Wiskunde Op Maat

NATUURKUNDE

EERSTE SEMESTER

(Versie 2025/08/18.22)

Inhoudsopgave

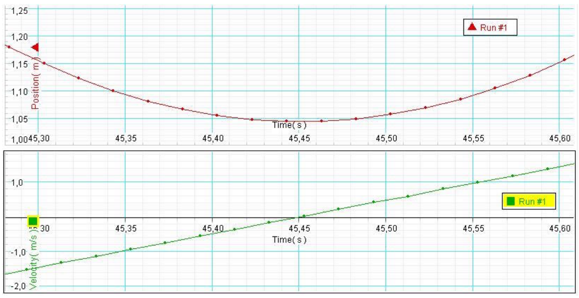
1.1 Inleiding

Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de beweging. De beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1] Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een ‘stoot geven’ niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

Als de kracht de oorzaak is van de beweging, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met fietsen, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km/h}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.



Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wil zeggen dat er per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bijkomt. De appel valt sneller en sneller maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid tegengesteld zijn aan elkaar. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van

[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van ‘waarom’ maar eerder met ‘waardoor’. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3] Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg. . .

In hoofdstuk 1 en 2 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we kinematica. In hoofdstuk 3 en 4 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we dynamica. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we mechanica.

2.1 Inleiding vectoren

2.2 Het begrip vector

2.3 Bewerkingen met vectoren

2.4 Oefeningen vectoren

3.1 Inleiding kinematica

3.2 Het referentiestelsel

3.3 De positie

3.4 De snelheid

3.5 De verselling

3.6 Oefeningen kinematica

4.1 Inleiding

Beweging beschrijven is niet zo simpel als het in eerste instantie lijkt. Zo is bijvoorbeeld de beweging van een wolk eerder complex. Wat reken je al dan niet tot de wolk? Ook de bewegingen van de afzonderlijke moleculen in kaart brengen is een onmogelijke opgave omdat het aantal moleculen eerder groot is. Om toch vooruitgang te kunnen boeken, beginnen we met voorwerpen die we als een punt kunnen voorstellen. We maken dan abstractie van de ruimtelijke vorm van het object dat we beschrijven en doen alsof we het kunnen reduceren tot één enkele plaats in de ruimte. Zo zouden we het vliegen van een vlieg doorheen de kamer kunnen bekijken als een stipje. Het bewegen van de vleugels of de oriëntatie van de kop van de vlieg laten we dan buiten beschouwing. Ook deze beschrijving kunnen we inperken; we gaan in eerste instantie enkel bewegingen beschrijven die voor te stellen zijn op een rechte lijn. Dit noemen we eendimensionale bewegingen. Als we de beschrijving hiervan eenmaal kennen, kunnen we later dit met behulp van vectoren gemakkelijk uitbreiden naar een beschrijving van bewegingen in twee- of drie dimensies.

Om het ons gemakkelijk te maken, zullen we in dit hoofdstuk enkel werken met de getalcomponenten van de vectoren. Dat gaat omdat we steeds in één dimensie werken en de eenheidsvector dan steeds gelijk blijft. Als we v_x kennen, vinden we direct de vectorcomponent volgens de x-as met $\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{e}_x$. Bovendien kunnen we de index x ook weglaten. We weten dat het steeds over de x-as gaat.

[4]

[4] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

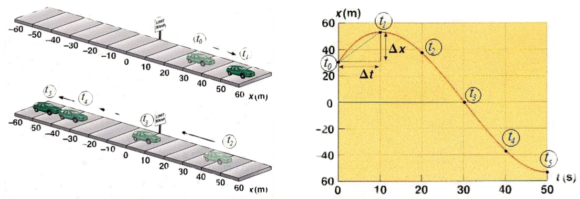
4.2 Basisbegrippen

Positie en plaatsfunctie

De beweging van een puntmassa wordt beschreven door haar positie in de ruimte als functie van de tijd, of dus door een *functie* die de **plaats** weergeeft in functie van de **tijd**. Deze functie noemen we de **plaatsfunctie** $x = x(t)$. Bij een ééndimensionale beweging is x een getal, namelijk de positie op een coördinaatas en t is de variabele die symbool staat voor de tijd . Met een welbepaald tijdstip t_1

$$x_1 = x(t_1)$$

In onderstaande figuur (**??**) zie je een auto op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ weergegeven op verschillende posities, met een grafiek van de bijbehorende plaatsfunctie.



