# Cursus Kinematica

**16 september 2025**

# Inhoudsopgave

# Kinematica: Vectoren en Basisbegrippen

## Deel

# Inleiding

## Inleiding

Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De overgang van rust naar beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de bewegingsverandering. De ontstane beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1]

Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

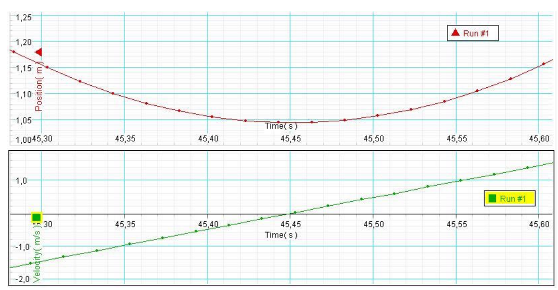
Author(s):
Author(s): Bart Lambregs

[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We

Als de kracht de oorzaak is van de bewegingsverandering, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met trappen op de fiets, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.




Figuur 1: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp

Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wilt zeggen dat de *verandering in snelheid* steeds gelijk is. Er komt per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bij. De appel valt sneller en sneller, maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid een tegengestelde zin hebben. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3]Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

Figuur 2: Een prachtig schouwspel...

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting en zin van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting en zin van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg. . .

In hoofdstuk 1 bekijken we *vectoren* als voorkennis om fysische objecten te beschrijven. In hoofdstuk 2, 3 en 4 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we **kinematica**. In hoofdstuk 5 en 6 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we **dynamica**. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we **mechanica**.

## Deel I

# Vectoren

## Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de niet levende natuur met grootheden die worden opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van* $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*.* Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van* $27\,^{\circ}\mathrm{C}$ *heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

Een vectoriële grootheid heeft drie variabele kenmerken: grootte, richting en zin. Voorbeeld: de helikopter vliegt aan $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ , horizontaal en naar het zuiden. Een scalaire grootheid heeft slechts één kenmerk: de grootte (waarin soms ook een teken vervat zit). Voorbeeld: een sneeuwbal heeft een temperatuur van -10°C.

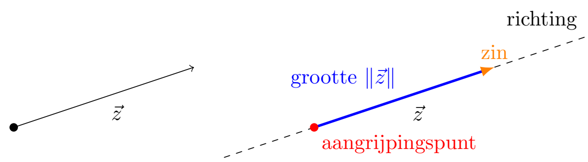
De plaats waarop de vector van toepassing is, noemt men het aangrijpingspunt van de vector.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=0na1JdPE_JY

Author(s): Bart Lambregs

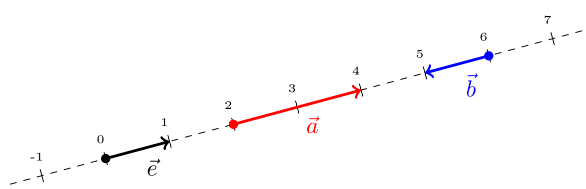
# Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, \ldots$ en wordt altijd bij de pijl gezet ter benoeming. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.




Figuur 3: De vector $\vec{z}$ met zijn kenmerken.

Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden als positief beschouwd, vectoren tegen de zin van de referentie-as als negatief.
De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).
De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.
In onderstaande tekening is $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2.
Voor de vector $\vec{b}$ geldt dat $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.




Figuur 4: Vectoren en aangrijpingspunten.

**Remark 1.** Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

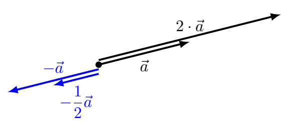
**Quick Question 1** *Waarom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?*

Author(s): Bart Lambregs

# Bewerkingen met vectoren

## Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

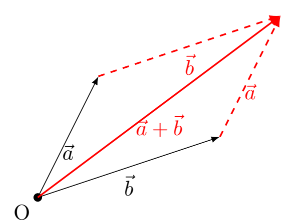
Een vector kan 'herschaald' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalaire verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.




Figuur 5: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

## De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren van dezelfde grootheid met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.




