Wiskunde Op Maat

Natuurkunde

# Eerste semester

(Versie 2025/08/29.25)

# Inhoudsopgave


1 Inleiding 1.1
1.1 Inleiding . . . 1.1

2 Vectoren 2.1
2.1 Inleiding vectoren . . . 2.1
2.2 Het begrip vector . . . 2.2
2.3 Voorstelling en notatie . . . 2.3
2.4 Bewerkingen met vectoren . . . 2.4
2.4.A Oefeningen vectoren reeks 1 . . . 2.8
2.4.B Oefeningen vectoren reeks 2 . . . 2.10
2.4.C Oefeningen vectoren reeks 3 . . . 2.12

3 Basisbegrippen van de kinematica 3.1
3.1 Inleiding kinematica . . . 3.1
3.2 Het referentiestelsel . . . 3.2
3.3 De positie . . . 3.3
3.4 De snelheid . . . 3.6
3.5 De versnelling . . . 3.9
3.6 Oefeningen kinematica . . . 3.13

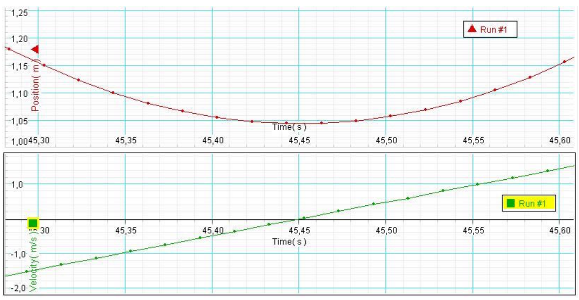
# 1.1 Inleiding

Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de beweging. De beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1] Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

Als de kracht de oorzaak is van de beweging, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met fietsen, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km/h}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.




Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wil zeggen dat er per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bijkomt. De appel valt sneller en sneller maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid tegengesteld zijn aan elkaar. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van

[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3] Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg...

In hoofdstuk 1 en 2 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we kinematica. In hoofdstuk 3 en 4 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we dynamica. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we mechanica.

# 2.1 Inleiding vectoren

## 2.2 Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de natuur met grootheden die worden opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

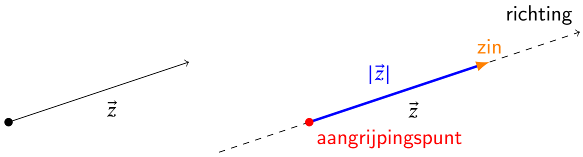
Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van 40 km/h.* Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van* $27\,^\circ\mathrm{C}$ *heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

Een vectoriële grootheid heeft vier kenmerken: grootte, richting, zin en een aangrijpingspunt. Zo kan de helikopter aan 40 km/h *richting het zuiden* vliegen. Een scalaire grootheid heeft enkel een grootte met teken, zo kan je diepvries een temperatuur hebben van $-10\,^\circ\mathrm{C}$.

**Opmerking 2.2.1.** Het onderscheidt tussen scalar en vector is in de eerste plaats een verschil in *naamgeving*. Je kan zeggen dat de temperatuur in graden gelijk is aan de scalar 27 of gegeven wordt door de vector $\vec{temp} = (27)$ met slechts één component.

## 2.3 Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, \ldots$. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.

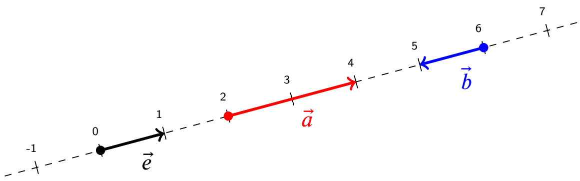



Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden aangeduid met een plusteken, vectoren tegen de zin van de referentie-as krijgen een minteken.

De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).

De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.

Er geldt in onderstaande tekeningen dat $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2. Voor de vector $\vec{b}$ geldt $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.




**Opmerking 2.3.1.** Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

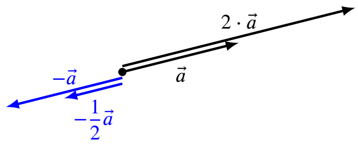
Vlugge Vraag 1: W

arom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?

## 2.4 Bewerkingen met vectoren

### Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

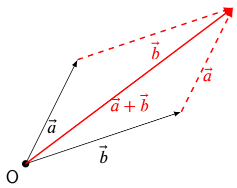
Een vector kan 'herschaalt' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalarie verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$. Als de vector $\vec{a}$ gegeven wordt door $(a_x, a_y)$, is de scalaire vermenigvuldiging $3 \cdot \vec{a}$ gelijk aan $3 \cdot ((a_x, a_y)) = (3a_x, 3a_y)$.




Figuur 1: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

### De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de parallellogrammethode.




Figuur 2: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren optellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultate berekent met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (gewijzigde) cosinusregel:

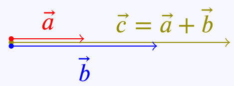
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

met $\alpha$ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

**Vlugge Vraag 2: H**

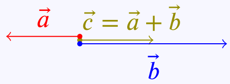
e vereenvoudigd de formule als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht staan? Wat als ze evenwijdig (d.w.z. dezelfde richting) zijn?

