



ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

D
BACH KHOA

N
A
N
G

TOÁN ỨNG DỤNG CÔNG NGHỆ THÔNG TIN



Khoa Công Nghệ Thông Tin

TS. Nguyễn Văn Hiệu

Chuyên đề:

Hình học (Geometry for cs)

D
BACH KHOA

N
A
N
G

Nội dung

- Các khái niệm cơ bản
- Biểu diễn hình học của số phức
- Biểu diễn hình học cộng và trừ hai vectơ
- Hàm khoảng cách
- Bài toán cặp điểm gần nhất
- Bài toán bao lồi

Các khái niệm cơ bản

Các khái niệm cơ bản

Điểm

- Điểm được biểu diễn trên Oxy
- Điểm được biểu diễn trên Oxyz
- Điểm được biểu diễn trên máy tính thường

```
struct Point { int x, int y }
```

- Khoảng cách giữa hai điểm A và B

```
double dist( Point A, Point B)
```

```
{
```

```
return sqrt((B.x-A.x)x(B.x-A.x) + (B.y-A.y)x(B.y-A.y));
```

```
}
```

Các khái niệm cơ bản

Đường thẳng

- Đường thẳng trong mặt phẳng được xác định bởi hai điểm phân biệt A và B nằm trên đường thẳng.
- Tập hợp các điểm M nằm trên đường thẳng AB:

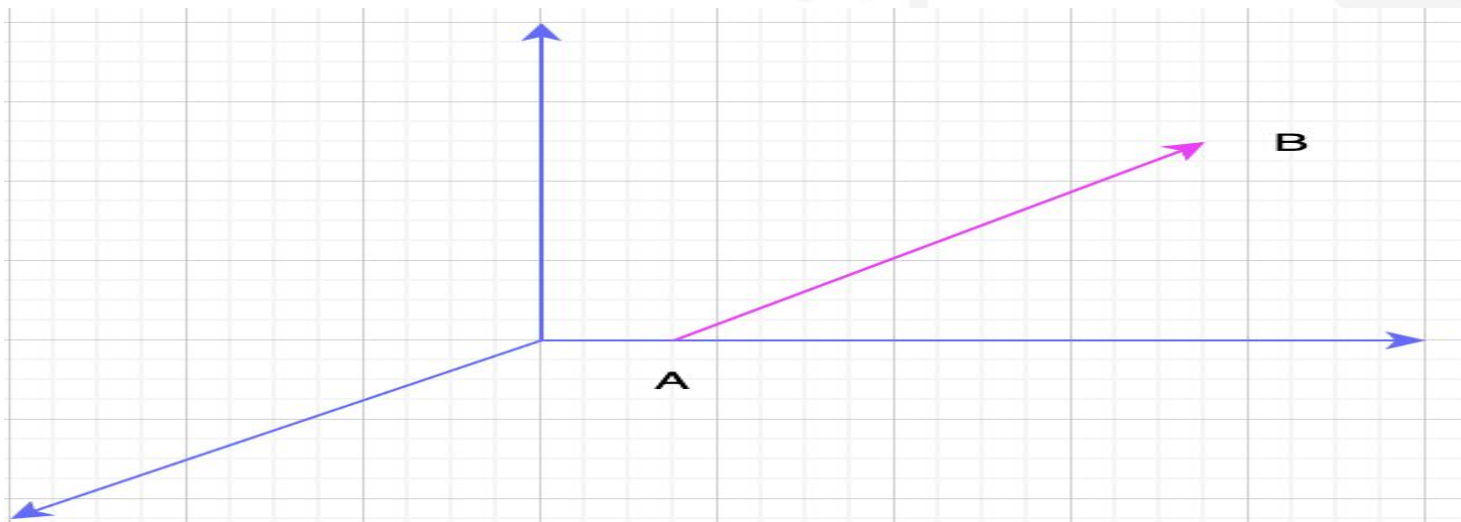
$$(x_M - x_A, y_M - y_A) = t \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ \Rightarrow \begin{cases} x_M - x_A = t \cdot (x_B - x_A) \\ y_M - y_A = t \cdot (y_B - y_A) \end{cases}$$

- Các trường hợp có thể xảy ra
 - $t < 0$, thì điểm M nằm ngoài đoạn AB về phía A
 - $t > 1$, thì điểm M nằm ngoài đoạn AB về phía B
 - trường hợp còn lại M thuộc đoạn [AB]

Các khái niệm cơ bản

Vectơ

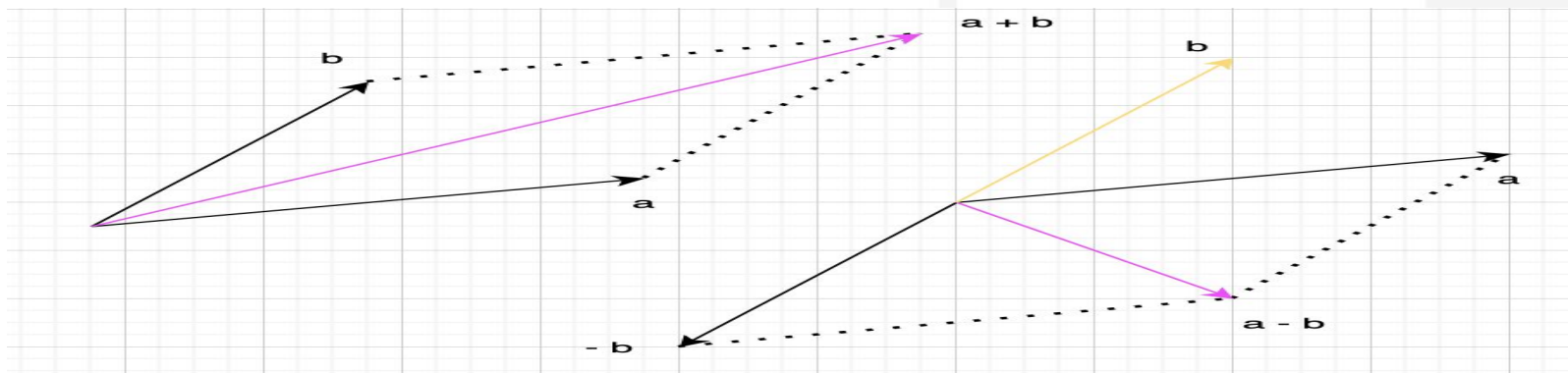
- Vectơ biểu diễn đại lượng có cả độ lớn (magnitude) và hướng(direction)
- Độ lớn là chiều dài, hướng là từ đuôi (tail) đến đầu (head) của vectơ
- Trực quan hóa vectơ:



Các khái niệm cơ bản

Cộng trừ Vectơ

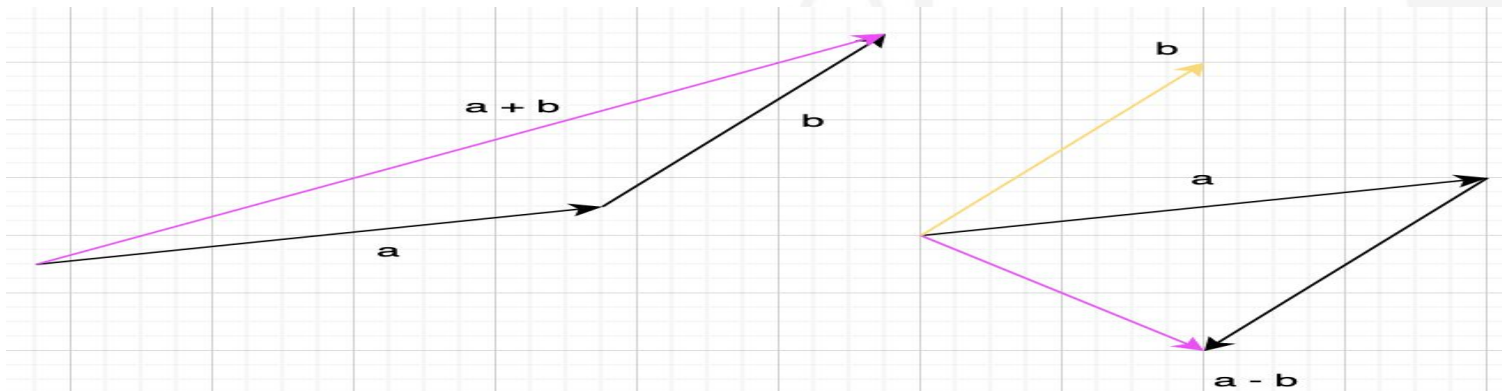
- Vectơ $a = (a_x, a_y)^T$, $b = (b_x, b_y)^T$
- Cộng hai vectơ $a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y)^T$
- Trừ hai vectơ $a - b = (a_x - b_x, a_y - b_y)^T$
- Phương pháp hình bình hành
 - Vẽ các vectơ sao cho các điểm ban đầu trùng nhau
 - Vẽ đường thẳng tạo hình bình hành hoàn chỉnh
 - Đường chéo từ điểm ban đầu đến đối diện là kết quả



Các khái niệm cơ bản

Cộng trừ Vectơ

- Cộng hai vectơ $a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y)^T$
- Trừ hai vectơ $a - b = (a_x - b_x, a_y - b_y)^T$
- Phương pháp tam giác
 - Vẽ các vectơ lần lượt sao cho đặt điểm đầu của vectơ kế tiếp tại điểm cuối của vectơ trước đó
 - Vectơ với điểm đầu của vectơ đầu tiên đến điểm cuối của vectơ cuối cùng là kết quả

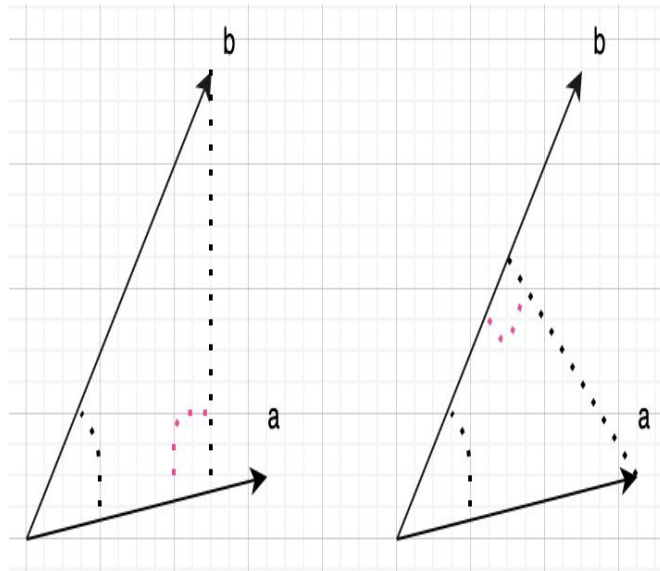


Các khái niệm cơ bản

Tích vô hướng của hai vectơ

- Tích vô hướng của hai vectơ là một số với giá trị

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y; a = (a_x, a_y)^T, b = (b_x, b_y)^T$$



```
int operator *(Point u, Point v)
{
    return (u.x*v.x+u.y*v.y);
}
```

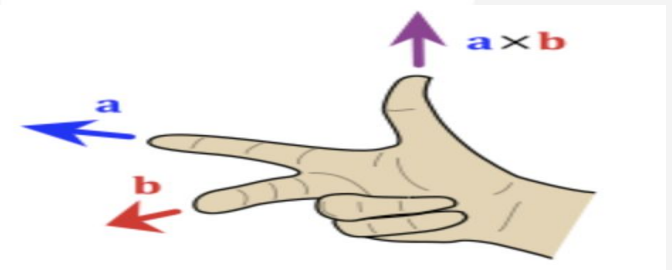
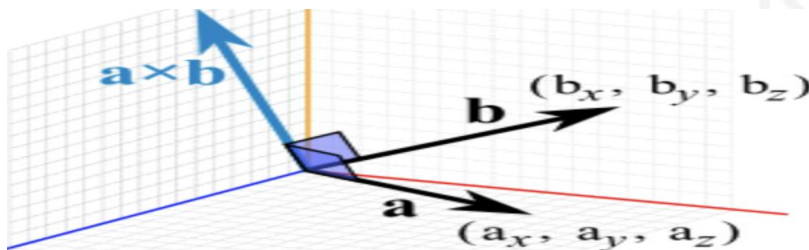
Các khái niệm cơ bản

Tích hữu hướng của hai vectơ

- $a = (a_x, a_y, a_z)^T$, $b = (b_x, b_y, b_z)^T$
- Tích hữu hướng của hai vectơ (cross product) là vectơ vuông góc với hai vectơ trên

- Tọa độ
$$a \times b = \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \right)$$