Figuur 6: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren op te tellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultante berekend met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (aangepaste) cosinusregel voor de lengte van $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

Author(s): Bart Lambregs

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$$

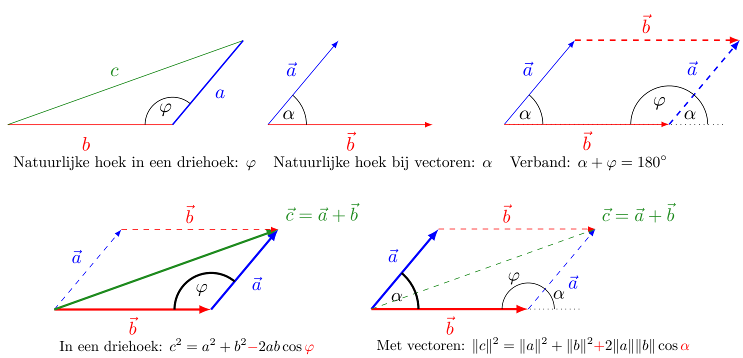
met $\alpha$ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

**Quick Question 2** *Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan?*
*Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en dezelfde zin hebben? Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en tegengestelde zin hebben?*

De 'klassieke' cosinusregel wordt geformuleerd voor de zijden van een driehoek, en zegt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

met $\varphi$ de overstaande hoek van zijde $c$.
Merk op dat het teken van de derde term verschillend is. Waarom is dat zo, en hoe moet je dat onthouden?
In een driehoek gebruik je natuurlijkerwijze niet de hoek $\alpha$ tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, maar wel de *complementaire* hoek $\varphi$ tussen de lijnstukken $a$ en $b$.
Volgende tekening en redenering geeft het verband tussen beide situaties, en de bijhorende formuleringen. Het enige verschil is een minteken, en dat komt omdat je afhankelijk van de situatie liever met één van de twee complementaire hoeken werkt. En zoals je op de goniometrische cirkel onmiddellijk kan zien, hebben complementaire hoeken tegengestelde cosinussen. Dat precies dat verschil wordt gecompenseerd door het extra minteken.



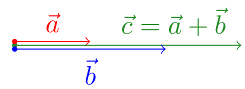

Figuur 7: Omdat $\alpha+\varphi=180°$, is $\cos\varphi = -\cos\alpha$.

Het verband tussen beide versies van de cosinusregel is nu duidelijk: afhankelijk van welke hoek je neemt tussen de richtingen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ krijg je ofwel een plusteken, ofwel een minteken. Het is niet de moeite om dat teken van buiten te leren, want het teken volgt onmiddellijk uit het speciale geval wanneer $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan: dan zijn zowel $\alpha$ als $\varphi$ dus $90°$, en de cosinus is dus nul.[4]

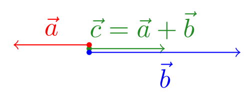
[4] Gelukkig, want de Stelling van Pythagoras zegt dat bij een rechte hoek $c^2 = a^2 + b^2$, en dat klopt enkel met de cosinusregel als de derde term nul is.

Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *kleiner* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *kleiner* en moet de derde term in de cosinusregel *negatief* zijn.
Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *groter* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *groter* en moet de derde term in de cosinusregel *positief* zijn.
Naargelang je met de hoek $\alpha$ rekent dan wel met de hoek $\varphi$ wordt het teken van de term met de cosinus dus aangepast.

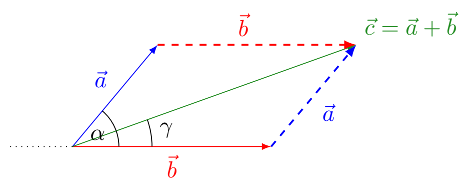
**Example 1.** **Vraag 3** *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ *en* $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$*, dan is hier* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 8\,\mathrm{N}$.




**Vraag 4** *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ *en* $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$*, dan is hier* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$.




**Vraag 5** *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ *en* $\alpha = 50°$*, dan moet* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ *worden berekend met de cosinusregel.*




*De grootte van de resultante* $\vec{c}$ *wordt bepaald met bovenstaande versie van de cosinusregel:*

$$\begin{aligned}\|\vec{c}\| = \|\vec{a}/\vec{b}\| &= \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha} \\ &= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.\end{aligned}$$

**Remark 2.** In het algemeen geldt dus **niet** dat $\cancel{\|a + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$. In welk(e) geval(len) geldt de geljkheid wel?

De **richting van de resultante** (d.w.z. de hoek $\gamma$) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \text{bgsin}\left(\frac{5 \cdot \sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

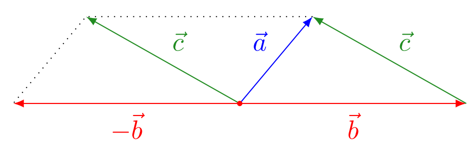
De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren. Indien er dus meer dan twee vectoren worden samengesteld, tel je eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan tel je met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt)

## Verschil van twee vectoren

Net zoals bij getallen $5 - 3 = 5 + (-3)$, kan je ook bij vectoren een verschil schrijven als een som met de tegengestelde:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.




