Phương pháp đơn hình

Nội dung

- Phương pháp đơn hình
- Phương pháp ẩn phụ

Giới thiệu

- **G. Dantzig** đưa ra năm 1947.
- Chỉ làm việc với bài toán có hữu hạn phương án cơ bản
- Ý tưởng:

Bài toán(1)

- Bài toán dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \longrightarrow \quad \min$$

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

- Ký hiệu

$$c = \begin{vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}, x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, b = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Bài toán(1)

- Bài toán dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

- Minh họa

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 52 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 60 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 36 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..6) \end{cases}$$

Bài toán(1)

- $b = (b_1, \ldots, b_m)^T, \; b_i \geqslant 0, \forall i$

  $x^0 = (b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots 0) - PACB$

  $$f(x^0) = c^T x^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

- $x - pa$:

  $$f(x) = f(x^0) - \sum_{j=1}^{n} \Delta_j x_j$$

- **Ước lượng của biến j:**

  $$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{ij} - c_j$$

Bảng đơn hình

Ham muc tieu

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 c_1	x_2 c_2	…	x_m c_m	x_{m+1} c_{m+1}	…	x_s c_s	…	x_n c_n
c_1	x_1	$\mathbf{b_1}$	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1s}	…	a_{1n}
c_2	x_2	$\mathbf{b_2}$	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2s}	…	a_{2n}
…	…	**…**	…	…	…	…	…	…		…	
c_r	x_r	$\mathbf{b_r}$	0	0	…	0	$a_{r,m+1}$	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	**…**	…	…	…	…	…	…		…	
c_m	x_m	$\mathbf{b_m}$	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{ms}	…	a_{mn}
		$f(x^0)$	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_s		Δ_n

Lý thuyết cơ sở

Định lý 1 (dấu hiệu tối ưu)

Nếu $\Delta_j \leq 0$ *với mọi* $j = 1..n$ *thì* x^o *là phương án tối ưu.*

Định lý 2 (dấu hiệu vô nghiệm)

Nếu tồn tại $\Delta_k > 0$ *và* $a_{ik} \leq 0$ *, mọi* $i = 1..m$ *thì bài toán vô nghiệm.*

Định lý 3 (điều chỉnh phương án)

Nếu $\Delta_k > 0$*, tồn tại* $a_{ik} > 0$ *thì có thể tìm được phương án cơ bản mới tốt hơn* x^o.

Thuật toán

Bước 1: *Kiểm tra tính tối ưu*

$x^o=(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$

– Nếu mọi j=1..n: $\Delta_j \leq 0$ thì x^o là phương án tối ưu và

$$f_{min} = f(x^o) = b_1c_1 + ... + b_mc_m$$

– Nếu tồn tại k: $\Delta_k>0$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2: *Kiểm tra điều kiện vô nghiệm*

– Nếu tồn tại k: $\Delta_k >0$ và với mọi i = 1..m: $a_{ik}\leq 0$ thì **bài toán vô nghiệm.**

– *Nếu* $\Delta_k >0$*, và tồn tại i:* $a_{ik}>0$ thì chuyển sang bước 3.

Các bước của thuật toán

Bước 3: *Tìm ẩn thay thế và ẩn loại ra*

– Nếu $\Delta_s = \max\{\Delta_j\}$ với $\Delta_j > 0$ (j=1..n) thì đưa **x_s đưa vào tập ẩn cơ bản .**

– Nếu $b_r / a_{rs} = \min\{b_i / a_{is}\}$ với $a_{is} > 0$ thì **loại x_r ra khỏi tập ẩn cơ bản .** Chuyển sang bước 4.

Bước 4 *Biến đổi bảng đơn hình*

– Biến đổi bảng đơn hình : Tính lại các giá trị Δ_j, f(x), quay lại *bước 1*.

$$\begin{cases} a'_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}} \\ a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{is} \ (i \neq r) \end{cases} \qquad \begin{cases} b'_r = \dfrac{b_r}{a_{rs}} \\ b'_i = b_i - \dfrac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \ (i \neq r) \end{cases}$$

Bảng đơn hình 1

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 c_1	…	x_m c_m	…	x_j c_j	…	x_s c_s	…	x_n c_n	
c_1	x_1	$\mathbf{b_1}$	1	…	0	…	$a_{1,j}$	…	a_{1s}	…	a_{1n}	
…	…	…	…	…	…	…	…	…		…		
c_i	x_i	$\mathbf{b_i}$	1	…	0	…	$a_{i,j}$	…	a_{is}	…	a_{in}	
c_r	x_r	$\mathbf{b_r}$	0	…	0	…	$a_{r,j}$	…	a_{rs}	…	a_{rn}	b_r/a_{rs}
c_m	x_m	$\mathbf{b_m}$	0	…	1	…	$a_{m,j}$	…	a_{ms}	…	a_{mn}	
		$f(x^0)$	Δ_1		Δ_m		Δ_j		Δ_s		Δ_n	