**Voorbeeld 2.4.1.** In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$.

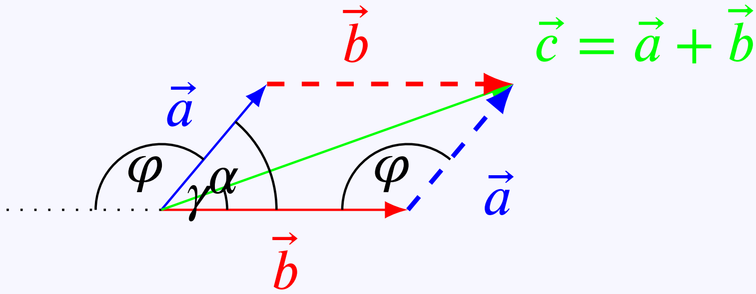



**Voorbeeld 2.4.2.** In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \| -3 + 5\| = 2\,\mathrm{N}$.

## 2.4 Bewerkingen met vectoren




**Voorbeeld 2.4.3.** In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ en $\alpha = 50°$.




De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met de cosinusregel:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\varphi \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(180° - \alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|(-\cos\alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha \\
&= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

**Opmerking 2.4.1.** Als $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ geldt dus **niet** dat $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

De **richting van de resultate** (d.w.z. de hoek $\gamma$) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{5\cdot\sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

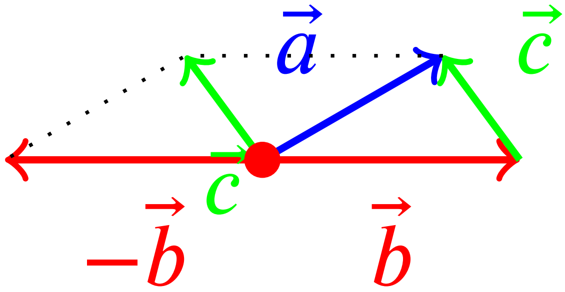
De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren.

**Verschil van twee vectoren**

Net zoals bij getallen is het ook mogelijk voor vectoren om van een verschil een som te maken:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.




Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

**De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten**

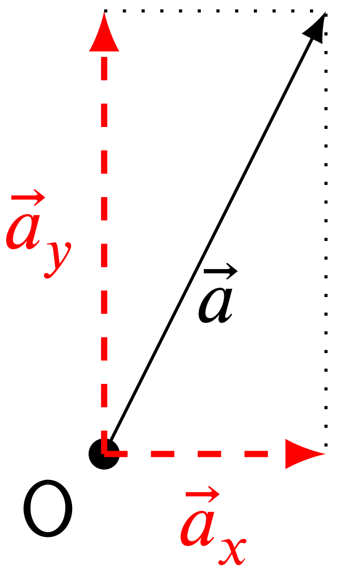
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In vraagstukken is het vaak erg nutting om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de $x$-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de $y$-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De lengte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$




Figuur 3: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

## 2.4 Bewerkingen met vectoren

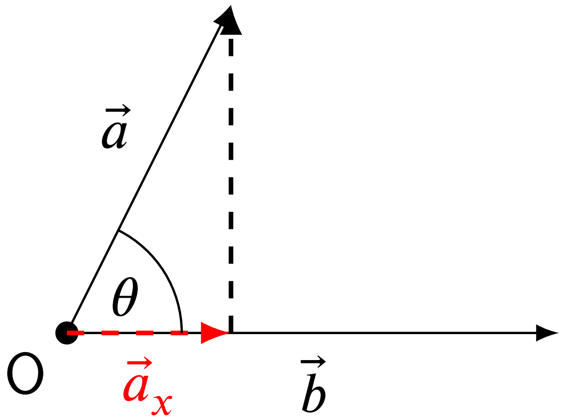
### Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Vlugge Vraag 3: I

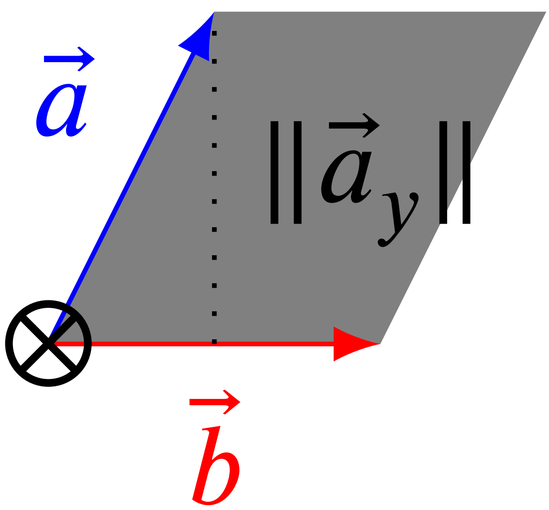
de eerste bewerking · dezelfde als de tweede bewerking ·? Verklaar.




### Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

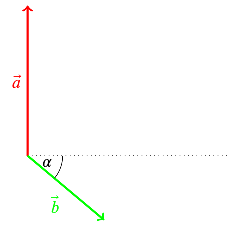
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}_y\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$



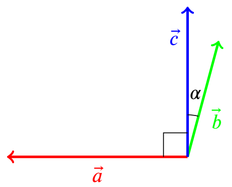
## 2.4.A Oefeningen vectoren reeks 1

**Oefening 2.4.1.** Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.

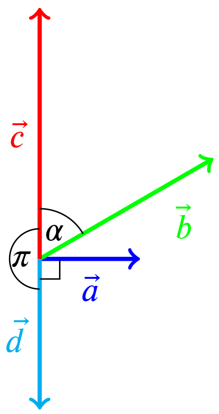
**1.** $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 40°$



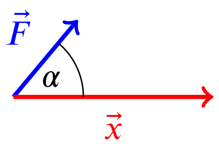

**2.** $\|\vec{a} = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$




**3.** $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 8\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 15\,\mathrm{N}$, $\|\vec{d} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 60°$




**Oefening 2.4.2.** Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:




**1.** $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.

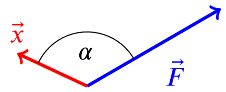
**2.** $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.

**3.** $\vec{F} \cdot \vec{x}$

**4.** $\vec{F} \times \vec{x}$

## 2.4.A Oefeningen vectoren reeks 1

**Oefening 2.4.3.** Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



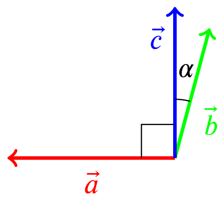

1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
4. $\vec{F} \times \vec{x}$

## 2.4.B Oefeningen vectoren reeks 2

**Oefening 2.4.4.**

Gegeven de drie waarvoor geldt $||\vec{a} = 4\,\mathrm{N}$, $||\vec{b} = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $||\vec{c} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$

Construeer en bepaal de groottes van:




**1.** $\vec{a} - \vec{b}$

**2.** $\vec{b} - \vec{a}$

**3.** $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

**4.** $3\vec{a} - 2\vec{b}$

**5.** $4\vec{b} + \vec{c}$

**6.** $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

**7.** $3\vec{a} - 4\vec{c}$

**Oefening 2.4.5.** Als $\vec{F} \perp \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

**1.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

**2.** $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

**3.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

**4.** $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

**5.** $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

**6.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

**7.** $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

**8.** $||\vec{F} \times \vec{y}|| = 0$

**Oefening 2.4.6.** Als $\vec{F} \parallel y$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

**1.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

**2.** $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

**3.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

**4.** $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

**5.** $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

## 2.4.B Oefeningen vectoren reeks 2

**6.** $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

**7.** $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

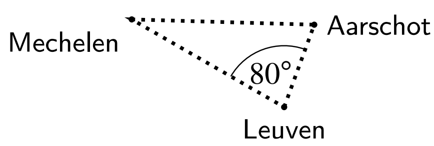
**8.** $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

## 2.4.C Oefeningen vectoren reeks 3

**Oefening 2.4.7.** Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst 15 m evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van 45∘ met de zijlijn 18 m naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

**Oefening 2.4.8.** Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt 9 m evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt 17 m in een richting die een hoek van 35∘ maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

**Oefening 2.4.9.** Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van 10 m/s en 20 m/s. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.




1. Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!
2. Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?

**Oefening 2.4.10.** Toon aan dat $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$ met $\alpha$ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

**Oefening 2.4.11.** Geldt er algemeen dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$? Geldt er dat $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$? Verklaar kort.

**Oefening 2.4.12.** Kan er gelden dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.

# 3.1 Inleiding kinematica

**Kinematica** (afkomstig van het Griekse woord $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ ) is het belangrijke onderdeel van de fysica dat de **bewegingen van voorwerpen beschrijft** zonder zich af te vragen wat de oorzaak ervan is. Dat gaat bijvoorbeeld over vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook over de beweging van de maan rond de aarde, de aarde rond de zon, moleculen in water of ook in elkaar grijpende tandwieltjes in een mechanisch uurwerk.

Dit hoofdstuk bestudeert de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica om in een volgende fase enkele concrete basisbewegingen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort) te beschrijven.

Kwantitatief behandelt kinematica steeds de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijk met de scalaire grootheid **tijd**.

**Voorbeeld 3.1.1.** Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na 1 seconde? En op het moment dat de appel de grond raakt?

We bekommeren ons voorlopig nog niet over de vraag *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. Dat komt later, in het onderdeel *dynamica*, waar we de *krachten* zullen bestuderen die de bewegingen beïnvloeden. Wel, we zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

**Voorbeeld 3.1.2.** Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips?
- Hoe snel vliegt dat krijtje? Vertraagt het tijden zijn vlucht omdat het kracht verliest, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooid heeft?
- Als je uitglijdt en valt net bij het gooien, gaat het krijtje dan ook sneller naar beneden vallen?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Is dit voorbeeld niet erg verouderd in deze tijden van electronische borden? Kan je met stiften gooien? Mag dat? Zal ChatGPT ooit met krijtjes kunnen gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica. Enkele vragen zijn eigenlijk onzinnig, en uitzonderlijk kan een vraag worden behandeld in de strafstudie. Als een vraag grappig zou zijn, is dat toevallig en irrelevant.