Figuur 1: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

Het verschil tussen de plaatsen op twee tijdstippen t_1 en t_2 noemen we de **verplaatsing** tussen t_1 en t_2, genoteerd met een Δ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

Definitie 4.2.1. De **verplaatsing** Δx is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

In de figuur is de verplaatsing van de auto tussen de tijdstippen t_0 en t_1 gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 50\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{m}$ en is de verplaatsing tussen de tijdstippen t_2 en t_4 gelijk aan $\Delta x = x_4 - x_2 = -40\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m} = -80\,\mathrm{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de auto netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as.
Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.

Gemiddelde snelheid

De tijd nodig om een bepaalde afstand af te leggen geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definitie 4.2.2. De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In de figuur is de gemiddelde snelheid van de auto tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{40\,\mathrm{m} - 50\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s}} = -1\,\mathrm{m/s}$. Als de snelheid negatief is betekent dit dat de auto achteruit rijdt.

Gemiddelde versnelling

Ook de snelheid kan veranderen in de tijd. Dit ken je uit het dagelijks leven als versnellen of vertragen.

4.2 Basisbegrippen

Definitie 4.2.3. De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

Om even over na te denken ...

Kan je uitleggen wat de eenheid meter per seconde, per seconde betekent?

Ogenblikkelijke snelheid

De plaatsfunctie xt kent op elke tijdstip t een positie toe aan een voorwerp. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

Om even over na te denken ...

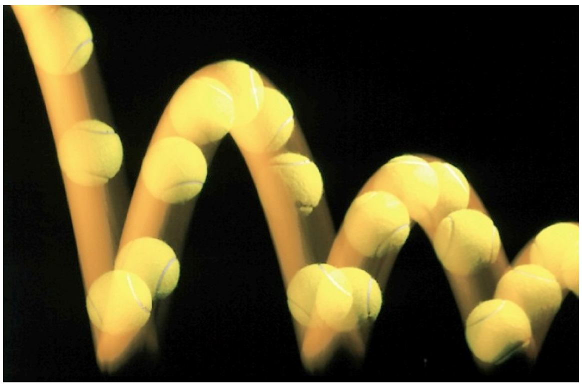
Aan elk moment een snelheid toekennen is niet evident. Laat ons volgende video bekijken van een raket die opstijgt. Op het lanceerplatform is de snelheid 0. Als een raket op weg is naar de ruimte kan de snelheid tot $100m/s$ bedragen. **Wat is volgens jou de snelheid op het moment dat de raket de grond niet meer raakt? Het eerste moment dat hij niet meer op de grond staat.**

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment, één ogenblik, er helemaal geen tijdsverloop is en we bijgevolg ook geen verplaatsing kunnen hebben...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

Om even over na te denken ...

Als een raket opstijgt vanuit stilstand lijkt de snelheid in eerste instantie positief. **Hoe zou je toch beargumenteren dat de raket een positieve snelheid heeft op het eerste moment dat hij van de grond is?**

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemíddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[5] te delen door de tijd van één omwenteling. Als jij plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.



Figuur 2: Stuiterende tennisbal

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Op de stroboscopische foto van de stuiterende tennisbal is te zien dat de bal bovenaan trager beweegt dan wanneer hij de grond nadert. Bovenaan liggen de beelden immers

[5] Die je hebt moeten ingeven...

dichter bij elkaar zodat de tennisbal minder afstand aflegt in de tijdsspanne tussen twee opeenvolgende opnames. Deze kwantitatieve[6] informatie die levert echter opnieuw gemiddelde snelheid en niet zomaar de ogenblikkelijke snelheid. De tennisbal verandert immers nog van snelheid tussen twee opeenvolgende opnames. Door de frequentie[7] waarmee de foto's worden genomen op te drijven, krijgen we een accurater beeld van de snelheid die de tennisbal op een gegeven moment heeft. De tijdsintervallen zijn nu immers korter zodat de bal minder van snelheid kan veranderen gedurende de intervallen en zodoende de gemiddelde snelheid een indicatie wordt van de ogenblikkelijke snelheid. De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner... te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de *limiet* van de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definitie 4.2.4. De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

Opmerking 4.2.1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

Ogenblikkelijke versnelling

Voor een ogenblikkelijke verandering van de snelheid maken we eenzelfde redenering als voor de ogenblikkelijke verandering van de positie.

Definitie 4.2.5. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.

