważny fragment, a mianowicie prosty algorytm sortowania:

```
while 1:
        if wierz0[1] > wierz1[1]:
            wierztemp = wierz0
            wierz0 = wierz1
            wierz1 = wierztemp
        if wierz1[1] > wierz2[1]:
            wierztemp = wierz1
            wierz1 = wierz2
            wierz2 = wierztemp
        if wierz0[1] <= wierz1[1] and wierz1[1] <= wierz2[1]:
break
```

Porządkuje on 3 wierzchołki trójkąta według współrzędnej y - od najwyżej do najniżej położonego. Zrealizowane jest to przez porównanie sąsiadujących wartości i zamiany ich kolejności, jeśli wcześniejsza jest większa od póżniejszej. to konieczne, bo potrzebujemy trójkąta, gdzie wierzchołek „0“ jest najwyżej a „2“ najniżej położony.

Jako, że ściany bryły mają mieć różne kolory, została wprowadzona dodatkowo krotka będąca kilkuelementową paletą barw:

```
zbiorkolor = ((0, 0, 255), (0, 255, 0), (255, 0, 0), (0, 255, 255), (255, 255, 0), (255
```

Teraz definicja każdego trójkąta jest czteroelementowa - 3 wierzchołki i numer koloru z palety:

```
troj0 = (0, 1, 3, 0)
```

Odczyt składowych z palety odbywa się przed wywołaniem rasteryzatora:

```
kolortrojk = zbiorkolor[trojkat[3]]
```

Są one potem wykorzystywane w chwili wstawiania konkretnych pikseli:

```
screen.set_at((x, y), (kolortrojk))
```

4. Transformacje

Podstawowe transformacje jakie mogą zostać dokonane na bryle to:
— przesuwanie,
— skalowanie,
— obracanie.

Przykładowe transformacje można zobaczyć w funkcji:

```
def transformacja(x, y, z, krok):
```

krok jest jakąś zmienną, w naszym przypadku oznaczającą numer klatki animacji. Przesunięcie punktu wzdłuż osi X, żależne od tej zmiennej, będzie wyglądało np. tak:

```
przesx = 0.05 * krok
x = x + przesx
```

Podobnie dla Y i Z będzie to:

```
y = y + przesy
z = z + przesz
```

Widać, że chcąc przesunąć obiekt musimy dodawać określone wartości do aktuanych współrzednych, tak by uzyskać nowe współrzedne.

Chcąc przeskalować bryłę w którymś z kierunków musimy za to mnożyć współrzedne przez współczynniki skali. W kodzie ma to następującą postać:

```
x = x * (1 + wzrostx)
y = y * (1 + wzrosty)
z = z * (1 + wzrostz)
```

Przykładowo jeśli *wzrostx* ma wartość 0,5, to bryła zostanie rozciągnięta o 50% względem rozmiarów początkowych. Powyższe równania są wynikiem zależności zapisanych w takich działaniach na macierzach:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+wzrostx) & 0 & 0 \\ 0 & (1+wzrosty) & 0 \\ 0 & 0 & (1+wzrostz) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Przypadek ogólny wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00}a_0 + c_{01}a_1 + c_{02}a_2 \\ c_{10}a_0 + c_{11}a_1 + c_{12}a_2 \\ c_{20}a_0 + c_{21}a_1 + c_{22}a_2 \end{bmatrix}$$

Dla pierwszego równania, czyli x = x * (1 + wzrostx):

$x = (1 + wzrostx) \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z$

Najbardziej skomplikowanymi tranformacjami są obroty. W programie zostały one umieszone we wsłasnych funkcjach. Wynikowe współrzędne dostały nowe oznaczenia zmiennych (xt, yt, zt) by kolejne oblicznenia nie korzystały przypadkowo ze zmienionych wspólrzędnych zamiast oryginalnych. Wykorzystany został moduł Pythona math zaimportowany na początku programu:

```
import math
```

Obrót w płaszczyźnie XY, gdzie $katXY$ to kąt obrotu:

$$\begin{bmatrix} xt \\ yt \\ zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (math.cos(katXY)) & (-math.sin(katXY)) & 0 \\ (math.sin(katXY)) & (math.cos(katXY)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Co w kodzie programu ma postać:

```
def obrotXY(x, y, z, katXY):
   xt = x * math.cos(katXY) - y * math.sin(katXY)
   yt = x * math.sin(katXY) + y * math.cos(katXY)
   zt = z
   return xt, yt, zt
```

Obrót w płaszczyźnie XZ:

$$\begin{bmatrix} xt \\ yt \\ zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (math.cos(katXZ)) & 0 & (math.sin(katXZ)) \\ 0 & 1 & 0 \\ (-math.sin(katXZ)) & 0 & (math.cos(katXZ)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

```
def obrotXZ(x, y, z, katXZ):
   xt = x * math.cos(katXZ) + z * math.sin(katXZ)
   yt = y
   zt = -x * math.sin(katXZ) + z * math.cos(katXZ)
   return xt, yt, zt
```

Obrót w płaszczyźnie YZ:

$$\begin{bmatrix} xt \\ yt \\ zt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (math.cos(katYZ)) & (-math.sin(katYZ)) \\ 0 & (math.sin(katYZ)) & (math.cos(katYZ)) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

```
def obrotYZ(x, y, z, katYZ):
   xt = x
   yt = y * math.cos(katYZ) - z * math.sin(katYZ)
   zt = y * math.sin(katYZ) + z * math.cos(katYZ)
   return xt, yt, zt
```

5. Wczytywanie modeli

6. Cieniowanie płaskie