Eerste semester

4 september 2025

Inhoudsopgave

Deel I

Inleiding

Inleiding

Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De overgang van rust naar beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de bewegingsverandering. De ontstane beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1]

Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

Als de kracht de oorzaak is van de bewegingsverandering, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met trappen op de fiets, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1.

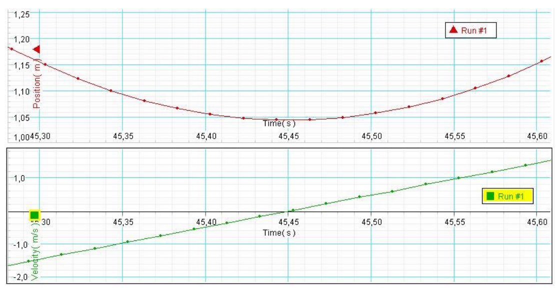
Author(s): Bart Lambregs

[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3] Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.



Figuur 1: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp

Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wilt zeggen dat de *verandering in snelheid* steeds gelijk is. Er komt per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bij. De appel valt sneller en sneller, maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid een tegengestelde zin hebben. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

Figuur 2: Een prachtig schouwspel...

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting en zin van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting en zin van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg. . .

In hoofdstuk 1 bekijken we *vectoren* als voorkennis om fysische objecten te beschrijven. In hoofdstuk 2, 3 en 4 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we **kinematica**. In hoofdstuk 5 en 6 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we **dynamica**. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we **mechanica**.

Deel II

Vectoren

Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de niet levende natuur met grootheden die worden opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van* $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van* $27\,^{\circ}\mathrm{C}$ *heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

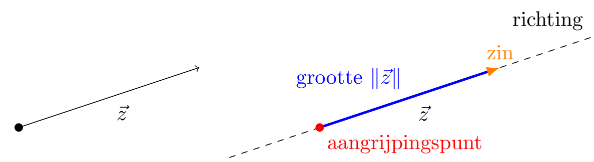
Een vectoriële grootheid heeft drie variabele kenmerken: grootte, richting en zin. Voorbeeld: de helikopter vliegt aan $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, horizontaal en naar het zuiden. Een scalaire grootheid heeft slechts één kenmerk: de grootte (waarin soms ook een teken vervat zit). Voorbeeld: een sneeuwbal heeft een temperatuur van -10°C.

De plaats waarop de vector van toepassing is, noemt men het aangrijpingspunt van de vector.

Author(s): Bart Lambregs

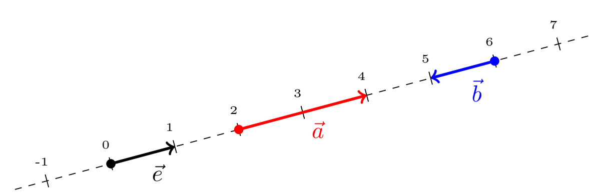
Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, ...$ en wordt altijd bij de pijl gezet ter benoeming. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.



Figuur 3: De vector $\vec{z}$ met al zijn componenten.

Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden als positief beschouwd, vectoren tegen de zin van de referentie-as als negatief.
De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).
De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.
Er geldt in onderstaande tekeningen dat $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2. Voor de vector $\vec{b}$ geldt $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.



Remark 1. Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

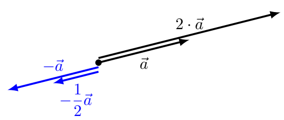
Quick Question 1 *Waarom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?*

Author(s): Bart Lambregs

Bewerkingen met vectoren

Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

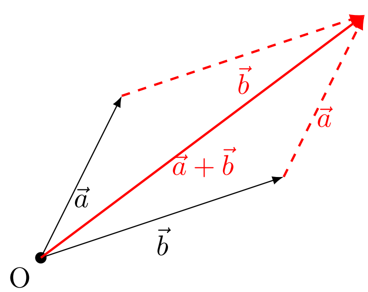
Een vector kan 'herschaald' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalaire verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.



Figuur 4: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren van dezelfde grootheid met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.



Figuur 5: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren op te tellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultante berekend met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren

Author(s): Bart Lambregs

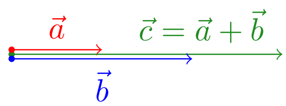
om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (gewijzigde) cosinusregel:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

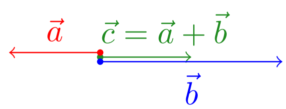
met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Quick Question 2 *Hoe vereenvoudigt de formule als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht staan? Wat als ze dezelfde richting hebben?*

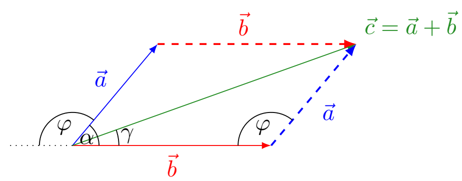
Example 1. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$.



Example 2. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$.



Example 3. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ en $\alpha = 50°$.



De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met de cosinusregel:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\varphi \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos(180° - \alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|(-\cos\alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\alpha \\
&= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Remark 2. In het algemeen geldt dus **niet** dat $\|\vec{c}\| = \|a \vec{+} b\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. In welk(e) geval(len) geldt de eigenschap wel?

De **richting van de resultante** (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad \Longrightarrow \quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \text{bgsin}\left(\frac{5\cdot\sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

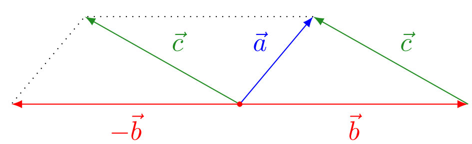
De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren. Indien er dus meer dan twee vectoren worden samengesteld, tel je eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan tel je met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt)

Verschil van twee vectoren

Net zoals bij getallen is het ook mogelijk voor vectoren om van een verschil een som te maken:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Figuur 6: Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a}-\vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

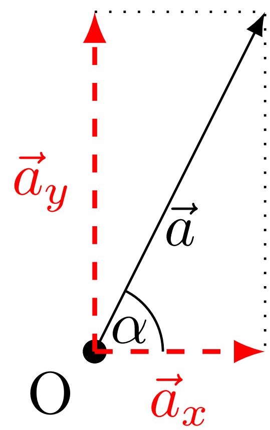
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In bepaalde contexten is het vaak erg nuttig om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de x-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De grootte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 7: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

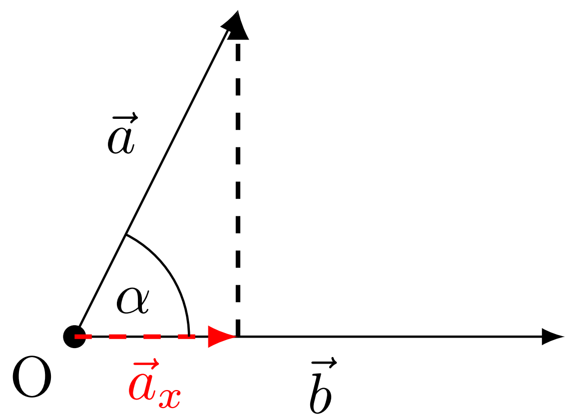
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Quick Question 3 *Is de eerste bewerking '·' dezelfde als de tweede bewerking '·'? Verklaar.*

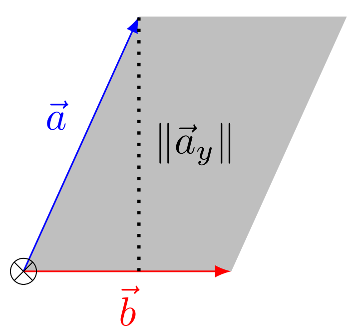


Figuur 8: De projectie van de vector $\vec{a}$ op $\vec{b}$

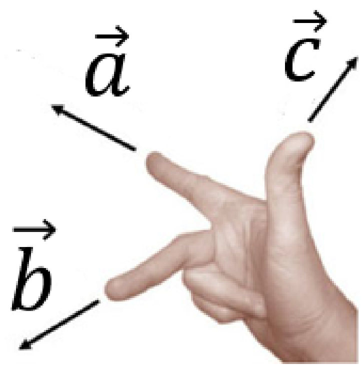
Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}_y\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 9: Het vectorieel product



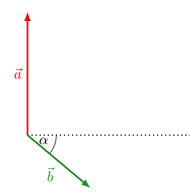
Figuur 10: De rechterhandregel

Remark 3. Een vector met zin in het blad wordt genoteerd met $\otimes$. Een vector met zin uit het blad wordt genoteerd met $\odot$.

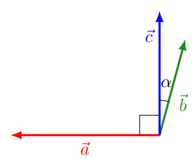
Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 4 *Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.*

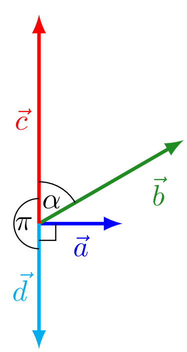
Vraag 4.1 $\|\vec{a}\| = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 40°$



Vraag 4.2 $\|\vec{a}\| = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$

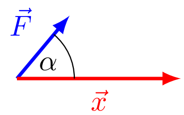


Vraag 4.3 $\|\vec{a}\| = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c}\| = 15\,\mathrm{N}$, $\|\vec{d}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 60°$



Oefening 5 *Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:*

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens



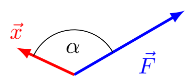
Vraag 5.1 *$\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.*

Vraag 5.2 *$\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.*

Vraag 5.3 $\vec{F} \cdot \vec{x}$

Vraag 5.4 $\vec{F} \times \vec{x}$

Oefening 6 *Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 7\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 2\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 125°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:*



Vraag 6.1 *$\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.*

Vraag 6.2 *$\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.*

Vraag 6.3 $\vec{F} \cdot \vec{x}$

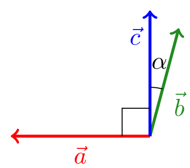
Vraag 6.4 $\vec{F} \times \vec{x}$

Oefeningen vectoren reeks 2

Oefening 7

Gegeven de drie waarvoor geldt $\|\vec{a}\| = 4\,\mathrm{N}, \ \|\vec{b}\| = 2{,}5\,\mathrm{N} \quad \|\vec{c}\| = 3\,\mathrm{N}, \quad \alpha = 15°$

Construeer en bepaal de groottes van:



Vraag 7.1 $\vec{a} - \vec{b}$

Vraag 7.2 $\vec{b} - \vec{a}$

Vraag 7.3 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

Vraag 7.4 $3\vec{a} - 2\vec{b}$

Vraag 7.5 $4\vec{b} + \vec{c}$

Vraag 7.6 $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

Vraag 7.7 $3\vec{a} - 4\vec{c}$

Oefening 8 *Als* $\vec{F} \perp \vec{y}$, *welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.*

Vraag 8.1 $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

Vraag 8.2 $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

Vraag 8.3 $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Vraag 8.4 $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Vraag 8.5 $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens

Vraag 8.6 $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

Vraag 8.7 $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

Vraag 8.8 $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

Oefening 9 *Als $\vec{F} \parallel \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.*

Vraag 9.1 $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

Vraag 9.2 $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

Vraag 9.3 $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Vraag 9.4 $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Vraag 9.5 $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Vraag 9.6 $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

Vraag 9.7 $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

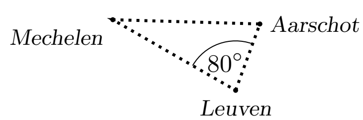
Vraag 9.8 $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

Oefeningen vectoren reeks 3

Oefening 10 *Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst* 15 m *evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van* 45° *met de zijlijn* 18 m *naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.*

Oefening 11 *Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt* 9 m *evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt* 17 m *in een richting die een hoek van* 35° *maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.*

Oefening 12 *Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van* 10 m/s *en* 20 m/s*. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.*



Vraag 12.1 *Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!*

Vraag 12.2 *Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?*

Oefening 13 *Toon aan dat* $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$ *met* α *de hoek tussen* $\vec{a}$ *en* $\vec{b}$.

Oefening 14 *Geldt er algemeen dat* $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ *? Geldt er dat* $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$ *? Verklaar kort.*

Oefening 15 *Kan er gelden dat* $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$ *? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.*

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens

Deel III

Basisbegrippen van de kinematica

Inleiding

Kinematica (afkomstig van het Griekse woord $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$) is het onderdeel van de fysica dat -zonder zich af te vragen wat de oorzaak ervan is- de **bewegingen van voorwerpen beschrijft**. Vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook over de beweging van de maan rond de aarde of de aarde rond de zon worden in de kinematica bestudeerd.

In dit hoofdstuk worden de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica behandeld waarmee in een volgende fase enkele concrete basisbewegingen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort) worden beschreven.

Kwantitatief behandelt kinematica steeds de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijk met de scalaire grootheid **tijd**.

Example 4. Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na 1 seconde? Wat op het moment dat de appel de grond raakt?

De kinematica vraagt zich niet af *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. In het latere onderdeel *dynamica* worden *krachten* bestudeerd die de bewegingen beïnvloeden. We zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

Example 5. Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips?

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

- Hoe snel vliegt het krijtje? Vertraagt het tijden zijn vlucht omdat het kracht verliest, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooid heeft?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica.

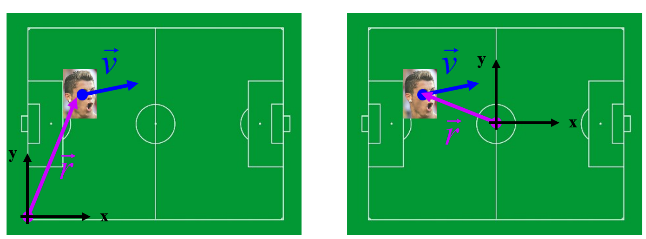
Het referentiestelsel

Elk bewegend systeem wordt beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Deze omvat een assenstelsel met een oorsprong (= het **referentiepunt**). Binnen dit referentiestelsel worden de vectoriële grootheden beschreven waaruit de kinematica is opgebouwd.

Als je een vogel ziet vliegen kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of -indien het een kolibri is- misschien zelfs *blijven hangen*. Om deze bewegingen kwantitatief en nauwkeurig te bespreken kies je een referentiestelsel en coördinaatassen. Op die manier krijgt de vogel een positievector die de positie aangeeft, een snelheidsvector die de snelheid aangeeft, ...

De keuze van het referentiestelsel is altijd relatief. Toch is het erg belangrijk om telkens duidelijk te maken van waaruit een beweging beschreven wordt. Stel je voor dat je op dit moment gedreven natuurkunde aan het studeren bent aan een bureau en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

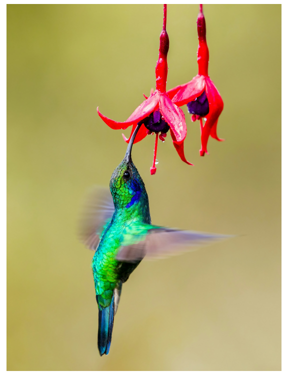
Meestal wordt geopteerd voor een referentiestelsel waarvoor de 'waarnemer' stilstaat. In onderstaand voorbeeld van het voetbalveld is de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend is naargelang het referentiepunt. Voor een toeschouwer in het publiek staan beide referentiestelsels stil, bijgevolg is de snelheid $\vec{v}$ voor beiden dezelfde.



Figuur 11: Twee verschillende referentiestelsels

Oefening 16 *De kolibri in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht hangen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel* ***niet*** *stilstaat.*

Author(s): Bart Lambregs

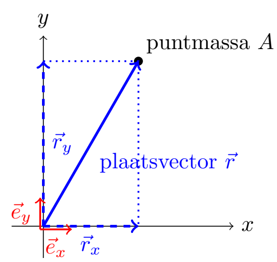


- *Een referentiestelsel met de kern van de aarde als oorsprong. (De kolibri draait nu rond de as van de aarde...)*
- *Een referentiestelsel met de zon als middelpunt (De kolibri draait nu ook rond de zon...)*

De positie

Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt heeft deze plaatsvector één, twee of drie componenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De (scalaire) getalcomponenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x,y en z.



Figuur 12: De plaatsvector $\vec{r}$

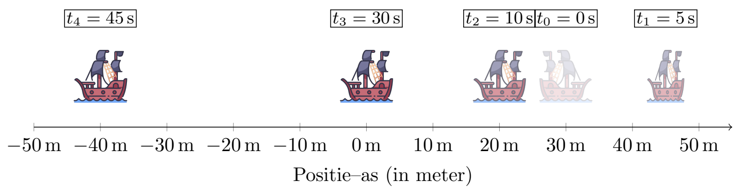
Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t})$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een dergelijke vectorfuncties ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$. Elke coordinaatsfunctie geeft voor elk moment t de coordinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentsfuncties samen beschrijven de volledige beweging van de puntmassa. Bij een ééndimensionale bewegingen is er slechts één coordinaats-as nodig om de beweging te beschrijven. Dat is een scalaire grootheid, namelijk de positie op de enige coördinaatas en t is de variabele die symbool staat voor de tijd. [4]
De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als

$$x_1 = x(t_1)$$

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

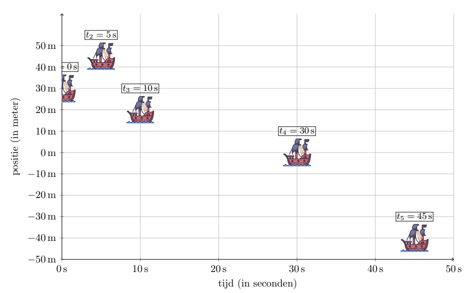
[4] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

In onderstaande figuur zie je de tocht dat een zeilship aflegde. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het ship zich bevindt.



Figuur 13: De positie van de zeilboot voor elke tijd t

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[5] In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_3 = 10\,\mathrm{s}$ op de positie $20\,\mathrm{m}$. De startpositie van de zeilboot x_0 is gelijk aan $30\,\mathrm{m}$ want voor $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ geldt $x(0) = 30\,\mathrm{m}$. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.