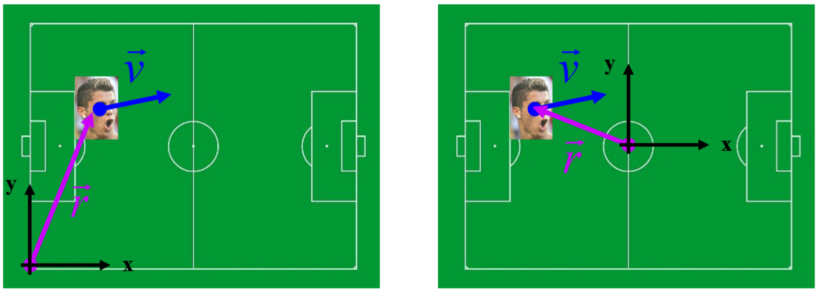
## 3.2 Het referentiestelsel

Elk bewegend systeem wordt beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Deze omvat een assenstelsel met een oorsprong (= het **referentiepunt**). Binnen dit referentiestelsel worden de kinematische grootheden beschreven, in de eerste plaats vectorieel.

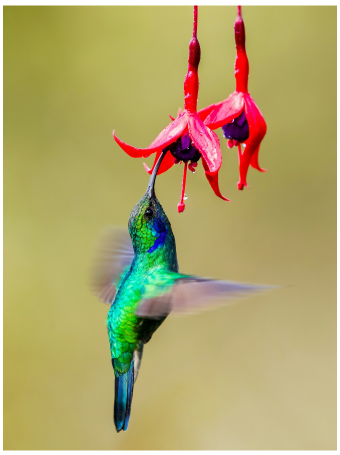
Als je een vogel ziet vliegen kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of -indien het een kolibri is- misschien zelfs *blijven hangen*. Om deze bewegingen kwantitatief en nauwkeurig te bespreken kies je een referentiestelsel en coördinaatassen. Op die manier krijgt de vogel een positievector die de positie aangeeft, een snelheidsvector die de snelheid aangeeft, ...

De keuze van het referentiestelsel is altijd relatief. Toch is het erg belangrijk om telkens duidelijk te maken van waaruit een beweging beschreven wordt. Stel je voor dat je nu aan een bureau gedreven aan het studeren bent en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

Voor de eenvoud wordt meestal een referentiestelsel gekozen dat voor de 'waarnemer' stilstaat. Hieronder een voorbeeld van een voetbalveld waarop de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend is naargelang het referentiepunt. Voor een toeschouwer in het publiek staan beide referentiestelsels stil, bijgevolg is de snelheid $\vec{v}$ voor beiden dezelfde.




**Oefening 3.2.1.** De kolibri in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht hangen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel **niet** stilstaat.



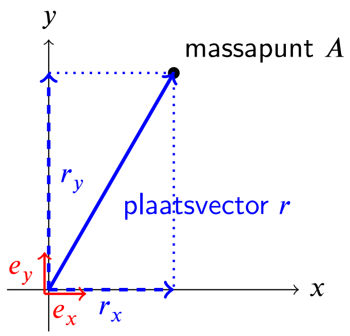
**Uitwerking:**

- Een referentiestelsel met de kern van de aarde als oorsprong. (De kolibri draait nu rond de as van de aarde...)
- Een referentiestelsel met de zon als middelpunt (De kolibri draait nu ook rond de zon...)

# 3.3 De positie

### Positie en plaatsfunctie

Met een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden vastgelegd met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $r$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt heeft deze plaatsvector één, twee of drie componenten volgens de gekozen assen, doorgaans $x$, $y$ en $z$ genaamd. De (scalaire) getalcomponenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten $x$,$y$ en $z$.



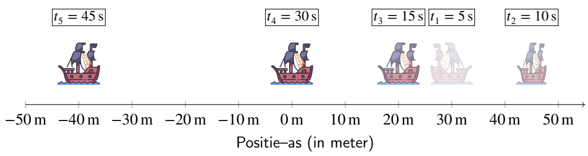

Figuur 4: De plaatsvector $r$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $r$. De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $r$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $r = r(\mathrm{t})$ geeft voor elk tijdstip $t$ de positie $r$ waar de puntmassa zich bevindt. Op middelbaarniveau zijn dergelijke vectorfuncties ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt geopteerd om te werken met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$. Bij een ééndimensionale beweging is er slechts één daarvan nodig, namelijk $x$. Dat is een getal, namelijk de positie op de enige coördinaatas en $t$ is de variabele die symbool staat voor de tijd.

De positie op een welbepaald tijdstip $t_1$ wordt genoteerd als

$$x_1 = x(t_1)$$

In onderstaande figuur zie je de tocht dat een zeilship aflegde. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het ship zich bevindt.