Figuur 8: Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

## De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

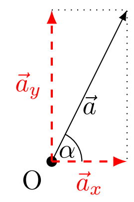
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In bepaalde contexten is het vaak erg nuttig om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de $x$-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de $y$-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De grootte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$




Figuur 9: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

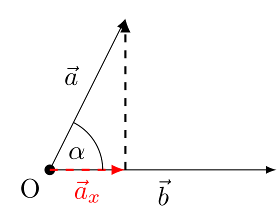
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

## Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

**Quick Question 6** *Is de eerste bewerking '·' dezelfde als de tweede bewerking '·'? Verklaar.*

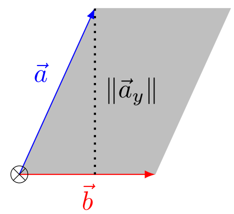



Figuur 10: De projectie van de vector $\vec{a}$ op $\vec{b}$

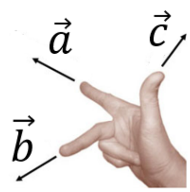
## Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}_y\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$




Figuur 11: Het vectorieel product



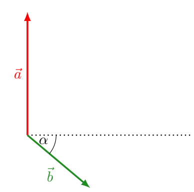

Figuur 12: De rechterhandregel

**Remark 3.** Een vector met zin in het blad wordt genoteerd met $\otimes$. Een vector met zin uit het blad wordt genoteerd met $\odot$.

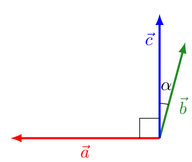
# Oefeningen vectoren reeks 1

**Oefening 7** *Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.*

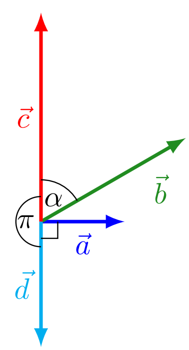
**Vraag 7.1** $\|\vec{a}\| = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 40°$




**Vraag 7.2** $\|\vec{a}\| = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\quad \|\vec{c}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\quad \alpha = 15°$

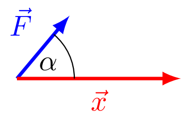



**Vraag 7.3** $\|\vec{a}\| = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$ $\quad \|\vec{c}\| = 15\,\mathrm{N}$, $\quad \|\vec{d}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\quad \alpha = 60°$




**Oefening 8** *Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:*

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens



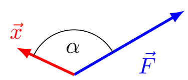

**Vraag 8.1** *$\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.*

**Vraag 8.2** *$\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.*

**Vraag 8.3** $\vec{F} \cdot \vec{x}$

**Vraag 8.4** $\vec{F} \times \vec{x}$

**Oefening 9** *Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 7\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 2\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 125°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:*




**Vraag 9.1** *$\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.*

**Vraag 9.2** *$\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.*

**Vraag 9.3** $\vec{F} \cdot \vec{x}$

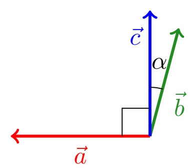
**Vraag 9.4** $\vec{F} \times \vec{x}$

# Oefeningen vectoren reeks 2

**Oefening 10**

*Gegeven de drie waarvoor geldt* $\|\vec{a}\| = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$

*Construeer en bepaal de groottes van:*




**Vraag 10.1** $\vec{a} - \vec{b}$

**Vraag 10.2** $\vec{b} - \vec{a}$

**Vraag 10.3** $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

**Vraag 10.4** $3\vec{a} - 2\vec{b}$

**Vraag 10.5** $4\vec{b} + \vec{c}$

**Vraag 10.6** $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

**Vraag 10.7** $3\vec{a} - 4\vec{c}$

**Oefening 11** *Als* $\vec{F} \perp \vec{y}$, *welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.*

**Vraag 11.1** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

**Vraag 11.2** $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

**Vraag 11.3** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

**Vraag 11.4** $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

**Vraag 11.5** $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens

**Vraag 11.6** $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

**Vraag 11.7** $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

**Vraag 11.8** $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

**Oefening 12** *Als $\vec{F} \parallel \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.*

**Vraag 12.1** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

**Vraag 12.2** $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

**Vraag 12.3** $\vec{F} \cdot \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

**Vraag 12.4** $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

**Vraag 12.5** $\vec{F} \times \vec{y} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{y}\|$

**Vraag 12.6** $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

**Vraag 12.7** $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

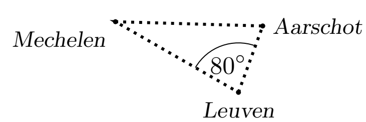
**Vraag 12.8** $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

# Oefeningen vectoren reeks 3

**Oefening 13** *Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst* 15 m *evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van* $45^\circ$ *met de zijlijn* 18 m *naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.*

**Oefening 14** *Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt* 9 m *evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt* 17 m *in een richting die een hoek van* $35^\circ$ *maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.*

**Oefening 15** *Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van* 10 m/s *en* 20 m/s*. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.*




**Vraag 15.1** *Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!*

**Vraag 15.2** *Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?*

**Oefening 16** *Toon aan dat* $\|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$ *met* $\alpha$ *de hoek tussen* $\vec{a}$ *en* $\vec{b}$.

