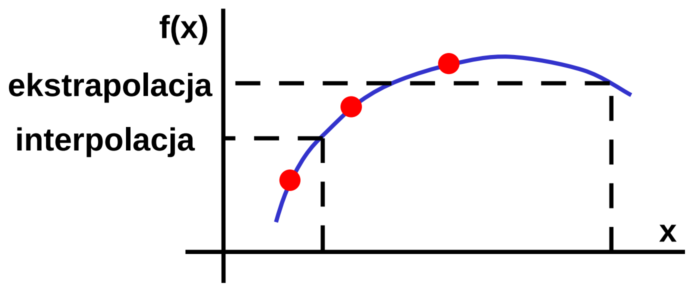
Interpolacja

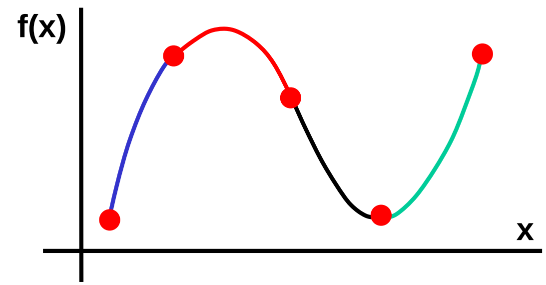
Oszacowanie wartości pośrednich między dokładnymi punktami danych. Jest metodą numeryczną przybliżania funkcji wielomianem stopnia n przyjmującym w n + 1 punktach, zwanych węzłami interpolacji, wartości takie same jak przybliżana funkcja

Najpierw dopasowujemy funkcję, która dokładnie przechodzi przez dane punkty danych, a następnie oceniamy wartości pośrednie za pomocą tej funkcji

Interpolacja wielomianowa



Interpolacja splajnami



- **Interpolacja wielomianowa:**
- Metoda Newtona
- Metoda Lagrange

- **Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami):** w każdym z przedziałów interpoluje się funkcję wielomianem interpolacyjnym (głównie 3 stopnia). „Połączenie” tych wielomianów tworzy funkcję sklejaną.

Interpolacja wielomianowa

Biorąc pod uwagę następujące punkty danych n + 1

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad \ldots, \quad (x_{n+1}, y_{n+1})$$

istnieje unikalny wielomian n-tego stopnia, który przechodzi przez nie

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

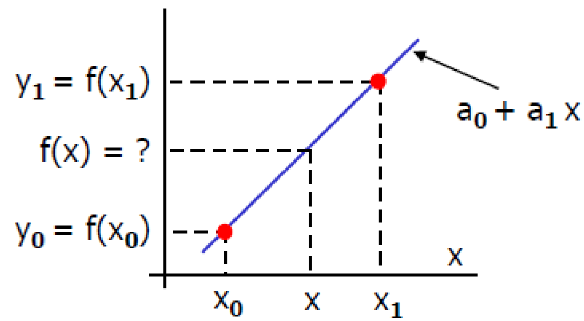
Należy znaleźć współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$

- **Liniowa interpolacja:**
- Dane: (x_0, y_0) i (x_1, y_1)
- Prosta linia przechodzi przez te dwa punkty.
- Formuła interpolacji liniowej

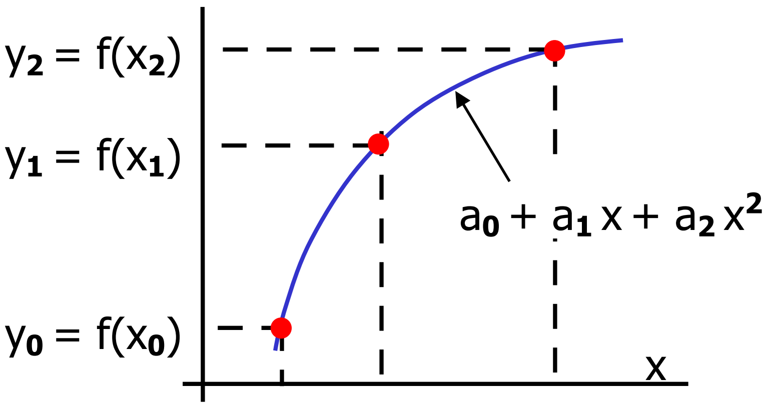
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

or

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$



Interpolacja kwadratowa:



- Dane: (x_0, y_0) , (x_1, y_1) and (x_2, y_2)
- Parabola przechodzi przez trzy punkty.
- Formuła interpolacji kwadratowej

$$\boxed{f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)}$$

$x=x_0 \qquad f_2(x) = f(x_0) = b_0 \qquad \rightarrow \quad b_0 = f(x_0)$

$x=x_1 \qquad f_2(x) = f(x_1) = b_0 + b_1 x_1 \qquad \rightarrow \quad b_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$x=x_2 \qquad f_2(x) = f(x_2) = b_0 + b_1(x_2-x_0) + b_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$

$$\rightarrow \quad b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Możemy uogólnić liniowe i kwadratowe wzory interpolacyjne dla wielomianu stopnia n-tego przechodzącego przez n + 1 punktów

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

gdzie stałe są równe

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = f[x_1, x_0] \qquad b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \qquad \ldots \qquad b_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Funkcje w nawiasach są ilorazami różnicowymi obliczanymi rekurencyjnie

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$ pierwszego rzędu

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$ drugiego rzędu

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$ n-tego rzędu

- Wzór ogólny

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \ldots \\ &+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] \end{aligned}}$$

Przykład 1:

Mamy następującą tabelę z wartościami logarytmu.

x	f(x)=log(x)
4.0	0.60206
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(a) Obliczyć log(5) używając punktów x=4 i x=6

(b) Obliczyć log(5) używając punktów x=4.5 i x=5.5

Wartość dokładna log(5) = 0.69897

(a) Interpolacja liniowa. $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0]$

$x_0 = 4,\ \ x_1 = 6 \ \ \to f[x_1, x_0] = [f(6) - f(4)] / (6 - 4) = 0.0880046$

$f(5) \approx f(4) + (5 - 4)\, 0.0880046 = 0.690106 \qquad \varepsilon_t = 1.27\ \%$

(błąd względny= (0.69897-0.690106)/ 0.69897*100[%])

(b) Interpolacja liniowa dla $x_0 = 4.5,\ \ x_1 = 5.5$

$f[x_1, x_0] = [f(5.5) - f(4.5)] / (5.5 - 4.5) = 0.0871502$

$f(5) \approx f(4.5) + (5 - 4.5)\, 0.0871502 = 0.696788 \qquad \varepsilon_t = 0.3\ \%$

x	f(x)=log(x)
4.0	0.6020600
4.5	0.6532125
5.5	0.7403627
6.0	0.7781513

(c) Obliczyć log(5) używając punktów x=4.5, x=5.5 i x=6

(c) Interpolacja kwadratowa.

$x_0 = 4.5,\ x_1 = 5.5\ ,\ x_2 = 6$

$f[x_1, x_0] = 0.0871502$ (już obliczone)

$f[x_2, x_1] = [f(6) - f(5.5)] / (6 - 5.5) = 0.0755772$

$f[x_2, x_1, x_0] = \{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]\} / (6 - 4.5) = -0.0077153$

$f(5) \approx 0.696788 + (5 - 4.5)(5 - 5.5)(-0.0077153) = 0.698717$ $\varepsilon_t = 0.04\ \%$

Tablica ilorazów różnicowych

Ilorazy różnicowe stosowane w wielomianach interpolujących Newtona można przedstawić w formie tabeli. To sprawia, że obliczenia są znacznie prostsze.

x	f( )	f [,]	f [, ,]	f [, , ,]
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

Przykład 2:

x	f( )	f [,]	f [, ,]	f [, , ,]
4	0.6020600	0.1023050	-0.0101032	0.001194
4.5	0.6532125	0.0871502	-0.0077153	
5.5	0.7403627	0.0755772		
6	0.7781513			

Użyj obliczonej tabeli do interpolacji dla log (5).