[6]Kwantitatief wil zeggen dat het over een hoeveelheid of een grootte gaat.

[7]Frequentie is een grootheid die aangeeft hoeveel cyclussen er per seconde worden doorlopen. Hier gaat het dus over het aantal beelden dat per seconde wordt gemaakt. De eenheid van frequentie is s^{-1} oftewel Hz (de Hertz).

4.3 Eenparige rechtlijnige beweging

Een eenvoudige beweging om te bestuderen is de *eenparig rechtlijnige beweging* (afgekort ERB). De snelheid van de beweging is eenparig of gelijkmatig verdeeld wat betekent dat de snelheid steeds gelijk blijft. M.a.w. is de snelheid constant en dus de versnelling gelijk aan nul. Aangezien de snelheid niet verandert is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid. Met deze observatie kan je eenvoudig een functie opstellen voor de plaatsfunctie van deze beweging:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta x = v\Delta t \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 = v(t - t_0) \\ &\Leftrightarrow \quad x = x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$

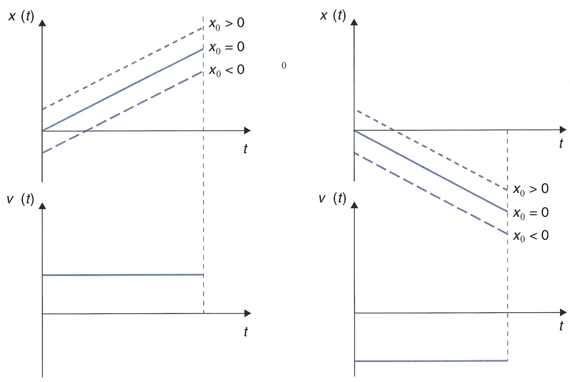
Stelling 4.3.1. De plaatsfunctie $x(t)$ van een ERB met snelheid v is gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

waarbij $x_0 = x(t_0)$ de coördinaat op het tijdstip t_0 is. Als $t_0 = 0$ dan vereenvoudigt de plaatsfunctie tot

$$x(t) \quad = \quad x_0 + vt \tag{1}$$

De snelheid v is gelijk aan de beginsnelheid $v_0 = v(t_0)$ omdat in een ERB de snelheid constant is. De snelheidsfunctie is $v(t) = v$ en de versnellingsfunctie is $a(t) = 0$.



Figuur 3: Grafieken van een ERB

4.4 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

Een eendimensionale beweging waarvan de versnelling constant noemt *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; de snelheidsverandering is steeds gelijk. In symbolen: $a(t) = a$ waarbij a een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

We now examine the situation when the magnitude of the acceleration is constant and the motion is in a straight line. In this case, the instantaneous and average accelerations are equal. We use the definitions of average velocity and acceleration to derive a set of valuable equations that relate x, v, a, and t when a is constant, allowing us to determine any one of these variables if we know the others.

To simplify our notation, let us take the initial time in any discussion to be zero, and we call it t_0: $t_1 = t_0 = 0$. (This is effectively starting a stopwatch at t_0.) We can then let $t_2 = t$ be the elapsed time. The initial position (x_1) and the initial velocity (v_1) of an object will now be represented by x_0 and v_0, since they represent x and v at $t = 0$. At time t, the position and velocity will be called x and v (rather than x_2 and v_2).

The average velocity during the time interval $t - t_0$ will be (Eq. 2–2)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$$

since we chose $t_0 = 0$. The acceleration, assumed constant in time, is (Eq. 2–5)

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

A common problem is to determine the velocity of an object after any elapsed time t, when we are given the object's constant acceleration. We can solve such problems by solving for v in the last equation to obtain:

$$v = v_0 + at \qquad \text{[constant acceleration] (2–7)}$$

If an object starts from rest ($v_0 = 0$) and accelerates at $4.0\,\mathrm{m/s^2}$, after an elapsed time $t = 6.0\,\mathrm{s}$ its velocity will be

$$v = at = (4.0\,\mathrm{m/s^2})(6.0\,\mathrm{s}) = 24\,\mathrm{m/s}.$$

Next, let us see how to calculate the position x of an object after a time t when it undergoes constant acceleration. The definition of average velocity (Eq. 2–2) is

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}$$

which we can rewrite as

$$x = x_0 + \bar{v}t \tag{2–8}$$

Because the velocity increases at a uniform rate, the average velocity $\bar{v}$ will be midway between the initial and final velocities:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad \text{[constant acceleration] (2–9)}$$

(Careful: Equation 2–9 is not necessarily valid if the acceleration is not constant.)