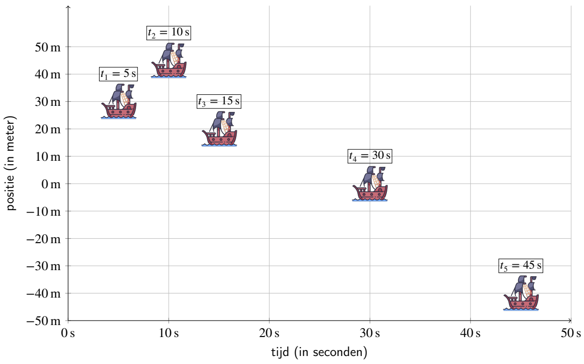



Figuur 5: De positie van de zeilboot voor elke tijd $t$

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[4] In bovenstaande figuur wordt bovenaan aangegeven boven elke zeilboot op welk tijdstip de boot daar was waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_3 = 15\,\mathrm{s}$ op de positie 20 meter. Deze informatie over de tijd kan worden weergegeven op een tijd-as.

[4] Einstaan gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

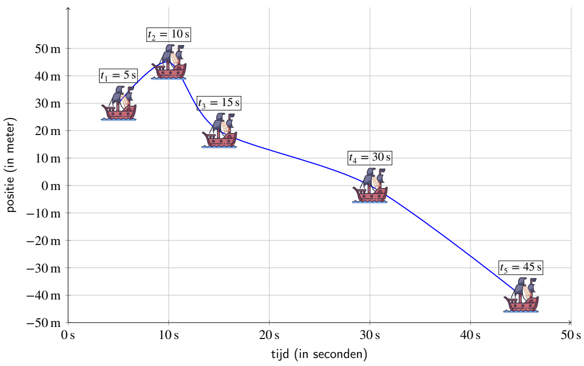
## 3.3 De positie



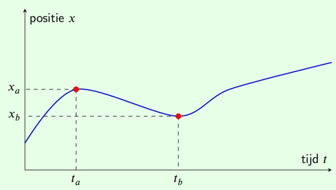

Figuur 6: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Echter, als je de tijdsdimensie in rekening brengt, verandert de positie je blad wel[5]

De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten $t_i$. In bovenstaande figuur kan voor elke moment $t$ de positie worden weergegeven, op die manier bekom je de **plaatsfunctie**.




**Definitie 3.3.1.** De **plaatsfunctie** $x(t)$ geeft voor elke moment $t$ de positievector $x$. In één dimensie is $x$ een scalar en is de plaatsfunctie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de positie.




[5] Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[6]

[6] Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[7]

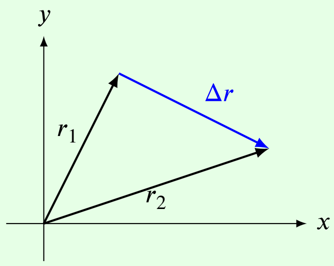
[7] Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.

### 3.3 De positie

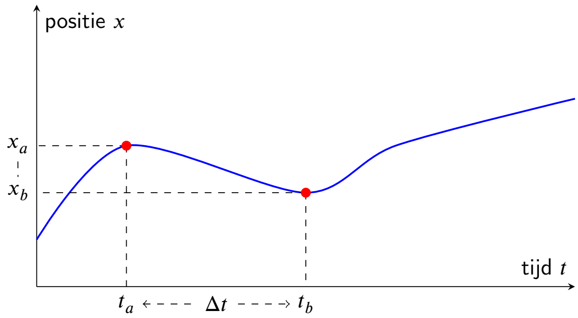
De **verplaatsing** tussen $t_1$ en $t_2$ is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen $t_1$ en $t_2$, genoteerd met een $\Delta r$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

**Definitie 3.3.2.** De **verplaatsing** $\Delta r$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta r = r_2 - r_1$$



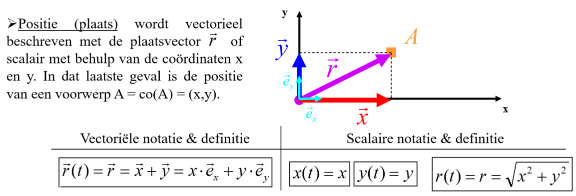

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen $t_0$ en $t_1$ is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 45\,\text{meter} - 30\,\text{meter} = 15\,\text{meter}$ en is de verplaatsing tussen de tijdstippen $t_2$ en $t_4$ gelijk aan $\Delta x = x_4 - x_2 = -40\,\text{meter} - 0\,\text{meter} = -40\,\text{meter}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as.
Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:




Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.
Samengevat voor ééndimensionale bewegingen:

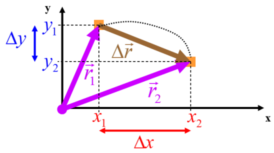
| | Vectoriële notatie | Scalaire notatie |
|---|---|---|
| Positie op moment $t$: | $\boxed{x_t = x(t) \cdot e_x = x \cdot e_x}$ | $\boxed{x(t) = x}$ (kan negatief zijn) |
| Verplaatsing op het tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$: | $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ $\Delta x \cdot e_x = (x_2 - x_1) \cdot e_x = x_2 \cdot e_x - x_1 \cdot e_x$ | $\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ (kan negatief zijn bij een verplaatsing tegen de zin van de $x$-as.) |
| Afgelegde weg op moment t: | / | $s(t)$ kan negatief zijn; zie wiskunde |

Voor tweedimensionale bewegingen worden de begrippen positie, verplaatsing en afgelegde weg complexer.



