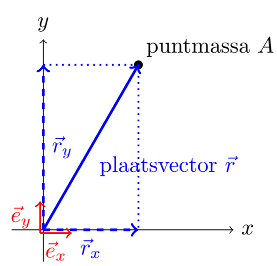
De positie

Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt heeft deze plaatsvector één, twee of drie componenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De (scalaire) getalcomponenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x,y en z.

Definition 1. De **positie** van een puntmassa A wordt vectorieel beschreven met de **plaatsvector** $\vec{r}$. Een plaatsvector $\vec{r}$ kan ontbonden in de componenten volgens de assen. Op die manier krijgt de puntmassa A coördinaten $co(A) = (x, y)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 1: De plaatsvector $\vec{r}$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t})$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een dergelijke vectorfuncties ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$. Elke coordinaatsfunctie geeft voor elk moment t de coordinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentsfuncties samen beschrijven de volledige beweging van de puntmassa.

Bij een ééndimensionale bewegingen is er slechts één coordinaats-as nodig om de beweging te beschrijven. Dat is een scalaire grootheid, namelijk de positie op de enige coördinaatas en t is de variabele die symbool staat voor de tijd. [1]

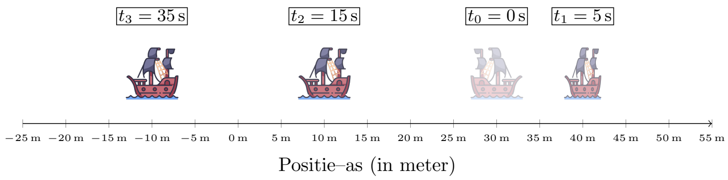
Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

[1] In de fysica gebruiken we de wiskunde als ‘taal’ om de wetmatigheden van de natuur

De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als [2] komt de positie x_1 op de coördinaatas overeen volgens de formule

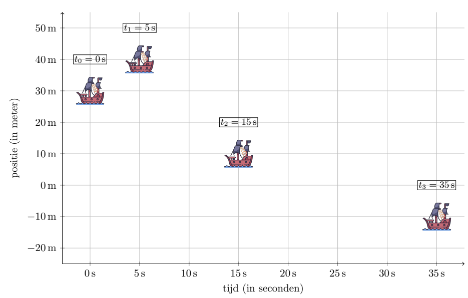
$$x_1 = x(t_1)$$

In onderstaande figuur zie je de tocht dat een zeilship aflegde. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het ship zich bevindt.



Figuur 2: De positie van de zeilboot voor elke tijd t

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[3] In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ op de positie $40\,\mathrm{m}$. De startpositie van de zeilboot x_0 is gelijk aan $30\,\mathrm{m}$ want voor $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ geldt $x(0) = 30\,\mathrm{m}$. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.



Figuur 3: De positie van de zeilboot met een tijd-as

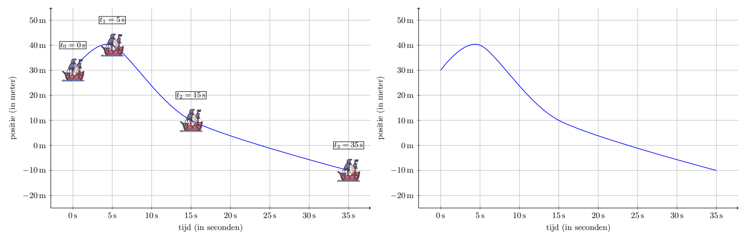
Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as en de positie op de verticale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad

in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

[2] Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices. Voorbeelden zijn $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

[3] Einstaan gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

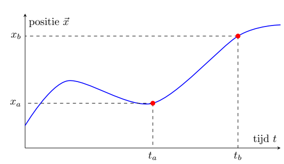
papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Dan verandert de positie volgens de positie-as natuurlijk niet, maar het blad beweegt zich wel voort op de tijd-as. [4]
De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten t_0, t_1, t_2, t_3 en t_4. De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie ...



Figuur 4: De plaatsfunctie van de zeilboot voor elke $t \in [0, 35]$

Definition 2. De **plaatsfunctie** $\vec{x}(t)$ geeft voor elke moment t de positievector $\vec{x}$.
In één dimensie is $\vec{x}$ een scalar en is de plaatsfuncie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de positie. De positie op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$x_a = x(t_a)$$



Figuur 5: De grafiek van een plaatsfunctie $x(t)$

De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

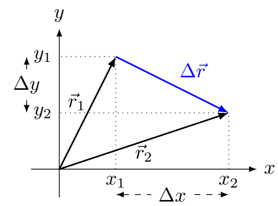
Definition 3. De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

[4] Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[5]

[5] Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[6]

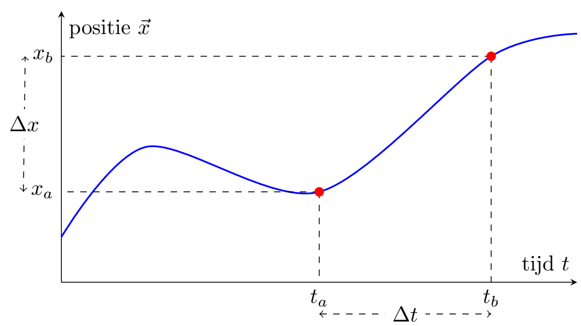
[6] Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.



Zoals aangegeven in de figuur kan ook de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ ontbonden worden.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
&= (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) \\
&= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y \\
&= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen t_0 en t_1 is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 40\,\text{m} - 30\,\text{m} = 10\,\text{m}$. Tussen t_2 en t_3 is de verplaatsing gelijk aan $\Delta x = x_3 - x_2 = -10\,\text{m} - 10\,\text{m} = -20\,\text{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:



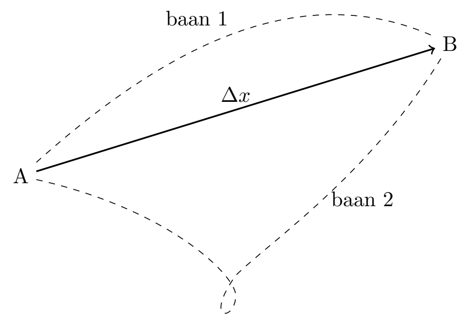
Figuur 6: De verplaatsing op de plaatsfunctie

Quick Question 1 *Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duidt deze verplaatsing aan op de grafiek.*

Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.

Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging.

Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,...). Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar t en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.



Figuur 7: Verplaatsing en afgelegde weg