Kinga Wawrzyńczak 236688
Wojciech Stefaniak 236657

Rok akademicki 2021/22
środa, 12:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 3 – metoda interpolacji Newtona dla nierównych odstępów argumentu

Opis rozwiązania

Interpolacja polega na wyznaczaniu przybliżonych wartości funkcji w punktach, które nie są węzłami oraz na oszacowaniu błędów tych wartości. Aby obliczyć wartości funkcji przy nierównych odstępach argumentu, musieliśmy wykorzystać wzór na iloraz różnicowy:

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{(f(x_1;x_2;\dots;x_n) - f(x_0;x_1;x_n-1))}{x_n - x_0}.$$

Użyty przez nas wzór na interpolację Newtona:

$$W(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n} y_i (f(x_0; x_1; \dots; x_n) \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Błąd przybliżonej wartości funkcji f(x) obliczonej za pomocą wielomianu interpolacyjnego Newtona określamy wzorem:

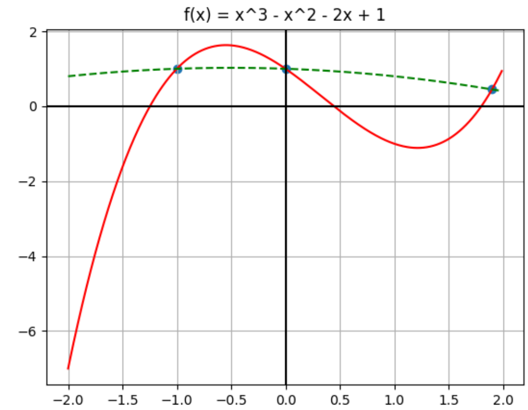
$$R(x) = f(x) - W(x).$$

Użytkownik powinien wprowadzić współrzędne x dla węzłów do pliku *data.txt*. Następnie wybiera funkcję oraz przedział, na którym wyznaczone zostaną wartości funkcji. Na podstawie powyższych wzorów oraz wprowadzonych danych, program oblicza wartości funkcji oraz prezentuje wykres wraz z oszacowanym błędem przybliżonej wartości.

Wyniki

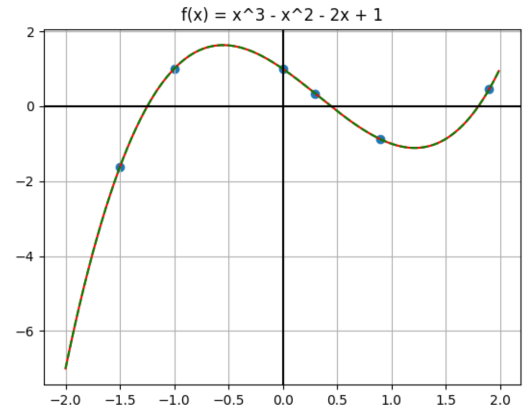
1. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$

a) dla 3 węzłów



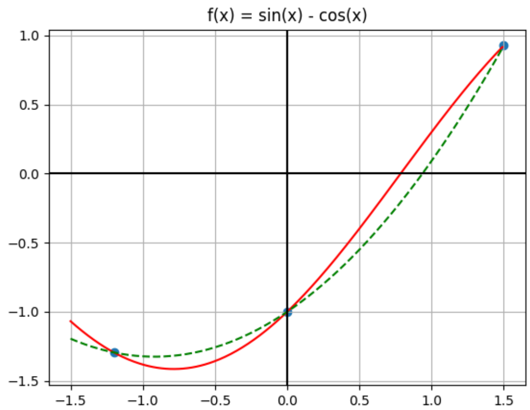
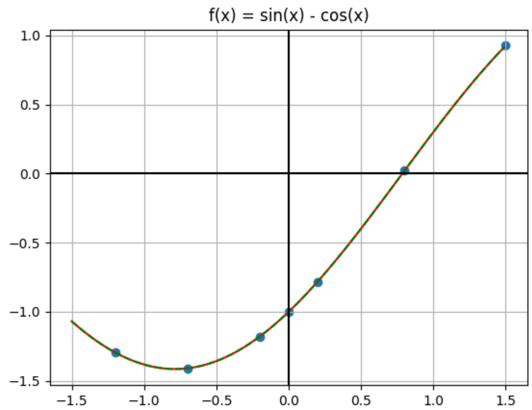
Błąd przybliżonej wartości: -1.211