**Oefening 17** *Geldt er algemeen dat* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *? Geldt er dat* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ *? Verklaar kort.*

**Oefening 18** *Kan er gelden dat* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$ *? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.*

Author(s): Bart Lambregs en Vincent Gellens

## Deel II

# Basisbegrippen van de kinematica

## Inleiding

**Kinematica** [5] is het onderdeel van de fysica dat de **bewegingen van voorwerpen beschrijft**, zoals vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook de beweging van de maan rond de aarde of de aarde rond de zon. De kinematica beperkt zich tot het *beschrijven* van de beweging, zonder de onderliggende *oorzaak* te onderzoeken. De redenen waarom iets op een bepaalde manier beweegt worden verder behandeld in de *dynamica*.

In dit hoofdstuk worden eerst de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica behandeld, namelijk de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijkheid van de scalaire grootheid **tijd**. Vervolgens gebruiken we die begrippen om enkele concrete soorten bewegingen te bestuderen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort).

**Example 2.** Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na één seconde? En op het moment dat de appel de grond raakt?

De kinematica vraagt zich niet af *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. In het latere onderdeel *dynamica* worden *krachten* bestudeerd die de bewegingen beïnvloeden. We zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

**Example 3.** Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

[5] Het woord 'kinematica' is net zoals 'cinema' en 'kinesist' afgeleid van het Griekse $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ dat 'beweging' betekent.

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips? Of nog een andere vorm?
- Hoe snel vliegt het krijtje? Vertraagt het tijdens zijn vlucht, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooid heeft?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica. Één vraag past natuurlijk beter binnen een cursus zingeving en ethiek, maar dat had je wel door...

**Denkvraag 19** *Een buffel tracht loodrecht een* 300 m *brede rivier over te steken met een snelheid van* 1,00 m/s*. De stroomsnelheid bedraagt* 1,50 m/s.

(a) *In welke tijd bereikt de buffel de overzijde?*

(b) *Hoever drijft de buffel af?*

(c) *Met welke snelheid beweegt de buffel voor iemand die op de oever staat?*

(d) *Waarom is het antwoord op de vorige vraag niet simpelweg* $1{,}00\,\mathrm{m/s} + 1{,}50\,\mathrm{m/s} = 2{,}50\,\mathrm{m/s}$*?*

(a) *De buffel bereikt de overzijde van de rivier na een tijd van* 300 s*. Of het water nu al dan niet stroomt, heeft geen invloed op de snelheid waarmee de buffel ten opzichte van het water naar de overkant gaat. Beschouw (een stuk van) de rivier als een bassin waarin de buffel zwemt, waarbij dat bassin dan zelf ten opzichte van de oever beweegt. De buffel moet dus een afstand van* 300 m *afleggen met een snelheid* 1,00 m/s*, waar hij dus* 300 s *(of 5 minuten) voor nodig heeft.*

(b) *De buffel drijft* 450 m *af; hij komt die afstand verderop langs de oever aan de overkant aan. Zolang dat de buffel aan het zwemmen is, gaat de rivier namelijk met hem aan de haal en neemt hem mee stroomafwaarts. De afgelegde afstand volgens de richting van de rivier is dan* $1{,}50\,\mathrm{m/s} \cdot 300\,\mathrm{s} = 450\,\mathrm{m}$.

