Kwadratische vergelijkingen oplossen

Eigenschap 1. Vierkantsvergelijkingen $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen in $\mathbb{R}$.

Een (reële) tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ heeft als **discriminant** het (reële) getal $\boxed{D = b^2 - 4ac}$, en heeft als oplossingen

als $D < 0$: geen reële oplossingen

als $D = 0$: precies een reële oplossing, namelijk $\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a}}$

als $D > 0$: precies twee reële oplossingen, namelijk $\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}}$ en $\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}}$

Bovendien zijn de volgende uitspraken equivalent:

(a) x_1 en x_2 zijn oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$
(b) x_1 en x_2 zijn nulpunten van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$
(c) x_1 en x_2 zijn snijpunten van de kromme $y = ax^2 + bx + c$ met de x-as
(d) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (ontbinden in factoren)
(e) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (som en product van de wortels)

Voorbeeld 1.

1. $f(x) = x^2 + 5x + 4 = -1$ en -4

Uitwerking: We beschouwen de kwadratische functie $f(x) = x^2 + 5x + 4$

De wortels van een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ worden gevonden met de formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

waarbij in ons geval:

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 4$$

Berekenen eerst de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(1)(4) = 25 - 16 = 9$$

Aangezien de discriminant positief is, zijn er twee reële oplossingen:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

Hieruit volgen de twee wortels:

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-5 - 3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Dus de oplossingen van de vergelijking $x^2 + 5x + 4 = 0$ zijn:

$$x = -1 \quad \text{of} \quad x = -4$$

Ontbonden in factoren geeft dit: $f(x) = x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

2. $f(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$

Uitwerking: We beschouwen de kwadratische functie $f(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3}$

De wortels van een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c = 0$ worden gevonden met de abc-formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

waarbij in ons geval:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = \frac{1}{3}$$

We berekenen eerst de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3)\left(\frac{1}{3}\right) = 4 - 4 = 0$$

Aangezien de discriminant nul is, is er precies één oplossing:

$$x = \frac{-2}{2(3)}$$

$$x = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

Dus de enige oplossing van de vergelijking $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$ is:

$$x = -\frac{1}{3}$$

Ontbonden in factoren geeft dit $f(x) = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = (x + \frac{1}{3})(x + \frac{1}{3}) = (x + \frac{1}{3})^2$

3. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5 =$ Geen reële oplossingen

Uitwerking: We beschouwen de kwadratische functie $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

De wortels van een kwadratische vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c = 0$ worden gevonden met de abc-formule:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

waarbij in ons geval:

$$a = -2, \quad b = 3, \quad c = -5$$

We berekenen eerst de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-2)(-5) = 9 - 40 = -31$$

Aangezien de discriminant negatief is, zijn er geen reële oplossingen.

Dus de vergelijking $-2x^2 + 3x - 5 = 0$ heeft geen reële wortels.

Oefening 1.

1. De wortels van $x^2 - 4x + 3$ zijn 1 en 3

2. De wortels van $-2x^2 + 4x + 8$ zijn -2 en 4

3. De wortels van $2x^2 - 8x + 16$ zijn 2 (dubbele wortel)

4. De wortels van $2x^2 + 5x + 2$ zijn $-\frac{1}{2}$ en -2

5. De wortels van $3x^2 - 6x + 3$ zijn 1 (dubbele wortel)

6. De wortels van $x^2 + 4x + 5$ zijn geen reële wortels

7. De wortels van $x^2 + 2x - 8$ zijn -4 en 2

8. De wortels van $4x^2 + 12x + 9$ zijn $-\frac{3}{2}$(dubbele wortel)

9. De wortels van $3x^2 + 6x + 3$ zijn -1 (dubbele wortel)

10. De wortels van $-x^2 + 4x + 1$ zijn $-\frac{1}{2}$ en 5

Oefening 2.

1. De wortels van $x^2 + 2x + 2$ zijn geen reële wortels

2. De wortels van $2x^2 - 3x - 5$ zijn $\frac{5}{2}$ en -1

3. De wortels van $5x^2 + 4x - 1$ zijn $\frac{1}{5}$ en -1

4. De wortels van $-3x^2 + 12x - 12$ zijn 2(dubbele wortel)

5. De wortels van $x^2 + 6x + 5$ zijn -1 en -5

6. De wortels van $4x^2 + 4x + 10$ zijn geen reële wortels

7. De wortels van $4x^2 + 8x + 3$ zijn $-\frac{3}{2}$ en $-\frac{1}{2}$

8. De wortels van $x^2 - 2x + 1$ zijn 1(dubbele wortel)

9. De wortels van $3x^2 - 2x - 8$ zijn 2 en $-\frac{4}{3}$

10. De wortels van $-x^2 + 5x - 6$ zijn 2 en 3

Voorbeeld 2. Substitutie

Oefening 3. Bepaal de oplossingen van volgende vergelijkingen door een geschikte substitutie toe te passen.