Figuur 14: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as en de positie op de verticale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Dan verandert de positie volgens de positie-as natuurlijk niet, maar het blad beweegt zich wel voort op de tijd-as. [6]

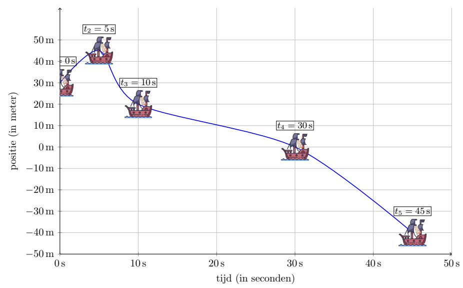
De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten t_0, t_1, t_2, t_3 en t_4. De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie …

[5] Einstaan gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd.*

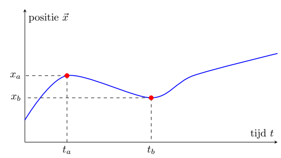
[6] Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[7]

[7] Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[8]

[8] Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.



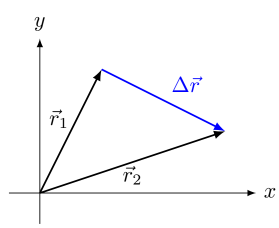
Definition 1. De **plaatsfunctie** $\vec{x}(t)$ geeft voor elke moment t de positievector x. In één dimensie is $\vec{x}$ een scalar en is de plaatsfuncie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de positie.



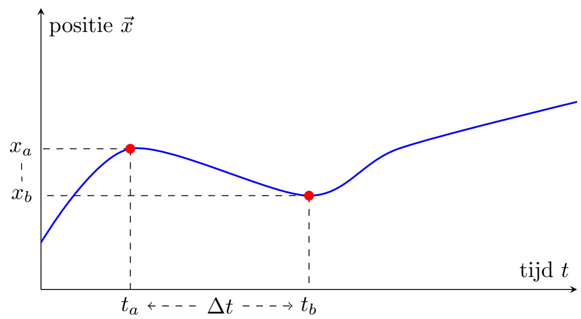
De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

Definition 2. De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

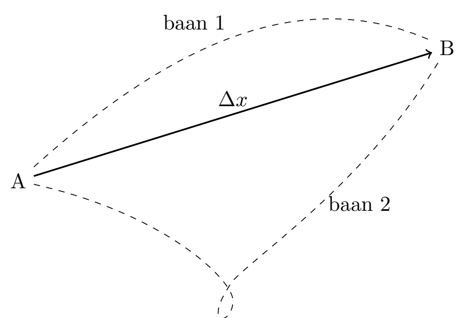


Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen t_0 en t_1 is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 45\,\text{m} - 30\,\text{m} = 15{,}0\,\text{m}$ en is de verplaatsing tussen de tijdstippen t_2 en t_4 gelijk aan $\Delta x = x_4 - x_2 = -40{,}0\,\text{m} - 20\,\text{m} = -60{,}0\,\text{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:



Quick Question 17 *Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duidt deze verplaatsing aan op de grafiek.*

Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.
Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging. Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,...).



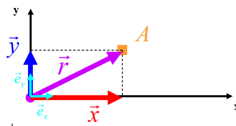
Figuur 15: Verplaatsing en afgelegde weg

Samengevat voor ééndimensionale bewegingen:

	Vectoriële notatie	Scalaire notatie
Positie op moment t:	$\boxed{\vec{x}_t = x(t) \cdot \vec{e}_x = x \cdot \vec{e}_x}$	$\boxed{x(t) = x}$ (kan negatief zijn)
Verplaatsing op het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:	$\boxed{\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1}$ $\Delta x \cdot \vec{e}_x = (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x = x_2 \cdot \vec{e}_x - x_1 \cdot \vec{e}_x$	$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ (kan negatief zijn bij een verplaatsing tegen de zin van de x-as.)
Afgelegde weg op moment t:	/	$s(t)$ kan negatief zijn; zie wiskunde

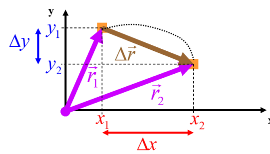
Voor tweedimensionale bewegingen worden de begrippen positie, verplaatsing en afgelegde weg complexer.

➢<u>Positie (plaats)</u> wordt vectorieel beschreven met de plaatsvector $\vec{r}$ of scalair met behulp van de coördinaten x en y. In dat laatste geval is de positie van een voorwerp A = co(A) = (x,y).



Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
$\vec{r}(t)=\vec{r}=\vec{x}+\vec{y}=x\cdot\vec{e}_x+y\cdot\vec{e}_y$	$x(t)=x$ $y(t)=y$ $r(t)=r=\sqrt{x^2+y^2}$

➢<u>Verplaatsing</u> wordt vectorieel beschreven met de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ of scalair met de horizontale verplaatsing Δx, de verticale verplaatsing Δy en de totale verplaatsing Δr.



Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=\left(x_2\cdot\vec{e}_x+y_2\cdot\vec{e}_y\right)-\left(x_1\cdot\vec{e}_x+y_1\cdot\vec{e}_y\right)$ $=\left(x_2-x_1\right)\cdot\vec{e}_x+\left(y_2-y_1\right)\cdot\vec{e}_y=\Delta x\cdot\vec{e}_x+\Delta y\cdot\vec{e}_y$	$\Delta x=x_2-x_1$ $\Delta y=y_2-y_1$ $\Delta r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

- Verwar verplaatsing niet met afgelegde weg!
  Verplaatsing = rechtlijnige afstand tussen begin- en eindpunt (= afstand in vogelvlucht)
  Afgelegde weg = effectieve afstand die voorwerp heeft afgelegd (meestal langer)
- Zie ook figuren applet 2D bewegingen op Smartschool

De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid (in de auto, op je fiets, ...) hoe groter de verplaatsing op een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan 30 km/h, leg je op één uur tijd 30 km af. Als je wandelt aan 5 km/h/ leg je op één uur tijd slechts 5 km. Met behulp van de plaatsfunctie kan de snelheid van een voorwerp volledig worden bepaald.

Snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definition 3. De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{45\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \dfrac{15{,}0\,\mathrm{m}}{5{,}0\,\mathrm{m}} = 3{,}0\,\mathrm{m/s}$. Als de snelheid negatief is betekent dit dat de zeilboot tegen de positieve richting-as bewogen is.

Ogenblikkelijke snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t aan een puntmassa een positie x toe. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t, één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

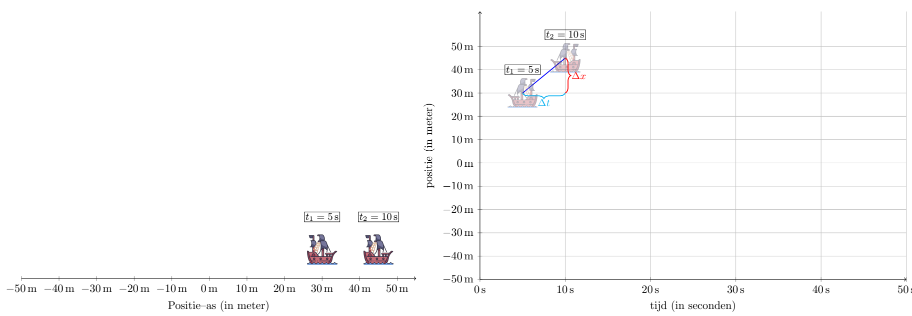
Denkvraag 18 *Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul.* ***Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?***

Author(s): Bart Lambregs,Vincent Gellens

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[9] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ te kennen, lijk het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen t_2 en t_2 die hierboven werd berekend. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



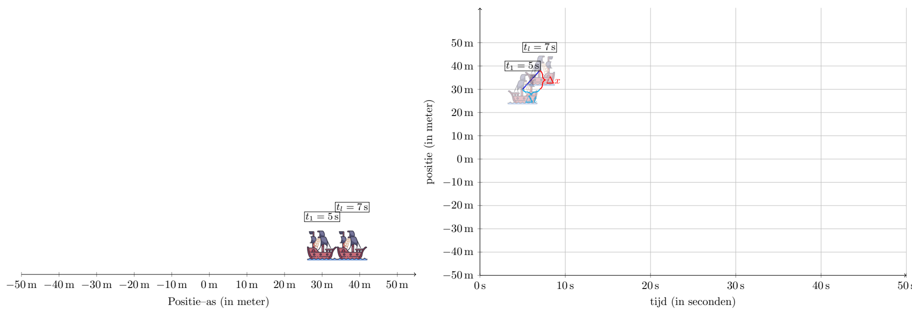
Figuur 16: De positie van de zeilboot voor tijd t_1 en t_2

Indien niet met $t_2 = 10$ de gemiddelde snelheid wordt berekent, maar bijvoorbeeld met $t_l = 8\,\mathrm{s}$, zal deze gemiddelde snelheid beter de ogenblikkelijke snelheid op t_1 benaderen. Eenvoudige berekening levert dat de gemiddelde snelheid tussen $t_1 = 30$ en $t_l = 7$ gegeven wordt door

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_l}{t_2 - t_l} = \frac{38\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{8{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}0\,\mathrm{m}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$$

Op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot in de richting van t_1:

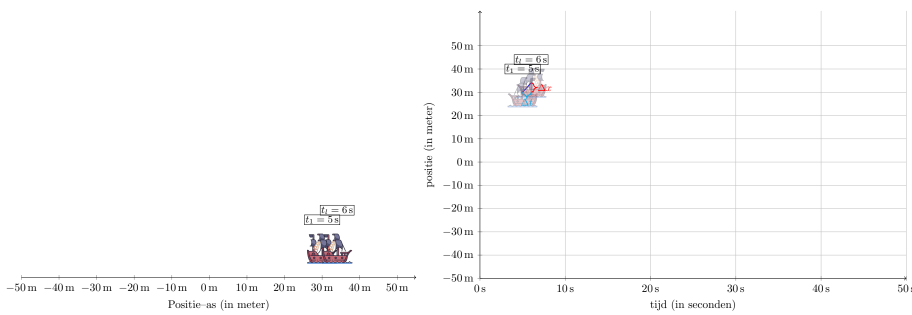
[9] Die je hebt moeten ingeven...



Figuur 17: De positie van de zeilboot voor tijd t_1 en t_l

De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \dfrac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is een *betere* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_a. Het is nog steeds een gemiddelde snelheid! De lezer raadde het waarschijnlijk al... Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor t_m wordt de benadering voor de gemiddelde snelheid nog beter... Op de grafiek komen de twee schapen erg dicht bij elkaar...

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_m}{t_2 - t_m} = \frac{34\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{4{,}0\,\mathrm{m}}{1{,}0\,\mathrm{m}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$$



Figuur 18: De positie van de zeilboot voor tijd t_1 en t_m

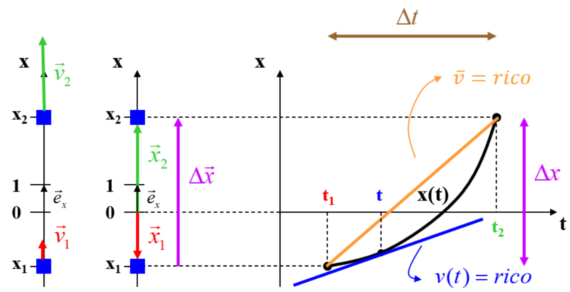
De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definition 4. De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

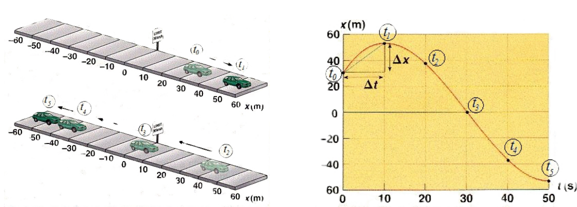


	Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
Gemiddelde snelheid op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:	$\boxed{<\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\vec{e}_x}$	$\boxed{<v> = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as)
Ogenblikkelijke snelheid op willekeurig tijdstip t	$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}}$ $= \frac{d(x\cdot\vec{e}_x)}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{e}_x + x\cdot\cancel{\frac{d\vec{e}_x}{dt}} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{e}_x = v\cdot\vec{e}_x$	$\boxed{v(t) = v = \frac{dx}{dt}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as)

Remark 4. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

Oefening 19 *Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van het autotje. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:*

- *Waar staat de auto stil?*
- *Waar heeft de auto een positieve snelheid?*
- *waar is de snelheid negatief?*
- *Op welk moment bewoog de auto het snelst?*

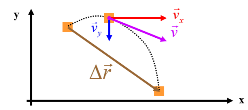


Figuur 19: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging doorgaans op in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.

➢<u>Snelheid</u> wordt vectorieel beschreven met de snelheidsvector $\vec{v}$ die altijd raakt aan de baan. Scalair rekent men met de snelheidscomponenten v_x en v_y. De totale snelheid heeft het symbool v.



Vectoriële notatie & definitie

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y\right) = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{e}_y = \vec{v}_x + \vec{v}_y}$$

Scalaire notatie & definitie

$$\boxed{v_x(t) = v_x = \frac{dx}{dt}} \qquad \boxed{\langle v\rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}}$$

$$\boxed{v_y(t) = v_y = \frac{dy}{dt}} \qquad \boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

De versnelling

Een voorwerp versnelt of heeft versnelling wanneer de snelheid verandert in de tijd. Een synoniem voor het woord versnelling is acceleratie, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid

$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheids**verandering**

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke bewegings**verandering**.

Definition 5. De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt uiteraard ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

- Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a_t}$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij ééndimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

  vb1 Een verticaal omhoog geworpen steen versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen.

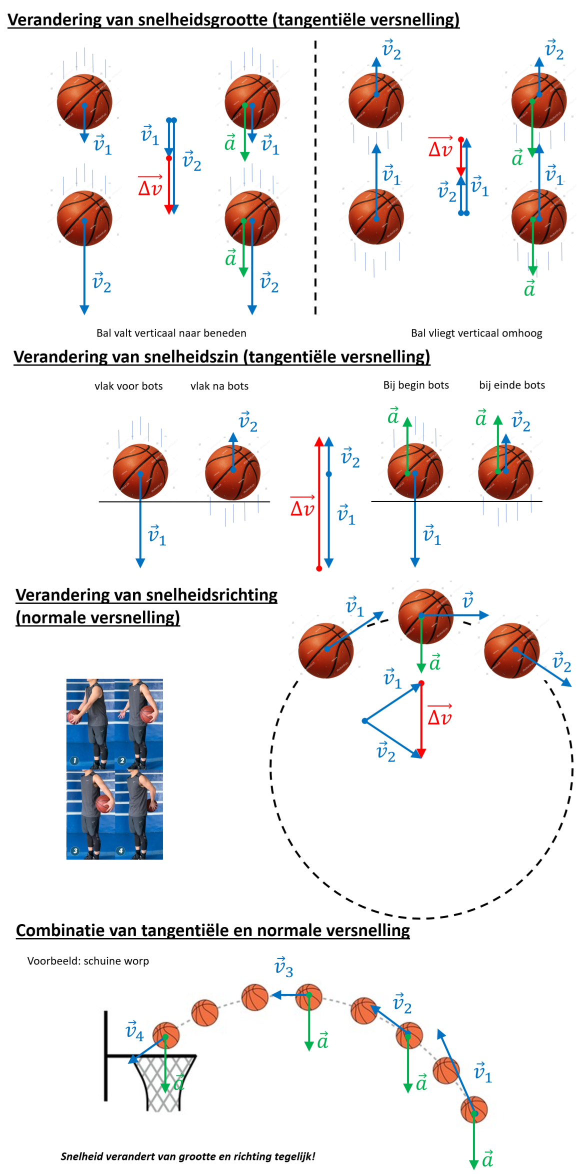
  vb2 Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van 3 m/s². Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met 3 m/s verandert (of in dit geval toeneemt).

- Als enkel de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a_n}$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

- Combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal.

Remark 5. De zin van de snelheidsvector kan nooit plots veranderen omdat snelheid een grootheid is die enkel continu in de tijd kan veranderen. De zin van de snelheidsvector kan enkel wijzigen als de grootte van de snelheidsvector vermindert tot nul om dan nadien de tegengestelde zin uit te wijzen. In dit geval gaat het hier dus eveneens over de tangentiële versnelling.



In al deze voorbeelden lijkt het alsof de versnellingsvector aan de snelheidsvector "trekt".

Gemiddelde (tangentiële) versnelling bij ééndimensionale bewegingen

Definition 6. Bij ééndimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\overline{a}$ scalair gedefinieerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Denkvraag 20 *Kan je uitleggen wat de eenheid meter per seconde, per seconde betekent?*

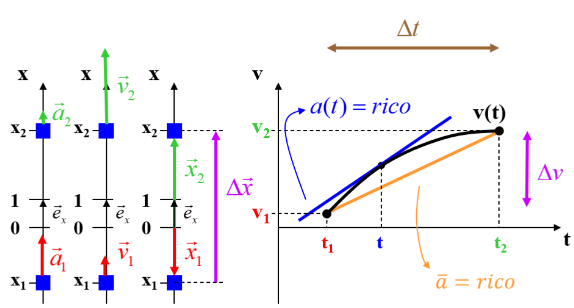
Ogenblikkelijke versnelling bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen t_1 en t_2. Om de ogenblikkelijke versnelling a op één tijdstip t te bepalen wordt -net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid- gebruik gemaakt van de afgeleide.

Definition 7. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

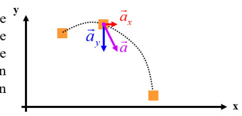
$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.



In twee dimensies, kan men de versnelling opsplitsen in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.

➢<u>Versnelling</u> wordt vectorieel beschreven met de versnellingsvector $\vec{a}$. Scalair rekent men met de versnellingscomponenten a_x en a_y. De totale versnelling heeft het symbool a. Bij 2D bewegingen is er altijd normale versnelling (mogelijk in combinatie met tangentiële versnelling).



Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie	
$\boxed{\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$	$\boxed{a_x(t) = a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$	$\boxed{\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$
$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y\right) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_y = \vec{a}_x + \vec{a}_y}$	$\boxed{a_y(t) = a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}}$	$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$

Remark 6. Het begrip versnelling in de fysica heeft niet dezelfde betekenis als hoe het begrip in de volksmond wordt gebruikt.