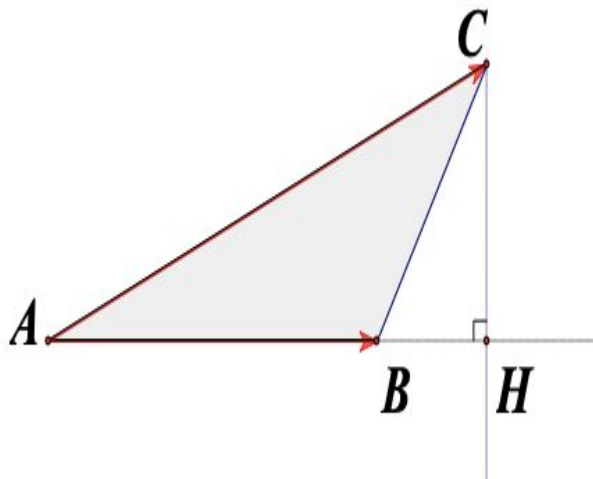
- Độ lớn $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \theta$
- Hướng



Các khái niệm cơ bản

Tam giác

- Ba điểm phân biệt A, B, C thỏa mãn điều của một tam giác
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |AB \times AC| = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(\angle BAC)$
- Khoảng cách điểm C đến đường thẳng đi qua hai điểm A, B
- $CH = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{|AB|}$



```
double sTriangle(Point A, Point B, Point C)
{
    double s = (B.x-A.x)*(C.y-A.y)-(B.y-A.y)*(C.x-A.x);
    return abs(s/2);
}

double sDist2(Point A, Point B, Point C)
{
    return 2*sTriangle(A,B,C)/dist(A,B);
}
```

Các khái niệm cơ bản

Đường tròn

- Tập hợp các điểm cách đều một điểm cho trước
- Đường tròn tâm A, bán kính r
-

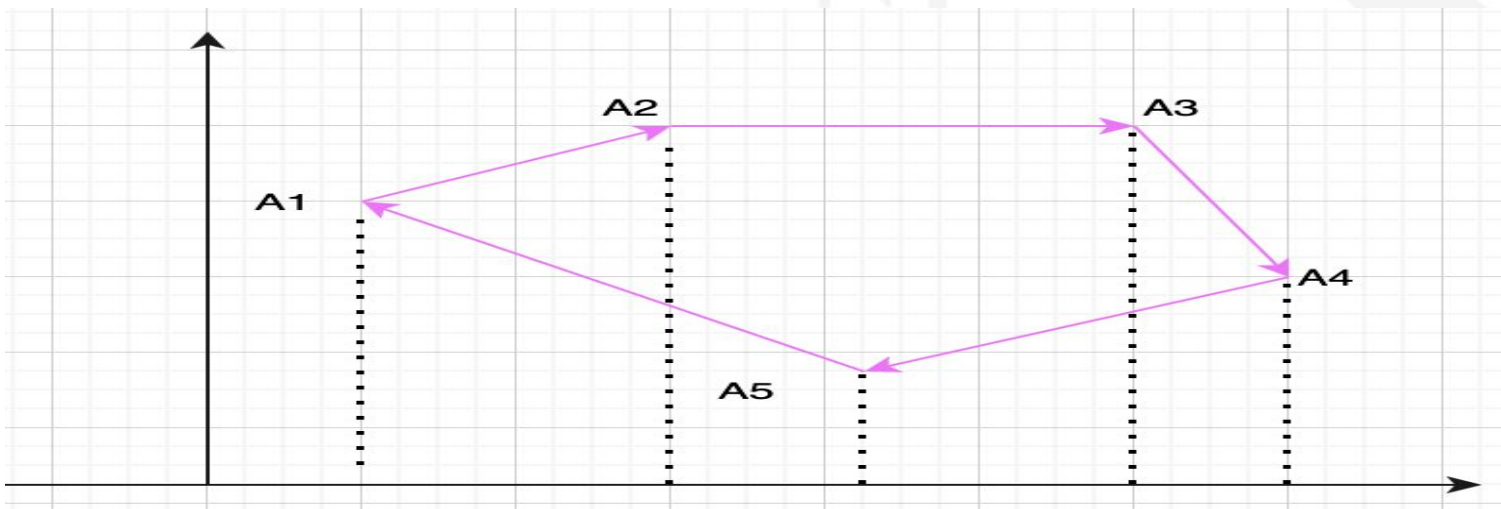
```
struct Circle  
{  
    Point A,  
    double r;  
}
```

Các khái niệm cơ bản

Đa giác

- Đa giác là đường gấp khúc khép kín.
- Đa giác lưu bởi dãy điểm nối tiếp nhau A_1, A_2, \dots, A_n
- Diện tích của đa giác theo công thức

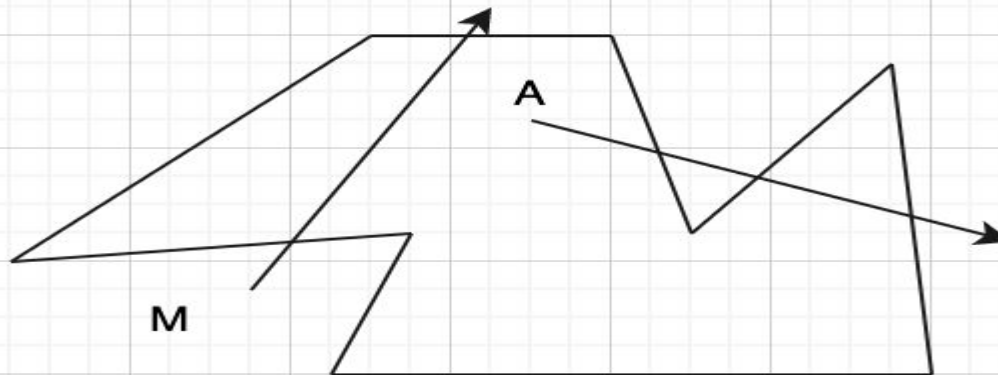
$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (A_i \times A_{i+1}) \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|$$



