Kinga Wawrzyńczak 236688 Rok akademicki 2021/22
Wojciech Stefaniak 236657 środa, 12:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 4 – metody całkowania numerycznego

Opis rozwiązania

Celem zadania było zaimplementowanie dwóch metod całkowania numerycznego, w celu obliczenia przybliżonej wartości całki oznaczonej.

1. Metoda Newtona-Cotesa oparta na trzech węzłach (wzór Simpsona)

W metodzie Newtona-Cotesa zadany przedział całkowania (a; b) dzielimy na N podprzedziałów o równej długości. Następnie obliczamy wartości całkowalnej funkcji dla argumentów $x_i = a + i_h$. Przybliżoną wartość całki obliczamy za pomocą wzoru Simspona:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

2. Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Kwadratura obliczana jest na przedziale (-oo; oo) i ma postać:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx$$

Korzystając ze znanych współczynników dla kwadratury Gaussa-Hermite'a możemy obliczyć przybliżoną wartość całki za pomocą następującego wzoru:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Wyniki

1. Metoda Newtona-Cotesa

Funkcja	Wynik rzeczywisty	Przedział	Liczba iteracji	Dokładność	Wynik
$x^2 + 3$	6.2035	-oo; oo	6580	0.001	6.2489
$cos(2x)$	0.6520	-oo; oo	89834	0.00001	0.8969
4log $(x + 3)$	7.5708	-oo; oo	14504	0.001	7.6325
|x – 2|	3.5466	-oo; oo	18356	0.001	3.5881

2. Kwadratura Gaussa-Hermite'a

Funkcja	Wynik rzeczywisty	-oo; oo			
		2 węzły	3 węzły	4 węzły	5 węzłów
$x^2 + 3$	6.2035	6.2035	6.2035	6.2035	6.2035
$cos(2x)$	0.6520	0.2764	0.7267	0.6414	0.6532
4log $(x + 3)$	7.5708	7.5863	7.5735	7.5716	7.5711
|x – 2|	3.5466	3.5449	3.5449	3.5449	3.5457

Wnioski

1. Wyniki wyliczone przy użyciu naszego programu zgadzają się z wynikami uzyskanymi w programie Wolfram Alpha.
2. Kwadratura Gaussa-Hermite'a jest metodą zdecydowanie dokładniejszą, jak i wydajniejszą. Ilość iteracji w jej przypadku jest po prostu ilością użytych węzłów. W przypadku wzoru Simpsona, liczba iteracji może osiągać dziesiątki tysięcy, a wynik i tak nie będzie wystarczająco poprawny.
3. W metodzie Newtona-Cotesa bardzo ważny jest wybór odpowiedniej dokładności. Aby osiągnąć miarodajne wyniki zaleca się używanie wartości z zakresu 0.00001; 0.001.
4. Minusem metody Gaussa jest konieczność całkowania specyficznych funkcji – wymagane jest użycie funkcji wagowej.
5. Wzór Simpsona jest oparty na 3 węzłach, czyli liczba przedziałów n = 2. Nie jest jednak stopnia trzeciego (n + 1), a aż

czwartego (metoda jest dokładna dla wielomianów stopnia trzeciego). W praktyce nie stosuje się kwadratur Newtona-Cotesa wysokiego rzędu, ponieważ dla wysokich stopni zachodzi efekt Rungego, z powodu równoodległych węzłów.

6. Kwadratury Gaussa polegają na optymalizacji położenia węzłów interpolacyjnych oraz współczynników Ai(zawsze dodatnie). Węzły xi są pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego (rzeczywiste oraz w przedziale [a,b]). Kwadratury Gaussa są dokładne dla wielomianów stopnia 2N + 1.
7. Błąd kwadratury zależy od długości przedziału. Aby policzyć całkę na szerokim przedziale, należy podzielić go na kilka mniejszych.