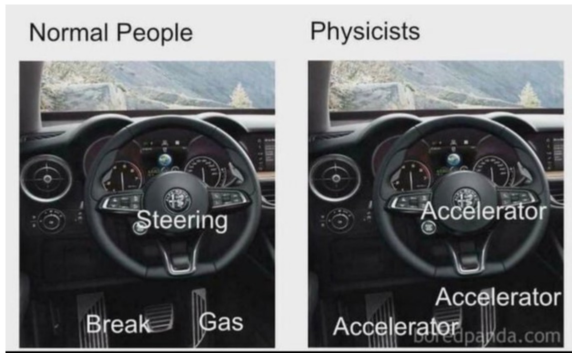
in de volksmond versnelling = vergroten van snelheid
vertraging = verkleinen van de snelheid
bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

in de fysica versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

Fysisch zal men dus nooit spreken over een vertraging. Het vergroten of verkleinen van de snelheid moet bij ééndimensionale bewegingen tot uiting komen in de zin van de versnellingsvector ten op zichte van de zin van de snelheidsvector. Men kan dit ook zien aan het teken van de getalcomponent van de versnelling tegenover die van de snelheid. Voor ééndimensionale bewegingen geldt dat als $\vec{v}$ en $\vec{a}$ dezelfde zin hebben (of hun getalcomponenten eenzelfde teken hebben) dat de snelheid (in absolute waarde) vergroot. Bij tegengestelde zin (of teken) is er in absolute waarde een verkleining van de snelheid.

Remark 7. Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 m/s$^{\mathbf{2}}$. Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk “snelheid” geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: “vitesse” (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

Oefening 21 *Verklaar onderstaande meme.*


Normal People
Physicists
Steering
Break
Gas
Accelerator
Accelerator
Accelerator
boredpanda.com

Oefeningen kinematica

Author(s): Bart Lambregs

Deel IV

Eendimensionale bewegingen

Inleiding

Beweging beschrijven is niet zo simpel als het in eerste instantie lijkt. Zo is bijvoorbeeld de beweging van een wolk eerder complex. Wat reken je al dan niet tot de wolk? Ook de bewegingen van de afzonderlijke moleculen in kaart brengen is een onmogelijke opgave omdat het aantal moleculen eerder groot is. Om toch vooruitgang te kunnen boeken, beginnen we met voorwerpen die we als een punt kunnen voorstellen. We maken dan abstractie van de ruimtelijke vorm van het object dat we beschrijven en doen alsof we het kunnen reduceren tot één enkele plaats in de ruimte. Zo zouden we het vliegen van een vlieg doorheen de kamer kunnen bekijken als een stipje. Het bewegen van de vleugels of de oriëntatie van de kop van de vlieg laten we dan buiten beschouwing. Ook deze beschrijving kunnen we inperken; we gaan in eerste instantie enkel bewegingen beschrijven die voor te stellen zijn op een rechte lijn. Dit noemen we eendimensionale bewegingen. Als we de beschrijving hiervan eenmaal kennen, kunnen we later dit met behulp van vectoren gemakkelijk uitbreiden naar een beschrijving van bewegingen in twee- of drie dimensies.

Om het ons gemakkelijk te maken, zullen we in dit hoofdstuk enkel werken met de getalcomponenten van de vectoren. Dat gaat omdat we steeds in één dimensie werken en de eenheidsvector dan steeds gelijk blijft. Als we v_x kennen, vinden we direct de vectorcomponent volgens de x-as met $\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{e}_x$. Bovendien kunnen we de index x ook weglaten. We weten dat het steeds over de x-as gaat.
[10]

Author(s): Bart Lambregs

[10] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

Eenparige rechtlijnige beweging

Een eenvoudige beweging om te bestuderen is de *eenparig rechtlijnige beweging* (afgekort ERB). De snelheid van de beweging is eenparig of gelijkmatig verdeeld wat betekent dat de snelheid steeds gelijk blijft. M.a.w. is de snelheid constant en dus de versnelling gelijk aan nul. Aangezien de snelheid niet verandert is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid. Met deze observatie kan je eenvoudig een functie opstellen voor de plaatsfunctie van deze beweging:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} &\Leftrightarrow \Delta x = v\Delta t \\ &\Leftrightarrow x - x_0 = v(t - t_0) \\ &\Leftrightarrow x = x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$

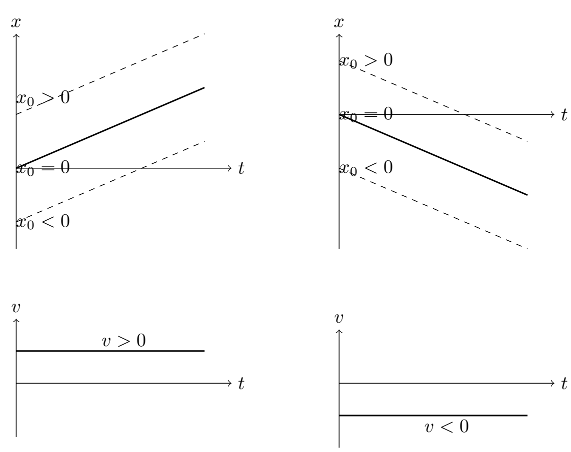
Theorem 1. De plaatsfunctie $x(t)$ van een ERB met snelheid v is gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

waarbij $x_0 = x(t_0)$ de coördinaat op het tijdstip t_0 is. Als $t_0 = 0$ dan vereenvoudigt de plaatsfunctie tot

$$x(t) = x_0 + vt \tag{1}$$

De snelheid v is gelijk aan de beginsnelheid $v_0 = v(t_0)$ omdat in een ERB de snelheid constant is. De snelheidsfunctie is $v(t) = v$ en de versnellingsfunctie is $a(t) = 0$.



Figuur 20: Grafieken van een ERB

Author(s): Bart Lambregs

Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De ééndimensionale beweging met een constante versnelling wordt de *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* genoemd (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; bij een constante versnelling is de *verandering* van de snelheid steeds gelijk. De grafiek van $a(t) = a$ is een constante met a een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Voor een constante versnelling is de snelheid in functie van de tijd een lineaire functie (in de tijd).

Remark 8. Strikt genomen wordt hier iets over het hoofd gezien. A priori zou het immers kunnen dat er nog andere functies dan lineaire functies zijn waarvoor de afgeleide een constante functie is. Dat is echter niet het geval. Het bewijs hiervan zie je later dit jaar in het vak wiskunde. Je bewijst dat alle mogelijke functies die in aanmerking komen slechts op een constante na aan elkaar gelijk zijn.

Uit het snelheidsverloop kan je de plaats afleiden. De snelheid is de afgeleide van de plaatsfunctie. Voor een lineaire snelheidsfunctie is de positie bijgevolg een kwadratische functie (in de tijd). De afgeleide van een kwadratische functie is immers een lineaire functie.[11]

Dat de positie in functie van de tijd een tweedegraadsveeltermfunctie is, geeft in symbolen:

$$x(t) = pt^2 + qt + r$$

De constanten p, q en r is deze formule hebben een fysische betekenis. De snelheid is de afgeleide van deze plaatsfunctie en de versnelling komt overeen met de tweede afgeleide. Dit levert:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2pt + q$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2p$$

Voor de EVRB is de versnelling constant en bijgevolg volgt uit de laatste regel dat $a(t) = a = 2p \Leftrightarrow p = \dfrac{a}{2}$.

Author(s): Bart Lambregs

[11] Hier geldt een gelijkaardige opmerking.

Noteer met $v_0 = v(0)$ de snelheid op tijdstip $t = 0$. In de eerste vergelijking $t = 0$ invullen levert dan $q = v_0$. De constante q stelt de beginsnelheid voor.

Noteer met $x_0 = x(0)$ de positie op tijdstip $t = 0$. In de plaatsfunctie $t = 0$ invullen levert dan $r = x_0$. De constante r stelt dus de beginpositie voor.

Theorem 2. De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling a worden gegeven door:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

Hierin is x_0 de *beginpositie* en v_0 de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip t_0, dan wordt in de beschrijving t vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip t_0. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

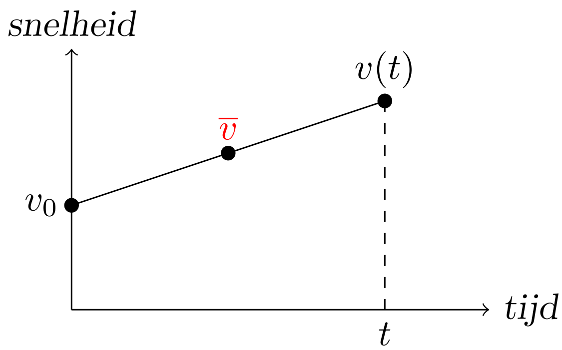
Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:

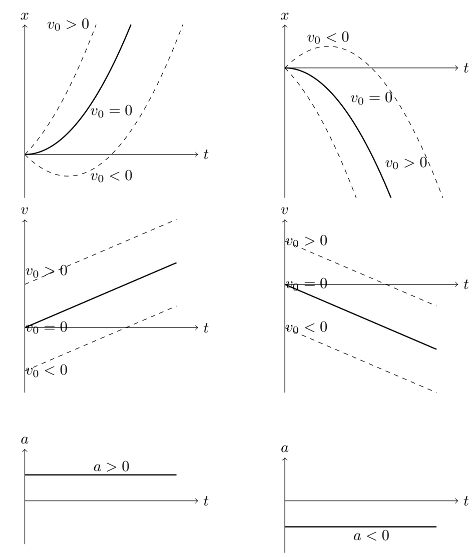
$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Oefening 22 *Bewijs bovenstaande formule.*

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{2v_0 + v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

bij een EVRB kan je dus het rekenkundig gemiddelde gebruiken om de gemiddelde snelheid te berekenen. In onderstaande figuur is $\overline{v}$ grafisch weergegeven als het midden van de lineaire snelheidsfunctie.





Figuur 21: Grafieken van de EVRB

Oefening 23 *Een auto die* $60\,\mathrm{km/h}$ *rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na* $70\,\mathrm{cm}$ *tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in* g, *waarbij* $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. *Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een uitdrukking vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.*[12] *Uit*

[12] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na . . .

$v(t) = 0$ *of* $0 = v_0 + at$ *halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:*

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, *wat gelijk is aan* $20g$.

Oplossingsstrategie

Vraagstukken in de kinematica kan je vaak op dezelfde manier banaderen. Elke opgave blijft echter anders, creativiteit is dus noodzakelijk.

(a) Lees het vraagstuk aandachtig. Zorg dat je duidelijk weet wat er gevraagd wordt.

- als je correct de snelheid op t_3 berekent maar de snelheid op t_2 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- als je correct de postitie op t_1 berekent maar de positie op t_0 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- ...

(b) Kies het systeem (object, lichaam, massa, geheel van lichamen) waarvan je een onbekende posititie, snelheid of versnelling wilt berekenen.

(c) Maak een tekening van dit systeem. Teken een coördinaatsas.

(d) Bepaal de gegevens uit het vraagstuk. Welke heb je nodig om de oplossing te bepalen?

(e) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor positie, snelheid en versnelling om het gevraagde te berekenen.

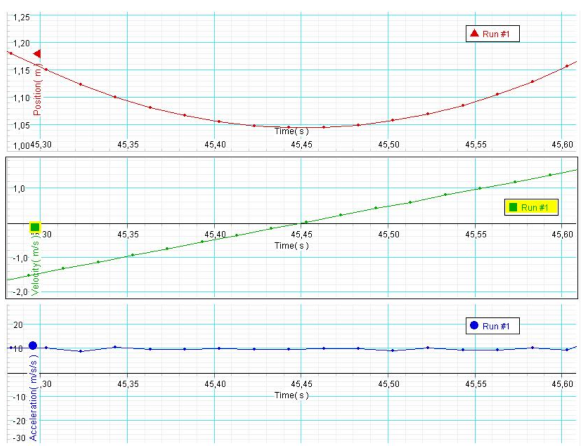
(f) Heeft je oplossing de juiste eenheiden en grootteorde? De snelheid van een tennisbal in de eenheid $\frac{s}{m^2}$ is waarschijnlijk fout. Als het enkele minuten duurt voordat de bowlingbal de kegels raakt, heb je waarschijnlijk ergens een (reken)fout gemaakt ...

Author(s): Bart Lambregs

Verticale worp

In het jaar 1586 stond een wetenschapper uit Brugge op de Nieuwe Kerk van Delft . Onze perceptie leert dat zwaardere lichamen sneller vallen dan lichtere. Een pluim en een steen komen in regel niet op hetzelfde moment op de grond terecht. Toch blijkt deze intuitie niet te kloppen. Simon Stevin liet vanop de kerktoren twee loden bollen met een verschillend gewicht vallen en stelde vast dat ze op hetzelfde moment de grond raakten.

In vacuüm – waar voorwerpen geen luchtweerstand ondervinden – blijkt de massa geen rol te spelen bij de constante versnelling die de voorwerpen krijgen: alle voorwerpen vallen met dezelfde versnelling! Met lode bollen kon Simon Stevin dit effect uitschakelen. De theoretische verklaring voor dit experiment hoort thuis in de dynamica. In de kinematica wordt enkel de beweging beschreven. Omdat de valversnelling constant is, heb je hier simpelweg met een EVRB te maken.



Figuur 22: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp waarbij de as naar beneden is georiënteerd.
Strikt genomen verschilt de valversnelling van plaats tot plaats op de aarde, maar voor het gemak nemen wij in vraagstukken de waarde

$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}.$$

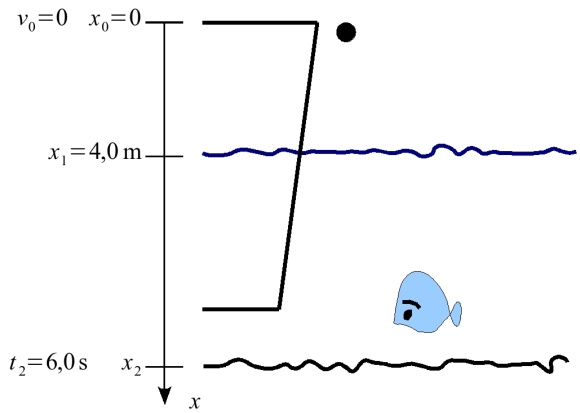
Omdat de verticale worp een EVRB is, kunnen we de formules (**??**) en (**??**) gebruiken om een valbeweging te beschrijven. Voor de versnelling a nemen we dan $a = g$ of $a = -g$ al naargelang de oriëntatie van de coördinaatas.

Author(s): Bart Lambregs

Quick Question 24 *Als je een tennisbal in de lucht gooit, op welk(e) moment(en) is de versnelling* 0*? Op welk(e) moment(en) is de snelheid* 0*?*

Quick Question 25 *Leg de fysische betekenis uit indien de richting van de snelheidsvector en versnellingsvector tegengesteld zijn. Wat indien ze dezelfde richting hebben?*

Oefening 26 *Simon Stevin laat van de boord van een schip een loden bol in het water vallen. De boord bevindt zich* $4,0\,\mathrm{m}$ *boven het wateroppervlak. De loden bol zinkt vervolgens met de snelheid waarmee hij het water raakte. Er zijn* $6,0\,\mathrm{s}$ *tussen het tijdstip waarop de bol valt en ze de bodem van het water bereikt.*



Vraag 26.1 *Hoe diep is het water?*

Vraag 26.2 *Wat is de gemiddelde snelheid van de bol over het hele traject?*

De beweging is opgebouwd uit twee verschillende soorten bewegingen. Het eerste stuk is een vrije val, wat een EVRB is. In het tweede stuk (onder water) is de snelheid constant en is er dus geen versnelling. In geen geval kunnen we dus de formules voor een EVRB op het geheel toepassen. Die zijn immers afgeleid voor een beweging waar de versnelling (altijd, gedurende de hele beweging) constant is.

Omdat we weten hoe ver de bol moet vallen voordat hij het wateroppervlak bereikt, kunnen we zowel de tijd die de bol hiervoor nodig heeft als de snelheid waarmee de bol het wateroppervlak raakt, bepalen. We kiezen een as naar beneden zodat – omdat de snelheid in deze richting toeneemt – de versnelling positief is en gelijk aan de valversnelling g *(toch voor het eerste stuk). De beginsnelheid van de bol is nul omdat hij vanuit rust wordt losgelaten. Voor de tijd vinden we:*

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}}$$

Met de tijd[13] *kunnen we de snelheid op het wateroppervlak vinden.*

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{2gx_1}$$

Onder water, in het tweede stuk, beweegt de kogel met deze snelheid gedurende de resterende tijd: $6,0$ *seconden min de tijd* t_1 *(**??**) die de kogel nodig had om te vallen. De afstand die de bol onder water aflegt, vinden we met de eenvoudige formuletjes van een ERB*[14]*. We substitueren ook vergelijkingen (**??**) en (**??**).*

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \overline{v} \cdot \Delta t \\
&\Downarrow \\
x_2 - x_1 &= v_1(t_2 - t_1) \\
&= \sqrt{2gx_1}(t_2 - \sqrt{\frac{2x_1}{g}}) \\
&= \sqrt{2gx_1}t_2 - 2x_1 \\
&= 45\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

De gemiddelde snelheid vinden we door de totale afgelegde weg te delen door de totale benodigde tijd. Andere formuletjes zoals $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ *zijn niet van toepassing omdat het helemaal niet over één EVRB gaat waar dit formuletje geldt omdat de snelheid mooi lineair toeneemt. Hier gebeurt dat enkel in het eerste stuk en worden de verschillende snelheden niet even lang aangehouden zodat ze een verschillend aandeel hebben in de totale benodigde tijd.*

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{02} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2}{t_2} &= \frac{\sqrt{2gx_1}t_2 - x_1}{t_2} \\
&= \sqrt{2gx_1} - \frac{x_1}{t_2} \\
&= 8,2\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o`

[13]We zouden de tijd met het gevonden formuletje kunnen uitrekenen en met het getalletje dat we vinden verder rekenen. Maar met het formuletje verder werken – algebraïsch of symbolisch – is toch o zo veel knapper en van toepassing voor álle boten en niet enkel voor een boot waarvoor het dek zich $4,0$ meter boven het wateroppervlak bevindt. Bovendien is het “echte” fysica omdat je een “model” uitwerkt en niet een rekensommetje oplost...

[14]Opmerking, een ERB is een speciaal geval van een EVRB. Een ERB heeft als constante versnelling $a = 0$.

Oefeningen

De oefeningen zijn opgedeeld in denkvragen en vraagstukken. Zie daarvoor de hierbij horende onderdelen.