## 3.3 De positie

➢<u>Verplaatsing</u> wordt vectorieel beschreven met de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ of scalair met de horizontale verplaatsing $\Delta x$, de verticale verplaatsing $\Delta y$ en de totale verplaatsing $\Delta r$.




| Vectoriële notatie & definitie | Scalaire notatie & definitie | |
|---|---|---|
| $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y)$ | $\Delta x = x_2 - x_1$ | $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ |
| $= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y$ | $\Delta y = y_2 - y_1$ | |

▪Verwar verplaatsing niet met afgelegde weg!
Verplaatsing = rechtlijnige afstand tussen begin- en eindpunt (= afstand in vogelvlucht)
Afgelegde weg = effectieve afstand die voorwerp heeft afgelegd (meestal langer)
▪Zie ook figuren applet 2D bewegingen op Smartschool

Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging. Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben zoals cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,... Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar $t$ en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.

Voorbeeld: $x = t^7 \Rightarrow t = \boxed{\sqrt[7]{x}}$

$y = t^2 - 3t \Rightarrow y = \left(\sqrt[7]{x}\right)^2 - 3 \cdot \sqrt[7]{x} = \text{baanvergelijking } y(x)$

## 3.4 De snelheid

Een voorwerp heeft snelheid als het beweegt, er is een verandering van de positie in de tijd. De snelheidsvector grijpt aan op het bewegend voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke beweging, dat is rakend aan de baan dat het voorwerp maakt. In animaties lijkt het alsof de snelheidsvector aan de positievector 'trekt'. Bezie hiervoor animaties te vinden op https://www.hansbekaert.be/fysica/new/applets6.html.

### Snelheid bij ééndimensionale bewegingen

Als een voorwerp op een rechte lijn beweegt (1D), dan valt de beweegrichting en dus ook die van de snelheidsvector samen met de richting van die lijn.

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid.*

**Definitie 3.4.1.** De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In de figuur is de gemiddelde snelheid van de auto tussen de tijdstippen $t_1$ en $t_2$ gelijk aan $\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\,\mathrm{m} - 50\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s}} = -1\,\mathrm{m/s}$. Als de snelheid negatief is betekent dit dat de auto achteruit rijdt.

### Ogenblikkelijke snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities $x_1$ en $x_2$. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip $t$ aan een puntmassa een positie $x$ toe. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is $m/s$, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment $t$, één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

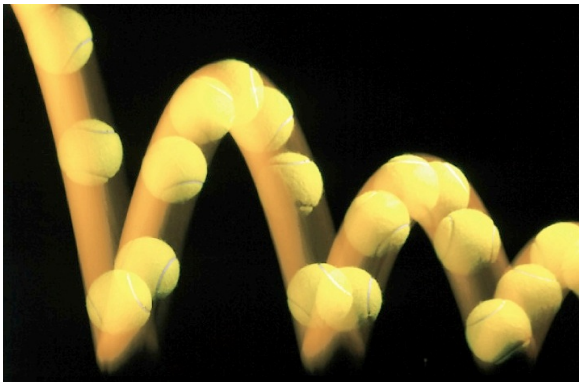
Om even over na te denken ...

Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul. **Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?**

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[8] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

[8]Die je hebt moeten ingeven...

## 3.4 De snelheid



Figuur 7: Stuiterende tennisbal

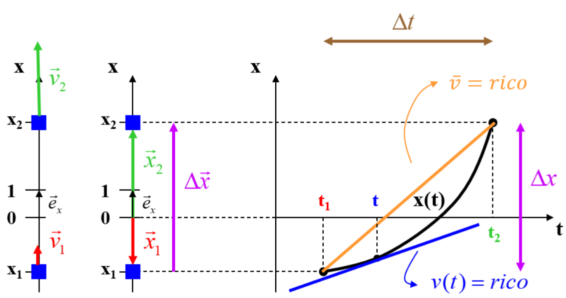
Hoe kan dit probleem opgelost worden? Op de stroboscopische foto van de stuiterende tennisbal is te zien dat de bal bovenaan trager beweegt dan wanneer hij de grond nadert. Bovenaan liggen de beelden immers dichter bij elkaar zodat de tennisbal minder afstand aflegt in de tijdsspanne tussen twee opeenvolgende opnames. Deze kwantitatieve[9] informatie die levert echter opnieuw gemiddelde snelheid en niet zomaar de ogenblikkelijke snelheid. De tennisbal verandert immers nog van snelheid tussen twee opeenvolgende opnames. Door de frequentie[10] waarmee de foto's worden genomen op te drijven, krijgen we een accurater beeld van de snelheid die de tennisbal op een gegeven moment heeft. De tijdsintervallen zijn nu immers korter zodat de bal minder van snelheid kan veranderen gedurende de intervallen en zodoende de gemiddelde snelheid een indicatie wordt van de ogenblikkelijke snelheid. De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de *limiet* van de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

**Definitie 3.4.2.** De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment $t$ de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, $x$ in functie van $t$) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.




