De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid, hoe groter de verplaatsing in een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan 30 km/h, leg je op één uur tijd 30 km af. Als je wandelt aan 5 km/h, leg je op één uur tijd slechts 5 km af. De snelheid van een voorwerp kan volledig bepaald worden met behulp van de plaatsfunctie. Een voorwerp heeft immers snelheid als de plaats of positie verandert.

We behandelen eerst de snelheid in één dimensie. Daarna kijken we naar de snelheid in twee dimensies, die wordt opgebouwd als samenstelling van twee (eendimensionale) snelheidscomponenten.

Snelheid bij eendimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definition 1. In één dimensie wordt de gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen gedefinieerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$. Deze gemiddelde snelheid is negatief, wat betekent dat de zeilboot tegen de zin van de referentie-as is bewogen.

Quick Question 1 *Hoe je op de plaatsgrafiek van de zeilboot de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 aanduiden?*

Ogenblikkelijke snelheid bij eendimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t een positie x toe aan een puntmassa. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t, één ogenblik,

Author(s): Bart Lambregs,Vincent Gellens

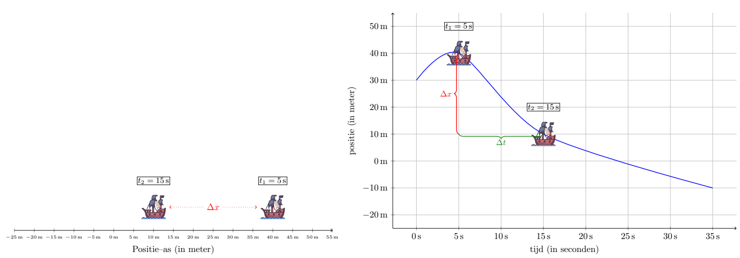
is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

Denkvraag 2 *Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul.* ***Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?***

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn, maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[1] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen, maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de nieuwe snelheid te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ te kennen, lijkt het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 die hierboven werd berekent. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$$



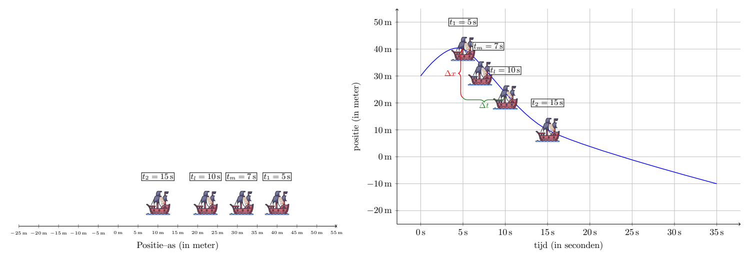
Figuur 1: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_3 = 15$

Indien niet met $t_2 = 15\,\mathrm{m}$ de gemiddelde snelheid wordt berekent, maar bijvoorbeeld met $t_l = 10\,\mathrm{s}$, zal deze gemiddelde snelheid vermoedelijk beter de ogenblikkelijke snelheid op t_1 benaderen.

Op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot naar t_1. De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \dfrac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is vermoedelijk een *betere* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1. Maar het is nog steeds een gemiddelde snelheid!

[1] Die je hebt moeten ingeven...

Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor $t_m = 7$ wordt de benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1 nog beter... Op de grafiek komen de twee schepen nu wel erg dicht bij elkaar...



Figuur 2: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_l = 10$

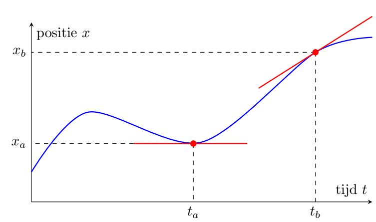
De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner... te nemen. De ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definition 2. De **ogenblikkelijke snelheid** in één dimensie is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid v.

Grafisch kan je de afgeleide interpreteren als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

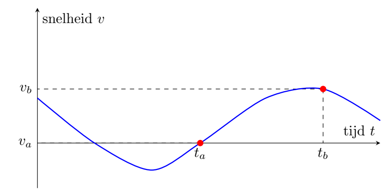


Figuur 3: De snelheid als richtingscoëfficiënt aan de raaklijn

Definition 3. De snelheidsfunctie $v(t)$ geeft de component van de snelheid in functie van de tijd.De snelheid op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$v_a = v(t_a).$$

In een grafiek van de functie wordt op de horizontale as de tijd weergegeven en op de verticale de snelheidscomponent.



Figuur 4: Een snelheidsfunctie voor een ééndimensionale beweging.

Remark 1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds de ogenblikkelijke snelheid.

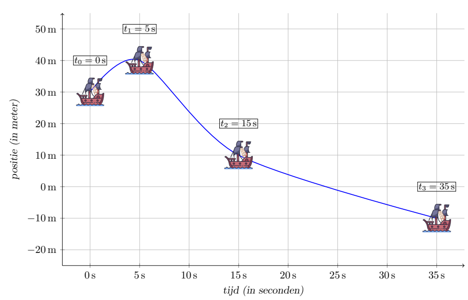
Oefening 3 *Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van de zeilboot. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:*

Vraag 3.1 *Waar is de snelheid 0?*

Vraag 3.2 *Waar heeft de zeilboot een positieve snelheid?*

Vraag 3.3 *Waar is de snelheid negatief?*

Vraag 3.4 *Op welk moment beweegt de zeilboot het snelst?*



Figuur 5: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging op in loodrechte x- en y-componenten. Op die manier bekomt men gelijkaardige formules zoals in het 1D geval.

Definition 4. De **snelheidsvector** $\vec{v}$ van een lichaam wordt gedefinieerd als de afgeleide van de plaatsvector naar de tijd:

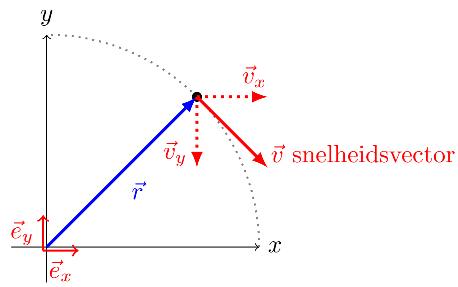
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplitst in snelheidscomponenten v_x en v_y:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y$$

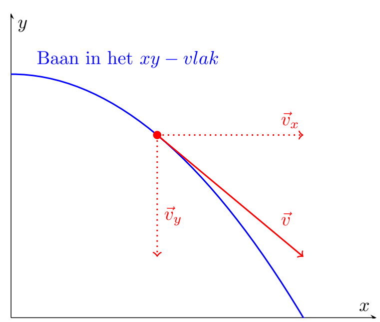
De grootte van de totale snelheid wordt genoteerd met het symbool v en is gelijk aan

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Figuur 6: De snelheidsvector $\vec{v}$

Theorem 1. De snelheidsvector is altijd rakend aan de baan.



Figuur 7: De snelheidsvector is rakend aan de baan.

We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\dfrac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\dfrac{v_y}{v_x}$.