(c) *Voor iemand die op de oever staat, beweegt de buffel met een snelheid van 1,8 m/s. Omdat in een bepaalde tijdsspanne $\Delta t$ de buffel t.o.v. het water een afstand $1{,}00\,\mathrm{m/s} \cdot \Delta t$ heeft gezwommen en het water hem in diezelfde tijd over een afstand $1{,}50\,\mathrm{m/s} \cdot \Delta t$ heeft meegenomen, heeft de buffel in vogelvlucht, met de stelling van Pythagoras, een afstand van $\sqrt{(1{,}00\,\mathrm{m/s} \cdot \Delta t)^2 + (1{,}50\,\mathrm{m/s} \cdot \Delta t)^2}$ afgelegd. Die afstand in de gegeven tijdsspanne geeft dan de snelheid van de buffel ten opzichte van de over:*

$$v = \sqrt{(1{,}00\,\mathrm{m/s})^2 + (1{,}50\,\mathrm{m/s})^2}.$$

*Hierbij hebben we $(\Delta t)^2$ onder de wortel afgezonderd, uit de wortel gehaald waarbij het kwadraat verdween en de tijdsspanne in teller en noemer tegen mekaar hebben kunnen wegstrepen.*

(d) *De totale snelheid van de buffel is niet gelijk aan de optelling van de afzonderlijke snelheden omdat die snelheden van toepassing zijn op verschillende richtingen.*

**Denkvraag 20** *Vanuit de laadbak van een auto gooit een man een zware medicine bal omhoog. Een klein beetje later vangt hij die bal terug op. Zie het volgende filmpje voor de reële situatie:*

*YouTube link:* `https://www.youtube.com/watch?v=j1URC2G2qnc`

(a) *Beschrijf de baan van de bal zoals die eruit ziet voor iemand die naar de rijdende auto kijkt.*

(b) *Beschrijf de baan van de bal zoals die eruit ziet voor de werper in de auto.*

(c) *Schets de snelheidsvector van de bal voor het moment dat de bal op zijn hoogste punt is, voor een waarnemer die naar de rijdende auto kijkt.*

(d) *Doe hetzelfde voor de snelheidsvector van de bal op een moment dat hij voorbij zijn hoogste punt is.*

(a) *De baan van de bal ziet er gebogen uit, waarbij de bal eerst omhoog en dan terug omlaag gaat.*

(b) *Ten opzichte van de werper in de auto gaat de bal enkel naar boven en naar beneden. Als we ervan uitgaan dat de wrijving te verwaarlozen is, is de baan van de bal een verticale rechte.*

(c) *Voor een waarnemer buiten de auto die stilstaat, is de snelheidsvector van de bal op het moment dat hij zich op zijn hoogste punt bevindt, horizontaal gericht. In verticale zin keert de bal van bewegingszin om zodat hij in deze richting geen snelheid heeft maar in horizontale zin beweegt de bal nog altijd met de auto mee.*

(d) *De snelheidsvector maakt nu een hoek met de horizontale en is groter dan de snelheid op het hoogste punt. Naast een horizontale component heeft de snelheid nu ook een verticaal naar beneden gerichte component omdat de bal ook terug naar beneden aan het vallen is.*

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o`

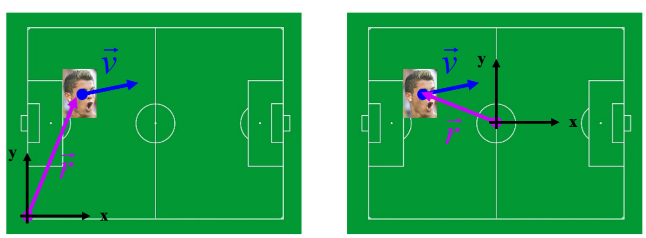
# Het referentiestelsel

Als je een vogel ziet vliegen, kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of – indien het een kolibrie is – misschien zelfs op een vaste plaats *blijven fladderen*. Al deze beschrijvingen gebeuren met een referentiepunt in het achterhoofd. Je kan alleen maar stijgen ten opzichte van iets anders.

Elk bewegend systeem wordt sluitend beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Dat is een assenstelsel dat als het ware in de ruimte geplaatst wordt en waarin bijvoorbeeld de positie kan worden vastgelegd. Ten opzichte van dit stelsel kan je de plaats met een positievector beschrijven en een snelheidsvector gebruiken om de snelheid te beschrijven.

De keuze van het referentiestelsel is altijd *vrij*. Het is belangrijk om die keuze telkens duidelijk te maken. Stel je voor dat je op dit moment gedreven natuurkunde aan het studeren bent aan een bureau en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

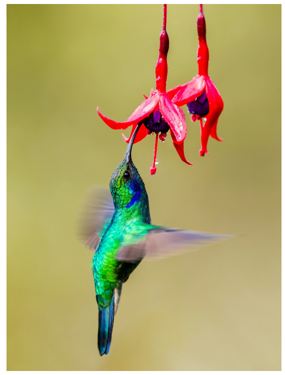
Meestal wordt geopteerd voor een referentiestelsel dat stilstaat. In onderstaand voorbeeld van het voetbalveld is de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend naargelang het gekozen referentiestelsel.