[9] Kwantitatief wil zeggen dat het over een hoeveelheid of een grootte gaat.

[10] Frequentie is een grootheid die aangeeft hoeveel cyclussen er per seconde worden doorlopen. Hier gaat het dus over het aantal beelden dat per seconde wordt gemaakt. De eenheid van frequentie is $s^{-1}$ oftewel Hz (de Hertz).

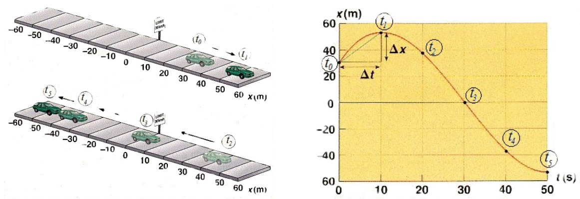
## 3.4 De snelheid

| | Vectoriële notatie & definitie | Scalaire notatie & definitie |
|---|---|---|
| Gemiddelde snelheid op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$: | $\boxed{< \vec{v} >= \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \vec{e}_x}$ | $\boxed{< v > = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as) |
| Ogenblikkelijke snelheid op willekeurig tijdstip t | $\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}}$ $= \frac{d(x \cdot \vec{e}_x)}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + x \cdot \cancel{\frac{d\vec{e}_x}{dt}} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x = v \cdot \vec{e}_x$ | $\boxed{v(t) = v = \frac{dx}{dt}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as) |

**Opmerking 3.4.1.** Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

**Oefening 3.4.1.** Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van het autotje. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:

- Waar staat de auto stil?
- Waar heeft de auto een positieve snelheid?
- waar is de snelheid negatief?
- Op welk moment bewoog de auto het snelst?

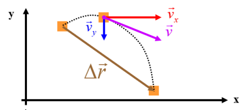



Figuur 8: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

### Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging doorgaans op in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.

➢<u>Snelheid</u> wordt vectorieel beschreven met de snelheidsvector $\vec{v}$ die altijd raakt aan de baan. Scalair rekent men met de snelheidscomponenten $v_x$ en $v_y$. De totale snelheid heeft het symbool v.




| Vectoriële notatie & definitie | Scalaire notatie & definitie | |
|---|---|---|
| $\boxed{\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$ | $\boxed{v_x(t) = v_x = \frac{dx}{dt}}$ | $\boxed{\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}}$ |
| $\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = \vec{v}_x + \vec{v}_y}$ | $\boxed{v_y(t) = v_y = \frac{dy}{dt}}$ | $\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ |

## 3.5 De versnelling

Een voorwerp versnelt of heeft versnelling wanneer de snelheid verandert in de tijd. Een synoniem voor het woord versnelling is acceleratie, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid

$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheids**verandering**

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke bewegings**verandering**.

**Definitie 3.5.1.** De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt uiteraard ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

- Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a}_t$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij ééndimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

  **vb1** Een verticaal omhoog geworpen steen versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen.

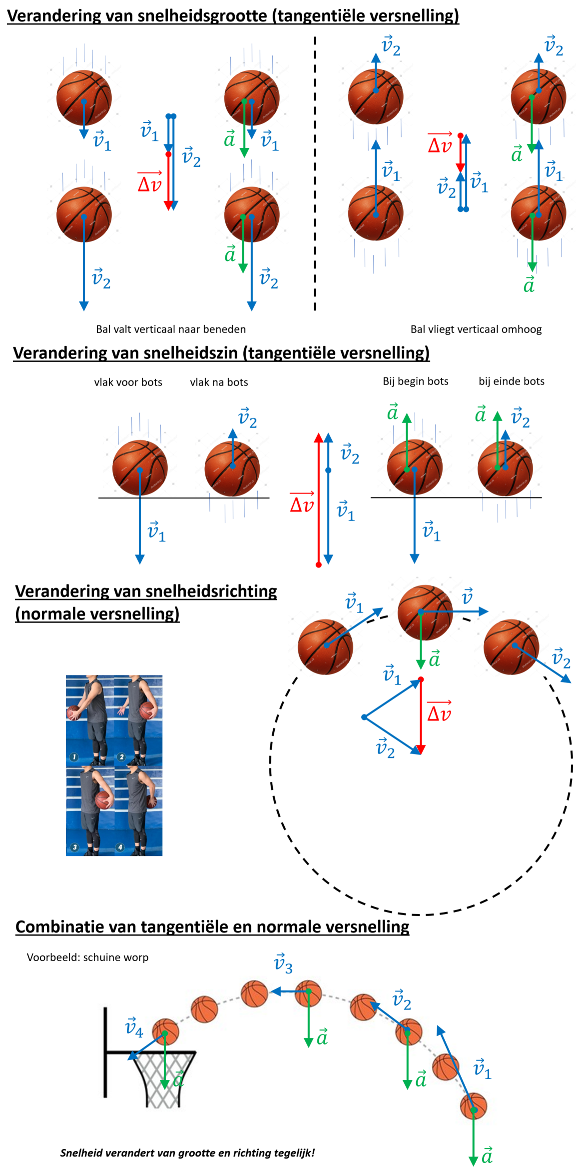
  **vb2** Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van 3 m/s². Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met 3 m/s verandert (of in dit geval toeneemt).