Các khái niệm cơ bản

Đa giác

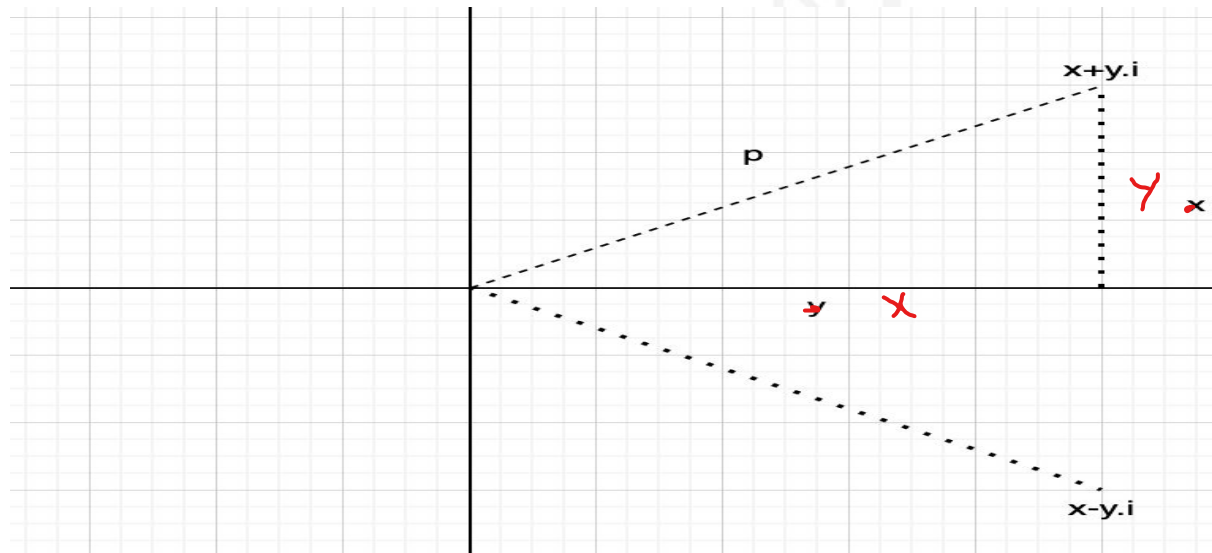
- Thuật toán Ray casting kiểm tra điểm M trong hoặc ngoài đa giác
- Tại điểm M vẽ tia cắt các cạnh của đa giác, nếu M không nằm trên biên của đa giác thì
 - M nằm ngoài đa giác nếu tổng số điểm chẵn
 - M nằm trong đa giác nếu tổng số điểm lẻ



Biểu diễn hình học số phức

Biểu diễn hình học của số phức

- Số phức $z = x + y.i$, $i^2 = -1$.
- z được biểu diễn tương ứng một điểm trong không gian Oxy
- Số phức liên hợp với z có dạng $\bar{z} = x - y.i$
- Khoảng cách từ o đến z là ρ : $\rho^2 = x^2 + y^2 = (x + y.i)(x - y.i)$
- ρ là modulo của z : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

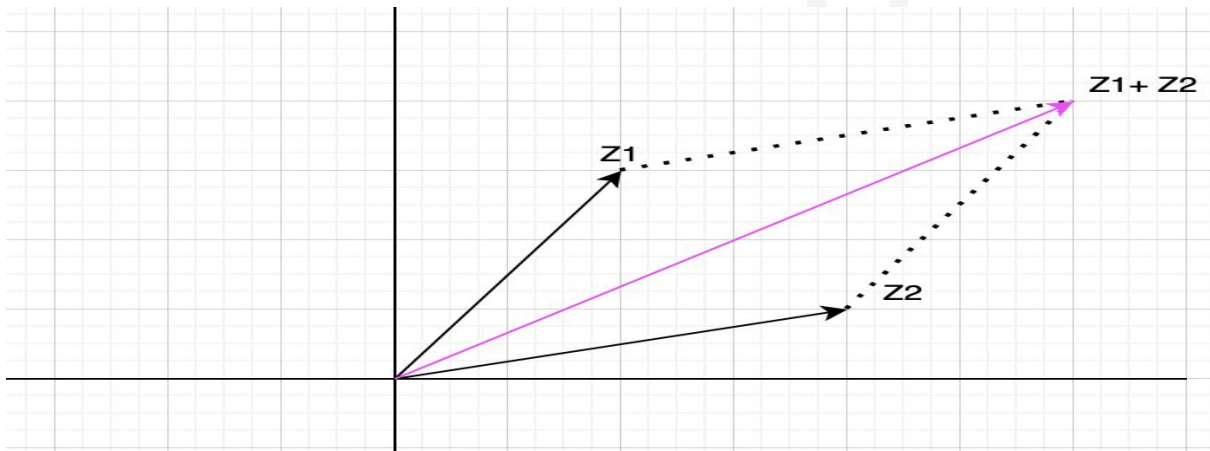


Biểu diễn hình học của số phức

- Tổng hai số phức

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i) + (x_2 + y_2 \cdot i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

- Tổng hai số phức bởi hình học
 - Biểu diễn số phức trên trục tọa độ oxy
 - Vẽ các đoạn thẳng tạo thành hình bình hành
 - Đường chéo hình bình hành chính là kết quả