b) dla 6 węzłów



Błąd przybliżonej wartości: -1.421

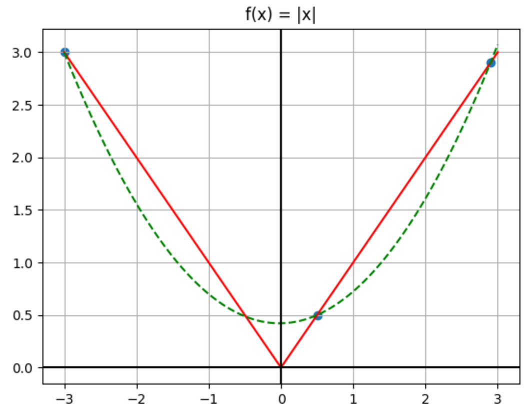
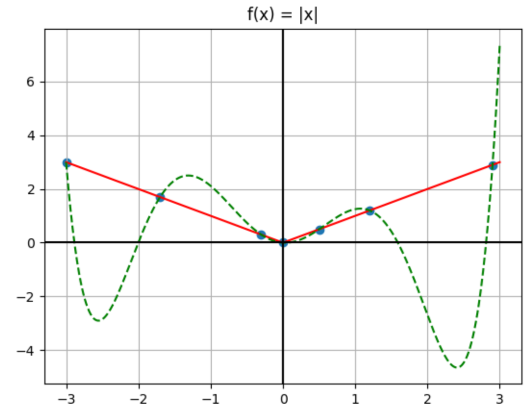
2. $f(x) = sin(x) - cos(x)$

a) dla 3 węzłów	b) dla 7 węzłów
	
Błąd przybliżonej wartości: 0.046	Błąd przybliżonej wartości: < 0.001

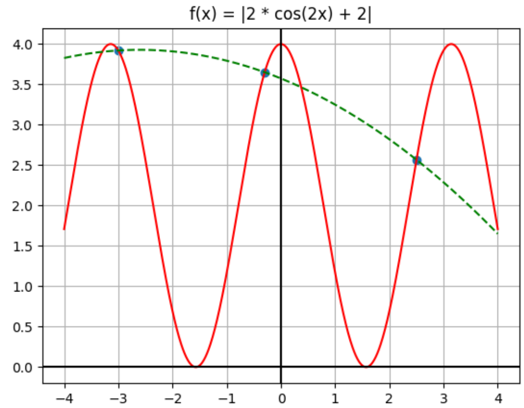
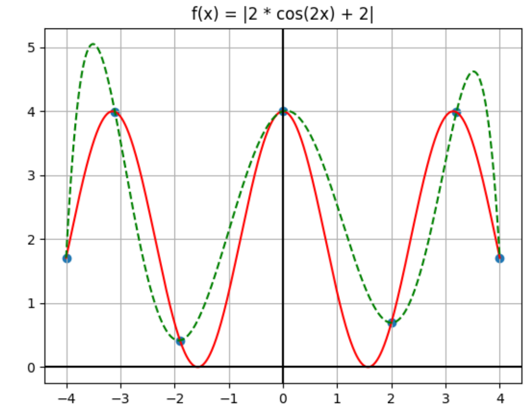
3. $f(x) = x - 10$

Wykres funkcji liniowej został pominięty dla zaoszczędzenia miejsca. Aby uzyskać prawidłowy wynik wystarczą dwa węzły. Zwiększenie ilości węzłów nie wpłynie na otrzymane przez nas wyniki. Błąd przybliżonej wartości równy jest zero.

4. $f(x) = |x|$

a) dla 3 węzłów	b) dla 7 węzłów – efekt Rungego
	
Błąd przybliżonej wartości: 0.206	Błąd przybliżonej wartości: 1.568

5. $f(x) = |2cos(2x) + 2|$

a) dla 3 węzłów	b) dla 6 węzłów
	
Błąd przybliżonej wartości: -1.048	Błąd przybliżonej wartości: -0.323

Wnioski

1. W większości przypadków dokładność interpolacji wzrasta wraz ze wzrostem liczby węzłów, co możemy stwierdzić na podstawie malejących błędów przybliżonej wartości.
2. W przypadku funkcji o zmiennej monotoniczności niezwykle ważny jest dobór odpowiednich węzłów.
3. Interpolacja jest najbardziej efektywna w przypadku funkcji liniowych oraz mocno wypłaszczonych – wystarczy podać położenie małej liczby węzłów, aby wynik był miarodajny.
4. W przypadku wielomianów o wysokim stopniu oraz funkcji nieciągłych i niegładkich może wystąpić efekt Rungego. Podawanie większej ilości węzłów wpłynie niekorzystnie na jakość interpolacji, ponieważ przybliżenie wyników zaczyna się pogarszać, co jest widoczne szczególnie na końcach przedziału. Przykładem takiej funkcji jest funkcja $f(x) = |x|$, której wykres jest mocno spiczasty.