Figuur 13: Twee verschillende referentiestelsels

**Oefening 21** *De kolibrie in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht fladderen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel* ***niet*** *stilstaat.*

Author(s): Bart Lambregs



- *Een referentiestelsel met de kern van de aarde als oorsprong. (De kolibrie draait nu rond de as van de aarde...)*
- *Een referentiestelsel met de zon als middelpunt (De kolibrie draait nu ook rond de zon...)*

# De positie

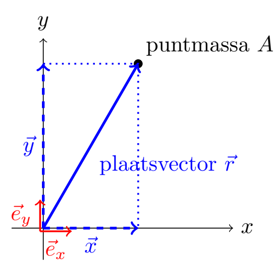
## Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt, heeft deze plaatsvector één, twee of drie vectorcomponenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De getalcomponenten of kortweg componenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten $x$,$y$ en $z$. Dat zijn scalaire grootheden, omdat ze een getalcomponent en een eenheid bevatten.

**Definition 1.** De positie van een puntmassa $A$ wordt vectorieel beschreven met de **plaatsvector** $\vec{r}$. Het is de vector die van de oorsprong wijst naar het punt waar de massa zich bevindt. Een plaatsvector $\vec{r}$ kan ontbonden worden volgens de assen:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

Hierin is $co(A) = (x, y)$ de coördinaat van het punt en zijn $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ eenheidsvectoren volgens de assen.




Figuur 14: De plaatsvector $\vec{r}$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De componenten ervan hangen dus af van de tijd. Elke coördinaatfunctie geeft voor elk moment $t$ de coördinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentfuncties samen beschrijven op een equivalente manier de volledige beweging van de puntmassa.

De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(\mathrm{t})$ geeft voor elk tijdstip $t$ de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

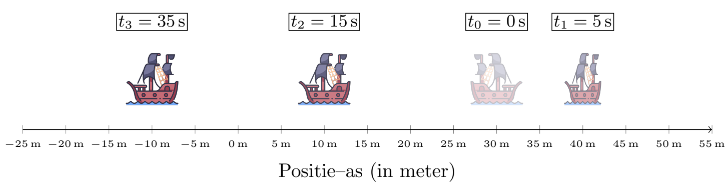
dergelijke vectorfunctie ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$.

Bij eendimensionale bewegingen is er slechts één as nodig om de beweging te beschrijven. Het is dan handig om met de componenten te werken, die tijdsafhankelijk kunnen zijn.[6]

De positie op een welbepaald tijdstip $t_1$ wordt genoteerd als [7]

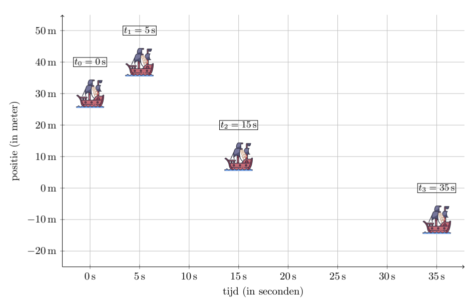
$$x_1 = x(t_1).$$

In onderstaande figuur zie je de rechtlijnige tocht van een zeilschip. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het schip zich bevindt.




Figuur 15: De positie van de zeilboot voor elke tijd $t$

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[8] In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ op de positie $40\,\mathrm{m}$, dus $x_1 = 40\,\mathrm{m}$. De startpositie van de zeilboot $x_0$ is gelijk aan $30\,\mathrm{m}$, want voor $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ geldt $x(0) = 30\,\mathrm{m}$. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.




[6]In fysica gebruiken we wiskunde als ‘taal’ om de wetmatigheden van de natuur uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool $x$, maar het symbool $t$. En voor het symbool $f$ gebruiken wij nu het symbool $x$ omdat die de beeldwaarden zijn van de functie $f$, $x$ is afhankelijk van $t$.

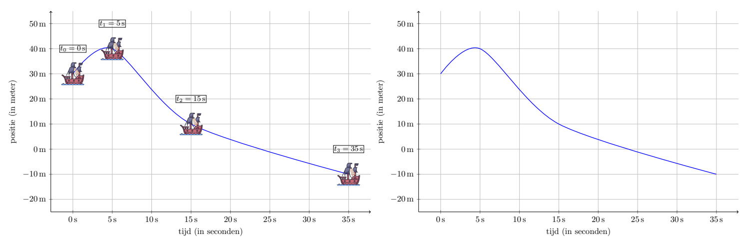
[7]Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices. Voorbeelden zijn $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

[8]Einstein gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

Figuur 16: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as en de positie op de verticale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Dan verandert de positie volgens de positie-as natuurlijk niet, maar het blad beweegt zich wel voort op de tijd-as. [9]

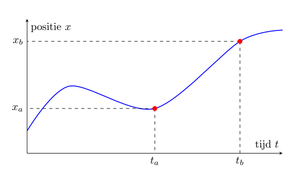
De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten $t_0, t_1, t_2, t_3$ en $t_4$. De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie ...