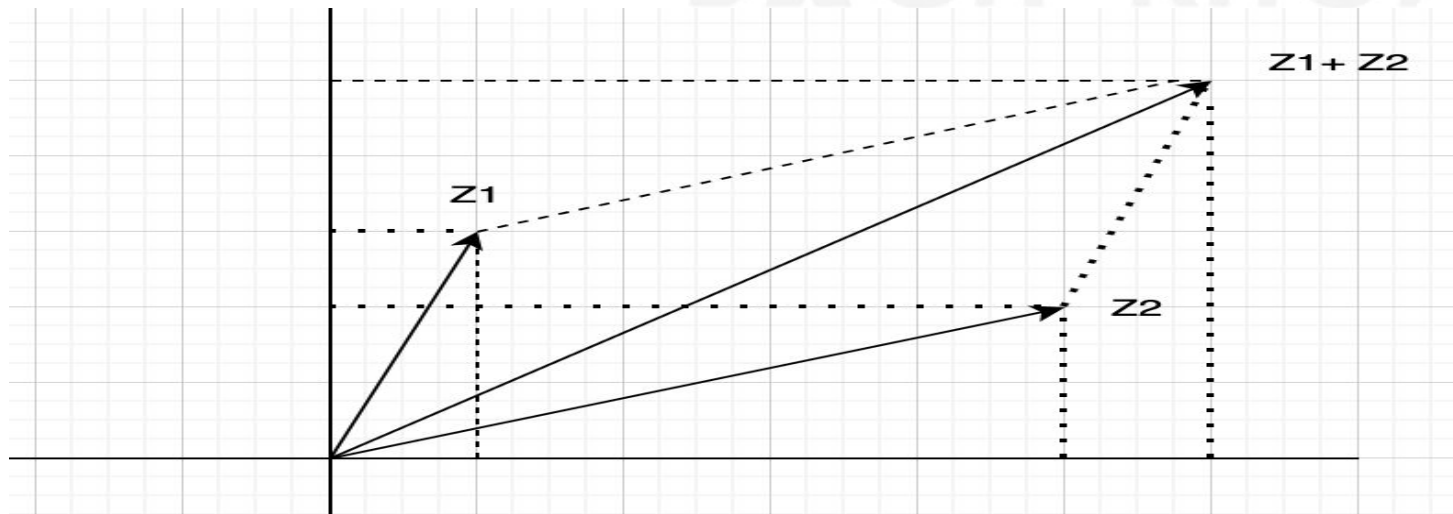


Biểu diễn hình học của số phức

- Module tổng của hai số phức không vượt quá tổng của hai module

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

•



Biểu diễn hình học của số phức

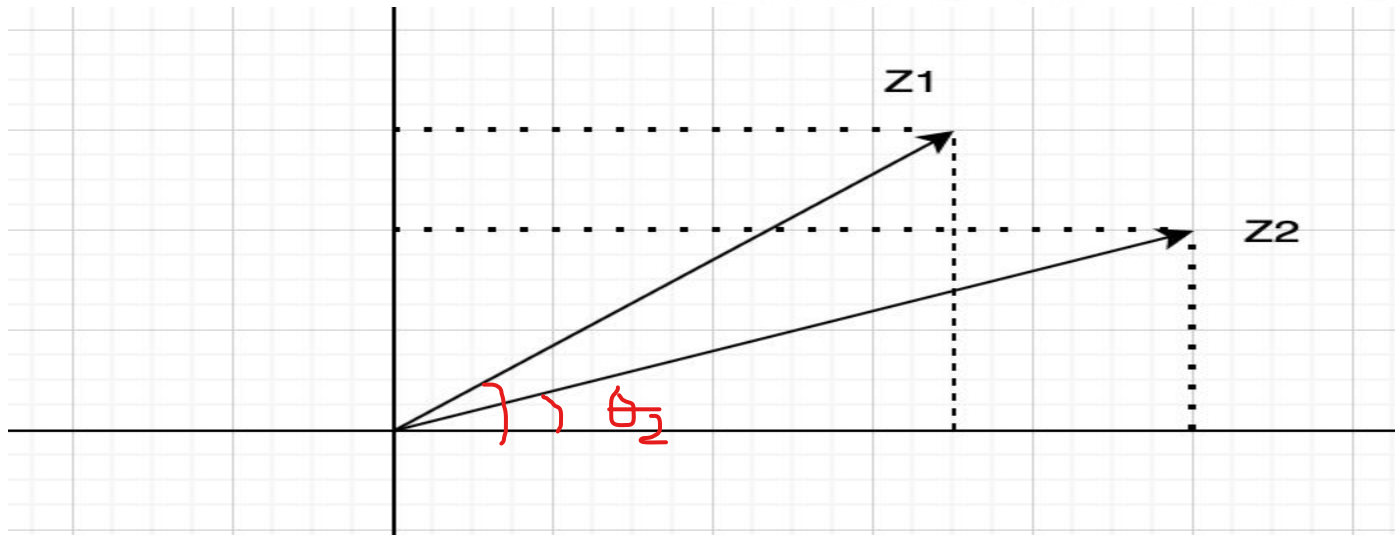
- Biểu diễn số phức theo lượng giác

$$z_1 = (x_1 + y_1 \cdot i) = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = (x_2 + y_2 \cdot i) = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\sin \theta = \frac{y}{z}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{z}$$

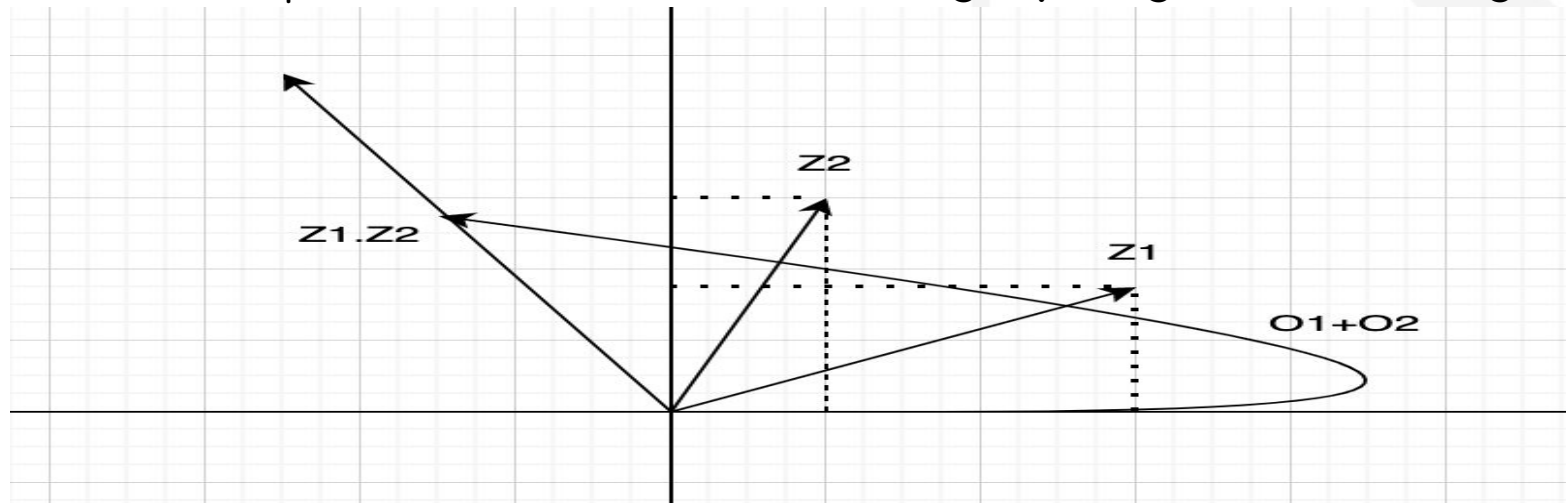


Biểu diễn hình học của số phức

- Tích hai số phức $z_1 = (x_1 + y_1 \cdot i) = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$
 $z_2 = (x_2 + y_2 \cdot i) = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

