

Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De ééndimensionale beweging met een constante versnelling wordt de *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging*, afgekort EVRB, genoemd. Eenparig betekent gelijkmatig; bij een constante versnelling is de *verandering* van de snelheid steeds gelijk. De grafiek van $a(t) = a$ is een constante met a een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

Voor $t_0 = 0$ worden de gemiddelde snelheid en versnelling gegeven door:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t}$$

Quick Question 1 Waarom geldt er dat voor de EVRB dat $\bar{a} = a$?

Deze formules omvormen levert een eerstegraadsvergelijking in de veranderlijke t :

$$x = x_0 + \bar{v}t$$

$$v = v_0 + at$$

De snelheid $v = v_0 + at$ is een lineaire functie, in oefening X van vorig hoofdstuk werd aangetoond dat de gemiddelde snelheid geschreven dan kan worden als:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Dit alles invullen in de plaatsfunctie levert:

Author(s): Bart Lambregts

Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \bar{v}t \\&= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \\&= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t \\&= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\ \Rightarrow \quad x &= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2\end{aligned}$$

Quick Question 2 Verklaar in elke tussenstap welke formule er wordt ingevuld.

Theorem 1. De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling a worden gegeven door:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \\v(t) &= v_0 + at\end{aligned}$$

Hierin is x_0 de *beginpositie* en v_0 de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip t_0 , dan wordt in de beschrijving t vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip t_0 . De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\v(t) &= v_0 + a(t - t_0)\end{aligned}$$

Oefening 3 Hoe werden de

Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:¹

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

¹De afleiding van de gemiddelde snelheid is als volgt:

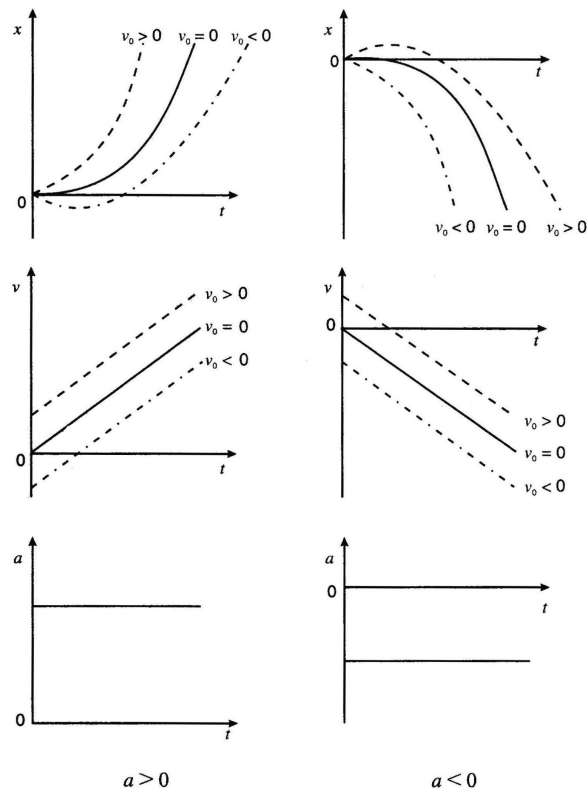
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

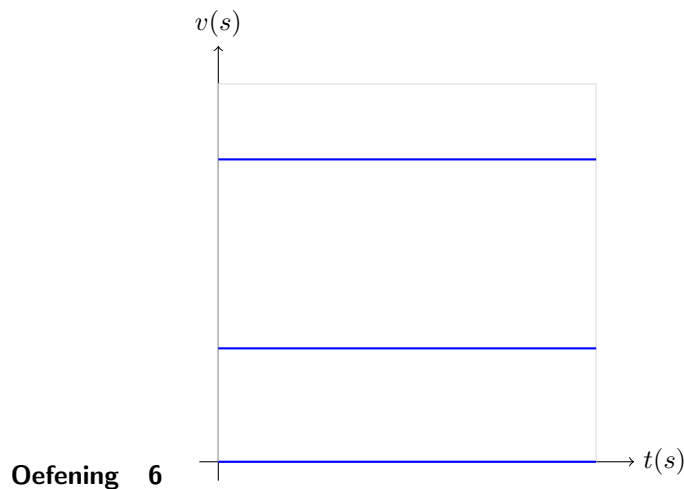
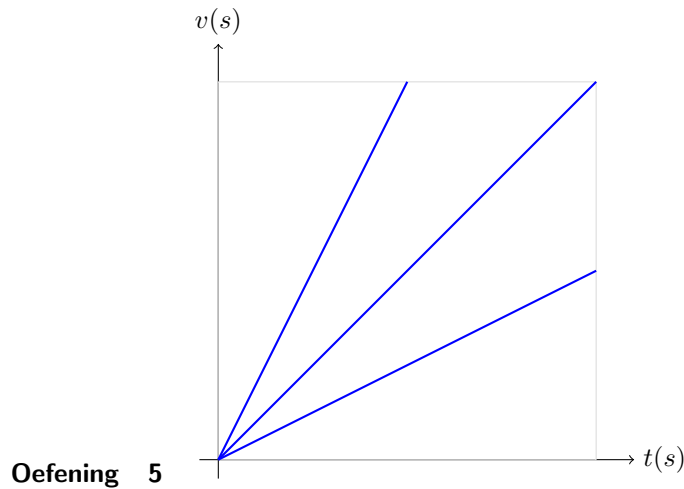
Blijkbaar houdt het eenparig toenemen van de snelheid in dat we het rekenkundig gemiddelde kunnen gebruiken voor de gemiddelde snelheid.

Quick Question 4 • Op het moment t_1 de snelheid gelijk aan nul, is de versnelling dan ook gelijk aan nul?

- Op het moment t_1 de versnelling gelijk aan nul, is de snelheid dan ook gelijk aan nul?
- Als een auto vertraagd, is de versnelling dan negatief?



Figuur 1: Grafieken van een EVRB



Oefening 7 Een auto die 60 km/h rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na 70 cm tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in g , waarbij $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een uitdrukking vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.² Uit

²M.b.v. de formule $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...

Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

$v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned}x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\&= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\&= -\frac{v_0^2}{2a}\end{aligned}$$

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198 \text{ m/s}^2$, wat gelijk is aan $20g$.