De denkvragen bevatten conceptuele oefeningen, oefeningen die zuiver op algebraïsche manipulaties focussen, grafische oefeningen, vragen die op theoretische aspecten ingaan . . .

Author(s): Bart Lambregs

Denkvragen

Oefening 27 *Als de grootte van de snelheid van een voorwerp toeneemt, neemt de versnelling dan noodzakelijkerwijs ook toe? Motiveer je antwoord.*

Oefening 28 *Kan de gemiddelde snelheid van een deeltje over een gegeven tijdsinterval gelijk zijn aan nul, terwijl de grootte van de snelheid over een kortere tijdsduur verschillend is van nul? Verklaar je antwoord.*

Oefening 29 *Geef een voorbeeld waarin zowel de snelheids- als de versnellingscomponent negatief zijn.*

Oefening 30 *Wanneer een voorwerp zich met een constante snelheid verplaatst, verschilt de gemiddelde snelheid over een willekeurig tijdsinterval dan van de momentane snelheid op een willekeurig moment?*

Oefening 31 *Een puntmassa beweegt volgens de plaatsfunctie*

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 10t$$

Bereken haar snelheidscomponent telkens als ze het vertrekpunt passeert. Hoe groot is dan de versnellingscomponent? $x = t(t-5)(t+2)$

Oefening 32 *Een puntmassa voert een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging uit over het tijdsinterval* $[0\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}]$ *met beginsnelheid en beginpositie van respectievelijk* $0\,\mathrm{m/s}$ *en* $0\,\mathrm{m}$*. De versnelling is* $3\,\mathrm{m/s^2}$*. Waarom kan je onmiddellijk stellen dat als in het tijdsinterval de tijd half om is, de puntmassa nog niet halfweg is?*

(a) *Leg in woorden uit op welke manier je onmiddellijk kan inzien dat het te bewijzen juist is.*

(b) *Controleer het te bewijzen via de numerieke waarden van dit vraagstuk.*

(c) *Geef nu het bewijs.*

Oefening 33 *Een massa vertrekt vanuit rust om een eenparig versnelde rechtlijnige beweging uit te voeren. Als haar beginpositie* $0\,\mathrm{m}$ *is, welke van de volgende betrekkingen is dan juist?*

Meerkeuze:

Author(s): Bart Lambregs

(a) $t = \dfrac{x}{2v}$

(b) $t = \dfrac{2x}{v}$ ✓

(c) $t = \dfrac{v}{2x}$

(d) $t = \dfrac{2v}{x}$

Oefening 34 *De snelheid van een lichaam dat vanuit rust vrij valt, bedraagt na een valafstand x:*

Meerkeuze:

(a) $v = 2gx$

(b) $v = \sqrt{2gx}$ ✓

(c) $v = gx$

(d) $v = \sqrt{\dfrac{gx}{2}}$

$v = gt = g\sqrt{\dfrac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$

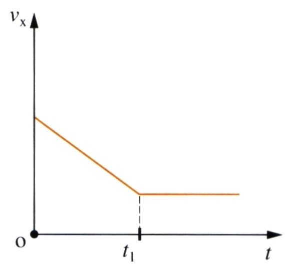
Oefening 35 *Laat zien dat voor een EVRB waarvoor $x_0 = 0$ de volgende formule geldt:*

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

Uit $v = v_0 + at$ volgt:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 \\ &= v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2) \\ &= v_0^2 + 2ax \end{aligned}$$

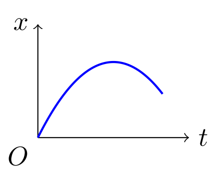
Oefening 36 *Teken de overeenkomstige $x(t)$- en $a(t)$-grafiek bij de gegeven $v(t)$-grafiek. Ga ervan uit dat $x_0 = 0\,\mathrm{m}$.*

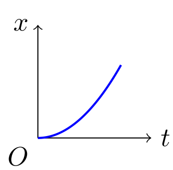


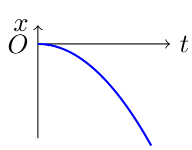
Oefening 37 *De snelheid van een deeltje voldoet aan $v = at$ waarin a constant en negatief is. De plaats van het deeltje wordt voorgesteld door x. Aangenomen wordt dat $x = 0\,\mathrm{m}$ op het ogenblik $t = 0\,\mathrm{s}$.*

Welke grafiek geeft het juiste verloop van $x(t)$?

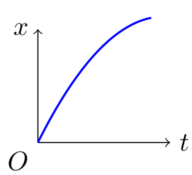
Meerkeuze:

(a) 

(b) 

(c) 

✓

(d) 

Oefening 38 *Beargumenteer het gebruik van het model van een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB) voor de vrije beweging van een wagentje op een helling. Denk daarbij aan een proefneming die we in de klas deden. De notie kracht moet je hier even buiten beschouwing laten. Het model beschrijft de meetgegevens accuraat.*

M.a.w. zijn de meetgegevens van de positie van het wagentje op de helling in functie van de tijd, gemeten met een (ultrasone) positiesensor, accuraat te beschrijven met de plaatsfunctie van een eenparig versnelde beweging.

Toelichting. De vraag gaat over de relatie tussen de theorie en de realiteit. Het is maar door metingen te doen dat we kunnen nagaan of gevolgen van de theorie (in dit geval bijvoorbeeld dat de positie kwadratisch in de tijd verloopt voor een beweging met constante versnelling) overeenkomen met de realiteit. In het gegeven geval van een wagentje op een helling, is bijvoorbeeld een model van constante snelheid niet van toepassing. Het zou immers impliceren dat het wagentje niet van zin kan veranderen. Dat laatste wordt door metingen of waarnemingen weerlegd.

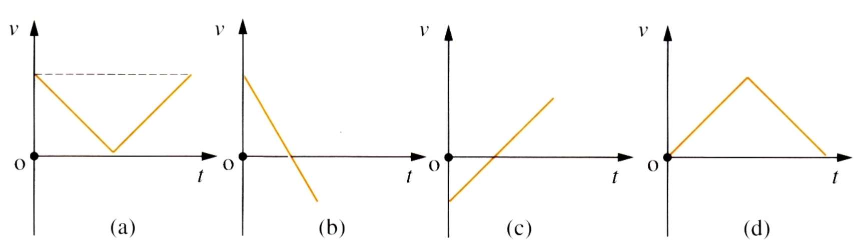
We spreken over een falsifieerbaar *model. Dat betekent dat zolang het niet weerlegd wordt, het geldig blijft. Je kan het alleen 'vals' maken door een situatie te tonen waarin het* niet *werkt.*

Oefening 39 *Kan de bewegingsrichting van een voorwerp omkeren terwijl de versnelling gelijk blijft? Zo ja, geef dan een voorbeeld. Zo nee, leg uit waarom dat niet kan. Ja, dat kan. Als je een bal opwerpt zal op het hoogste punt de bewegingszin omdraaien terwijl de versnelling gelijk blijft. We kunnen immers een verticale worp modelleren als een EVRB. Kiezen we de referentieas om de beweging te beschrijven omhoog, dan is de snelheid van de bal positief bij het naar boven bewegen en negatief wanneer hij naar beneden komt, terwijl de verandering van de snelheid in de tijd (de versnelling) systematisch gelijk is aan de negatieve valversnelling.*

Oefening 40 *Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook? Ja, dat kan. Neem bijvoorbeeld een voorwerp dat je verticaal omhoog gooit. Als je de referentieas waarmee je de beweging wil beschrijven verticaal naar benden kiest, zal de versnelling van de beweging positief zijn en de snelheid negatief. De snelheid is negatief omdat je tegengesteld aan de as beweegt en de versnelling is positief omdat de snelheid minder negatief wordt.*

Het omgekeerde kan ook, draai gewoon de referentieas om.

Oefening 41 *Een lichaam wordt verticaal omhoog geworpen. De referentieas is omhoog gericht. Welke van de volgende $v(t)$-diagrammen geeft dan het juiste verloop van de snelheid weer?*



Het juist antwoord is (b). De versnelling is constant waardoor de snelheid lineair moet verlopen in de tijd. Aangezien de referentieas naar boven is gekozen, moet de snelheid in het naar boven bewegen positief zijn. Dat is het geval bij (b).

Oefening 42 *Vanaf een klif laat men vanop dezelfde hoogte twee identieke bollen vallen. Men laat de tweede bol één seconde later vallen dan de eerste. De luchtwrijving is* niet *te verwaarlozen. Dan*

Meerkeuze:

(a) *zal de tweede bol iets later dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(b) *zal de tweede bol iets vroeger dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(c) *zal de tweede bol exact één seconde na de eerste neerkomen.* ✓

(d) *kunnen we hieromtrent geen uitspraak doen bij gebrek aan gegevens.*

Voor beide bollen is de omstandigheid waarin ze vallen gelijk.

Oefening 43 *Vanop een grote hoogte laat men achtereenvolgens twee stenen vallen met een tussentijd van 2 seconden. Op welke wijze verandert de afstand tussen beide stenen in de tijdsduur dat beide vallen? De afstand verandert lineair in functie van de tijd:* $\Delta x(t) = gt_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt_0^2$ *(*$= \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$ *met* $t \geqslant t_0 = 2\,\mathrm{s}$*)*

Oefening 44 *Aan de rand van een afgrond laat men een steen vallen. Op hetzelfde ogenblik werpt men een steen op. Zou het kunnen dat, als de afgrond diep genoeg is, beide stenen elkaar nog ontmoeten?*

Aangezien de opgeworpen steen later (en zelfs hoger) begint met vallen en beide stenen eenzelfde versnelling hebben, kan op geen enkel moment de opgeworpen steen een grotere snelheid hebben dan de steen die wordt losgelaten. Dat laatste zou op het moment van inhalen nochtans op zijn minst het geval moeten zijn.

In formules moet gelden, met v_0 *een negatieve beginsnelheid:*

$$\frac{1}{2}gt^2 \quad = \quad v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Dat is enkel het geval wanneer $t = 0$.

Oefening 45 *Op de maan is de valversnelling slechts een zesde van die op de aarde. Als een voorwerp op de maan verticaal omhoog wordt gegooid, hoeveel maal hoger komt het dan dan een voorwerp dat met dezelfde beginsnelheid vanaf de aarde wordt opgeworpen?*

De tijd die het voorwerp nodig heeft om tot zijn hoogste punt ($v = 0$) te geraken, is $t = -\frac{v_0}{a}$ waarbij a de negatieve versnelling op aarde of op de maan is. Met deze tijd en de gemiddelde snelheid gedurende de opwaartse beweging, kunnen we de bereikte hoogte uitdrukken in functie van de beginsnelheid v_0:

$$x = \bar{v}t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) = -\frac{v_0^2}{2a}$$

Uit deze uitdrukking volgt dat de bereikte hoogte omgekeerd evenredig is met de versnelling. Op de maan zal het voorwerp dan ook zes keer zo hoog geraken.

Vraagstukken

Oefening 46 *Een automobilist rijdt gedurende* 1,5 uur *tegen* 80 km/h *en daarna gedurende dezelfde tijdsduur tegen* 70 km/h.

(a) *Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

(b) *Met welke snelheid had hij moeten rijden om met een constante snelheid hetzelfde traject in dezelfde tijd af te leggen?*

Oefening 46.1 *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de tijd houdt hij constant een snelheid* v_1 *aan, gedurende de tweede helft een snelheid* v_2. *Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

Oefening 47 *Een automobilist legt* 120 km *af. De eerste helft van de weg legt hij af tegen* 90 km/h, *de tweede helft tegen* 120 km/h. *Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

Oefening 47.1 *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de af te leggen afstand houdt hij constant een snelheid* v_1 *aan, gedurende de tweede helft een snelheid* v_2. *Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

Oefening 48 *Als je met de fiets heen en terug naar school rijdt en in het heengaan tegenwind en in het terugkeren rugwind hebt, compenseert dat dan mekaar precies?*

Stel om dit op te lossen dat de weg rechtlijnig is. Bereken je gemiddelde snelheid over het traject heen en terug en vergelijk die met de snelheid die je zonder wind zou halen. Neem aan dat je normaal 10 km/h *zou fietsen, maar door de wind win of verlies je* 2 km/h.

Meerkeuze:

(a) *Nee, je hebt netto een nadeel vanwege de tegenwind.* ✓

(b) *Nee, je hebt netto een voordeel vanwege de rugwind.*

(c) *Ja, de afstand heen is de afstand terug, dus het is net alsof je helemaal geen wind had.*

Author(s): Bart Lambregs

Oefening 49 *Een bowlingbal die met een constante snelheid voort rolt, raakt de kegels aan het einde van een kegelbaan van* 16,5 m *lengte. De werper hoorde het geluid waarmee de bal op de kegels botst* 2,5 s *nadat hij de bal losliet. Welke snelheid had de bal? De snelheid van het geluid is* 343 m/s. $v_1 = \frac{x_1}{t_2 - \frac{x_1}{v_2}} =$ 6,73 m/s

Oefening 50 *Een vliegtuig moet minstens een snelheid van* 108 km/h *hebben om te kunnen opstijgen. Indien de schroeven aan het toestel een versnelling van* 1,50 m/s^2 *geven, hoe lang moet de startbaan dan minstens zijn?* *Doordat we de versnelling van het vliegtuig kennen en de snelheid die het moet bereiken, kunnen we de tijd die het vliegtuig hiervoor nodig heeft, gemakkelijke berekenen met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid van een EVRB:*

$$t = \frac{v}{a}$$

De afstand die in deze tijd wordt afgelegd, kunnen we berekenen doordat we de gemiddelde snelheid kennen[15]*:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \\ &= \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} \\ &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned}$$

De startbaan moet dus minstens 300 m *lang zijn.*

Oefening 51 *Een trein rijdt tegen een snelheid van* 72 km/h *en remt met een versnelling waarvan de grootte* 1,0 m/s^2 *bedraagt. Na hoeveel tijd komt de trein tot stilstand en welke afstand wordt er tijdens dit afremmen afgelegd?*

Aangezien er per seconde een snelheid van 1,0 m/s *van de beginsnelheid afgaat, vinden we de tijd die nodig is voor het remmen, door de beginsnelheid te delen door de versnelling. Dat is namelijk de tijd die nodig is voor de trein om tot stilstand te komen:*

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 + at &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= -\frac{v_0}{a} \end{aligned}$$

[15] De benodigde afstand kunnen we evenzeer berekenen met de formule $x = x_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$ door de tijd in te vullen.

Invullen van de gegevens levert een tijd van 20 s. *De afgelegde afstand gedurende het remmen vinden we nu met de plaatsfunctie. We kennen de benodigde tijd, die we in de plaatsfunctie invullen.*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

Invullen van de gegevens levert een remafstand van 200 m.

Een andere mogelijkheid om de remafstand te vinden is te werken met de gemiddelde snelheid, $x = \overline{v} t$.

Oefening 52 *Op een bevroren meer komt een glijdende hockeyschijf na* 200 m *tot stilstand. Als zijn initiële snelheid* 3,00 m/s *was, bepaal dan*

(a) *de versnelling in de veronderstelling dat deze constant is,*

(b) *de tijd die de schijf nodig heeft om tot stilstand te komen.*

$a = \dfrac{v_0^2}{2x} = 0{,}0225\,\mathrm{m/s^2}$; $t = \dfrac{2x}{v_0} = 133{,}33\,\mathrm{s}$

Oefening 53 *Een bootje vaart met een snelheid van* 36,0 km/h *een eerste tijdopnemer voorbij en drijft daarna eenparig zijn snelheid op. Na* 20,0 s *komt het voorbij een tweede tijdopnemer met een snelheid van* 90,0 km/h. *Bereken de versnelling van het bootje en de afstand tussen beide tijdopnemers.* $a = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} = 0{,}750\,\mathrm{m/s^2}$, $x - x_0 = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 350\,\mathrm{m}$

Oefening 54 *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* 3,0 km *een snelheid van* 450 km/h *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken de versnelling en de tijd, nodig om die* 3,0 km *af te leggen.* *Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. *De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \overline{v} \Delta t \\ &\Downarrow \\ t &= \frac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{2x}{v} \end{aligned}$$

Invullen van de gegevens levert een tijd van 48 s. *Met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd erin te substitueren, en de beginsnelheid nul te nemen:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{v}{t} = \frac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ &= \frac{v^2}{2x} \end{aligned}$$

Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

Oefening 55 *Een auto begint te remmen als hij zich* 35 m *van een hindernis bevindt. Zijn snelheid op dat moment is* 54 km/h. *Na* 4,0 s *botst hij tegen de hindernis. Bereken de snelheid waarmee hij de hindernis raakt en zijn constante versnelling gedurende de remweg.* *Uit de plaatsfunctie* $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ *kunnen we de versnelling halen:*

$$a = \frac{2x - 2v_0t}{t^2} = -3{,}125\,\mathrm{m/s^2}$$

Substitutie van de versnelling in de snelheidsfunctie levert:

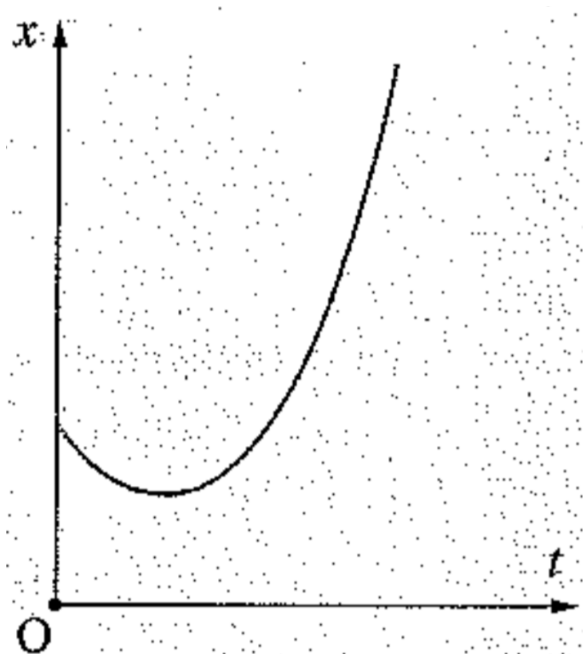
$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= v_0 + \left(\frac{2x - 2v_0t}{t^2}\right)t \\ &= \frac{2x}{t} - v_0 \\ &= 2{,}5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

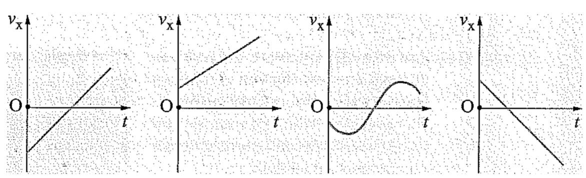
Een andere (snellere) mogelijkheid om de snelheid te vinden is die te halen uit $x = \frac{v_0 + v}{2}t$.

