Wiskunde Op Maat

Natuurkunde

Vectoren

(Versie 2025/09/01.43)

Inhoudsopgave

1.1 Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de natuur met grootheden die worden opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van 40 km/h.* Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van* $27\,°\mathrm{C}$ *heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

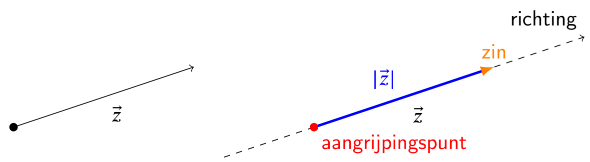
Een vectoriële grootheid heeft vier kenmerken: grootte, richting, zin en een aangrijpingspunt. Zo kan de helikopter aan 40 km/h *richting het zuiden* vliegen. Een scalaire grootheid heeft enkel een grootte met teken, zo kan je diepvries een temperatuur hebben van $-10\,°\mathrm{C}$.

Opmerking 1.1.1. Het onderscheidt tussen scalar en vector is in de eerste plaats een verschil in *naamgeving*. Je kan zeggen dat de temperatuur in graden gelijk is aan de scalar 27 of gegeven wordt door de vector $\vec{temp} = (27)$ met slechts één component.

CC BY-NC-SA 4.0
(2025/09/01.43)

1.2 Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, \ldots$. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.

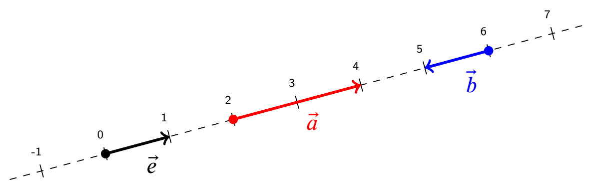


Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden aangeduid met een plusteken, vectoren tegen de zin van de referentie-as krijgen een minteken.

De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).

De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.

Er geldt in onderstaande tekeningen dat $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangripingspunt 2. Voor de vector $\vec{b}$ geldt $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.



Opmerking 1.2.1. Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

Vlugge Vraag

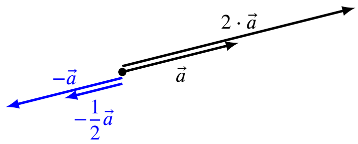
Waarom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Bewerkingen met vectoren

Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

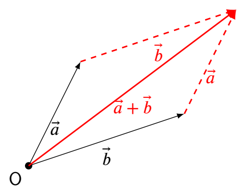
Een vector kan 'herschaalt' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalarie verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$. Als de vector $\vec{a}$ gegeven wordt door (a_x, a_y), is de scalaire vermenigvuldiging $3 \cdot \vec{a}$ gelijk aan $3 \cdot ((a_x, a_y)) = (3a_x, 3a_y)$.



Figuur 1: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de parallellogrammethode.



Figuur 2: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren optellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultate berekent met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (gewijzigde) cosinusregel:

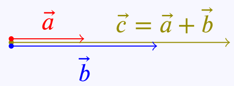
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Vlugge Vraag

Hoe vereenvoudigd de formule als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht staan? Wat als ze evenwijdig (d.w.z. dezelfde richting) zijn?

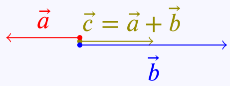
Voorbeeld 1.3.1. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$.



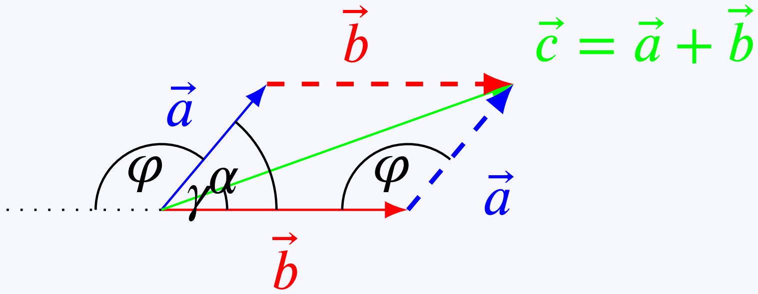
Voorbeeld 1.3.2. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|-3 + 5\| = 2\,\mathrm{N}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Bewerkingen met vectoren



Voorbeeld 1.3.3. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ en $\alpha = 50°$.



De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met de cosinusregel:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\varphi \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(180° - \alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|(-\cos\alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha \\
&= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Opmerking 1.3.1. Als $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ geldt dus **niet** dat $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

De **richting van de resultate** (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{5\cdot\sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren.

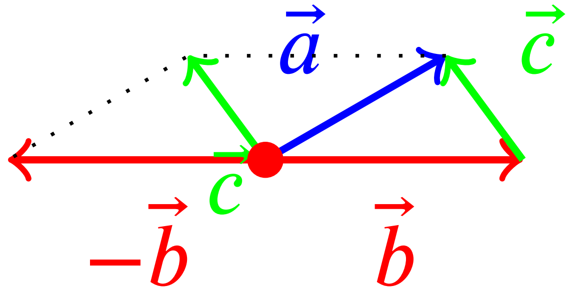
Verschil van twee vectoren

Net zoals bij getallen is het ook mogelijk voor vectoren om van een verschil een som te maken:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

CC BY-NC-SA 4.0
Gebaseerd op eigen cursus Bart Lambregs (2025/09/01.43)



Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a}-\vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