(a) Punkty x=4 i x=4.5.

log (5) ≈ 0.60206 + (5 - 4) 0.102305 = 0.704365 ε_t = 0.8 % (ekstrapolacja)

(b) Punkty x=4.5 i x=5.5.

log (5) ≈ 0.6532125 + (5 - 4.5) 0.0871502 = 0.696788 ε_t = 0.3 %

(c) Punkty x=4.5 , x=5.5 i x=6.

$\log(5) \approx 0.6532125 + (5-4.5)\,0.0871502 + (5-4.5)(5-5.5)(-0.0077153) = 0.698717 \quad \varepsilon_t = 0.04\ \%$

(d) Wszystkie punkty.

$$\log(5) \approx 0.60206 + (5-4)\,0.102305 + (5-4)(5-4.5)(-0.0101032)$$
$$+ (5-4)(5-4.5)(5-5.5)(0.001194) = 0.6990149 \qquad \varepsilon_t = 0.006\ \%$$

Błędy metody Newtona

$$f_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_2, x_1, x_0] + \ldots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Struktura interpolacyjnego wielomianu Newtona jest podobna do rozwinięcia Taylora.

Reszta (błąd obcięcia) dla rozwinięcia Taylora $R_n = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}$

Podobnie reszta dla wielomianu interpolującego rzędu n^{th} $R_n = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$

gdzie ξ jest punktem gdzieś w przedziale zawierającym interpolowany punkt x i inne punkty danych. Alternatywny wzór za pomocą ilorazu różnicowego

$$R_n \approx f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

Metoda Newtona dla równie rozmieszczonych danych

- Jeśli punkty danych są równomiernie rozmieszczone w kolejności rosnącej, to znaczy,

$$(x_0, y_0), \quad (x_0+h, y_1), \quad (x_0+2h, y_1), \quad \dots\dots, \quad (x_0+nh, y_n)$$

ilorazy różnicowe się upraszczają.

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2} = \frac{\Delta f^2(x_0)}{2h^2}$$

Ogólny zapis

$$f[x_n, x_{n-1}, ..., x_0] = \frac{\Delta f^n(x_0)}{n!\, h^n}$$

gdzie $\Delta f^n(x_0)$ jest n "forward difference".

- Wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$\boxed{f_n(x) = f(x_0) + \Delta f(x_0)\, \alpha + \Delta^2 f(x_0)\, \alpha\, (\alpha - 1) / 2! + \ldots + \Delta^n f(x_0)\, \alpha\, (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) / n! + R_n}$$

gdzie $\alpha = (x - x_0) / h$ i $R_n = f^{(n+1)}(x)\, h^{n+1}\, \alpha\, (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n) / (n+1)!$

Metoda Lagrange

- Alternatywna metoda interpolacyjna do Newtona.

$$\boxed{f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

- Dla n=1 (liniowa interpolacja): $f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$

- Dla n=2: $f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$

Przykład 3:

x	f(x)
1	4.75
2	4.00
3	5.25
5	19.75
6	36.00

Oblicz f(4) za pomocą interpolacji Lagrange

(a) rzędu 1

(b) rzędu 2

(c) rzędu 3

(a) Liniowa interpolacja. Wybierz $x_0 = 3$, $x_1 = 5$

$$f_1(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) = (x-5)/(3-5)\ 5.25 + (x-3)/(5-3)\ 19.75$$

$f(4) \approx 12.5$

(b) Kwadratowa interpolacja. Wybierz $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_1 = 5$