Bảng đơn hình 2

Ẩn CB	P/Ẩn	x_1 c_1	…	x_m c_m	…	x_j c_j	…	x_s c_s	…	x_n c_n	
x_1					…		…	0	…		
…	**…**	…	…	…	…	…	…		…		
x_i	$\bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}$		…		…	$\bar{a}_{i,j}$	…	0	…	$\bar{a}_{in}$	
x_s	$\mathbf{b}_{\mathbf{r}/}a_{rs}$				…	$a_{r,j/}a_{rs}$	…	1	…	$a_{rn/}a_{rs}$	
x_m	$\bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{m}}$				…	$\bar{a}_{m,j}$	…	0	…	$\bar{a}_{mn}$	
	$\bar{f}(x^0)$	$\bar{\Delta}_1$		`		$\bar{\Delta}_j$		0		$\bar{\Delta}_n$	

Minh họa ví dụ 1(1)

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & & & = 52 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & + x_5 & & = 60 \\ 3x_1 \quad + x_3 & & + x_6 & = 36 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..6) & & & \end{cases}$$

Minh họa ví dụ 1(2)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	X_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
2	X_4	52	2	4	3	1	0	0	
1	X_5	60	4	2	3	0	1	0	
3	X_6	36	3	0	1	0	0	1	
		272	12	6	7	0	0	0	

Bước 1: *Kiểm tra tính tối ưu*
Bước 2: *Kiểm tra điều kiện vô nghiệm*
Bước 3: *Tìm ẩn cơ bản, loại ẩn cơ bản*

Minh họa ví dụ 1(3)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	X_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
2	X_4	52	2	4	3	1	0	0	26
1	X_5	60	4	2	3	0	1	0	15
3	X_6	36	3	0	1	0	0	1	12
		272	12	6	7	0	0	0	

Cột quay

Tâm quay

Hàng quay

Minh họa ví dụ 1(4)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	X_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
2	X_4	52	2	4	3	1	0	0	26
1	X_5	60	4	2	3	0	1	0	15
3	X_6	36	3	0	1	0	0	1	12
		272	12	6	7	0	0	0	

Minh họa ví dụ 1(5)

Ẩn CB	P/Án	x_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
X_4		0						
X_5		0						
X_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	
		0						

Minh họa ví dụ 1(6)

Ẩn CB	P/Án	x_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
X_4	28	0	4	7/3	1	0	-2/3	
X_5	12	0	2	5/3	0	1	-4/3	
X_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	
	128	0	6	3	0	0	-4	

Bước 1: *Kiểm tra tính tối ưu*
Bước 2: *Kiểm tra điều kiện vô nghiệm*
Bước 3: *Tìm ẩn cơ bản, loại ẩn cơ bản*

Minh họa ví dụ 1(7)

Ẩn CB	P/Án	x_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
X_4	28	0	4	7/3	1	0	-2/3	7
X_5	12	0	2	5/3	0	1	-4/3	6
X_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	
	128	0	6	3	0	0	-4	

Minh họa ví dụ 1(8)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3	
2	X_4	4	0	0	-1	1	-2	2	
4	X_2	6	0	1	5/6	0	1/2	-2/3	
5	X_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3	
		92	0	0	-2	0	-3	0	

$\Delta_j \leq 0$, $j = 1..6$, $x_{opt} = (12, 6, 0, 4, 0, 0)$ và $f_{min} = 92$

Minh họa ví dụ 2(1)

$$f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad\quad\quad - 2x_4 = 1 \\ \quad -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_j \geq 0 \;\; (j = 1..4) \end{cases}$$

Minh họa ví dụ 2(2)

Hệ số	Ẩn CB	P/Ản	x_1 3	x_2 -1	x_3 2	x_4 -2	
3	x_1	1	1	1	0	-2	
2	x_3	1	0	-2	1	3	1/3
		5	0	0	0	2	

Minh họa ví dụ 2(3)

Ẩn CB	P/Án	x_1 3	x_2 -1	x_3 2	x_4 -1	
X_1	5/3	1	-1/3	2/3	0	
X_4	1/3	0	-2/3	1/3	1	
	13/3	0	4/3	-2/3	0	