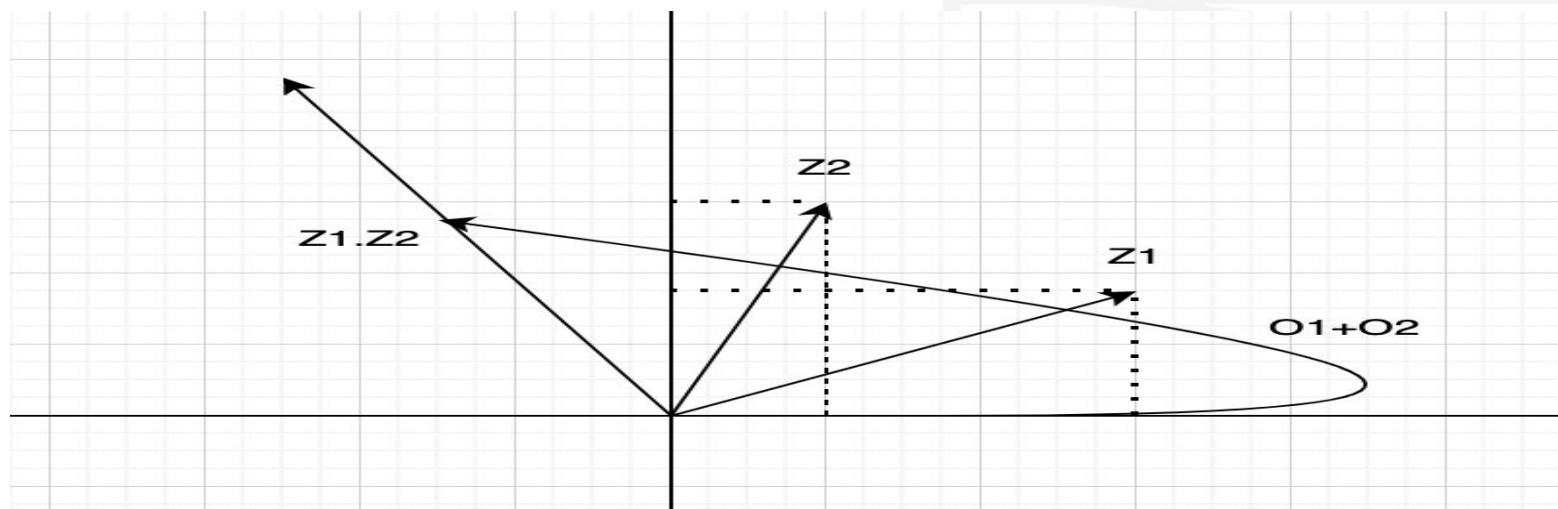
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1)] \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos (\theta_1 + \theta_2)) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

- Tích hai số phức là tích module và tổng hệ số góc của chúng



Biểu diễn hình học của số phức

- Tích của hai số phức cho một số tính chất
 - $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$
 - Nếu modun z bằng 1, thì $(z)^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$
- Tích hai số phức là tích module và tổng hệ số gốc của chúng



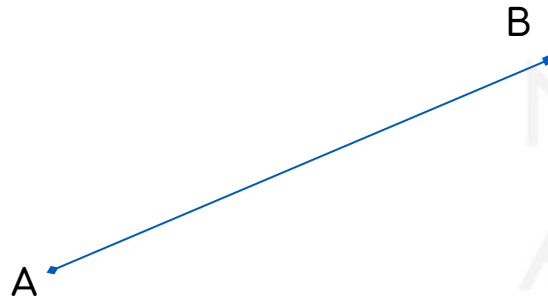
Hàm khoảng cách (Distance Function)

Khoảng cách Euclidean

- Cho hai điểm A và B trong không gian 2D

- $$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Trực quan

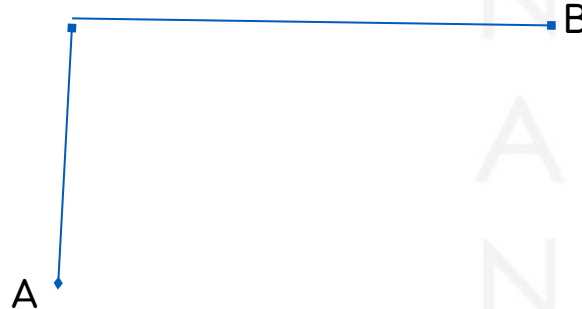


Khoảng cách Manhattan

- Cho hai điểm A và B trong không gian 2D

- $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$

- Trực quan

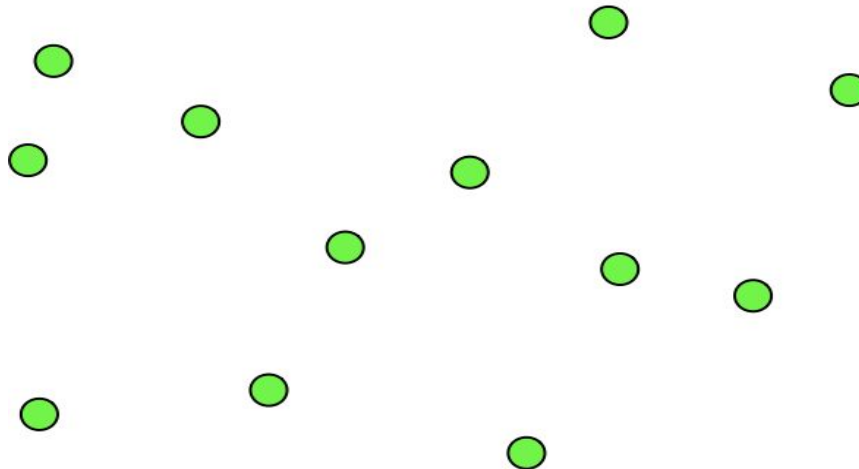


Bài toán cặp điểm gần nhất (Closest pair problem)