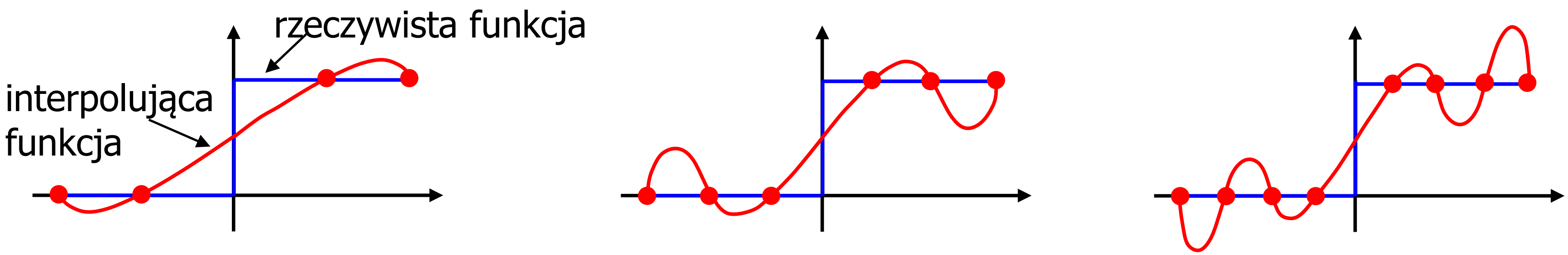
$$f_2(x) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1) + L_2(x)\, f(x_2)$$

$$= (x-3)(x-5)/(2-3)(2-5)\ 4.00 + (x-2)(x-5)/(3-2)(3-5)\ 5.25 + (x-2)(x-3)/(5-2)(5-3)\ 19.75$$

$f(4) \approx 10.5$

Interpolacja funkcjami sklejanymi

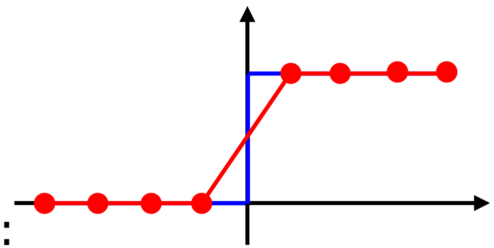
- W przypadku dużej liczby punktów danych (zazwyczaj n> 6 lub 7), wielomiany o wysokim stopniu są konieczne, ale czasami ich wadą są zachowania oscylacyjne.



- Zamiast pojedynczego wielomianu o wysokim stopniu, który przechodzi przez wszystkie punkty danych, możemy użyć różnych wielomianów niższego stopnia między każdą parą danych.

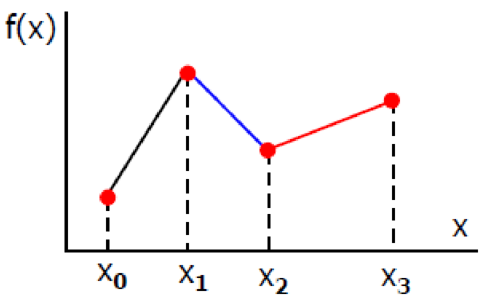
- Wielomiany niższego stopnia, które przechodzą tylko przez dwa punkty, nazywane są splajnami.
- Splajny trzeciego rzędu (kubiczne) są najbardziej popularne.

splajny pierwszego stopnia :



Splajny liniowe:

- Biorąc pod uwagę zestaw uporządkowanych punktów danych, każde dwa punkty mogą być połączone za pomocą linii prostej.