Figuur 17: De plaatsfunctie van de zeilboot voor elke $t \in [0, 35]$

**Definition 2.** De plaatsfunctie $x(t)$ geeft voor elk moment $t$ de component $x$ van de positie van het voorwerp. $x(t)$ geeft de plaatsfunctie die je kan uitzetten in een grafiek met verticale $x$-as en horizontale $t$-as. De positie op een welbepaald tijdstip $t_a$ wordt genoteerd als

$$x_a = x(t_a)$$




Figuur 18: De grafiek van een plaatsfunctie $x(t)$

De **verplaatsing** tussen $t_1$ en $t_2$ is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen $t_1$ en $t_2$, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

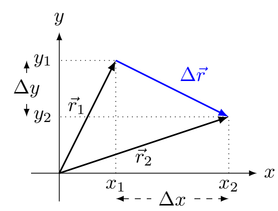
[9] Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[10]

[10] Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[11]

[11] Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.

**Definition 3.** De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

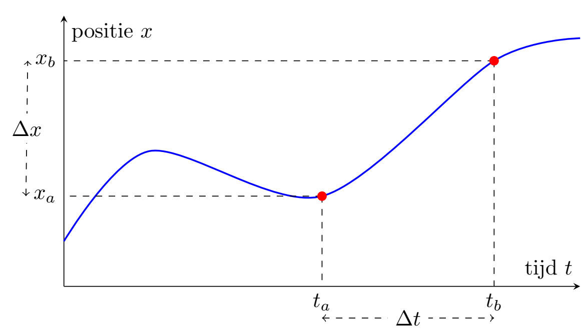
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$




Zoals aangegeven in de figuur kan ook de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ ontbonden worden.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\\ &= (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y)\\ &= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y\\ &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen $t_0$ en $t_1$ is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 40\,\text{m} - 30\,\text{m} = 10\,\text{m}$. Tussen $t_2$ en $t_3$ is de verplaatsing gelijk aan $\Delta x = x_3 - x_2 = -10\,\text{m} - 10\,\text{m} = -20\,\text{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:




Figuur 19: De verplaatsing op de plaatsfunctie

**Quick Question 22** *Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duid deze verplaatsing aan op de grafiek.*

Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging.

Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,...). Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar $t$ en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.

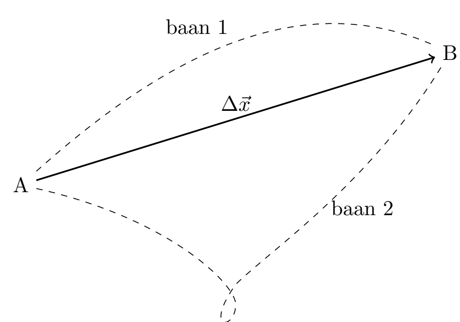
**Example 4.** De positie van puntmassa $A$ in het $xy$-vlak wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = -t^2 - 3t \end{cases}$$

Een rechtstreekse berekening levert $x = t^7 \Rightarrow t = \sqrt[7]{x}$. Dit substitueren in het voorschrift $y(t)$ geeft de baanvergelijking $y(x)$:

$$y = -t^2 - 3t \Rightarrow y(x) = -(\sqrt[7]{x})^2 - 3\sqrt[7]{x}$$

Let op: de *verplaatsing* is niet hetzelfde als de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar je hebt wel degelijk afstand afgelegd. De verplaatsing geeft enkel het verschil (in vogelvlucht) tussen begin- en eindpunt, terwijl de afgelegde weg $s$ gaat over de afstand die het bewegende voorwerp over zijn baan aflegt.




Figuur 20: Verplaatsing en afgelegde weg

# De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid, hoe groter de verplaatsing in een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan 30 km/h, leg je op één uur tijd 30 km af. Als je wandelt aan 5 km/h, leg je op één uur tijd slechts 5 km af. De snelheid van een voorwerp kan volledig bepaald worden met behulp van de plaatsfunctie. Een voorwerp heeft immers snelheid als de plaats of positie verandert.

We behandelen eerst de snelheid in één dimensie. Daarna kijken we naar de snelheid in twee dimensies, die wordt opgebouwd als samenstelling van twee (eendimensionale) snelheidscomponenten.