We combine the last two Equations with Eq. 2–7 and find:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{[constant acceleration] (2–10)}$$

Stelling 4.4.1. De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling a worden gegeven door:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

Hierin is x_0 de *beginpositie* en v_0 de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip t_0, dan wordt in de beschrijving t vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip t_0. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}$$

Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:[8]

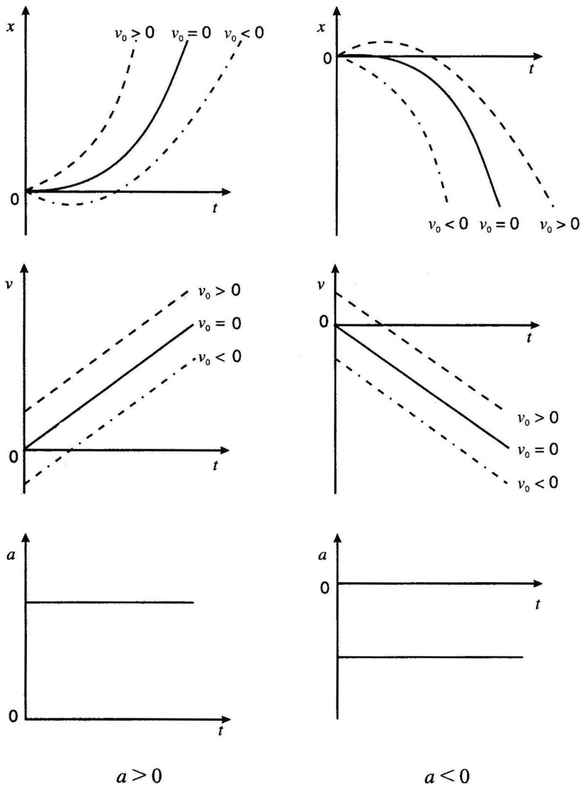
$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Blijkbaar houdt het eenparig toenemen van de snelheid in dat we het rekenkundig gemiddelde kunnen gebruiken voor de gemiddelde snelheid.

[8] De afleiding van de gemiddelde snelheid is als volgt:

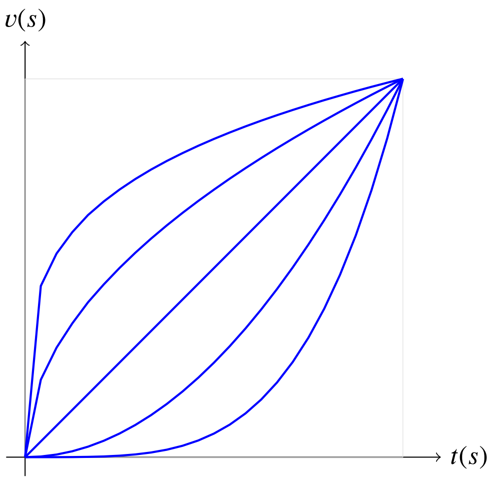
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

4.4 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging



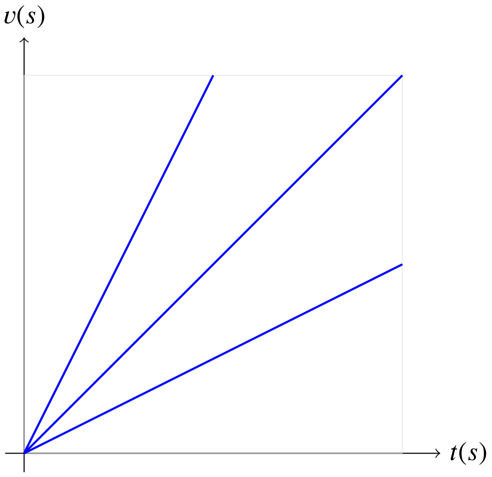
Figuur 4: Grafieken van een EVRB

Oefening 4.4.1.

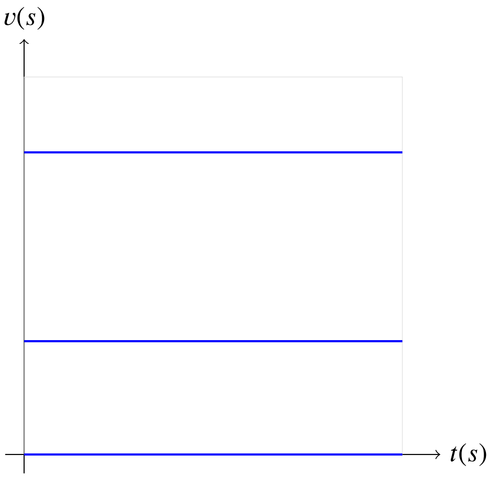


4.4 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

Oefening 4.4.2.



