Całkowanie numeryczne

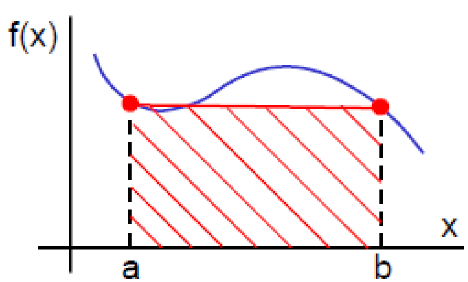
Formuły całkowe Newtona-Cotesa

Pomysł: Zastąp skomplikowaną funkcję lub dane w tabeli za pomocą funkcji aproksymującej (interpolującej).

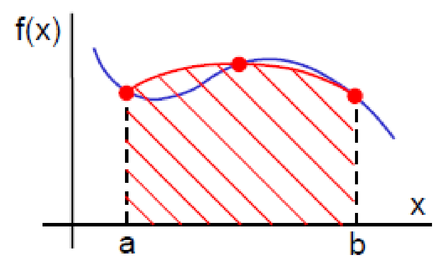
$$\mathbf{I} = \int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} \approx \int_a^b \mathbf{f_n(x)\,dx}$$

gdzie $f_n(x)$ jest wielomianem interpolującym n-tego stopnia.

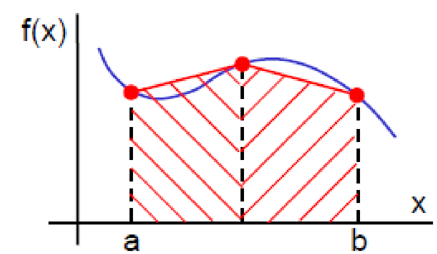
wielomian 1. stopnia



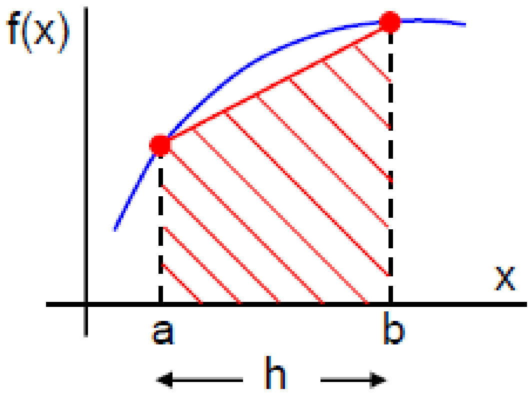
wielomian 2. stopnia



wielomian 1. stopnia (2 segmenty)

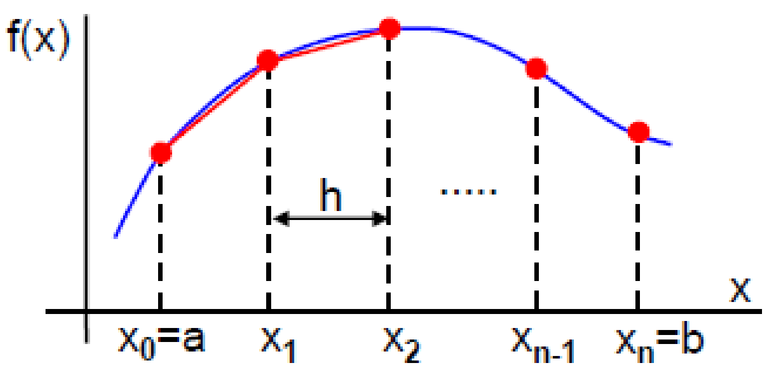


Metoda trapezów



$$I \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\underbrace{(b-a)}_{h}$$

Metoda trapezów jest dokładna dla pierwszego rzędu. Może dokładnie obliczyć całkę dla wielomianu liniowego.



Ogólnie mamy n + 1 punktów i n przedziałów (segmentów).

Jeśli punkty są równoodległe h = (b-a) / n

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] = (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}\right]$$

Przykład 1: Oblicz całkę f (x) = exp(x) od a = 1.5 do b = 2.5, stosując regułę trapezów. Użyj kroku 0.25. Prawdziwa wartość całki to 7.700805.

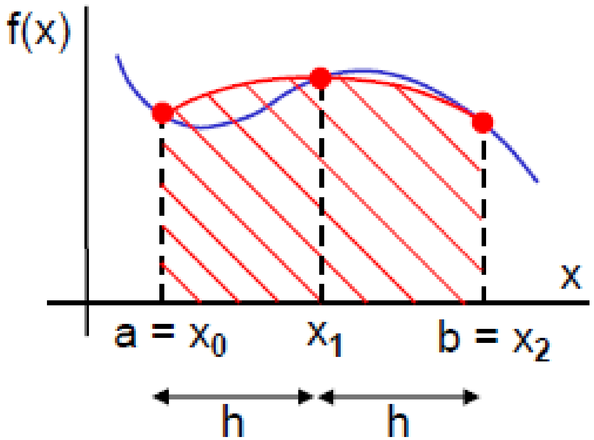
a = 1.5, b = 2.5, h = 0.25 -> mamy n = 4 przedziały.

