PJWSTK

Dwuwymiarowe zderzenia sprężyste

Projekt PSM

Kamil Warpechowski, Paweł Kalinowski

SPIS TREŚCI

1. KONCEPCJA PROJEKTU

W ramach przygotowanego projektu chcielibyśmy przedstawić symulację dwuwymiarowych zderzeń sprężystych.

Symulacja zostanie przedstawiona w postaci strony html z użyciem JavaScript jako silnika obliczeniowego dla obiektów.

Symulacja dostępna jest pod adresem: http://kwarpechowski.github.io

Zawartość łącza:

- Dokumentacja
- Pliki .html oraz .js prezentujące rozwiązanie problemu

2. FIZYKA

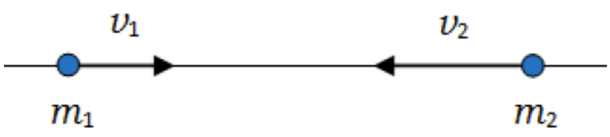
W celu zamodelowania dwuwymiarowych zderzeń sprężystych musimy rozpatrzeć także przypadek jednowymiarowy.

Odpowiednie przeliczenia w podrozdziałach.

2.1. JEDNOWYMIAROWE ZDERZENIA SPRĘŻYSTE

W problemie jednowymiarowym zakładamy ruch dwóch ciał punktowych o masach m_1, m_2 i prędkościach V_1, V_2 poruszające się wzdłuż jednej prostej. Nasz problem ma określić jakie będą prędkości obiektów po zderzeniu.

Prędkości po zderzeniu oznaczymy jako V'_1, V'_2. Chcemy obliczyć te wartości uzależniając je od mas m_1, m_2 i prędkości V_1, V_2.



Rysunek 1. Jednowymiarowe zderzenie sprężyste punktów materialnych – stan przed zderzeniem.

Obliczenia możemy poprowadzić korzystając z zasady zachowania pędu oraz zasady zachowania energii.

Zasada zachowania pędu:

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V'_1 + m_2 V'_2 \tag{1}$$

Zasada zachowania energii:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2 \tag{2}$$

Rozwiązując układ (1)-(2) względem V'_1 oraz V'_2 otrzymujemy:

$$V_1' = \frac{(m_1-m_2)V_1+2m_2V_2}{m_1+m_2}, V_2' = \frac{-(m_1-m_2)V_2+2m_1V_1}{m_1+m_2} \tag{3}$$

2.2. DWUWYMIAROWE ZDERZENIA SPRĘŻYSTE

Celem jest zamodelowanie zderzenia dwuwymiarowego, co za tym idzie, musimy ruch opisać przy pomocy wektorów w przestrzeni R^2 .

Dane są wektory prędkości przed zderzeniem:

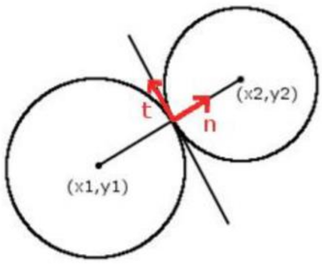
$$\overrightarrow{V_1} = [V_{1,x}, V_{1,y}], \overrightarrow{V_2} = [V_{2,x}, V_{2,y}] \tag{4}$$

Dla odpowiedniego przedstawienia zderzenia potrzebujemy wektorów po wystąpieniu zderzenia tj.:

$$\overrightarrow{V_1'} = [V'_{1,x}, V'_{1,y}], \overrightarrow{V_2'} = [V'_{2,x}, V'_{2,y}] \tag{5}$$

Znając wektory prędkości przed i po zderzeniu ciał, jesteśmy w stanie przeprowadzić wizualną symulację procesu.

Aby wyliczyć wektory $\overrightarrow{V_1'}$ oraz $\overrightarrow{V_2'}$ rozważymy punkt styku kul w momencie zderzenia:



Rysunek 2 – Kule w momencie zderzenia.

Kluczem do dwuwymiarowego zderzenia w przypadku ogólnym jest sprowadzenie układu do sytuacji, gdzie wektory możemy rozłożyć na składowe równoległe i prostopadłe do tzw. linii akcji.

Oznaczmy środki okręgów przez (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2).