Oefening 56 *Twee fietsers vertrekken gelijktijdig om een afstand van* 200 m *af te leggen. De eerste rijdt met een constante snelheid van* 4,0 m/s, *terwijl de tweede vertrekt met een snelheid van* 1,00 m/s *en de afstand van* 200 m *met een EVRB met een versnelling van* $0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ *aflegt. Waar zal de tweede fietser de eerste inhalen en wanneer?* $t = \frac{2(v_a - v_{b,0})}{a} = 30\,\mathrm{s}$, $x = v_at = \frac{2v_a(v_a - v_{b,0})}{a} = 120\,\mathrm{m}$

Oefening 57 *Een trein verlaat het station a en rijdt naar het station b, op* 15 km *van a gelegen. De eerste* 1000 m *worden afgelegd met een EVRB en de verkregen snelheid is* 72, 0 km/h. *Die snelheid blijft constant tot op* 250 m *van b. Hier begint de trein te vertragen. Wanneer komt hij in station b toe? Maak de* $v(t)$*-grafiek.*

Oefening 58 *Een deeltje beschrijft een eendimensionale beweging op de x-as. De positie als functie van de tijd is hiernaast weergegeven in een $x(t)$-diagram. Duid de onderstaande grafiek aan die het best het verloop weergeeft van de snelheidscomponent v van dat deeltje als functie van de tijd.*

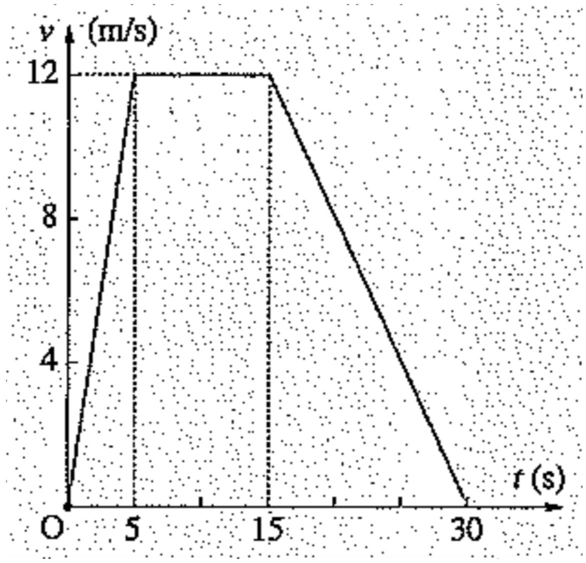




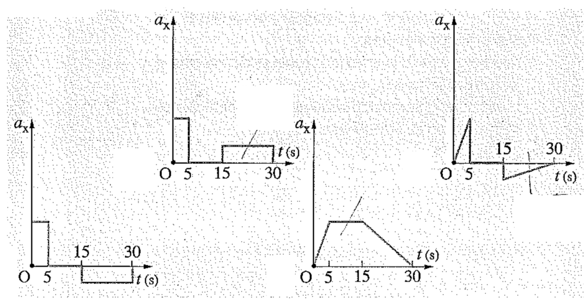
Oefening 59 *Een deeltje beweegt in de zin van de x-as. De nevenstaande grafiek geeft aan hoe de grootte van de snelheid verandert als functie van de tijd.*

(a) *De afstand afgelegd na* 15 s *bedraagt:*

(b) *Na* 30 s *heeft het deeltje een welbepaalde afstand afgelegd. Hoe groot zou de constante snelheid van het deeltje moeten zijn om in* 30 s *dezelfde afstand af te leggen?*



(a) *Het verloop van de versnellingscomponent van het deeltje wordt kwalitatief voorgesteld op figuur:*



Oefening 60 *(∗∗∗) Maggie en Jennifer lopen de* 100 m. *Beiden doen ze er exact 10,2 seconden over. Met een eenparige versnelling bereikt Maggie na* 2 s *haar maximale snelheid, Jennifer doet dat na* 3 s. *Hun maximale snelheden houden ze aan voor de rest van de wedstrijd.*

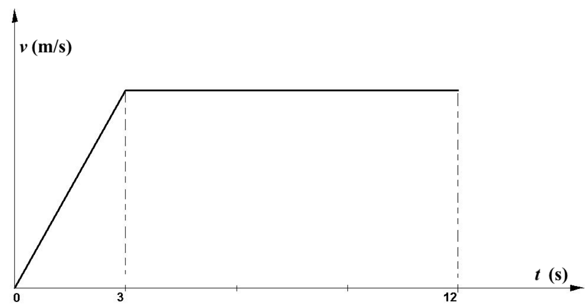
(a) *Wat zijn hun maximale snelheden?*

(b) *Wat is de versnelling van iedere sprinter?*

(c) *Wie heeft er voorsprong na 6 s, en hoeveel?*

$v_1 = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_1}$; $a = \dfrac{2x_2}{(2t_2 - t_1)t_1}$; $x_M - x_J = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,M}}(t - \dfrac{t_{1,M}}{2}) - \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,J}}(t - \dfrac{t_{1,J}}{2})$

Snelheidsgrafiek van Jennifer:



Oefening 61 *Welke afstand wordt er door een bungeejumper na een vrije val van* 2,5 s *afgelegd?* $x = \frac{1}{2}gt^2 = 31\,\mathrm{m}$

Oefening 62 *Een auto die* 90 km/h *rijdt, ligt* 100 m *achter op een vrachtwagen die* 75 km/h *rijdt. Hoeveel tijd kost het de auto om de vrachtwagen in te halen?* $t = \frac{x_0}{v_a - v_v} = 24\,\mathrm{s}$

Oefening 63 *De snelheid van een trein verandert eenparig in 2 minuten van* 20 km/h *tot* 30 km/h. *De trein rijdt gedurende die tijd over een rechte spoorlijn.*

(a) *Bepaal de versnelling.*

(b) *Bepaal de afstand die de trein heeft afgelegd gedurende deze 2 minuten.*

Oefening 64 *Een auto trekt in* 5,0 s *op van* 10 m/s *naar* 25 m/s. *Wat was de versnelling in de veronderstelling dat de auto een EVRB ondergaat? Welke afstand legde de auto in deze periode af?* $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = 3\,\mathrm{m/s}$, $x - x_0 = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 87,5\,\mathrm{m}$

Oefening 65 *Bij het katapulteren van vliegtuigen wordt een startbaan van* 25,0 m *gebruikt, die door het vliegtuig eenparig versneld in* 1,00 s *wordt doorlopen. Zoek zijn versnelling en de snelheid waarmee het de baan verlaat.*

Oefening 66 *Een auto trekt op tot* 100 km/h *in* 6,0 s. *Als hij dat doet op een rechte baan met constante versnelling, welke afstand is er dan hiervoor nodig?* $a = \frac{v}{t} = 4,63\,\mathrm{m/s^2}$, $x = \frac{vt}{2} = 83,3\,\mathrm{m}$

Oefening 67 *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* 3,0 km *een snelheid van* 450 km/h *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken* *de versnelling en de tijd, nodig om die* $3{,}0\,\mathrm{km}$ *af te leggen. Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. *De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \overline{v}\Delta t \\ &\Downarrow \\ t &= \frac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{2x}{v} \end{aligned}$$

Invullen van de gegevens levert een tijd van $48\,\mathrm{s}$. *Met het formuletje voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd te substitueren:*

$$\begin{aligned} v &= at \\ &\Updownarrow \\ a &= \frac{v}{t} = \frac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ &= \frac{v^2}{2x} \end{aligned}$$

Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

Oefening 68 *Een vliegtuig landt met een snelheid van* $100\,\mathrm{m/s}$. *Op de landingsbaan heeft het een vertraging van* $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. *Welke afstand heeft het vliegtuig nodig om tot stilstand te komen?*

Oefening 69 *Een trein vertrekt uit een station en rijdt met een eenparig versnelde beweging waarvan de versnelling* $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ *bedraagt. Hoe groot is de afstand die de trein heeft afgelegd als zijn snelheid* $72{,}0\,\mathrm{km/h}$ *bedraagt?*

Oefening 70 *Twee personen A en B voeren op dezelfde rechte en vanuit dezelfde beginstand een eenparige beweging uit. A vertrekt* $100\,\mathrm{s}$ *eerder dan B. Met een snelheid die dubbel zo groot is als die van A haalt B, op* $400\,\mathrm{m}$ *van het vertrekpunt, A in. Bereken beide snelheden en stel ze grafisch voor.*

Oefening 71 *Een vliegtuig start vanuit rust en versnelt met een constante versnelling langs de grond alvorens op te stijgen. Het legt* $600\,\mathrm{m}$ *af in* $12\,\mathrm{s}$. *Bepaal de versnelling, de snelheid na* $12\,\mathrm{s}$ *en de afstand afgelegd gedurende de twaalfde seconde.*

$a = \frac{2x}{t^2} = 8{,}33\,\mathrm{m/s^2}$, $v = \frac{2x}{t} = 100\,\mathrm{m/s}$, $x(t=12) - x(t=11) = \frac{1}{2}a(t_{12}^2 - t_{11}^2) = 95{,}8\,\mathrm{m}$

Vraagstukken vrije val

Oefening 72 *Welke afstand wordt er door een bungeejumper na een vrije val van* 2,5 s *afgelegd?* $x = \frac{1}{2}gt^2 = 31\,\mathrm{m}$

Oefening 73 *Uit een punt op* 28,0 m *boven de grond wordt een bal verticaal omhoog geworpen met een snelheid van* 12 m/s. *Bepaal*

(a) *de door het lichaam bereikte hoogte boven de grond;*

(b) *de tijd nodig om de grond te bereiken;*

(c) *de snelheid bij het bereiken van de grond.*

$$v = 0 \Rightarrow x = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 35{,}34\,\mathrm{m}$$

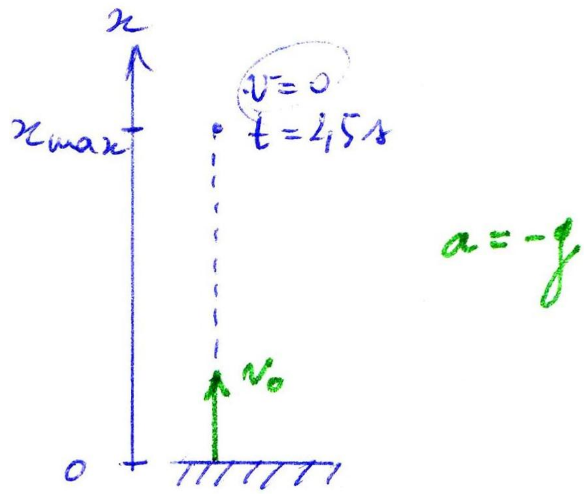
$$x = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g} = 3{,}91\,\mathrm{s}$$

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gx_0} = -26{,}33\,\mathrm{m/s}$$

Oefening 74 *Een pijl wordt verticaal van de grond omhooggeschoten en bereikt na* 2,8 s *het hoogste punt. Bepaal deze hoogte.* *Op het hoogste punt is de snelheid van de pijl nul. Aangezien we weten hoe lang hij onderweg is en de pijl per seconde* $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ *trager omhoog vliegt, kunnen we hieruit de beginsnelheid bepalen.*

We kiezen de referentie-as met de oorsprong op de grond. De versnellingscomponent is dan het tegengestelde van de valversnelling, $a = -g$.

Author(s): Bart Lambregs



We krijgen:

$$v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt$$

Dat is in grootte gelijk aan $27\,\mathrm{m/s}$. *Nu dat we ook de beginsnelheid kennen, vinden we de afgelegde afstand, wat ook de maximale hoogte is:*

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = (gt)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

Vullen we de getalwaardes in, dan vinden we $38\,\mathrm{m}$

Merk op dat deze afstand gelijk is aan de afstand die de pijl vanuit rust zou afleggen bij een vrije val die 2,8 s *duurt. Dat is niet heel verwonderlijk; de vertraging naar boven toe is namelijk gelijk aan de versnelling bij het vallen naar beneden. Wiskundig loopt de symmetrieas van een parabool door de top.*

Oefening 75 *Een parachutist in vrije val bereikt een uiteindelijke valsnelheid van* $50\,\mathrm{m/s}$. *Neem aan dat een geopende parachute voor een constante vertraging van* $30\,\mathrm{m/s^2}$ *zorgt.*[16] *Wil er bij het neerkomen geen kans op letsel bestaan, dan mag de landingssnelheid niet groter dan* 5,0 m/s *zijn.*

Wat is de minimumhoogte voor het openen van de parachute? Aangezien we de versnelling en begin- en eindsnelheid kennen, kunnen we de tijd die nodig is om de eindsnelheid te bereiken, berekenen:

$$v = v_0 + at \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

[16] Dit is een heel ruwe benadering. In feite hangt de vertraging door de parachute namelijk af van de snelheid en is die afhankelijkheid bovendien voor grote snelheden sterker dan voor kleine.

De afgelegde afstand is dan met de gemiddelde snelheid te berekenen:

$$\begin{aligned} x &= \overline{v}t \\ &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} \\ &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= 41{,}25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Oefening 76 *Iemand laat een meloen vallen vanop een hoogte van* $20\,\mathrm{m}$. *Op hetzelfde moment schiet je een pijl verticaal omhoog vanop de grond. De pijl treft de meloen na* $1{,}0\,\mathrm{s}$.

(a) *Geef in één assenstelsel een verzorgde schets van de grafiek van de plaats in functie van de tijd voor beide objecten.*

(b) *Met welke snelheid heb je de pijl afgeschoten?*

De plaatsfunctie van de meloen gelijkstellen aan die van de afgeschoten pijl, geeft (we kiezen de y*-as omhoog waardoor de versnelling de negatieve valversnelling is):*

$$y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Oplossen naar v_0 *geeft:* $v_0 = \dfrac{y_0}{t} = 20\,\mathrm{m/s}$.

Oefening 77 *($\ast\ast\ast$) Wanneer de pelikaan naar vis duikt, trekt hij zijn vleugels in om als een steen loodrecht naar beneden te vallen.*

Stel een pelikaan duikt vanaf $25\,\mathrm{m}$ *hoogte en verandert onderweg dus niet meer van koers. Als het een vis* $0{,}15\,\mathrm{s}$ *kost om te vluchten, wat is dan de hoogte waarop de vis de pelikaan minstens moet opmerken, wil de vis nog kans maken te ontsnappen?*

Neem aan dat de vis zich aan het wateroppervlak bevindt.

We kiezen de referentie-as naar beneden, met de oorsprong op de positie waar de pelikaan begint aan zijn duik De versnelling is dan gelijk aan de valversnelling.

We kennen de afstand waarover de pelikaan valt zodat we de tijd die de pelikaan nodig heeft om het wateroppervlak te bereiken, de valtijd, kunnen berekenen uit $x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$*:*

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x_2}{g}}$$

De pelikaan heeft namelijk geen beginsnelheid.

Gedurende een tijd $t_1 = t_2 - \Delta t$ (15 honderdste van een seconde minder dan de valtijd) mag de pelikaan vallen zonder door de vis te worden opgemerkt. De afstand boven het wateroppervlak is dan:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ &= x_2 - \frac{1}{2} g \left(t_2 - \Delta t\right)^2 \\ &= 3{,}2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

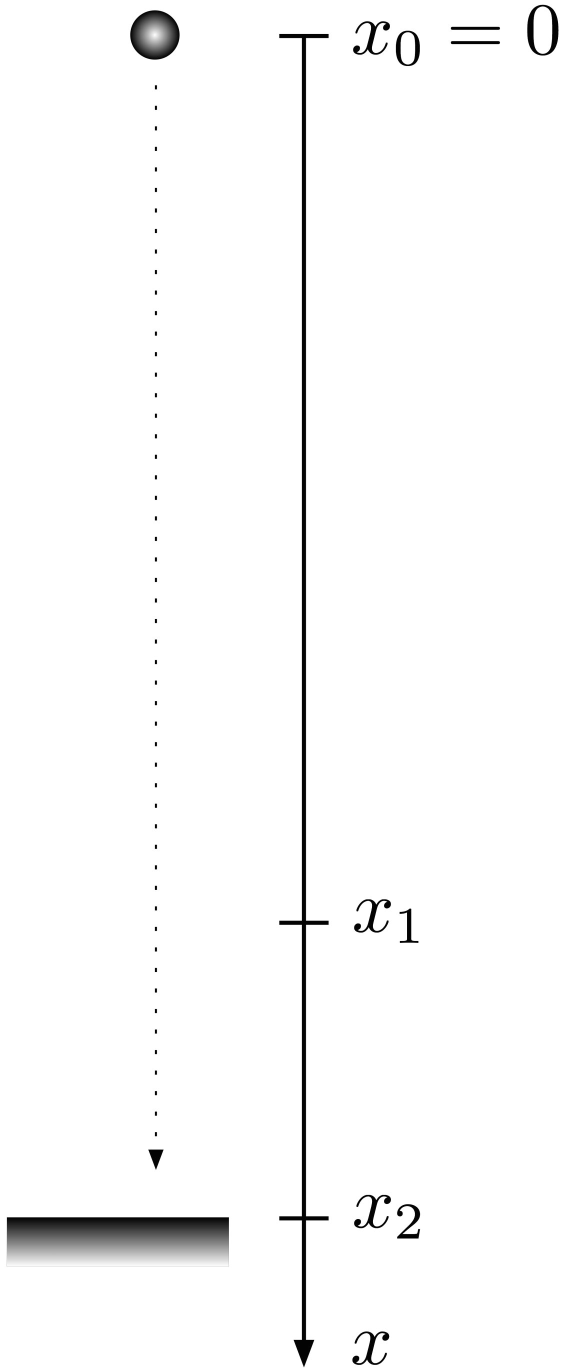
Oefening 78 *($***$) Een verticaal vallende steen legt in de laatste seconde, voor hij de grond bereikt, $100\,\mathrm{m}$ af. Men veronderstelt dat hij vanuit rust vertrok.*

(a) *Bepaal de snelheid op het ogenblik dat hij de grond bereikt.*

(b) *Bepaal de hoogte vanwaar de steen viel en de tijd die hij daarvoor nodig had.*

We kiezen de x-as naar beneden zodat de versnelling de valversnelling is, $a = g$. Als we x_1 beschouwen als de beginpositie van de beweging die de steen uitvoert in de laatste honderd meter, kunnen we de snelheid vinden waarmee de steen hieraan 'begint'.

$$\begin{aligned} & \Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_1 = \frac{\Delta x - \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} \end{aligned}$$


$x_0 = 0$
x_1
x_2
x

Met de formule voor de snelheid van een EVRB, vinden we de snelheid op het einde van het interval.