Bài toán

- Cho n điểm trong không gian 2D, mỗi điểm $p_i = (x_i, y_i)$
- Vấn đề: $\min_{i,j} \{\rho(p_i, p_j)\}$ 2 điểm có khoảng cách min trong n điểm
- Khoảng cách Euclidean:

$$\rho(p_i, p_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

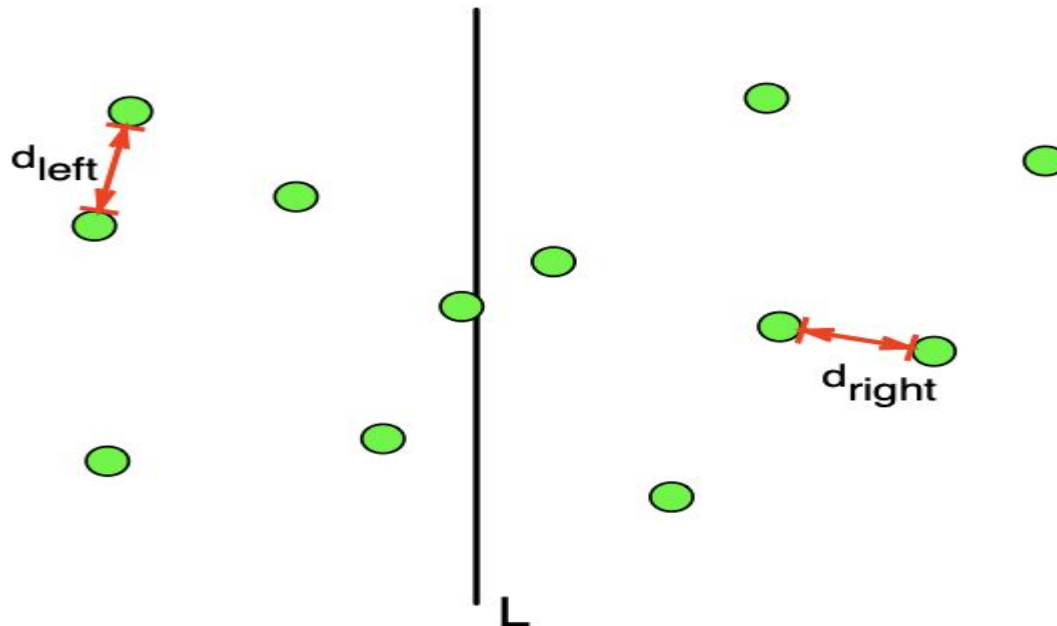


Mục tiêu

- Brute giải bài toán với độ phức tạp: $O(n^2)$
- Vấn đề có cách nào nhanh hơn không? Không sử dụng so sánh cặp
- Chúng ta có thể giải bài toán với độ phức tạp: $O(n \log(n))$
- Cách tiếp cận hợp lý là gì ?

Thuật toán (1)

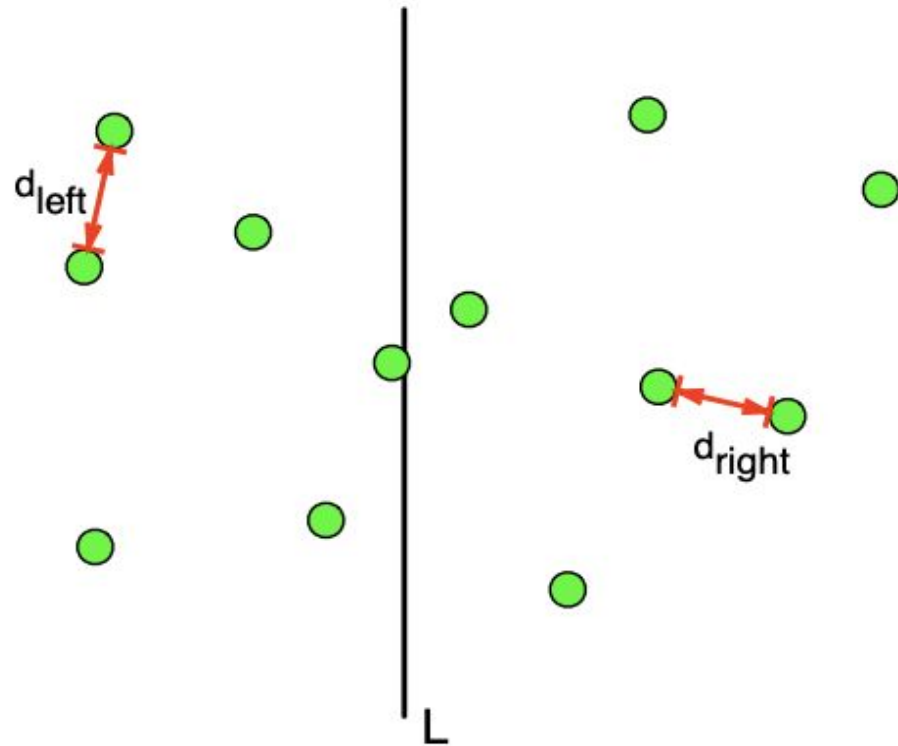
- Sắp xếp các điểm dọc theo tọa độ x
- Chia tập hợp điểm thành 2 tập con có kích thước gần bằng nhau theo đường thẳng $x = L$



Thuật toán(2)

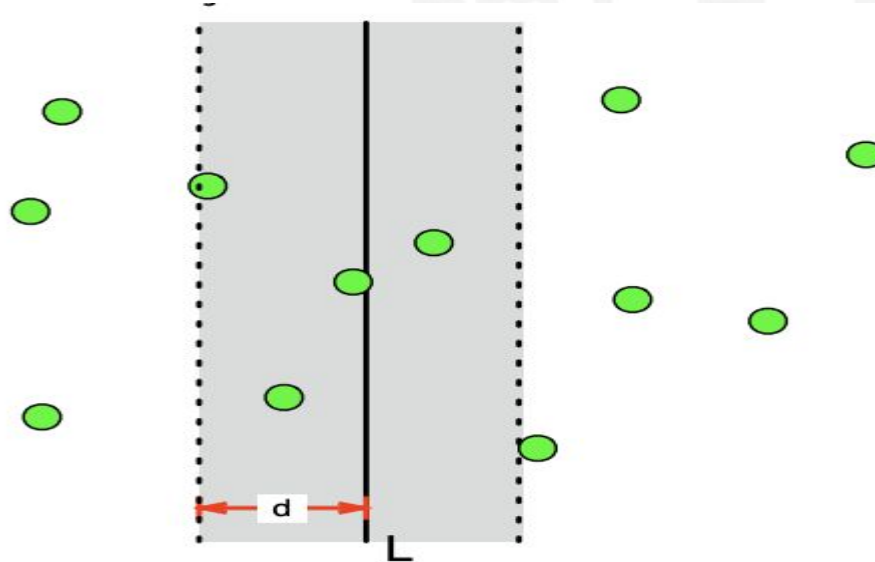
- Giải bài toán bằng đệ quy trong tập con trái và tập con phải

$$d = \min\{d_{\text{left}}, d_{\text{right}}\}.$$



Thuật toán (3)