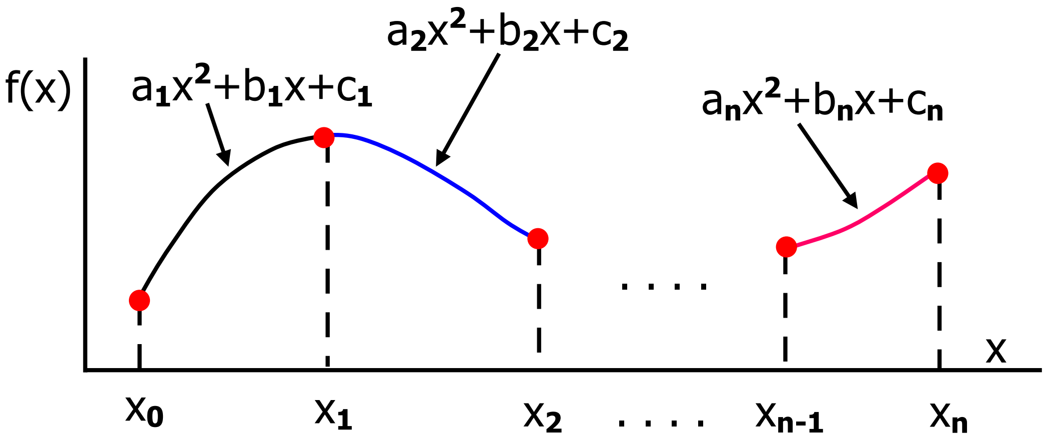


$$f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad \text{dla } x_0 \le x \le x_1$$
$$f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad x_1 \le x \le x_2$$
$$f(x) = f(x_2) + m_2(x - x_2) \quad x_2 \le x \le x_3$$

gdzie $m_i = [f(x_{i+1}) - f(x_i)] / (x_{i+1} - x_i)$

Splajny kwadratowe:

- Każda para punktów jest połączona za pomocą funkcji kwadratowej.



- Dla n+1 punktów, mamy n splajnów i 3n nieznanych stałych.
- Potrzebujemy 3n równań aby je znaleźć.

- Pierwsza i ostatnia funkcja musi przechodzić przez graniczne punkty (2 równania).

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1\, x_0^2 + b_1\, x_0 + c_1 = f(x_0) \\ a_n\, x_n^2 + b_n\, x_n + c_n = f(x_n) \end{array}}$$

- Wartości funkcji muszą być równe w punktach wewnętrznych (2n-2 równań).

$$\boxed{\begin{array}{c} a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1}) \\ a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \end{array}}$$

dla i = 2 do n

- Pierwsze pochodne muszą być równe w punktach wewnętrznych (n-1 równań).

$$\boxed{2 a_{i-1} x_{i-1} + b_{i-1} = 2 a_i x_{i-1} + b_i}$$

dla i = 1 do n

- To daje w sumie 3n-1 równań. Potrzebne jest jeszcze jedno równanie i musimy dokonać arbitralnego wyboru. Wśród wielu możliwości skorzystamy z poniższych

- Ustalamy drugą pochodną w pierwszym punkcie za zero (1 równanie).

$\boxed{a_1 = 0}$ tj. pierwsze dwa punkty są połączone linią prostą.

- Następnie rozwiązujemy ten zestaw 3n liniowych równań algebraicznych dowolną metodą.

Splajny kubiczne:

- Dla n + 1 punktów, będzie n przedziałów i dla każdego przedziału znajdujemy wielomian 3-go stopnia

$$a_i x_i^3 + b_i x_i^2 + c_i x + d_i \qquad \text{dla } i = 1 \text{ do } n$$

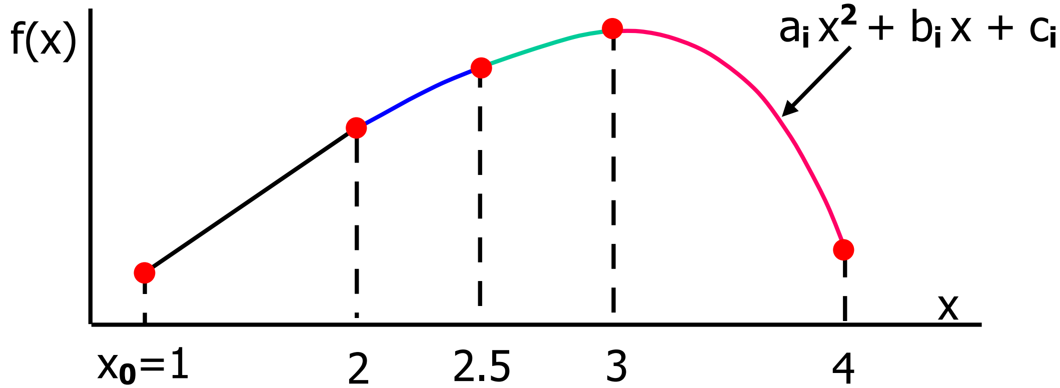
- Mamy 4n nieznanych. Można je rozwiązać za pomocą następujących równań
- Pierwsza i ostatnia funkcja musi przejść przez punkty końcowe (2 równania).
- Wartości funkcji muszą być równe w punktach wewnętrznych (2n-2 równania).
- Pierwsze pochodne muszą być równe w punktach wewnętrznych (n-1 równań).
- Drugie pochodne muszą być równe w punktach wewnętrznych (n-1 równań).
- To daje w sumie równania 4n-2. Dwa dodatkowe równania (możliwe opcje)

