

Eenparige cirkelbeweging

Opmerking 1. Deze open-source cursus is in ontwikkeling. Leerkrachten en leerlingen die van dit materiaal gebruik maken kunnen eenvoudig fouten/verbetering/... melden:

- via de 'wijzig' knop kan je zelf kleine fouten en typo's aanpassen. ([extra uitleg](#))
- een mail sturen naar info@wiskunde.opmaat.org

Dit materiaal wordt ontwikkeld als open-source project via [zulip](#).

0.1 Plaats, verplaatsing, afgelegde weg

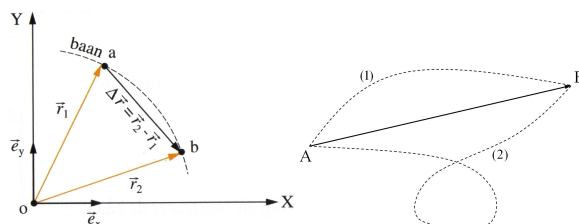
Om aan een vectoriële snelheid te komen, voeren we een plaatsvector \vec{r} in. Deze kan van de tijd afhangen en kunnen we met behulp van de eenheidsvectoren \vec{e}_x en \vec{e}_y schrijven als

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y.$$

De tijdsafhankelijkheid kunnen we expliciet weergeven door $x(t)$ en $y(t)$ te gebruiken i.p.v. x en y . De functies $x(t)$ en $y(t)$ noemen we de *coördinaatfuncties*. Door de plaats met een vector te beschrijven, kunnen we het begrip verplaatsing Δx ook gemakkelijk en analoog uitbreiden naar twee dimensies. De verplaatsing

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

is nu immers ook een vector die naast de afstand in vogelvlucht tussen twee punten, ook geïënteerd is. Het is natuurlijk belangrijk in welke richting die afstand wordt afgelegd.



Figuur 1: Het verschil tussen afgelegde weg en verplaatsing

Merk op dat de begrippen verplaatsing en afgelegde weg niet hetzelfde zijn. De afgelegde weg hangt af van de gevolgde baan en is de totale afgelegde afstand terwijl de verplaatsing enkel van begin- en eindpunt afhangt en een vectorgrootte is.

Naast de coördinaatfuncties $x(t)$ en $y(t)$ is er ook de vergelijking van de baan $y(x)$. We bekomen deze door de tijd uit de coördinaatfuncties te elimineren¹. De grafiek van deze baanvergelijking geeft ons het beeld van de baan maar zegt niets over de snelheid waarmee het object over deze baan beweegt. Daarvoor hebben we de afhankelijkheid van de tijd nodig.

¹Dit komt neer op de inverse $t(x)$ van $x(t)$ te vinden en deze te substitueren in $y(t)$. Dus $y(x) = y(t(x))$.

Eenparige cirkelbeweging

0.2 Snelheid

Analoog aan de snelheid in één dimensie, kunnen we in meerdere dimensies de snelheid definiëren als de afgeleide – nu van de plaatsvector. De snelheid is dan opnieuw een vector:²

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y$$

De eenheidsvectoren \vec{e}_x en \vec{e}_y veranderen niet in de tijd zodat we die buiten de afgeleide hebben kunnen brengen. We zien dat de snelheidsvector dus te ontbinden is in componenten waarbij de componenten gewoonweg de snelheden van de afzonderlijke coördinaten zijn.

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \quad \text{met} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}$$

Eigenschap 1. De snelheidsvector is rakend aan de baan.

Bewijs We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\frac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\frac{v_y}{v_x}$. ■

0.3 Versnelling

Ook de versnelling definiëren we analoog; als afgeleide van de snelheid.

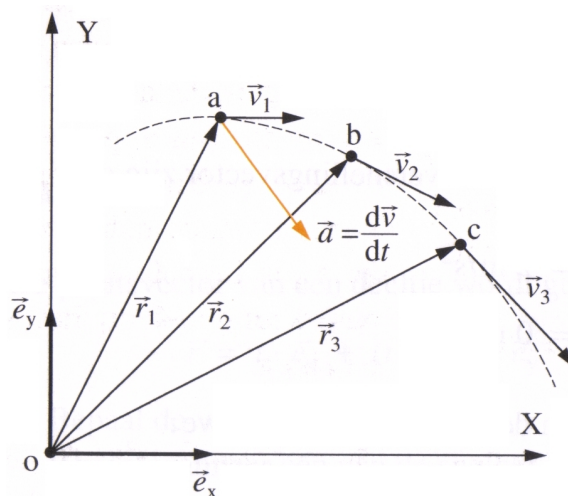
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

Merk op dat er een versnelling kan zijn wanneer de snelheidsvector van grootte verandert maar óók wanneer de snelheidsvector van richting verandert! Als de snelheidsvector immers van richting verandert, veranderen zijn coördinaten v_x en/of v_y . Merk bovendien op dat de versnelling niet noodzakelijk samen hoeft te vallen met de baan ...

²De definitie van een afgeleide van een vector is evenzeer met een limiet. We maken gebruik van de uitdrukkingen $\vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{e}_x + y(t + \Delta t)\vec{e}_y$ en $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t)\vec{e}_x + y(t + \Delta t)\vec{e}_y] - [x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)]\vec{e}_x + [y(t + \Delta t) - y(t)]\vec{e}_y}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right) \vec{e}_y \\ &= \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y \end{aligned}$$

Eenparige cirkelbeweging



Figuur 2: De versnelling raakt niet noodzakelijk aan de baan

Opdracht De positie van een deeltje als functie van de tijd wordt beschreven door

$$\vec{r} = bt\vec{e}_x + (c - dt^2)\vec{e}_y$$

met $b = 2,00 \text{ m/s}$, $c = 5,00 \text{ m}$ en $d = 1,00 \text{ m/s}^2$.

- Druk y uit in functie van x . Hoe ziet de baan eruit?
- Bepaal de snelheidsvector.
- Op welk tijdstip ($t > 0$) staat de snelheid loodrecht op de plaatsvector?

oplossing (i) We moeten dus de baanvergelijking geven. Dit doen we door de tijd uit te drukken i.f.v. de positie x en dit te substitueren in de coördinaatvergelijking $y(t)$.

$$\begin{aligned} x &= bt \Leftrightarrow t = \frac{x}{b} \\ \Downarrow \\ y &= c - dt^2 = c - \frac{d}{b^2}x^2 \end{aligned}$$

Dit is een bergparabool met top $(0, c) = (0, 5,00 \text{ m})$

- De componenten van de snelheid zijn:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = b \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -2dt \end{aligned}$$

zodat de snelheid(svector) wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y \\ &= b\vec{e}_x - 2dt\vec{e}_y \end{aligned}$$

- De rechte die de richting van de snelheid weergeeft, staat loodrecht op de rechte die de richting van de positievector weergeeft wanneer het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan

Eenparige cirkelbeweging

−1:

$$\begin{aligned}
 rc_r \cdot rc_v &= -1 \\
 &\Downarrow \\
 \frac{y}{x} \cdot \frac{v_y}{v_x} &= -1 \\
 &\Downarrow \\
 \frac{c - dt^2}{bt} \cdot \frac{-2dt}{b} &= -1 \\
 &\Downarrow (t > 0) \\
 t &= \sqrt{\frac{2cd - b^2}{2d^2}} \\
 &= 1,73 \text{ s}
 \end{aligned}$$