Δ_3 =4/3 >0, và trên cột này không có số dương nên bài toán vô nghiệm

Bài tập 1

$$f(x) = -5x_1 - 8x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 1 \\ x_1 + \ \ x_2 \ + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..4) \end{cases}$$

$$DS: f(x) = -5, x = (1, 0, 0, 1)$$

Bài tập 2

$$f(x) = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 2x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_4 + x_5 - x_6 \ = 2 \\ x_2 + \ \ x_4 \ + x_6 \ = 12 \\ \qquad x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 \ = 9 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..6) \end{cases}$$

$$f_{\min} = -16$$

$$x^* = (0, 8, 0, 3, 0, 1)$$

Bài tập 3

$$f(x) = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7 \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..6) \end{cases}$$

$$VN$$

Bài tập 4

$$g(x) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..6) \end{cases}$$

$$f(x) = -11, x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$$

$$\Rightarrow g(x) = 11$$

Phương pháp ẩn phụ

Giới thiệu

- Các phép biến đổi:
- $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \;, x_{n+i} \ge 0$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \;, x_{n+i} \ge 0$$
- x_{n+i} : ẩn phụ
- (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) là nghiệm của bài toán mới thì (x_1, x_2, ..., x_n) là nghiệm bài toán gốc.

Minh họa ví dụ 1 (1)

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

Minh họa ví dụ 1(2)

$$g(x) = -f(x) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..6) \end{cases}$$

Minh họa ví dụ 1(3)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 1	x_2 -3	x_3 2	x_4 0	x_5 0	x_6 0	
0	x_4	7	3	-1	2	1	0	0	
0	x_5	12	-2	4	1	0	1	0	3
0	x_6	10	-4	3	8	0	0	1	10/3
		0	-1	3	-2	0	0	0	

Minh họa ví dụ 1(4)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 1	x_2 -3	x_3 2	x_4 0	x_5 0	x_6 0	
0	x_4	10	5/2	0	9/4	1	1/4	0	4
-3	x_2	3	-1/2	1	1/4	0	1/4	0	
0	x_6	1	-5/2	0	29/4	0	-3/4	1	
		-9	1/2	0	-11/4	0	-3/4	0	

Minh họa ví dụ 1(5)

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 1	x_2 -3	x_3 2	x_4 0	x_5 0	x_6 0	
1	x_1	4	1	0	9/10	2/5	1/10	0	
-3	x_2	5	0	1	7/10	1/5	3/10	0	
0	x_6	11	0	0	19/2	1	-1/2	1	
		-11	0	0	-16/5	-1/5	-4/5	0	

- $\Delta_j \leq 0$, mọi j = 1..6, x_{opt} = (4, 5, 0, 0, 0, 11) và g_{min} = -11.
- Nghiệm bài toán gốc là x = (4, 5, 0, 0) và f_{max} = 11.

Minh họa ví dụ 2(1)

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 1/2x_4 = 10 \\ x_2 - 4x_3 + 8x_4 \le 8 \\ -2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 20 \\ x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 1/2x_4 = 10 \\ x_2 - 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 8 \\ -2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 = 20 \\ x_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Minh họa ví dụ 2(2)

c_i	Ẩn cb	b_i	x_1 2	x_2 3	x_3 -1	x_4 -1	x_5 0	x_6 0	
2	x_1	10	1	-1	1	1/2	0	0	<u>10</u>
0	x_5	8	0	1	-4	8	1	0	
0	x_6	20	0	-2	2	3	0	1	10
	f(x)	20	0	-5	3	2	0	0	

Minh họa ví dụ 2(3)

x_i	b_i	x_1 2	x_2 3	x_3 -1	x_4 -1	x_5 0	x_6 0	
x_3	10	1	-1	1	1/2	0	0	20
x_5	48	4	-3	0	10	1	0	4.8
x_6	0	-2	0	0	2	0	1	0
f(x)	-10	-3	-2	0	1/2	0	0	

Minh họa ví dụ 2(4)

x_i	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
		2	3	-1	-1	0	0	
x_3	10	3/2	-1	1	0	0	-1/4	
x_5	48	14	-3	0	0	1	-5	
x_4	0	-1	0	0	1	0	1/2	
f(x)	-10	-5/2	-2	0	0	0	-1/4	

- $\Delta_j \leq 0$, mọi j =1..6, x_{opt}= (0,0,10,0,48,0).
  và f_{min} = -10