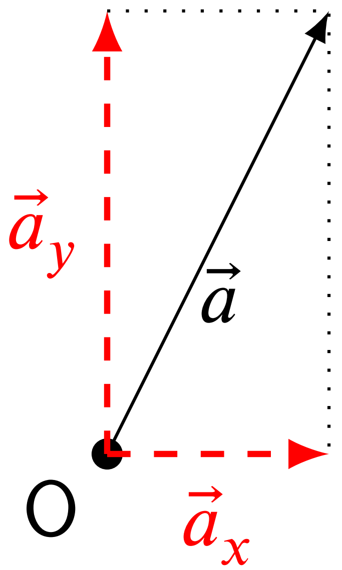
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In vraagstukken is het vaak erg nutting om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de x-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De lengte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 3: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Bewerkingen met vectoren

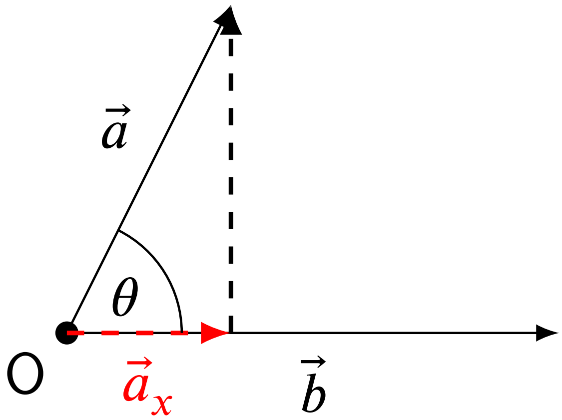
Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}_x|| \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot \cos(\alpha) \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$$

Vlugge Vraag

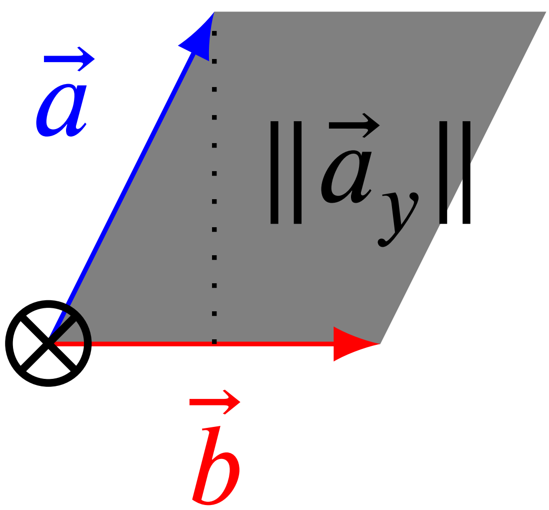
Is de eerste bewerking $\cdot$ dezelfde als de tweede bewerking $\cdot$? Verklaar.



Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}_y|| \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot \sin(\alpha) \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\alpha)$$

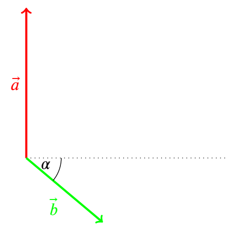


CC BY-NC-SA 4.0

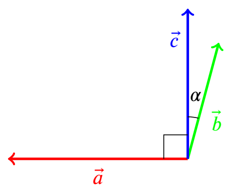
1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.1. Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.

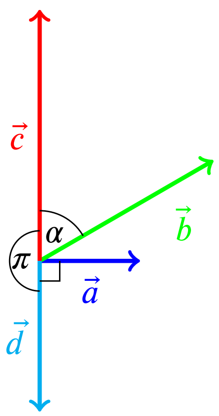
1. $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 40°$



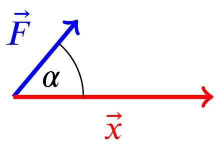
2. $\|\vec{a} = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$



3. $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 8\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 15\,\mathrm{N}$, $\|\vec{d} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 60°$



Oefening 1.3.2. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.

2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.

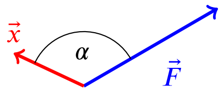
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$

4. $\vec{F} \times \vec{x}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.3. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
4. $\vec{F} \times \vec{x}$

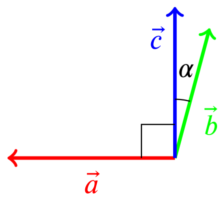
CC BY-NC-SA 4.0

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

Oefening 1.3.4.

Gegeven de drie waarvoor geldt $||\vec{a} = 4\,\text{N}$, $||\vec{b} = 2{,}5\,\text{N}$ $||\vec{c} = 3\,\text{N}$, $\alpha = 15°$

Construeer en bepaal de groottes van:



1. $\vec{a} - \vec{b}$

2. $\vec{b} - \vec{a}$

3. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

4. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

5. $4\vec{b} + \vec{c}$

6. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

7. $3\vec{a} - 4\vec{c}$

Oefening 1.3.5. Als $\vec{F} \perp \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

8. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = 0$

Oefening 1.3.6. Als $\vec{F} \parallel y$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

CC BY-NC-SA 4.0
Gebaseerd op eigen cursus Bart Lambregs (2025/09/01.43)

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$
7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$
8. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

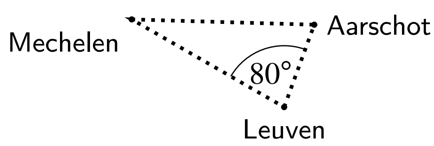
CC BY-NC-SA 4.0
(2025/09/01.43)

1.3.C Oefeningen vectoren reeks 3

Oefening 1.3.7. Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst 15 m evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van 45° met de zijlijn 18 m naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.8. Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt 9 m evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt 17 m in een richting die een hoek van 35° maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.9. Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van 10 m/s en 20 m/s. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.



1. Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!
2. Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?

Oefening 1.3.10. Toon aan dat $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$ met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Oefening 1.3.11. Geldt er algemeen dat $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$? Geldt er dat $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$? Verklaar kort.

Oefening 1.3.12. Kan er gelden dat $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\times\vec{b}\|$? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.

CC BY-NC-SA 4.0
(2025/09/01.43)