- Als enkel de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a}_n$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

- Combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal.

**Opmerking 3.5.1.** De zin van de snelheidsvector kan nooit plots veranderen omdat snelheid een grootheid is die enkel continu in de tijd kan veranderen. De zin van de snelheidsvector kan enkel wijzigen als de grootte van de snelheidsvector vermindert tot nul om dan nadien de tegengestelde zin uit te wijzen. In dit geval gaat het hier dus eveneens over de tangentiële versnelling.

## 3.5 De versnelling




In al deze voorbeelden lijkt het alsof de versnellingsvector aan de snelheidsvector "trekt".

### Gemiddelde (tangentiële) versnelling bij ééndimensionale bewegingen

**Definitie 3.5.2.** Bij ééndimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\overline{a}$ scalair gedefinieerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Om even over na te denken ...

Kan je uitleggen wat de eenheid meter per seconde, per seconde betekent?

### Ogenblikkelijke versnelling bij ééndimensionale bewegingen

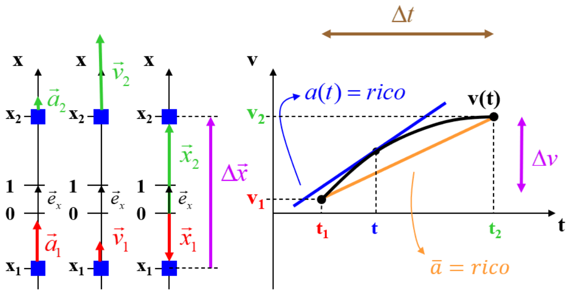
De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen $t_1$ en $t_2$. Om de ogenblikkelijke versnelling $a$ op één tijdstip $t$ te bepalen wordt -net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid- gebruik gemaakt van de afgeleide.

## 3.5 De versnelling

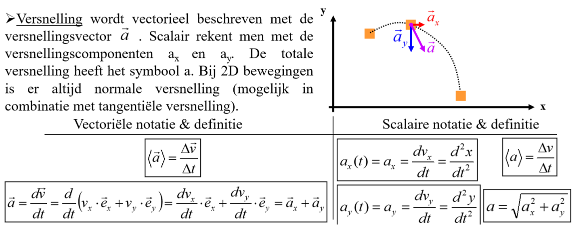
**Definitie 3.5.3.** De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.




In twee dimensies, kan men de versnelling opsplitsen in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.




**Opmerking 3.5.2.** Het begrip versnelling in de fysica heeft niet dezelfde betekenis als hoe het begrip in de volksmond wordt gebruikt.

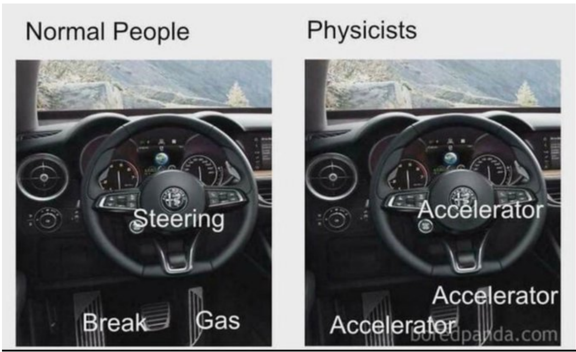
**in de volksmond** versnelling = vergroten van snelheid
vertraging = verkleinen van de snelheid
bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

**in de fysica** versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

Fysisch zal men dus nooit spreken over een vertraging. Het vergroten of verkleinen van de snelheid moet bij ééndimensionale bewegingen tot uiting komen in de zin van de versnellingsvector ten op zichte van de zin van de snelheidsvector. Men kan dit ook zien aan het teken van de getalcomponent van de versnelling tegenover die van de snelheid. Voor ééndimensionale bewegingen geldt dat als $\vec{v}$ en $\vec{a}$ dezelfde zin hebben (of hun getalcomponenten eenzelfde teken hebben) dat de snelheid (in absolute waarde) vergroot. Bij tegengestelde zin (of teken) is er in absolute waarde een verkleining van de snelheid.

**Opmerking 3.5.3.** Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 m/s². Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk "snelheid" geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: "vitesse" (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

**Oefening 3.5.1.** Verklaar onderstaande meme.



## 3.6 Oefeningen kinematica