Rozwiązywanie układu równań liniowych

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}}\ \right\}$$

Ogólny układ równań.
n równań, n niewiadomych.

Liniowe równanie: Równanie postaci f(x)=0, gdzie f jest wielomianem z wyrazami liniowymi

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}}\ \right\}$$

Ogólny układ równań liniowych.
n równań, n niewiadomych.

Forma macierzowa: [A] {x} = {b};
[A] – macierz współczynników a_{ij};
{x} – wektor niewiadomych x_i, {b} – wektor wyrazów wolnych b_j

Graficzna metoda rozwiązywania małego (n <4) układu równań

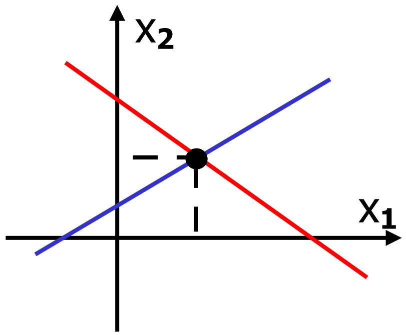
- Rozważmy układ 2 równań

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

- Wykreślamy je w kartezjańskim układzie współrzędnych za pomocą osi x_1 i x_2.

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}} x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

$\longrightarrow$

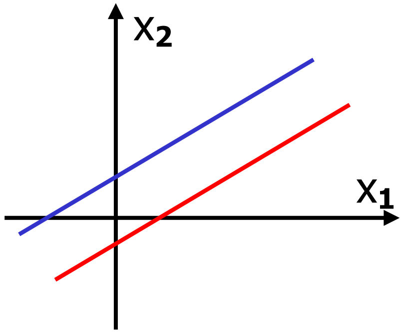


- Dla n = 3 każde równanie będzie płaszczyzną w układzie współrzędnych 3D. Rozwiązanie jest punktem, w którym przecinają się te płaszczyzny.

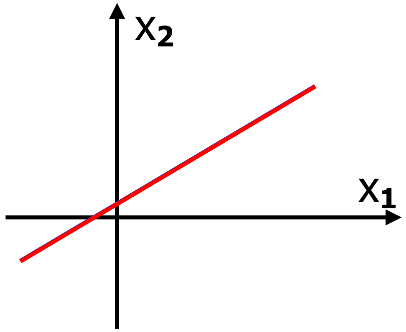
- Dla n>3, graficzna metoda jest niepraktyczna.

Metoda graficzna jest przydatna do zilustrowania:

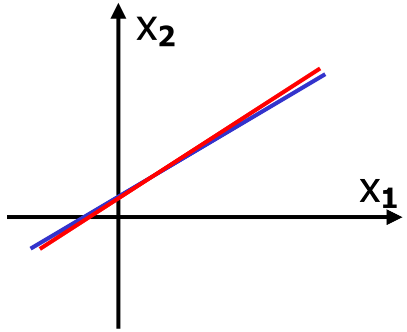
(1) brak rozwiązania



(2) nieskończenie wiele rozwiązań



(3) źle określony układ



- W przypadku systemu (1) i (2), równania są liniowo zależne.
- W przypadku systemu (3), nachylenia linii są bardzo bliskie.

Matematycznie

- Wyznaczniki macierzy (1) i (2) są równe zero.
- Wyznacznik macierzy (3) jest bliski zero.

Przykład 1: Rozwiąż dany układ 2x2

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 6\,x_2 &= 3 \\ 4\,x_1 - 8\,x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Reguła Cramera do rozwiązywania układu równań

Wyznacznik układu

Wyznacznik macierzy 2x2 jest

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Wyznacznik macierzy 3x3 jest

$$D = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Wyznacznik macierzy nxn może być obliczony rekurencyjnie według wcześniejszych reguł

Reguła Cramera: Każda niewiadoma $\mathbf{x_i}$ obliczana jest jako ułamek dwóch wyznaczników. Mianownik jest wyznacznikiem układu, D. Licznik jest wyznacznikiem zmodyfikowanego układu uzyskanego przez zastąpienie kolumny współczynników obliczanej niewiadomej przez wektor wyrazów wolnych.

Dla układu równań 3x3

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}$$

- W przypadku dużych systemów zasada Cramera nie jest praktyczna, ponieważ obliczanie wyznaczników jest czasochłonne.

Przykład 2: Rozwiąż układ równań z przykładu 1 metodą Cramera.

Metoda eliminacji Gaussa

- Rozważmy następujący układ n równań:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (2)$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \qquad (n)$$

Krok 1 Eliminacja naprzód (Forward Elimination): Redukcja układu do górnego systemu trójkątnego.

(1.1) Najpierw eliminuj x_1 z 2. do n. równania.