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + g\Delta t \\ &= \frac{\Delta x - \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} + g\Delta t \\ &= \cdots \\ &= \overline{v} + g\frac{\Delta t}{2} \\ &= 105\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Je kan dit ook afleiden door gebruik te maken van de formule voor gemiddelde snelheid, $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

Omdat we de snelheid kennen, kunnen we de tijd vinden die de steen nodig heeft gehad om aan deze snelheid te komen. Vervolgens vinden we dan ook de afstand.

$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \frac{\overline{v}}{g} + \frac{\Delta t}{2} = 10{,}7\,\mathrm{s}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 561\,\mathrm{m}$$

Oefening 79 *($\ast\ast\ast$) Van de Empire Stage Building in New York komt op* $250\,\mathrm{m}$ *een ijskegel los en valt naar beneden.*

(a) *Na hoeveel tijd en met welke snelheid bereikt het ijskegeltje uiteindelijk de grond?*

(b) *Hoelang en over welke afstand moet de ijskegel al gevallen zijn om in de daaropvolgende* $2\,\mathrm{s}$ *een afstand te kunnen afleggen van* $100\,\mathrm{m}$*?*

Gegeven $x_3 = 250\,\mathrm{m}$
$\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$
$\Delta x = x_2 - x_1 = 100\,\mathrm{m}$

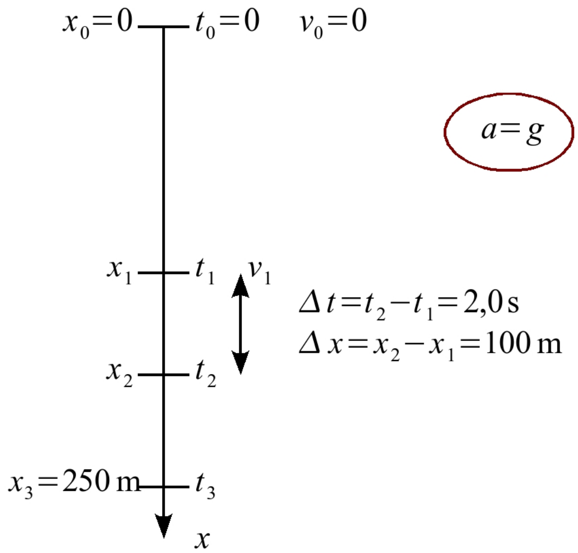
Gevraagd t_3, v_3, t_1 en x_1

Omdat de beweging enkel naar beneden is, is de beschrijving gemakkelijk met een x*-as naar beneden gericht. De versnellingscomponent* a *is dan gelijk aan de valversnelling* g*. Omdat de kegel vanuit rust vertrekt, vinden we de valtijd uit* $x = \dfrac{1}{2}gt^2$*:*

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

De valtijd bepaalt de eindsnelheid:

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$$



Invullen van de gegevens geeft $t_3 = 7{,}1\,\mathrm{s}$ *en* $v_3 = 70\,\mathrm{m/s} = 252\,\mathrm{km/h}$.

Uit de plaatsfunctie kunnen we de beginsnelheid[17] *halen. De beginsnelheid* v_1 *is immers de enige onbekende in de vergelijking:*[18]

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

Dus: $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t}$.[19]

Omdat de kegel vanuit rust begint te vallen en per seconde $9{,}81\,\mathrm{m/s}$ *sneller valt, vinden we de valtijd als* $t_1 = \dfrac{v_1}{g}$*:*

$$t_1 = \frac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2g\Delta t} = \frac{2 \cdot 100\,\mathrm{m} - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (2,0\,\mathrm{s})^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2,0\,\mathrm{s}} = 4{,}1\,\mathrm{s}$$

[17] Voor de honderd meter is de beginsnelheid v_1.

[18] Hoe komen we aan deze uitdrukking? De plaatsfunctie toegepast op de honderd meter geeft: $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2$ waarin de variabele t de verstreken tijd tussen tussen de posities x_1 en x_2 weergeeft. In dit geval stellen we die echter voor door Δt. Ook is $\Delta x = x_2 - x_1$.

[19] Als we de uitdrukking uitwerken: $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} - g\dfrac{\Delta t}{2} = \bar{v} - g\dfrac{\Delta t}{2}$, is te zien dat v_1 één seconde eerder dan de gemiddelde snelheid bereikt wordt. De gemiddelde snelheid is immers $\bar{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ en wordt dus halverwege de valtijd van de honderd meter bereikt. Bovendien toont deze uitwerking dat we het vraagstuk ook anders hadden kunnen oplossen. Uit $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2} = \dfrac{v_1 + (v_1 + g\Delta t)}{2}$ is immers v_1 te bepalen.

De bijbehorende afgelegde weg is dan $x_1 = \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 82\,\mathrm{m}$.

Oefening 80 *($***$) Een ziek man zit voor een raam dat* $1{,}20\,\mathrm{m}$ *hoog is. Een steen wordt vanop de grond opgeworpen en passeert het raam een keer opwaarts en een keer neerwaarts. De man ziet de steen in totaal voor één seconde.*

(a) *Bepaal de snelheid waarmee de steen de onderkant van het raam bereikt.*

(b) *Toon aan dat het met deze gegevens niet mogelijk is te berekenen hoe hoog het raam boven de grond is gelegen.*

(a) $\Delta x = v_1 \Delta t - \dfrac{1}{2} g \Delta t^2$ *zodat* $v_1 = \bar{v} + g\dfrac{\Delta t}{2} = 4{,}85\,\mathrm{m/s}$ *(*$\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$*)*

(b) Naast de hoogte van het raam boven de grond, zijn ook de benodigde tijd en de beginsnelheid onbekende grootheden. Met maar twee vergelijkingen die een EVRB beschrijven ($x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2$ *en* $v = v_0 + at$*), zijn deze onbekenden niet vast te leggen.*

In een meer fysische uitleg kan je je realiseren dat eenzelfde snelheid aan de onderkant van het raam voor een grotere hoogte boven de grond te realiseren is met een grotere snelheid waarmee de steen opgeworpen wordt.

Oefening 81 *($***$) Een student gooit een sleutelbos verticaal omhoog naar een medebewoonster in een raam* $4{,}00\,\mathrm{m}$ *hoger. De sleutels worden* $1{,}50\,\mathrm{s}$ *later opgevangen.*

(a) *Wat was de snelheid waarmee de sleutels omhoog werden gegooid?*

(b) *Welke snelheid had de sleutelbos vlak voordat hij werd opgevangen?*

$$v_0 = \frac{x + \frac{1}{2} g t^2}{t} = 10,02\,\mathrm{m/s}$$

$$v = v_0 - gt = \frac{x}{t} - \frac{1}{2} g t = -4{,}69\,\mathrm{m/s}$$

Merk op dat de sleutelbos wordt opgevangen bij het terug naar beneden komen. De snelheidscomponent is immers negatief.

Oefening 82 *($***$) Een voorwerp wordt verticaal omhoog geworpen en bereikt na een tijd* t *een hoogte* h*. Toon aan dat de maximale hoogte* h_{max} *die het voorwerp bereikt, wordt gegeven door:*

$$h_{max} = \frac{(gt^2 + 2h)^2}{8gt^2}.$$

We zoeken eerst een uitdrukking voor de maximale hoogte. Op het hoogste punt is de snelheid nul zodat:

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 - gt &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= \frac{v_0}{g} \end{aligned}$$

Deze tijd is dus de tijd die het voorwerp nodig heeft om het hoogste punt te bereiken. Als we de oorsprong van de y*-as op de grond kiezen en naar boven gericht, dan vinden we de maximale hoogte door dit tijdstip in de plaatsfunctie in te vullen:*

$$\begin{aligned} y_{max} &= y(t_{max}) \\ &= v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

Doordat we weten hoe hoog het voorwerp zich bevindt na een tijd t_1*, kunnen we de beginsnelheid* v_0 *bepalen:*

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \\ &\Updownarrow \\ v_0 &= \frac{2y_1 + g t_1^2}{2t_1} \end{aligned}$$

Substitutie hiervan in de uitdrukking voor de maximale hoogte geeft de te bewijzen uitdrukking.

Deel V

Tweedimensionale bewegingen

Inleiding

Als we in een vlak bewegen, hebben we te maken met een tweedimensionale beweging. Ten opzichte van een referentiestelsel met twee assen, kunnen we de beweging beschrijven.

Figuur 23: Sterrentrajecten aan de hemel

We behandelen twee concrete bewegingen in dit hoofdstuk, de horizontale worp en de eenparig cirkelvormige beweging.

Author(s): Bart Lambregs

Het onafhankelijkheidsbeginsel

Denkvraag 83 *Kan je in het filmpje vaststellen dat de horizontale beweging van de bal die wordt opgeworpen vanuit de laadbak van een pickup truck een invloed heeft op de manier waarop de bal in verticale zin beweegt?*

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=j1URC2G2qnc`

Definition 8. onafhankelijkheidsbeginsel Het onafhankelijkheidsbeginsel stelt dat een beweging in een bepaalde richting geen invloed uitoefent op de beweging in een andere richting.

Als gevolg kunnen we de beweging beschrijven als een samenstelling van een horizontale en een verticale beweging, onafhankelijk van elkaar.

Author(s): Bart Lambregs

De eenparig cirkelvormige beweging

De cirkelbeweging is op het eerste zicht misschien een zeer eenvoudige beweging maar wel alom tegenwoordig. Denk maar aan een tol, een kermisattractie zoals een carrousel, wielen, planeetbanen of aan het nemen van een bocht met de auto of de fiets. Vandaar dat het een toch een erg belangrijke beweging is. Wij bestuderen een eenparige cirkelvormige beweging (ECB). Dat betekent dat de baan van het object een cirkel is en dat de grootte van de snelheid waarmee de baan wordt doorlopen, constant is.

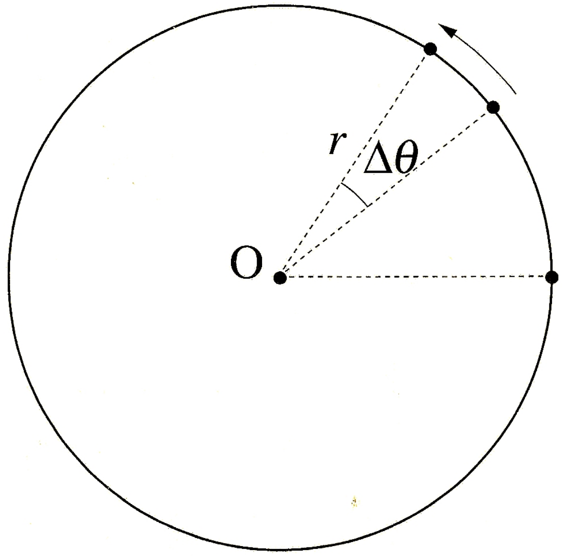
0.1 Enkele begrippen

Om een cirkelbeweging te beschrijven, hebben we enkele begrippen nodig die je eventueel nog onbekend zijn. Zo is er de *frequentie*. Het is algemeen het aantal trillingen of cyclussen van een periodieke beweging die per seconde worden doorlopen. Specifiek voor de cirkelbeweging is de frequentie dan het aantal keren dat de cirkel doorlopen wordt per tijdseenheid. De frequentie krijgt het symbool f en heeft als eenheid de Hertz, $[f] = \mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$. Het begrip *periode* gebruiken we voor de tijdsduur die nodig is voor het doorlopen van één cyclus. Het symbool is T en de eenheid seconde, $[T] = s$. Het aantal cyclussen dat in de periode wordt doorlopen is één zodat de volgende relatie tussen de frequentie en de periode bestaat.

$$f = \frac{1}{T}$$

Als laatste hebben we nog het begrip *hoeksnelheid*.

Author(s): Bart Lambregs



Verschillende punten op je fietswiel hebben verschillende snelheden als hun afstand tot het centrum verschilt. Het ventieldopje moet immers in eenzelfde tijd meer afstand afleggen dat het sensortje van je snelheidsmeter. Toch bestaat het wiel uit één geheel. Als je naar de omwentelingshoek kijkt die een straal vanuit het centrum door een punt op het wile maakt, dan is die voor alle punten gelijk. Hoe sneller het wiel draait, hoe groter ook de omwentelingshoek is die een straal gemaakt heeft. Daarom definiëren we de hoeksnelheid ω als de verandering van de omwentelingshoek tot de benodigde tijd.[20]

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

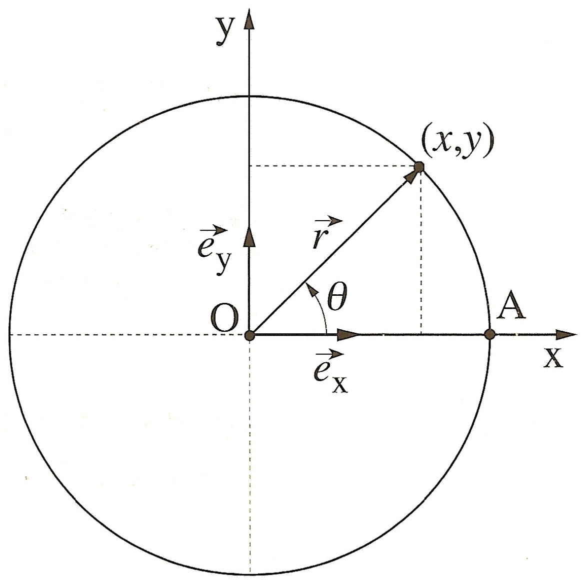
De eenheid is radialen per seconde, $[\omega]$ = rad/s. Aangezien een volledige omwentelingshoek 2π bedraagt en de tijd nodig om rond te gaan de periode is, geldt

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{2}$$

0.2 Kinematica van de cirkelbeweging

We beschouwen een punt dat een cirkelbeweging maakt met straal r. We voeren een assenstelsel in met de oorsprong in het middelpunt van de cirkel.

[20] De letter ω is de kleine letter van Ω en de laatste letter in het Griekse alfabet. Spreek ω uit als omega. Een ω is geen w, zoals ook een w geen ω is. O wee (ω?) als je je op het examen in juni vergist ...



Als we de omwentelingshoek θ meten vanaf de positieve x-as en en het tijdstip $t_0 = 0$ nemen, kunnen we de doorlopen omwentelingshoek als volgt in functie van de tijd schrijven.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} = \frac{\theta}{t} \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega t$$

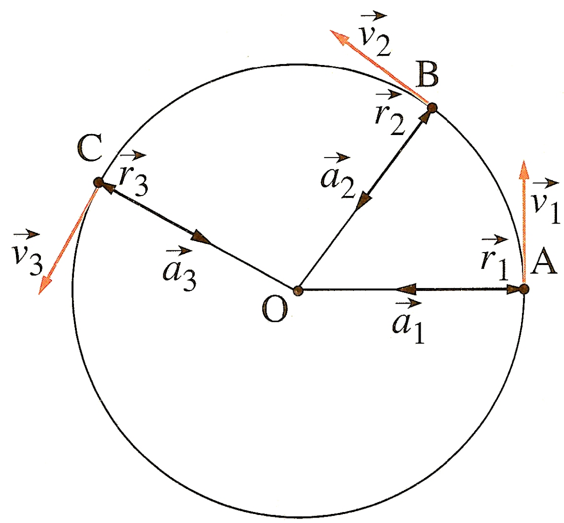
De coördinaatfuncties vinden we dan als projecties op de x- en y-as.

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\omega t \\ y(t) &= r\sin\omega t \end{aligned}$$

We krijgen dan voor de plaatsvector, de snelheid en de versnelling:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + r\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ &\Downarrow \quad \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -\omega r\sin\omega t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \omega r\cos\omega t \end{cases} \\ \vec{v} &= -\omega r\sin\omega t \cdot \vec{e}_x + \omega r\cos\omega t \cdot \vec{e}_y \\ &\Downarrow \quad \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r\cos\omega t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r\sin\omega t \end{cases} \\ \vec{a} &= -\omega^2 r\cos\omega t \cdot \vec{e}_x - \omega^2 r\sin\omega t \cdot \vec{e}_y \\ &= -\omega^2(r\cos\omega t \cdot \vec{e}_x + r\sin\omega t \cdot \vec{e}_y) \\ &\Updownarrow \\ \vec{a} &= -\omega^2\vec{r} \end{aligned} \tag{3}$$

Deze laatste gelijkheid is erg belangrijk. We vinden dat de versnelling steeds naar het middelpunt van de cirkel is geöriënteerd ...! We noemen het bijgevolg een centripetale[21] of middelpuntzoekende versnelling.