• Drugie pochodne w punktach końcowych to zero (2 równania).

Przykład 4:

x	f(x)
1	1
2	5
2.5	7
3	8
4	2

Opracuj kwadratowe splajny dla tych punktów danych i oblicz f (3.4) oraz f (2.2)



• Mamy 5 punktów i n=4 splajny. Mamy 3n=12 nieznanych. Równania:

• Końcowe punkty: $a_1 1^2 + b_1 1 + c_1 = 1$, $a_4 4^2 + b_4 4 + c_4 = 2$

- Wewnętrzne punkty: $a_1 2^2 + b_1 2 + c_1 = 5$, $a_2 2^2 + b_2 2 + c_2 = 5$

  $a_2 2.5^2 + b_2 2.5 + c_2 = 7$, $a_3 2.5^2 + b_3 2.5 + c_3 = 7$

  $a_3 3_2 + b_3 3 + c_3 = 8$, $a_4 3_2 + b_4 3 + c_4 = 8$

- Pochodne w punktach wewnętrznych: $2a_1 2 + b_1 = 2a_2 2 + b_2$

  $2a_2 2.5 + b_2 = 2a_3 2.5 + b_3$

  $2a_3 3 + b_3 = 2a_4 3 + b_4$

- Arbitralny wybór dla brakującego równania: $a_1 = 0$
- $a_1 = 0$ jest już znane. Pozostaje znaleźć 11 niewiadomych.

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 4 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.25 & 2.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 1 \\
1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & -6 & -1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\quad \rightarrow \quad
\begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ a_4 \\ b_4 \\ c_4 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \\ -4 \\ 24 \\ -28 \\ -6 \\ 36 \\ 46 \end{Bmatrix}
$$

- Równania dla splajnów

  1 splajn: $f(x) = 4x - 3$ (Linia prosta.)

  2 splajn: $f(x) = 4x - 3$ (Ten sam wynik co w 1)

  3 splajn: $f(x) = -4x^2 + 24x - 28$

  4 splajn: $f(x) = -6x^2 + 36x - 46$

- Aby obliczyć f(3.4) korzystamy z $4^{\text{-tego}}$ splajna. $f(3.4) = -6\,(3.4)^2 + 36\,(3.4) - 46 = 7.04$

  Aby obliczyć f(2.2) korzystamy z $2^{\text{-ego}}$ splajna. $f(2.2) = 4\,(2.2) - 3 = 5.8$

Python – różne rodzaje interpolacji wielomianowej

Spyder (Python 3.6)

File Edit Search Source Run Debug Consoles Projects Tools View Help

Editor - C:\Users\u46\.spyder-py3\interpol.py

interpol.py

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import interpolate
x = np.arange(0, 10)
y = np.exp(-x/3.0)
f1 = interpolate.interp1d(x, y,kind='linear')
f2 = interpolate.interp1d(x, y,kind='quadratic')
f3 = interpolate.interp1d(x, y,kind='cubic')

xnew = np.arange(0, 9, 0.1)
ynew1 = f1(xnew)   # use interpolation function returned b
ynew2 = f2(xnew)
ynew3 = f3(xnew)
plt.plot(x, y, 'o', xnew, ynew1, '-',xnew, ynew2, '*')
plt.show()
```