- Pomnóż 1 równanie przez a_{21}/a_{11} i odejmij go od 2 równania. To jest nowe 2 równanie.
- Pomnóż 1 równanie przez a_{31}/a_{11} i odejmij go od 3 równania. To jest nowe 3 równanie.

...

- Pomnóż 1 równanie przez a_{n1}/a_{11} i odejmij go od n równania. To jest nowe n równanie.

Uwaga: W tych krokach 1. równanie jest stałym równaniem (pivot equation) i a_{11} jest stałym elementem (pivot element). Ta wersja metody Gaussa nie sprawdza czy pivot nie jest zerem.

Zmodyfikowany układ w 1 kroku
Prym oznacza, że układ jest raz zmodyfikowany

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{Bmatrix}$$

(1.2) Teraz wyeliminuj x_2 z 3 do n-tego równania.

Bis oznacza, że układ jest dwukrotnie zmodyfikowany
Zmodyfikowany układ w 2 kroku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b''_n \end{Bmatrix}$$

Powtórz (1.1) i (1.2) aż do (1.n-1).

Zmodyfikowany układ w n-1 kroku

Pominięto w oznaczeniach prymy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b \end{Bmatrix}$$

Krok 2 Wsteczne podstawienia (Back substitution): Znajdź nieznane, począwszy od ostatniego równania.
(2.1) Ostatnie równanie dotyczy tylko x_n. Rozwiąż go
(2.1) Użyj tego x_n w (n-1) równaniu i rozwiąż dla x_{n-1}
....
(2.n) Użyj wszystkich wcześniej obliczonych wartości x_i w pierwszym równaniu i rozwiąż dla x_1.

Przykład 3: Rozwiąż układ równań stosując podstawową metodę Gaussa.

$$
\begin{aligned}
6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 16 \\
12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 26 \\
3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 &= -19 \\
-6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 &= -34
\end{aligned}
$$

Krok 1

(1.1) Eliminacja x_1

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
\boxed{6} & -2 & 2 & 4 & 16 \\
0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\
0 & -12 & 8 & 1 & -27 \\
0 & 2 & 3 & -14 & -18
\end{array}\right]
$$

(1.2) Eliminacja x_2

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\
0 & \boxed{-4} & 2 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\
0 & 0 & 4 & -13 & -21
\end{array}\right]
$$

(1.3) Eliminacja x_3

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
6 & -2 & 2 & 4 & 16 \\
0 & -4 & 2 & 2 & -6 \\
0 & 0 & \boxed{2} & -5 & -9 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -3
\end{array}\right]
$$

Krok 2

(2.1) Znajdź x_4 $\quad X_4 = (-3)/(-3) = 1$

(2.2) Znajdź x_3 $\quad X_3 = (-9+5*1)/2 = -2$

(2.3) Znajdź x_2 $\quad X_2 = (-6-2*(-2)-2*1)/(-4) = 1$

(2.4) Znajdź x_1 $\quad X_1 = (16+2*1-2*(-2)-4*1)/6 = 3$

Pseudokod dla podstawowej eliminacji Gaussa

Forward Elimination

```
LOOP k from 1 to n-1
    LOOP i from k+1 to n
        FACTOR = A_ik / A_kk
        LOOP j from k+1 to n
            A_ij = A_ij – FACTOR * A_kj
        END LOOP
        B_i = B_i – FACTOR * B_k
    ENDLOOP
ENDLOOP
```

Back Substitution

```
X_n = B_n / A_nn
LOOP i from n-1 to 1
    SUM = 0.0
    LOOP j from i+1 to n
        SUM = SUM + A_ij * X_j
    END LOOP
    X_i = (B_i – SUM) / A_ii
ENDLOOP
```

Złożoność algorytmu (ilość operacji do wykonania) $\quad n^3/3 + n^2/2 + \mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(n)$

Metody iteracyjne - metoda Gaussa-Seidla

- Eliminacja Gaussa i jego warianty nazywane są metodami bezpośrednimi. Nie są one preferowane w przypadku dużych systemów.
- Metody iteracyjne rozpoczynają się od początkowego wektora rozwiązania i są iteracyjnie zbieżne do prawdziwego rozwiązania.
- Zatrzymują się, gdy zostanie osiągnięta określona tolerancja
- Biorąc pod uwagę system [A] {x} = {B} i wartości początkowe $\{x\}^0$, Gauss-Seidel używa pierwszego równania do rozwiązania dla x_1, drugiego dla x_2 itd.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \; \ldots\ldots \; - \; a_{1n}x_n) / a_{11} \\
x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \; \ldots\ldots \; - \; a_{2n}x_n) / a_{22} \\
&\ldots\ldots \\
x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \; \ldots\ldots \; - \; a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1}) / a_{nn}
\end{aligned}
$$

Po pierwszej iteracji otrzymujemy wektor rozwiązań $\{x\}^1$. Używamy tych wartości, aby rozpocząć nową iterację. Powtarzamy, aż zostanie spełniona tolerancja/kryterium stopu

$$
|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^k - x_i^{k-1}}{x_i^k} \right| 100\% < \varepsilon_s
$$

dla wszystkich niewiadomych (i = 1, ..., n), gdzie k i k-1 reprezentują dwie kolejne (aktualne i poprzednie) iteracje.