Oefening 4.4.3.



Oefening 4.4.4. Een auto die 60 km/h rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na 70 cm tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in g, waarbij $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Uitwerking: Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een *uitdrukking* vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.[a] Uit $v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

4.4 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, wat gelijk is aan $20g$.

[a] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...

4.5 Oplossingsstrategie

Vraagstukken in de kinematica kan je vaak op dezelfde manier banaderen. Elke opgave blijft echter anders, creativiteit is dus noodzakelijk.

(a) Lees het vraagstuk aandachtig. Zorg dat je duidelijk weet wat er gevraagd wordt.

- als je correct de snelheid op t_3 berekent maar de snelheid op t_2 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- als je correct de postitie op t_1 berekent maar de positie op t_0 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- ...

(b) Kies het systeem (object, lichaam, massa, geheel van lichamen) waarvan je een onbekende posititie, snelheid of versnelling wilt berekenen.

(c) Maak een tekening van dit systeem. Teken een coördinaatsas.

(d) Bepaal de gegevens uit het vraagstuk. Welke heb je nodig om de oplossing te bepalen?

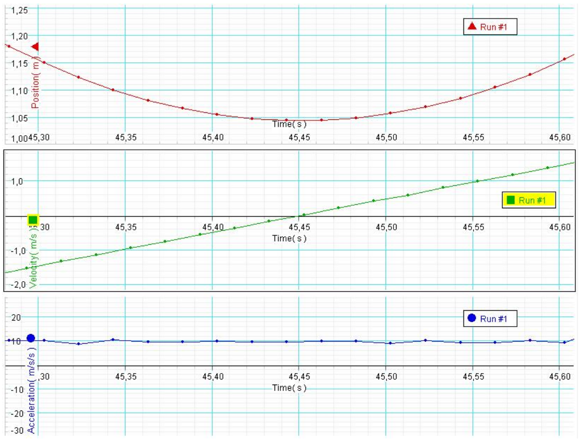
(e) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor positie, snelheid en versnelling om het gevraagde te berekenen.

(f) Heeft je oplossing de juiste eenheiden en grootteorde? De snelheid van een tennisbal in de eenheid $\frac{s}{m^2}$ is waarschijnlijk fout. Als het enkele minuten duurt voordat de bowlingbal de kegels raakt, heb je waarschijnlijk ergens een (reken)fout gemaakt ...

4.6 Verticale worp

In het jaar 1586 stond bovenop de Nieuwe Kerk van Delft een wetenschapper uit Brugge. Onze perceptie leert dat zwaardere lichamen sneller vallen dan lichtere. Een pluim en een steen komen in regel niet op hetzelfde moment op de grond terecht. Toch blijkt deze intuitie niet te kloppen. Simon Stevin liet vanop de kerktoren twee loden bollen met een verschillend gewicht vallen en stelde vast dat ze op hetzelfde moment de grond raakten.

In vacuüm – waar voorwerpen geen luchtweerstand ondervinden – blijkt de massa geen rol te spelen bij de constante versnelling die de voorwerpen krijgen: alle voorwerpen vallen met dezelfde versnelling! Met lode bollen kon Simon Stevin dit effect uitschakelen. De theoretische verklaring voor dit experiment hoort thuis in de dynamica. In de kinematica wordt enkel de beweging beschreven. Omdat de valversnelling constant is, heb je simpelweg met een EVRB te maken.



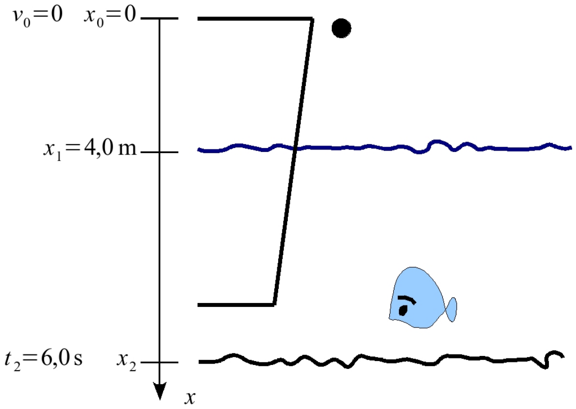
Figuur 5: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp waarbij de as naar beneden is georiënteerd.