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_1)}{2n}\right] = (2.5-1.5)\left[\frac{e^{1.5} + 2\,(e^{1.75} + e^{2} + e^{2.25}) + e^{2.5}}{2\,(4)}\right]$$

$I \approx 7.740872$, $\quad E_t = -\,0.040067$, $\quad \varepsilon_t = -\,0.5\ \%$

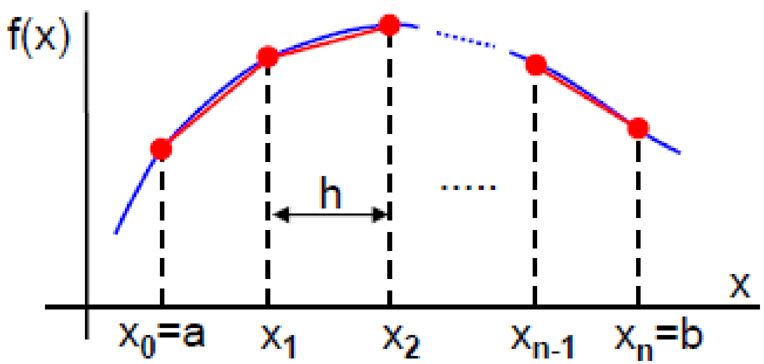
Błąd formuły: $$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,\overline{f''}(x) = -\frac{(1.0)^3}{12\,(4)^2}\,\frac{\int_{1.5}^{2.5} f''(x)\,dx}{(1.0)} = -0.040108$$

Reguła 1/3 Simpsona:



$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right]$$

$$I \approx (b-a)\, \frac{f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)}{6}$$



Ogólnie mamy n + 1 punktów i n przedziałów.

Jeśli punkty są równoodległe h = (b-a) / n

Jeśli liczba punktów jest parzysta, całkowanie nie jest możliwe zgodnie z regułą 1/3 Simpsona.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x0}^{x2} f(x)\,dx + \int_{x2}^{x4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x(n-2)}^{xn} f(x)\,dx$$

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] + \ldots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$I \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{3n}\right] \qquad E_a = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,\bar{f}^{(4)}(x)$$

Przykład 2: Oblicz $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

(a) Metoda trapezów z n = 2 i n = 4.

(b) Metoda 1/3 Simpsona z n = 2 i n = 4.

(a) Dla n=2, h=π/2,

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\,f(x_1)+f(x_2)\right] = \frac{\pi/2}{2}\left[\sin(0)+2\sin(\pi/2)+\sin(\pi)\right] = \frac{\pi}{2} = 1.570796$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12\,n^2}\,\overline{f''}(x) = -\frac{(\pi-0)^3}{12\,(2)^2}\,\frac{\int_0^{\pi} -\sin(x)\,dx}{\pi-0} = 0.411234$$

(b) For n=4, h= π /4,

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

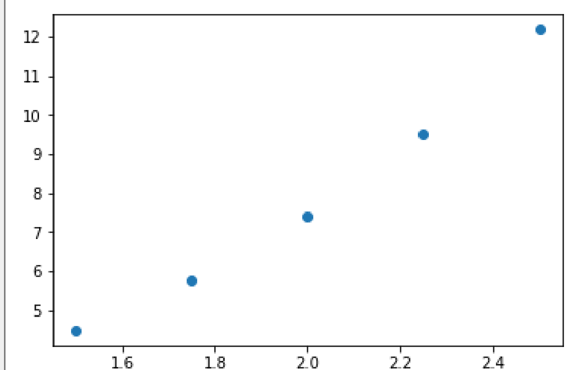
$$= \frac{\pi/4}{3}\left[\sin(0)+4\sin(\pi/4)+2\sin(\pi/2)+4\sin(3\pi/4)+\sin(\pi)\right] = 2.004560$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\bar{f}^{(4)}(x) = -\frac{(\pi-0)^5}{180\,(4)^4}\,\frac{\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx}{\pi-0} = 0.004228$$

Python – obliczenie całki metodą trapezów

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#from scipy import integrate


a=1.5
b=2.5
h=0.25

xnew = np.arange(a, b+h, h)
ynew = np.exp(xnew)

calka=np.trapz(ynew, x=xnew)
calka1=np.exp(b)-np.exp(a)

plt.plot(xnew, ynew, 'o')

print('dokladna=',calka1)
print('przyblizona=',calka)
```

```
In [26]: runfile('C:/Users/u46/.spyder-py3/calka.py', wdir='C:/Users/u46/.spyder-py3')
dokladna= 7.70080489037
przyblizona= 7.7408715317
```




```
In [27]:
```