Po przyjęciu takich oznaczeń, jesteśmy w stanie wyznaczyć jednostkowe wektory normalny i styczny:

$$\vec{n} = [n_x, n_y] = \frac{[x_2 - x_1, y_2 - y_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} \tag{6}$$

$$\vec{t} = [t_x, t_y] = \frac{[-(y_2 - y_1), x_2 - x_1]}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}} \tag{7}$$

Przyjmując założenie, że powierzchnie kul są idealnie gładkie, możemy powiedzieć, że po zderzeniu *składowe styczne nie ulegają zmianie, a składowe normalne zachowują się jak w zderzeniu jednowymiarowym.*

Rzutujemy wektory $\overrightarrow{V_1'}$ oraz $\overrightarrow{V_2'}$ na osie lokalnego układu współrzędnych określonego przez wektory $\vec{t}$ i $\vec{n}$:

$$V_{i,n} = \vec{V_i} \circ \vec{n}, V_{i,t} = \vec{V_i} \circ \vec{t} \; dla \; i = 1{,}2 \tag{8}$$

Zgodnie z założeniem, składowe styczne nie ulegają zmianie, co za tym idzie:

$$V'_{1,t} = V_{1,t}, V'_{2,t} = V_{2,t} \tag{9}$$

Składowe normalne, ulegają zmianie zgodnie z zasadami zderzenia jednowymiarowego, zgodnie z wzorami w (3), a więc:

$$V'_{1,n} = \frac{(m_1-m_2)V_{1,n}+2m_2V_{2,n}}{m_1+m_2}, V'_{2,n} = \frac{-(m_1-m_2)V_{2,n}+2m_1V_{1,n}}{m_1+m_2} \quad (10)$$

Docelowo potrzebujemy mieć współrzędne wektorów w układnie wyjściowym, należy je więc przetransformować:

$$\begin{cases} \overrightarrow{V'_1} = V'_{1,n}\vec{n} + V'_{1,t}\vec{t} \\ \overrightarrow{V'_2} = V'_{2,n}\vec{n} + V'_{2,t}\vec{t} \end{cases} \quad (11)$$

Gdzie $V'_{1,n}$, $V'_{2,n}$, $V'_{1,t}$, $V'_{2,t}$ dane są wzorami (9) i (10).

Wprowadzamy oznaczenia w celu uproszczenia końcowych zapisów:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

$$||x - y|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Korzystając z wyżej wyprowadzonych zależności możemy określić jednoznacznie wektory końcowe:

$$\begin{cases} V'_{1,x} = V'_{1,n}n_x + V'_{1,t}t_x = \frac{V'_{1,n}(x_2-x_1)-V_{1,t}(y_2-y_1)}{||x-y||}, \\ V'_{1,y} = V'_{1,n}n_y + V'_{1,t}t_y = \frac{V'_{1,n}(y_2-y_1)+V_{1,t}(x_2-x_1)}{||x-y||}, \\ V'_{2,x} = V'_{2,n}n_x + V'_{2,t}t_x = \frac{V'_{2,n}(x_2-x_1)-V_{2,t}(y_2-y_1)}{||x-y||}, \\ V'_{2,y} = V'_{2,n}n_y + V'_{2,t}t_y = \frac{V'_{2,n}(y_2-y_1)+V_{2,t}(x_2-x_1)}{||x-y||}. \end{cases} \quad (12)$$

Wartości $V'_{1,n}$ oraz $V'_{2,n}$ wyliczamy z zależności (10) z uwzględnieniem uproszczeń:

$$V'_{1,n} = (\mu_1 - \mu_2)V_{1,n} + 2\mu_2V_{2,n}, V'_{2,n} = -(\mu_1 - \mu_2)V_{2,n} + 2\mu_1V_{1,n} \quad (13)$$

2.3. DODATKOWE ZALEŻNOŚCI FIZYCZNE WYKORZYSTANE PRZY ROZWIĄZANIU

Druga zasada dynamiki:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ gdzie}$$

- a - przyspieszenie
- F - siła
- m – masa ciała

Pierwsze prawo tarcia:

$$T = \mu N, \text{ gdzie}$$

- T – siła tarcia ślizgowego
- N – siła dociskająca powierzchnie trące
- μ – współczynnik tarcia

Kinematyczne równanie ruchu dla rzutu ukośnego:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_0 t \cos \propto \\ y(t) = y_o + V_0 t \sin \propto - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$, gdzie

- x, y – odpowiednie przesunięcia w układzie kartezjańskim
- V – prędkość
- g – przyspieszenie ziemskie
- t - czas