Przykład 4: Rozwiąż układ równań stosując metodę Gaussa-Seidela.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

wektor startowy

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0.0$$

Przekształcamy równania

$$\begin{aligned} x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3) / 6 \\ x_2 &= (5 + 2x_1 - 2x_3) / 7 \\ x_3 &= (1 + x_1 + 2x_2) / 5 \end{aligned}$$

Pierwsza iteracja

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (11 + 2x_2^0 - x_3^0) / 6 = (11 + 0 - 0)/6 = 1.833 \\ x_2^1 &= (5 + 2x_1^1 - 2x_3^0) / 7 = (5 + 2*1.8333 - 0)/7 = 1.238 \\ x_3^1 &= (1 + x_1^1 + 2x_2^1) / 5 = (1 + 1.8333 + 2*1.2381)/5 = 1.062 \end{aligned}$$

Druga iteracja

$$\begin{aligned} x_1^2 &= (11 + 2x_2^1 - x_3^1) / 6 = (11 + 2*1.238 - 1.062)/6 = 2.069 \\ x_2^2 &= (5 + 2x_1^2 - 2x_3^1) / 7 = (5 + 2*2.069 - 2*1.062)/7 = 1.002 \\ x_3^2 &= (1 + x_1^2 + 2x_2^2) / 5 = (1 + 2.069 + 2*1.002)/5 = 1.015 \end{aligned}$$

Zebrane wyniki w kolejnych pięciu iteracjach

x_1	0.000	1.833	2.069	1.998	1.999	2.000
x_2	0.000	1.238	1.002	0.995	1.000	1.000
x_3	0.000	1.062	1.015	0.998	1.000	1.000

Pseudokod dla metody Gaussa-Seidela

```
LOOP k from 1 to maxIter
   LOOP i from 1 to n
      x_i = B_i
      LOOP j from 1 to n
         IF (i ≠ j)   x_i = x_i - A_ij x_j
      ENDLOOP
      x_i = x_i / A_ii
   ENDLOOP
   CONVERGED = TRUE
   LOOP i from 1 to n
      OUTPUT x_i
      ε_a = | (x_i – x_i^old) / x_i | * 100
      IF (ε_a > tolerance)   CONVERGED = FALSE
   ENDLOOP
   IF (CONVERGED = TRUE)  STOP
ENDLOOP
```

Metoda Jacobiego

• Gauss-Seidel zawsze używa najnowszych dostępnych wartości x_i. Metoda Jacobiego używa wartości x_i z poprzedniej iteracji.

Przykład 5: Rozwiąż poprzedni układ równań (przykład 4) stosując metodę Jacobiego.

Przekształcamy równania

$$x_1 = (11 + 2x_2 - x_3) / 6$$
$$x_2 = (5 + 2x_1 - 2x_3) / 7$$
$$x_3 = (1 + x_1 + 2x_2) / 5$$

Pierwsza iteracja (używa wartości x^0)

$$x_1^1 = (11 + 2x_2^0 - x_3^0) / 6 = (11 + 0 - 0)/6 = 1.833$$
$$x_2^1 = (5 + 2x_1^0 - 2x_3^0) / 7 = (5 + 0 - 0)/7 = 0.714$$
$$x_3^1 = (1 + x_1^0 + 2x_2^0) / 5 = (1 + 0 + 0)/5 = 0.200$$

Druga iteracja (używa wartości x^1)

$$x_1^2 = (11 + 2x_2^1 - x_3^1) / 6 = (11 + 2*0.714 - 0.200)/6 = 2.038$$
$$x_2^2 = (5 + 2x_1^1 - 2x_3^1) / 7 = (5 + 2*1.833 - 2*0.200)/7 = 1.181$$
$$x_3^2 = (1 + x_1^1 + 2x_2^1) / 5 = (1 + 1.833 + 2*0.714)/5 = 0.852$$

Kontynuujemy iteracje aby otrzymać

x_1	0.000	1.833	2.038	2.085	2.004	1.994	. . .	2.000
x_2	0.000	0.714	1.181	1.053	1.001	0.990	. . .	1.000
x_3	0.000	0.200	0.852	1.080	1.038	1.001	. . .	1.000