Strikt genomen verschilt de valversnelling van plaats tot plaats op de aarde, maar voor het gemak nemen wij in vraagstukken de waarde

$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}.$$

Omdat de verticale worp een EVRB is, kunnen we de formules (**??**) en (**??**) gebruiken om een valbeweging te beschrijven. Voor de versnelling a nemen we dan $a = g$ of $a = -g$ al naargelang de oriëntatie van de coördinaatas.

Oefening 4.6.1. Simon Stevin laat van de boord van een schip een loden bol in het water vallen. De boord bevindt zich $4,0\,\mathrm{m}$ boven het wateroppervlak. De loden bol zinkt vervolgens met de snelheid waarmee hij het water raakte. Er zijn $6,0\,\mathrm{s}$ tussen het tijdstip waarop de bol valt en ze de bodem van het water bereikt.



4.6 Verticale worp

1. Hoe diep is het water?

2. Wat is de gemiddelde snelheid van de bol over het hele traject?

Uitwerking: De beweging is opgebouwd uit twee verschillende soorten bewegingen. Het eerste stuk is een vrije val, wat een EVRB is. In het tweede stuk (onder water) is de snelheid constant en is er dus geen versnelling. In geen geval kunnen we dus de formules voor een EVRB op het geheel toepassen. Die zijn immers afgeleid voor een beweging waar de versnelling (altijd, gedurende de hele beweging) constant is.

Omdat we weten hoe ver de bol moet vallen voordat hij het wateroppervlak bereikt, kunnen we zowel de tijd die de bol hiervoor nodig heeft als de snelheid waarmee de bol het wateroppervlak raakt, bepalen. We kiezen een as naar beneden zodat – omdat de snelheid in deze richting toeneemt – de versnelling positief is en gelijk aan de valversnelling g (toch voor het eerste stuk). De beginsnelheid van de bol is nul omdat hij vanuit rust wordt losgelaten. Voor de tijd vinden we:

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}}$$

Met de tijd[a] kunnen we de snelheid op het wateroppervlak vinden.

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{2gx_1}$$

Onder water, in het tweede stuk, beweegt de kogel met deze snelheid gedurende de resterende tijd: $6{,}0$ seconden min de tijd t_1 (**??**) die de kogel nodig had om te vallen. De afstand die de bol onder water aflegt, vinden we met de eenvoudige formuletjes van een ERB[b]. We substitueren ook vergelijkingen (**??**) en (**??**).

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \overline{v} \cdot \Delta t \\
&\Downarrow \\
x_2 - x_1 &= v_1(t_2 - t_1) \\
&= \sqrt{2gx_1}\left(t_2 - \sqrt{\frac{2x_1}{g}}\right) \\
&= \sqrt{2gx_1}\,t_2 - 2x_1 \\
&= 45\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

De gemiddelde snelheid vinden we door de totale afgelegde weg te delen door de totale benodigde tijd. Andere formuletjes zoals $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ zijn niet van toepassing omdat het helemaal niet over één EVRB gaat waar dit formuletje geldt omdat de snelheid mooi lineair toeneemt. Hier gebeurt dat enkel in het eerste stuk en worden de verschillende snelheden niet even lang aangehouden zodat ze een verschillend aandeel hebben in de totale benodigde tijd.

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{02} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2}{t_2} &= \frac{\sqrt{2gx_1}\,t_2 - x_1}{t_2} \\
&= \sqrt{2gx_1} - \frac{x_1}{t_2} \\
&= 8{,}2\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

[a] We zouden de tijd met het gevonden formuletje kunnen uitrekenen en met het getalletje dat we vinden verder rekenen. Maar met het formuletje verder werken – algebraïsch of symbolisch – is toch o zo veel knapper en van toepassing voor álle boten en niet enkel voor een boot waarvoor het dek zich $4{,}0$ meter boven het wateroppervlak bevindt. Bovendien is het "echte" fysica omdat je een "model" uitwerkt en niet een rekensommetje oplost...

[b] Opmerking, een ERB is een speciaal geval van een EVRB. Een ERB heeft als constante versnelling $a = 0$.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=[Een universiteitscollege over de leerstof van dit hoofdstuk.]

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=https://youtu.be/q9IWoQ199_o