Niech A będzie przekształceniem liniowycm, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazą w R, a $[a_{ik}]$ macierzą przkształcenia A w tej bazie. Niech

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n, \tag{1}$$

$$Ax = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2 + \ldots + \eta_n e_n. \tag{2}$$

Wyraźmy współrzędne $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ wektora Ax przez współrzędne $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ wektora x. Mamy

$$\begin{gathered}
Ax = A(\zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + \ldots + \zeta_n e_n) = \\
= \zeta_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n) + \\
+\zeta_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\zeta_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n) = \\
= (a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n)e_1 + \\
+(a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n)e_2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n)e_n +
\end{gathered}$$

A zatem, porównując to ze wzorem (2), otrzymujemy

$$\begin{gathered}
\eta_1 = a_{11}\zeta_1 + a_{12}\zeta_2 + \ldots + a_{1n}\zeta_n, \\
\eta_1 = a_{21}\zeta_1 + a_{22}\zeta_2 + \ldots + a_{2n}\zeta_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_1 = a_{n1}\zeta_1 + a_{n2}\zeta_2 + \ldots + a_{nn}\zeta_n,
\end{gathered}$$

lub krócej

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\zeta_k. \tag{3}$$

Tak więc *jeżeli przeształcenie liniowe A ma w danej bazie $e, e, \ldots, e$ macierz $[a_{ik}]$, to wektory bazy przekształacają się za pomocą kolumn tej macierzy (wzór(3)), a współrzędne dowolnego wektora x za pomocą jej wierszy (wzór(3)).*

3. Dodawanie i mnożenie przekształceń liniowych. Przekształcenia liniowe można dodawać i mnożyć.

OKREŚLENIE 2. *Iloczynem przekształceń liniowych A i B* nazywamy przekształcenia C polegające na kolejnym najpierw przekształcenia B, a następnie przekształcenia A.

Inaczej mówiąc: $C = AB$ oznacza, że dla każdego x jest $Cx = A(Bx)$.

Iloczyn przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym, tj, spełnia warunki 1^o i 2^o. Rzeczywiście,

$$\begin{gathered}
C(x_1 + x_2) = A[B(x_1 + x_2)] = A(Bx_1 + Bx_2) = \\
= ABx_1 + ABx_2 = Cx_1 + Cx_2
\end{gathered}$$

Pierwsza równość napisaliśmy na podstawie określenia iloczynu, drugą na podstawie własnośći 1^o dla przekształcenia B, trzecią na mocy tej samej własności dla przekształcenia A i wreszcie czwartą znów na mocy określenia iloczynu.

Analogicznie wykazuje sie, że $C(\lambda x) = \lambda Cx$

Jeżeli E jest przekształceniem jednostkowym, a A dowolnym przekształceniem, to łatwo sprawdzić, że

$$AE = EA = A.$$

Jak zwykle, określamy potęgi przekształcenia A:

$$A^2 = A * A, \quad A^3 = A^2 * A, \quad \ldots$$

Tak jak dla liczb określamy $A^o = E$. Jest jasne, że

$$A^{m+n} = A^m * A^n.$$

PRZYKŁAD. Niech R będzie przestrzenią wielomianów $P(t)$ stopnia nie wyższego niż $n-1$. Określamy w niej przekształcenie D wzorem

$$DP(t) = P'(t),$$

gdzie $P'(t)$ jest pochodną wielomianu $P(t)$. Wówczas dla dowolnego $P(t)$ $D^2P(t) = D(DP(t)) = (P'(t))' = P''(t)$.

Ćwiczenie. Wybierz w przestrzeni wielomianów stopnia nie wyższego niż $n-1$ bazę podaną w przykładzie 3 ustępu 2 niniejszego paragrafu. Znaleźć w tej bazie macierze przekształceń D, D^2, D^3,...

Wiemy, że przy danej bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ każdemu przekształceniu liniowemu odpowiada macierz. Przypuśćmy, że przekształceniu A odpowiada macierz $[a_{ik}]$, przekształceniu B macierz $[b_{ik}]$; znajdźmy macierz $[c_{ik}]$ odpowiadającą przekształceniu $C = AB$. Na mocy określenia macierzy przekształcenia C mamy

$$Ce_k = \sum_i c_{ik} e_i. \tag{4}$$

Dalej

$$ABe_k = A(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j) = \sum_j b_{jk} Ae_j = \sum_{j,i} b_{jk} a_{ij} e_i \tag{5}$$

Porównując współczynniki przy e_i w równościach (4) i (5) otrzymujemy

$$C_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}. \tag{6}$$

Widzimy, że element c_{ik} macirzey C jast sumą iloczynów elementów i-tego wiersza miacierzy A przez odpowiednie elementy k-tej koloumny macierzy B. Tak określona macierz