De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid (in de auto, op je fiets, ...) hoe groter de verplaatsing in een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan 30 km/h, leg je op één uur tijd 30 km af. Als je wandelt aan 5 km/h leg je op één uur tijd slechts 5 km. Met behulp van de plaatsfunctie kan de snelheid van een voorwerp volledig worden bepaald.

Snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definition 1. De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$. Deze gemiddelde snelheid is negatief, wat betekent dat de zeilboot tegen de positieve richting-as bewogen is.

Quick Question 1 *Kan je op de plaatsgrafiek van de zeilboot de gemiddelde snelheid tussen t_2 en t_0 aanduiden?*

Ogenblikkelijke snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t aan een puntmassa een positie x toe. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t, één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn . . . ! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

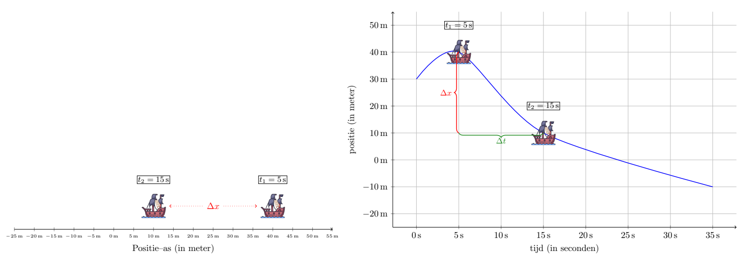
Denkvraag 2 *Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul.* ***Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?***

Author(s): Bart Lambregs,Vincent Gellens

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[1] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ te kennen, lijk het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 die hierboven werd berekend. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$$



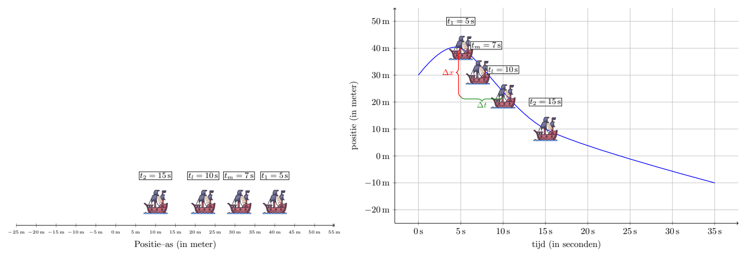
Figuur 1: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Indien niet met $t_2 = 15$ de gemiddelde snelheid wordt berekent, maar bijvoorbeeld met $t_l = 10\,\mathrm{s}$, zal deze gemiddelde snelheid beter de ogenblikkelijke snelheid op t_1 benaderen.

De gemiddelde snelheid is kleiner geworden en op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot in de richting van t_1. De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \dfrac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is een *betere* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_a. Maar het is nog steeds een gemiddelde snelheid! De lezer raadde het waarschijnlijk al...

Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor $t_m = 7$ wordt de benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1 nog beter... Op de grafiek komen de twee schepen nu wel erg dicht bij elkaar...

[1] Die je hebt moeten ingeven...



Figuur 2: De positie van de zeilboot met een tijd-as

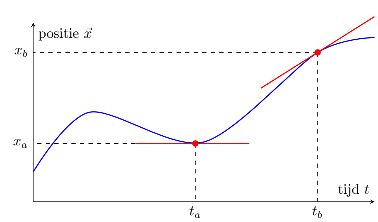
De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definition 2. De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

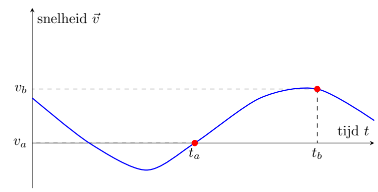


Figuur 3: De snelheid als rico aan de raaklijn

Definition 3. De **snelheidsfunctie** $\vec{v}(t)$ geeft voor elke moment t de snelheidsvector $\vec{v}$.

In één dimensie is $\vec{v}$ een scalar en is de plaatsfuncie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de grootte van de snelheid. De snelheid op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$v_a = v(t_a)$$



Figuur 4: Een snelheidsfunctie voor een ééndimensionale beweging.

Gemiddelde snelheid op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\text{Vectoriële notatie:} \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \vec{e}_x$$

Scalaire notatie: $\langle v \rangle = \bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van de x-as)

Ogenblikkelijke snelheid op willekeurig tijdstip t:

Vectoriële notatie: $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \dfrac{d(x \cdot \vec{e}_x)}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + x \cdot \dfrac{d\vec{e}_x}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x = v \cdot \vec{e}_x$

Scalaire notatie: $v(t) = v = \dfrac{dx}{dt}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van de x-as)

Remark 1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

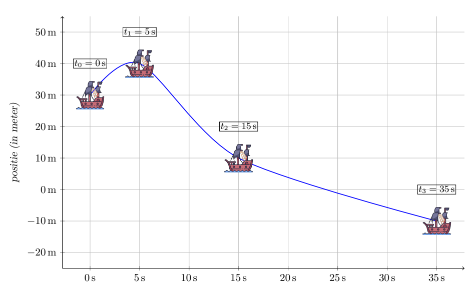
Oefening 3 *Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van de zeilboot. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:*

Vraag 3.1 *Waar ligt de zeilboot stil?*

Vraag 3.2 *Waar heeft de zeilboot een positieve snelheid?*

Vraag 3.3 *waar is de snelheid negatief?*

Vraag 3.4 *Op welk moment bewoog de zeilboot het snelst?*

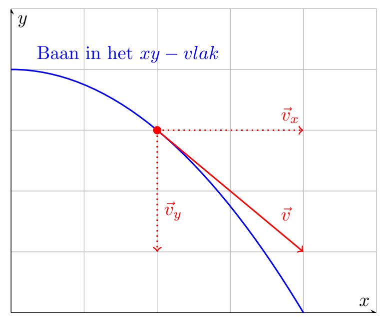


Figuur 5: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging doorgaans op in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.
Snelheid wordt vectorieel beschreven met de snelheidsvector $\vec{v}$ die altijd raakt aan de baan. Scalair rekeningen worden gedaan met de snelheidscomponenten v_x en v_y. De totale snelheid heeft het symbool v.

Theorem 1. De snelheidsvector is rakend aan de baan.



Bewijs We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\dfrac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\dfrac{v_y}{v_x}$. ■

0.1 Vectoriële notatie & definitie

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

0.2 Scalaire notatie & definitie

$$v_x(t) = v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y(t) = v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$v = \sqrt{(\vec{v}_x)^2 + (\vec{v}_y)^2}$$