- Xây dựng miền S là tập hợp các điểm lân cận L
- Tìm khoảng cách tối thiểu d_S trong miền S (một điểm nằm bên trái và một điểm nằm bên phải L)



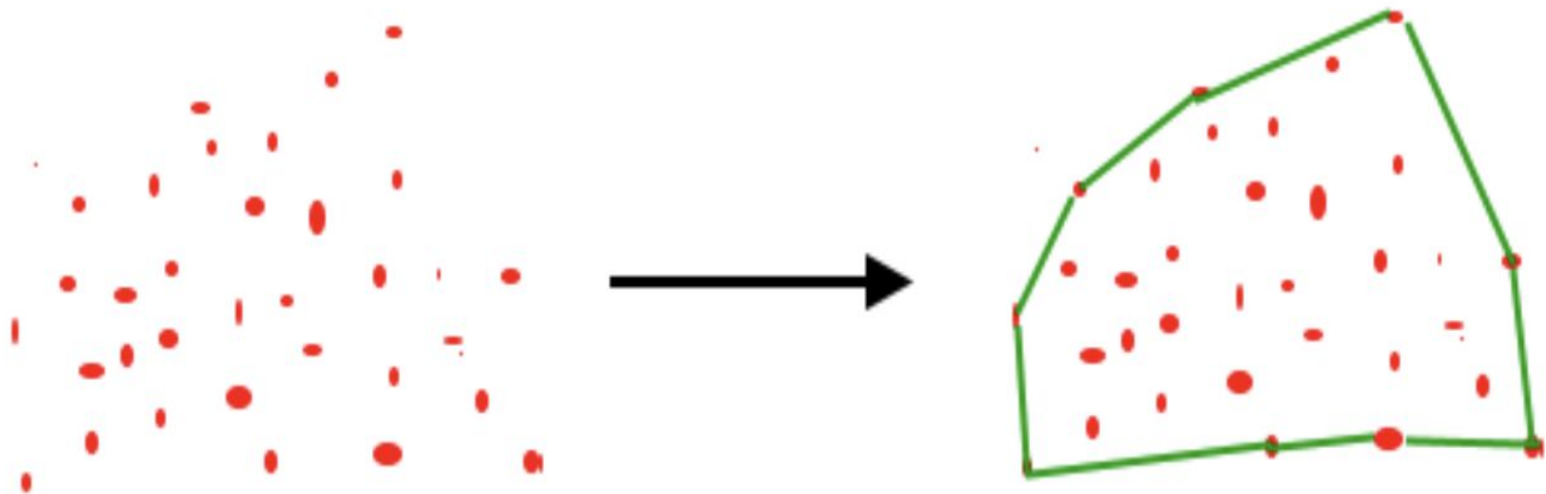
- Câu trả lời $d := \min \{d, d_S\}$

Bao lồi (Convex hull)



Bao lồi(1)

- Tập lồi: $\forall a, b \in S, \text{ then } [a, b] \in S$
- Bao lồi: tập lồi nhỏ nhất chứa tất cả các điểm



Bao lồi (2)

- Cho 3 điểm p , q và r trong không gian 2D:

$$p = (p_x, p_y), q = (q_x, q_y), r = (r_x, r_y)$$

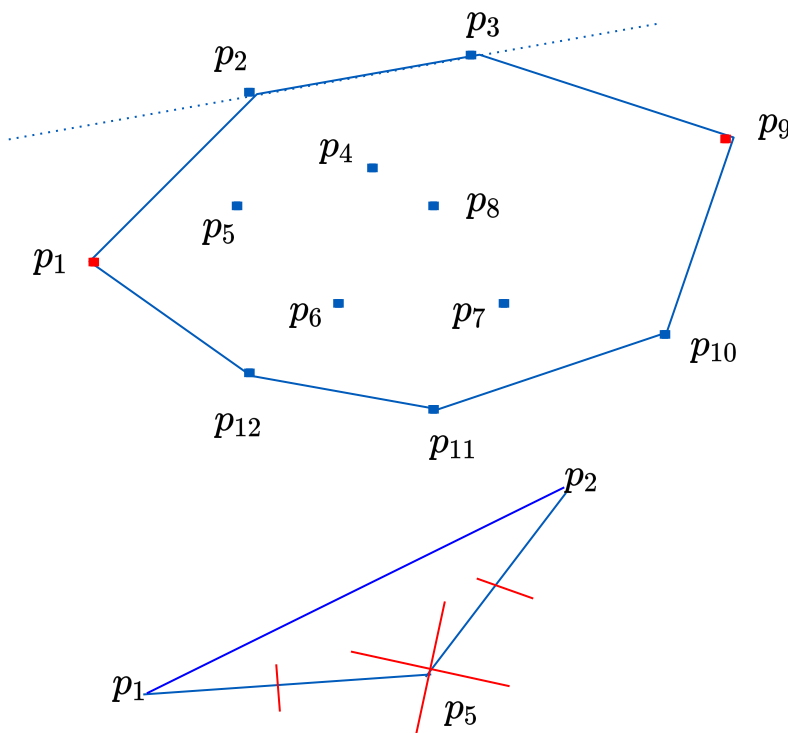
$$D = \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

- Nếu $D > 0$, thì điểm r nằm trái $[p, q]$
- Nếu $D < 0$, thì điểm r nằm phải $[p, q]$



Bao lồi (3)

- Sắp xếp các điểm tăng dần theo thứ tự hoành độ x (nếu hoành độ x bằng nhau thì ưu tiên tung độ độ y)



$$L_{upper} = \{p_1, p_2, p_3, p_9\}$$

$$L_{lower} = \{p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_1\}$$

- Xác định bao trên L_{upper}
 - Bổ sung 2 điểm đầu tiên
 - Bổ sung điểm thứ 3 (nếu ba điểm cuối cùng không tạo thành rẽ phải thì xóa điểm giữa)

Bao lồi (4)

- Xác định bao dưới L_{lower}
 - Bổ sung hai điểm đầu tiên $L_{lower} = \{p_9, p_{10}\}$
 - Bổ sung điểm thứ 3, nếu ba điểm không tạo thành rẽ phải thì xóa điểm đầu giữa
- Xóa điểm đầu và điểm cuối trong L_{lower}
- Tập hợp điểm thu được theo kim đồng hồ

$$L_{upper} \cup L_{lower}$$

Bài tập chương 3

D
BACH KHOA

N
A
N
G

Cám Ơn!