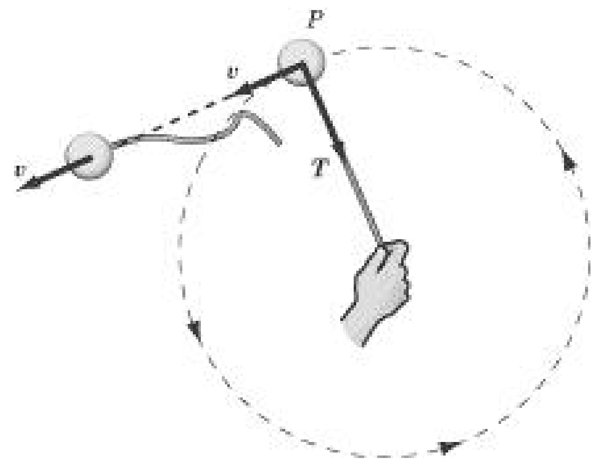


Je zou dit resultaat opmerkelijk kunnen noemen aangezien de snelheid een constante grootte heeft.

$$\begin{aligned} v = \| \vec{v} \| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(-\omega r \sin \omega t)^2 + (\omega r \cos \omega t)^2} \\ &= \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\ &\Updownarrow \\ v &= r\omega \end{aligned} \tag{4}$$

Echter verandert de richting van de snelheid en aangezien de versnelling de verandering van de snelheid is, moet er een versnelling zijn. Deze is naar het centrum geöriënteerd omdat een fractie van een seconde later het object – in vergelijking met de baan die het zou afleggen moest het volgens de snelheid die het op een bepaald moment heeft, voortbewegen – iets dichter naar het centrum moet zijn gekomen. De snelheidsvector is in grootte niet veranderd maar wel gedraaid, in de richting van het centrum. Moest bovendien de versnelling niet loodrecht op de snelheid staan, dan zou de versnelling een component volgens de snelheid hebben wat zou betekenen dat de snelheid in die richting zou moeten toenemen.

[21] Dit is niet hetzelfde als centrifugaal.



Toelichting figuur: Moest er geen versnelling naar het centrum zijn – bv. in het geval dat een touwtje met een ronddraaiend object aan, knapt – dan zou de snelheid niet veranderen en het object op een rechte baan in het verlengde van de snelheid met een constante snelheid voortbewegen.

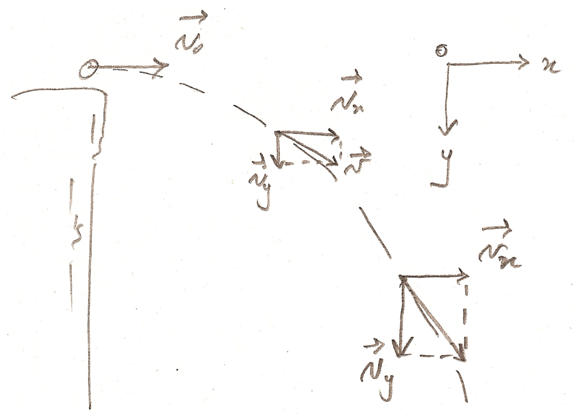
Uit (**??**), (**??**) en (**??**) vinden we nog:

$$a = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r} \tag{5}$$

Merk op dat de snelheid een kwadratische invloed op de grootte van de versnelling heeft.

De horizontale worp

We bekijken een voorbeeld van een tweedimensionale beweging. Wanneer een object horizontaal met een bepaalde beginsnelheid wordt gekatapulteerd, noemen we die beweging een horizontale worp. Wij beschouwen de worp in het luchtledige.



Figuur 24: De snelheid in horizontale richting verandert niet, die in de verticale richting neemt lineair toe in de tijd

In de beschrijving kunnen we de x-as horizontaal en de y-as verticaal naar beneden nemen. Omdat er volgens de x-as geen versnelling is het lichaam volgens de y-as valt met de valversnelling g, kunnen we de formules voor een ERB en een EVRB op de afzonderlijke assen toepassen en zo de volledige beweging beschrijven.

$$\left\{\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = g \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right.$$

De baanvergelijking vinden we zoals eerder vermeld, door t in functie van x te schrijven $x = v_0 t \Leftrightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$ en dit in $y(t)$ te substitueren:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

De baan is dus een parabool.

Example 6. Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 450 km/h op een hoogte van 920 m.

Author(s): Bart Lambregs

(a) Hoever voor het doel moeten de voedselpakketten gelost worden om op het doel terecht te komen?

(b) Hoeveel tijd hebben de pakketten nodig om het doel te bereiken?

De afstand waarover de voedselpakketten in horizontale richting zijn vooruit gegaan, kunnen we vinden met de baanvergelijking. We weten namelijk hoever de pakketten naar beneden zijn gevallen en wat hun beginsnelheid is:

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{2v_0^2}x^2 \\ &\Downarrow \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 1712\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

De valtijd voor de pakketten vinden we o.a. door naar de verticale valbeweging te kijken. Deze gebeurt onafhankelijk van wat er in de horizontale richting gebeurt, zodat:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ &\Downarrow \\ t &= \sqrt{\frac{2y}{g}} = 13{,}7\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Deel VI

De wetten van Newton

Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken hebben we in de kinematica enkel bewegingen beschreven, door o.a. de fysische grootheden positie, snelheid en versnelling te gebruiken. Nu willen we die bewegingen ook kunnen verklaren; waardoor bewegen voorwerpen en hoe doen ze dat, gegeven de oorzaken? In de dynamica wordt het concept kracht als oorzaak van beweging gegeven en geeft de tweede wet van Newton het verband tussen de kracht de beweging.

De drie beginselen van Newton vormen, samen met enkele krachten, de fundamenten waarop de klassieke mechanica is gebouwd.

We focussen hier op de dynamische uitwerking van een kracht, de statische laten we voornamelijk achterwege. Dat doen we door de lichamen te beschouwen als puntmassa's.

Author(s): Bart Lambregs

De eerste wet van Newton

Om een boek met een constante snelheid over de tafel te duwen, is een zekere kracht nodig. Met een smeermiddel tussen boek en tafel is al minder kracht nodig. In de praktijk geen wrijving realiseren is niet mogelijk maar duidelijk is dat hoe minder wrijving hoe minder kracht nodig is om het boek met een constante snelheid te laten bewegen. Eenmaal in beweging gebracht, nadert de benodigde kracht tot nul, en dat terwijl het boek met constante snelheid blijft bewegen.

Door aan te nemen dat er geen kracht nodig is om in beweging te blijven, valt deze opeenvolging van waarnemingen te verklaren.

Deze aanname zit vervat in de eerste wet van Newton.

Definition 9. De eerste wet van Newton

Een voorwerp behoudt zijn toestand van rust of van eenparige rechtlijnige beweging, tenzij er een resulterende kracht op werkt.

Remark 9. De eerste wet van Newton wordt ook wel de traagheidswet genoemd. De eigenschap dat een lichaam zijn rust of constante snelheid op een rechte lijn behoudt, wordt inertie of traagheid genoemd. Vandaar de alternatieve naam voor de wet.

Denkvraag 84 *Als je tegen een van* 300 km/h *in de Thalys richting Parijs zit, voel je de zetel dan harder tegen jou duwen dan dat ze dat doet wanneer je nog stilstaat in Brussel-Zuid?*

Denkvraag 85 (a) *Hoe kunnen de broers Staf en Mathias Coppens in het filmpje gemaakt voor het programma Het Lichaam van Coppens blijven bewegen door de lucht terwijl de zetel toch niet meer duwt?*

(b) *Waarom wrijven de broers bruine zeep op de plank?*

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=l-X8sG1JV6Q`

Oefening 86 *Wanneer je met de fiets fietst, rechtdoor en met een constante snelheid, dan is de kracht die je voorwaarts uitoefent* gelijk aan✓ *de weerstandskracht die achterwaarts is gericht?*
Met andere woorden: de resulterende kracht op jouw fiets is dan nul✓ .
De resulterende kracht is nul! Want als er een resulterende kracht was, dan zou volgens de wet van de traagheid de toestand van eenparige rechtlijnige beweging niet worden behouden, en zou je ofwel trager ofwel sneller gaan rijden.

Author(s): Bart Lambregs

Als je met een constante snelheid fiets, is de kracht die je uitoefent precies voldoende om alle wrijvingskrachten op te heffen. Als je minder kracht uitoefent, vertraag je en als je meer kracht uitoefent versnel je.

Oefening 87 *Als je plots remt met je fiets kan je over je stuur vliegen. Hoe komt dat? Volgens de wet van de traagheid wil je je toestand van beweging voortzetten. Omdat de fiets slechts een beperkte kracht op jou kan uitoefenen, bestaat de kans dat die niet groot genoeg is om je tot stilstand te brengen.*

De tweede wet van Newton

De eerste wet vertelt ons niet volledig wat er gebeurt wanneer op een lichaam een kracht werkt. Ze vertelt ons niet wat de relatie tussen kracht en beweging is. Dat doet de tweede wet.

Een bal waar je harder tegen schopt, krijgt een grotere snelheid mee en een pingpongballetje vliegt gemakkelijker weg dan een basketbal wanneer je er een tik tegen geeft. Als je het nader onderzoekt, door bijvoorbeeld verschillende krachten op een wagentje met eventueel steeds andere massa's te laten inwerken en de bijbehorende versnellingen te meten, merk je dat de versnelling recht evenredig is met de resulterende kracht en dat massa en versnelling omgekeerd evenredig zijn. M.a.w. $a \sim F/m$. Als bovendien een kracht zijdelings inwerkt op een bewegend voorwerp, dan merk je dat de baan afbuigt, in de richting van de kracht.

De eenheid van de grootheid kracht is de newton (symbool N). Eén newton wordt gedefinieerd als de grootte van de kracht die een massa van één kilogram een versnelling van één meter per seconde kwadraat geeft.

Bovenstaande observaties, samen met de definitie van de eenheid van kracht, zitten vervat in de tweede wet van Newton, die een kwantitatieve relatie tussen kracht en versnelling poneert.

Definition 10. De tweede wet van Newton

De versnelling van een voorwerp is recht evenredig met de erop inwerkende resulterende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het voorwerp. In symbolen:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Remark 10. De wet spreekt over de *resulterende* kracht. Het is de resulterende kracht die gelijk is aan $m\vec{a}$, niet zomaar een van de inwerkende krachten.

Remark 11. Het gaat over de resulterende kracht die *op* het voorwerp met massa m wordt uitgeoefend en over de versnelling a *van* het voorwerp. De krachten worden door andere voorwerpen op het voorwerp uitgeoefend. Het is niet dat het voorwerp een kracht 'bezit' of een kracht op zichzelf kan uitoefenen.

Remark 12. De formulevorm is een vectorvergelijking. Zoals de kracht is, is ook de versnelling. Omdat de formule een vectorvergelijking is, is de gegeven formule equivalent met de componentsvergelijkingen:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

Author(s): Bart Lambregs

De componentsvergelijkingen zijn in de praktijk handiger, er valt algebraïsch mee te rekenen.

De tweede bewegingswet geeft een verband tussen de oorzaak van een beweging (de resulterende kracht) en de versnelling van de beweging.

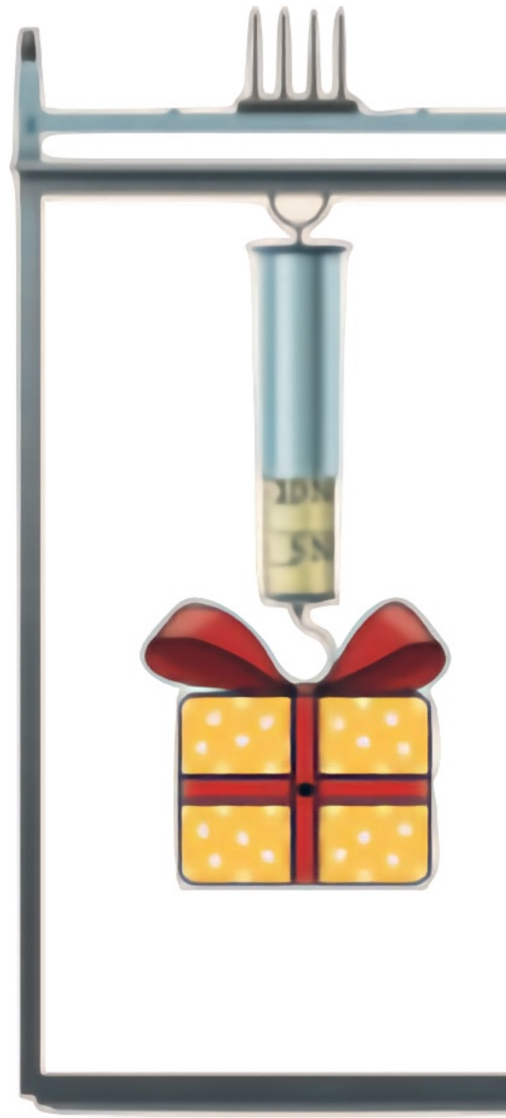
De formulevorm van de tweede wet ziet er misschien gemakkelijk uit maar is in al haar eenvoud *immens* krachtig. De wetmatigheid verklaart alle mechanische bewegingen; als we de krachten kennen, kennen we de versnelling van het voorwerp en kunnen we (althans op zijn minst in theorie) de baan van het voorwerp bepalen.

In feite zit de eerste wet vervat in de tweede. Toch blijven we hem gebruiken, vooral om het concept traagheid te benadrukken.

Denkvraag 88 *Waar en hoe in het filmpje van Wile E. Coyote en de Road Runner wordt de tweede wet van Newton met de voeten getreden?*

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=hvjAr6cHUVM`

Oefening 89 *Een massa van* 2,0 kg *bevindt zich in een lift aan een dynamometer. Die laatste duidt een kracht van* 10 N *aan. Welke beweging voert de lift uit?*



Meerkeuze:

(a) *De lift beweegt naar omlaag met een versnelling van* $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. ✓

(b) *De lift beweegt naar omhoog met een versnelling van* $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

(c) *De lift beweegt naar omlaag met een constante snelheid.*

(d) *De lift beweegt naar omhoog met een constante snelheid.*

Oefening 90 *Op een luchthaven trekt een vrouw haar koffer met een constante snelheid voort. Het handvat maakt een hoek* θ *met de horizontale. De massa van de koffer is* $10{,}5\,\mathrm{kg}$. *De vrouw trekt volgens de richting van het handvat met een kracht van* $25{,}0\,\mathrm{N}$ *terwijl de grootte van de wrijvingskracht op de valies* $11{,}0\,\mathrm{N}$ *bedraagt.*

(a) *Teken het krachtendiagram van de koffer.*

(b) *Bepaal de hoek θ tussen het handvat en de horizontale.*

(c) *Bepaal de normaalkracht die de grond op de koffer uitoefent.*

De snelheid is constant zodat volgens de horizontale richting de versnelling nul is. De component van de trekkracht volgens deze richting moet dan ook even groot zijn als de wrijvingskracht:

$$\begin{aligned} F\cos\theta &= F_w \\ &\Updownarrow \\ \theta &= \text{bgcos}\left(\frac{F_w}{F}\right) \\ &= 1{,}16\,\text{rad} \qquad = 64^\circ \end{aligned}$$

Ook volgens de verticale richting is de versnelling nul zodat[22]*:*

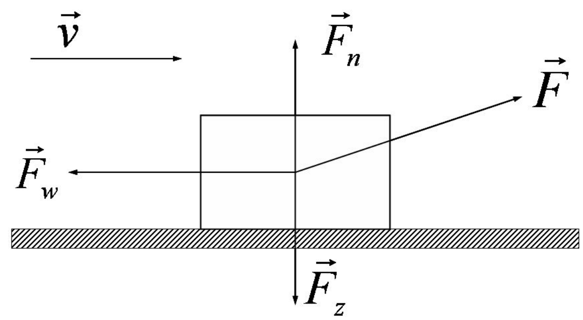
$$\begin{aligned} F\sin\theta + F_n &= F_z \\ &\Updownarrow \\ F_n &= mg - F\sin\theta \\ &= 83\,\text{N} \end{aligned}$$

Oefening 91 *In de laadruimte van een vrachtwagen hangt een slinger aan het plafond vast. Doordat de vrachtwagen met een constante versnelling optrekt, maakt het touw van de slinger een hoek van 37° met de verticale.*

[22] Als je expliciet het gevraagde in functie van de gegevens wil zetten, moet je de y-component van de trekkracht met de stelling van Pythagoras berekenen. De uitkomst is dan $F_n = mg - \sqrt{F^2 - F_w^2}$.

Bepaal de grootte van de versnelling van de vrachtwagen.

Oefening 92 *Onder invloed van een kracht $\vec{F}$ beweegt een blok met constante snelheid over een ruw horizontaal oppervlak. De krachten op de figuur hebben de juiste oriëntatie maar niet noodzakelijk de juiste grootte. Welke van de volgende relaties tussen $\vec{F}$, $\vec{F}_w$, $\vec{F}_z$ en $\vec{F}_n$ moet in ieder geval waar zijn?*



Meerkeuze:

(a) $F_w = F$ en $F_n = F_z$

(b) $F_w < F$ en $F_n < F_z$ ✓

(c) $F_w = F$ en $F_n > F_z$

(d) $F_w < F$ en $F_n = F_z$

We ontbinden de kracht $\vec{F}$ in zijn twee componenten volgens de horizontale en verticale richting: $\vec{F}_x, \vec{F}_y$. Aangezien het blok in de verticale richting niet versnelt, moet $F_z = F_n + F_y$ of $F_n < F_z$.

De derde wet van Newton

Krachten komen niet uit het niets, ze worden altijd door een ander voorwerp uitgeoefend. Zo is het de hamer die de spijker in de muur drijft en is het de voet die een trap tegen de bal geeft. In deze voorbeelden oefent het ene voorwerp een kracht uit en ondergaat het andere voorwerp die kracht. Maar, is het zo eenzijdig ...? Het volgende voorbeeld geeft aan van niet. Het geeft aan dat er naast een 'actie'kracht ook altijd een 'reactie'kracht optreedt.

Meestal plooien vingers naar de handpalm toe. De praktijk leert dat het andersom toch iets moeilijker gaat, misschien vandaar. Als de andere hand echter wat helpt door te duwen (dus een kracht uitoefent op de vingers), plooien de vingers al iets verder naar achter; uit zichzelf geraken ze niet zo ver. Als je nu – ter vergelijking – met gestrekte vingers tegen de tafel duwt, plooien je vingers eveneens meer naar achteren dan dat ze uit zichzelf zouden kunnen. Omdat de vingers zonder een extern uitgeoefende kracht niet zo ver kunnen doorbuigen, valt te concluderen dat naast de kracht die door de vingers op de tafel wordt uitgeoefend, de tafel op zijn beurt een kracht uitoefent op de vingers.

De derde bewegingswet van Newton – ook wel de wet van actie en reactie genoemd – geeft de relatie tussen de krachten die lichamen onderling op elkaar uitoefenen.

Definition 11 (De wet van actie en reactie)**.**

Wanneer lichaam A op lichaam B een kracht uitoefent, oefent lichaam B op lichaam A een even grote maar tegengestelde kracht uit. In symbolen:

$$\vec{F}_{a,b} = -\vec{F}_{b,a}$$

Het even groot zijn van die krachten is misschien opmerkelijk. Het is toch de appel die naar de aarde valt en niet andersom?! Of, als de kracht die de aarde op de appel uitoefent even groot is als die de appel op de aarde uitoefent, waarom gaan ze dan niet naar mekaar toe? Het antwoord is dat de *uitwerking* van een kracht niet hetzelfde is als de kracht zelf. De massa van de aarde is gigantisch veel groter dan die van de appel zodat die, volgens de tweede wet van Newton, een veel kleinere versnelling krijgt. En het is de versnelling die we zien, niet de kracht.

Er is altijd een voorwerp *waardoor* de kracht wordt uitgeoefend en een voorwerp *waarop* de kracht wordt uitgeoefend.

Denkvraag 93 *De ezel van boer Teun, Donkey, wil de kar met waar voor de markt niet trekken. Hij maakt namelijk de volgende redenering: 'Voor elke poging die ik doe om de wagen vooruit te trekken, oefent de kar een even grote*

Author(s): Bart Lambregs

maar achterwaartse kracht uit. De nettokracht zal dan ook onvermijdelijk altijd nul zijn, zodat ik niet in beweging zal geraken. Ik doe geen moeite.'

Waar loopt de redenering van de ezel mis?

Omdat de twee krachten van het krachtenpaar tegelijk optreden, is het in feite niet mogelijk aan te geven wie nu de actiekracht en wie de reactiekracht is.

Met deze derde wet kunnen we verschillende verschijnselen verklaren. Hier volgen enkele voorbeelden.

Example 7 (Hoe kunnen we eigenlijk lopen?)**.**

Zo is de wet van actie en reactie van toepassing op wandelen. Wij kunnen vanuit rust in beweging komen door ons af te zetten. Wij oefenen een kracht op de grond uit waarbij deze laatste op zijn beurt een even grote en tegengestelde kracht op ons uitoefent. Zo krijgen wij een versnelling.

Example 8 (Hoe stuwt een raket zich voort?)**.**

Een vliegtuig met straalmotoren of een raket doen hetzelfde. Door het uitoefenen van een kracht op de naar achter uitgeworpen gassen, oefenen de uitgeworpen gassen een kracht uit op het vliegtuig of de raket. Maar dan voorwaarts. (Een vliegtuig of raket duwt zich dus niet af tegen de (eventuele) lucht.)

Oefening 94 *Een grote magneet oefent op een ijzeren spijkertje een kracht uit. Welke van de volgende uitspraken is dan juist?*

Meerkeuze:

(a) *Het spijkertje zelf oefent op de magneet geen kracht uit.*

(b) *De kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent is veel kleiner dan deze door de magneet op het spijkertje uitgeoefend.*

(c) *De kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent is even groot als deze door de magneet op het spijkertje uitgeoefend.* ✓

(d) *Over de grootte van de kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent, kan niets met zekerheid gezegd worden.*

Oefening 95 *Je springt vanuit een roeibootje naar de oever. Verklaar wat er kan gebeuren als het roeibootje niet of wel vastgemeerd is. Wanneer je nu vanaf een groot binnenschip naar de oever springt, wat zou het resultaat dan zijn? Verklaar! Bij een roeibootje dat niet vastgemeerd is, is er veel kans dat je in het water belandt. Bij het afzetten, schiet het bootje namelijk gemakkelijk onder je weg. Hoe komt dat? Wel, doordat je je afzet, oefen je een kracht uit op het bootje. De* ***derde wet van Newton*** *zegt dat het bootje dan een even grote kracht op jou uitoefent, in de tegengestelde richting. Het is die reactiekracht die* *je zou willen aanwenden om op de oever te geraken. De massa van het bootje is echter zo klein in vergelijking met jouw massa dat, volgens de* ***tweede wet van Newton*** *($\vec{F} = m\vec{a}$), de versnelling die het bootje krijgt als gevolg van jouw actiekracht veel groter is dan de versnelling die je zelf krijgt door de afzet. In de korte tijd dat je jezelf kan afzetten, verwerft het bootje dus een grote snelheid waardoor het onder je wegschiet en krijg jij geen noemenswaardige snelheid opgebouwd.*

Als het bootje is vastgemeerd, lukt het je wel de oever te bereiken. Het bootje kan immers niet wegschieten waardoor je je voldoende lang kan afzetten (er werkt voldoende lang een kracht op jou) en zo de nodige snelheid kan verwerven (je krijgt immers een versnelling) om de sprong te kunnen maken.

Voor een groot binnenschip is de massa zo groot in vergelijking met die van jou, dat het binnenschip een verwaarloosbare versnelling weg van de oever krijgt. Je kan een voldoende grote versnelling opbouwen die lang genoeg aanhoudt om je op de oever te krijgen.

Oefening 96 *Twee ploegen zijn aan het touwtrekken. Volgens het derde beginsel van Newton oefenen de twee ploegen steeds even grote maar tegengestelde krachten op elkaar uit. Hoe is het dan mogelijk dat er toch een winnende ploeg is? Er is een winnende ploeg mogelijk omdat het samenstellen van krachten op elke ploeg afzonderlijk gebeurt. Het zijn niet de actie- en reactiekracht (derde wet van Newton) die worden samengesteld.*

De winnende ploeg slaagt erin zich beter af te zetten dan de verliezende ploeg. Dat wil zeggen dat de reactiekracht van de kracht die ze op de grond uitoefenen (de weerstandskracht dus) groter is dan de kracht tussen de twee ploegen. De resulterende kracht van de weerstandskracht en de spankracht op de ploeg, zorgt volgens de tweede wet van Newton voor een versnelling; de ploeg komt in beweging. Voor de verliezende groep is dat net omgekeerd.

Oefening 97 *Een eekhoorntje glijdt over een gladde tafel met een heleboel nootjes tussen zijn voorpoten. Wat zou het moeten doen om te verhinderen dat het van de tafel valt? Leg uit.*

Het eekhoorntje moet de noten voor zich uit gooien. De reactiekracht van de kracht die de eekhoorn op de nootjes uitoefent, grijpt aan op de eekhoorn en is tegengesteld gericht. Die reactiekracht kan hem afremmen en hem verhinderen van de tafel te glijden.

Oefeningen Wetten van Newton

Author(s): Bart Lambregs

Denkvragen

Oefening 98 *Kan een voorwerp bewegen zonder dat er een kracht op werkt?*

Oefening 99 *Waarom is een met boomstammen geladen vrachtwagen voor de bestuurder zo gevaarlijk, als hij bruusk moet remmen, of bij een botsing betrokken raakt?*

De boomstammen willen volgens de eerste wet van Newton tijdens het remmen hun beweging voortzetten.

Oefening 100 *Hoe komt het dat een vrachtwagen binnen een veel kortere afstand kan stoppen dan een trein die dezelfde snelheid heeft?*

Oefening 101 *Wat word je gewaar als je met een wapen een kogel afvuurt? Waarom druk je best de kolf stevig tegen de schouder aan?*

Oefening 102 *Hoe komt het dat je gemakkelijk vaststelt dat de aarde een kracht uitoefent op een appel, maar dat je niets merkt van de kracht door de appel op de aarde uitgeoefend?*

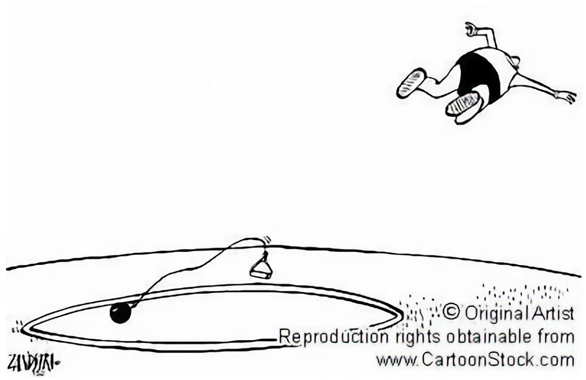
Oefening 103 *Wat gebeurt er met een roeiboot als men snel van de voor- naar de achterkant loopt?*

Oefening 104 *Op een bierglas ligt een plastic plaat met daarop een appel. Als Els de plaat snel wegtrekt valt de appel in het glas. Bij Lien die de plaat langzaam wegtrekt, niet. Verklaar het verschil tussen beide verschijnselen.*

Als je de plaat snel wegtrekt, is de wrijvingskracht te kortstondig aanwezig om de appel een noemenswaardige versnelling te geven. Trek je traag, dan is de versnelling misschien klein maar is ze lang genoeg aanwezig om de appel een voldoende grote snelheid te geven.

Oefening 105 *Wat klopt er fysisch niet aan wat er gebeurt in de cartoon?*

Author(s): Bart Lambregs



Oefening 106 *Waarom valt in het luchtledige een massa van 2 kg niet twee keer zo snel als een massa van 1 kg?*

In het vacuüm werkt op een vrije massa enkel de zwaartekracht in. Dat is dan ook de resulterende kracht op de massa. Die kracht is inderdaad twee keer zo groot voor een twee keer zo grote massa, maar een twee keer zo grote massa verzet zich ook twee keer zo hard tegen het het veranderen van beweging; de traagheid is twee keer zo groot. Het resultaat is dat elk object met dezelfde versnelling naar de aarde valt.

Die hierboven eerder kwalitatieve redenering is kwantitatief uit te leggen met de tweede wet van Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$F_z = ma$$

Met de formule $F_z = mg$ *voor de zwaartekracht vinden we*

$$mg = ma$$

Zodat, na de massa's te hebben geschrapt

$$a = g$$

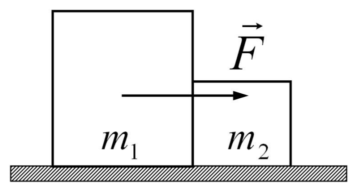
De massa van het object heeft m.a.w. geen invloed op de versnelling waarmee het valt. Die versnelling is constant en in waarde gelijk aan de waarde van de veldsterkte. Omdat ook de eenheden overeenkomen (uit de tweede wet van Newton volgt dat N=kg · m/s^2*) wordt het symbool* g *voor zowel de veldsterkte als de valversnelling gebruikt. Bij ons heeft die de waarde* 9,81 m/s^2.

Vraagstukken

Oefening 107 *Hoe groot is de snelheid die een slee met een massa van* 5,0 kg *krijgt, als er gedurende* 6,0 s *een kracht van* 0,20 N *horizontaal op inwerkt?*

0,24 m/s

Oefening 108 *Twee blokken met respectievelijke massa's* m_1 *en* m_2 *rusten op een horizontaal vlak. De wrijving tussen de blokken en het horizontale vlak mag verwaarloosd worden. Op één van de blokken wordt een horizontale kracht* $\vec{F}$ *uitgeoefend zoals op de figuur is weergegeven. De kracht die blok 1 op blok 2 uitoefent is dan:*



Meerkeuze:

(a) $\frac{m_1}{m_2}\vec{F}$

(b) $\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{F}$

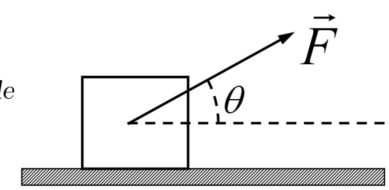
(c) $\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{F}$ ✓

(d) $\vec{F}$

Oefening 109 *Een doos van* 10 kg *wordt met een kracht van* 40 N *over een glad tafeloppervlak getrokken. De uitgeoefende kracht maakt een hoek van* 30° *met de horizontaal. Als de wrijving mag worden verwaarloosd, bepaal dan*

(a) *de versnelling van de doos,*

(b) *de grootte van de normaalkracht, die de tafel op de doos uitoefent.*

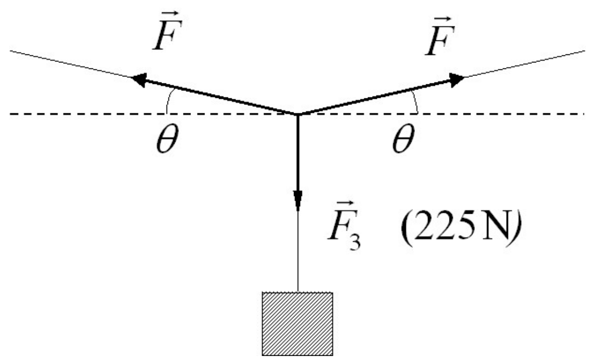


(a) $a = \frac{F\cos\theta}{m} = 3{,}46\,\mathrm{m/s^2}$

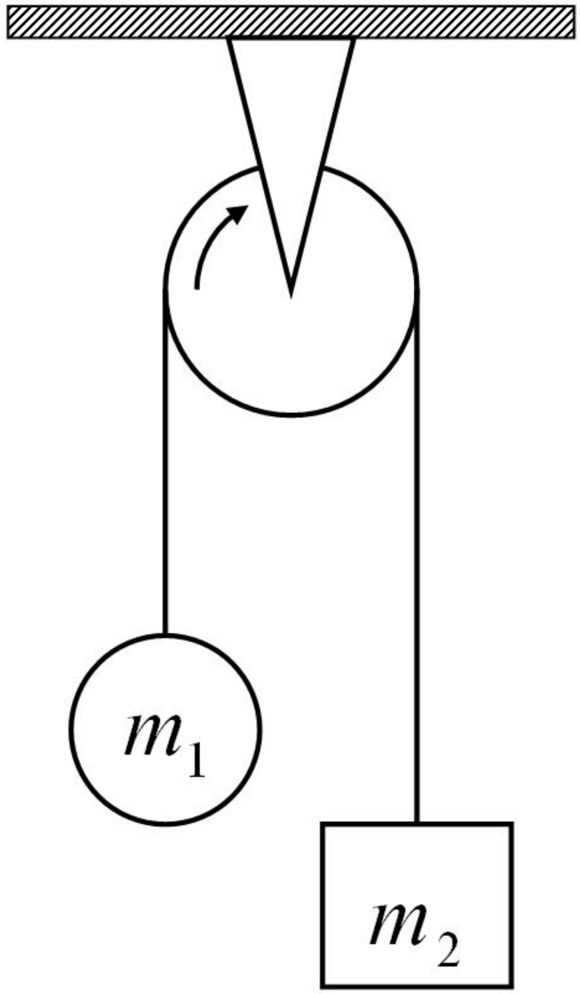
(b) $F_n = mg - F\sin\theta = 78{,}1\,\mathrm{N}$

Oefening 110 *Een gewicht van* 225 N *is bevestigd in het midden van een sterk touw. Door aan beide kanten een even grote kracht uit te oefenen wordt het gewicht opgetild. Bepaal de grootte van die krachten opdat het gewicht zoals in de figuur met* $\theta = 10°$ *komt te hangen.*

Author(s): Bart Lambregs



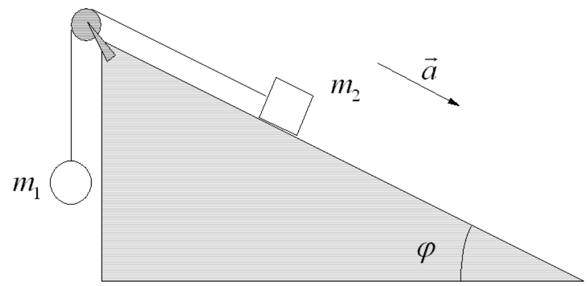
Oefening 111 *(**Toestel van Atwood**) Twee verschillende massa's zijn via een katrol van te verwaarlozen massa met elkaar verbonden zoals in de figuur. De wrijving is eveneens te verwaarlozen.*



Bepaal de grootte van de versnelling van beide massa's en de spankracht in het touw.

$a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad F_s = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

Oefening 112 *Twee massa's m_1 en m_2 zijn via een touwtje en een katrol van te verwaarlozen massa met elkaar verbonden zoals in de figuur. Er is geen wrijving aanwezig. De massa's hebben een versnelling zoals aangegeven.*



Bepaal de grootte van de versnelling van beide massa's en de grootte van de spankracht in het touw.

Oefening 113 *Hoe kan een man die* 686 N *weegt langs een touw naar beneden glijden, dat slechts* 600 N *kan dragen zonder te breken?*

Stel dat de man inschat dat hij, zonder zijn botten te breken, in staat is te springen van toch wel 3,0 m *hoog. Van hoe hoog zou hij dan met een dergelijk touw kunnen ontsnappen?*

Door niet met zijn volle gewicht aan het touw te gaan hangen kan de man verhinderen dat het touw breekt. Het gevolg is wel dat hij een nettokracht naar beneden ondervindt waardoor hij toch naar beneden versnelt, al is het met een kleinere versnelling dan de valversnelling.

Door met 600 N *aan het touw te trekken, ondervindt hij een spankracht omhoog met diezelfde grootte. Met een referentieas naar beneden volgt uit* $F_z - F_s = ma$ *en uit* $m = \dfrac{F_z}{g}$ *voor de versnelling van de man:*

$$a = \left(1 - \frac{F_s}{F_z}\right) g \tag{6}$$

wat gelijk is aan $1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$.

Uit $v^2 = v_0^2 + 2ax$ *volgt de maximale snelheid die hij bij de impact op de grond aankan als we voor* a *de valversnelling* g *nemen en voor* x *de gegeven* 3,0 m. *Uit diezelfde formule vinden we de hoogte* h *vanwaar de man kan ontsnappen als we nu de netto versnelling* $a = 1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$ *(2) nemen:*

$$h = \frac{v^2}{2a} = \ldots = \frac{F_z}{F_z - F_s} x$$

wat gelijk is aan 24 m.

Oefening 114 *Een jager (massa* 70 kg*) heeft een ijsbeer (massa* 350 kg*) geschoten met een harpoen en wil die nu naar zich toe trekken met het touw. Jager en ijsbeer zijn oorspronkelijk allebei in rust op het ijsoppervlak en op* 30 m *van elkaar. Verwaarloos de wrijving met het ijs. Bepaal de afstand waarover de ijsbeer is verschoven als de jager de ijsbeer binnenhaalt.*

Deel VII

Toepassing wetten van Newton

Inleiding

Author(s): Bart Lambregs

Algemeen (heuristiek)

Author(s): Bart Lambregs

Dynamica van de ECB

Author(s): Bart Lambregs