## Snelheid bij eendimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

**Definition 4.** In één dimensie wordt de gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen gedefinieerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen $t_1$ en $t_2$ gelijk aan $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$. Deze gemiddelde snelheid is negatief, wat betekent dat de zeilboot tegen de zin van de referentie-as is bewogen.

**Quick Question 23** *Hoe je op de plaatsgrafiek van de zeilboot de gemiddelde snelheid tussen $t_1$ en $t_2$ aanduiden?*

## Ogenblikkelijke snelheid bij eendimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities $x_1$ en $x_2$. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip $t$ een positie $x$ toe aan een puntmassa. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment $t$, één ogenblik,

Author(s): Bart Lambregs,Vincent Gellens

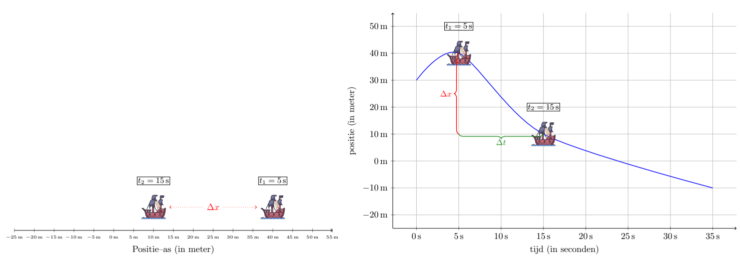
is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn . . . ! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

**Denkvraag 24** *Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul.* ***Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?***

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn, maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[12] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen, maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de nieuwe snelheid te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ te kennen, lijkt het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen $t_1$ en $t_2$ die hierboven werd berekent. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$$



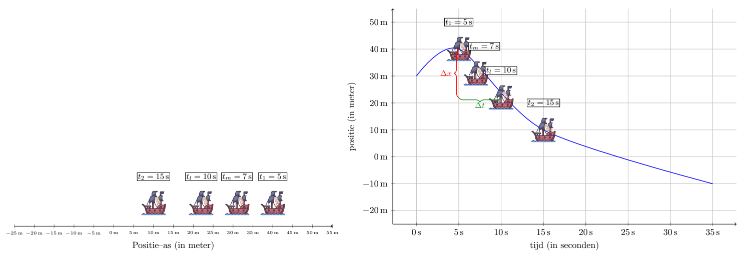

Figuur 21: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_3 = 15$

Indien niet met $t_2 = 15\,\mathrm{m}$ de gemiddelde snelheid wordt berekent, maar bijvoorbeeld met $t_l = 10\,\mathrm{s}$, zal deze gemiddelde snelheid vermoedelijk beter de ogenblikkelijke snelheid op $t_1$ benaderen.

Op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot naar $t_1$. De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \dfrac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is vermoedelijk een *betere* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op $t_1$. Maar het is nog steeds een gemiddelde snelheid!

[12] Die je hebt moeten ingeven. . .

Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor $t_m = 7$ wordt de benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op $t_1$ nog beter... Op de grafiek komen de twee schepen nu wel erg dicht bij elkaar...




Figuur 22: De gemiddelde snelheid voor $t_1 = 5$ en $t_l = 10$

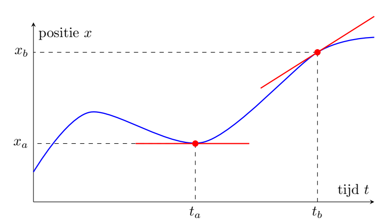
De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. De ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

**Definition 5.** De **ogenblikkelijke snelheid** in één dimensie is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment $t$ de snelheid $v$.

Grafisch kan je de afgeleide interpreteren als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, $x$ in functie van $t$) vind je de snelheid als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

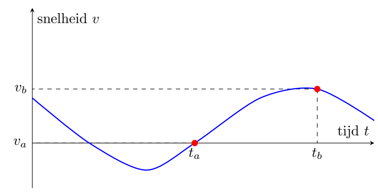



Figuur 23: De snelheid als richtingscoëfficiënt aan de raaklijn

**Definition 6.** De snelheidsfunctie $v(t)$ geeft de component van de snelheid in functie van de tijd.De snelheid op een welbepaald tijdstip $t_a$ wordt genoteerd als

$$v_a = v(t_a).$$

In een grafiek van de functie wordt op de horizontale as de tijd weergegeven en op de verticale de snelheidscomponent.




Figuur 24: Een snelheidsfunctie voor een ééndimensionale beweging.

**Remark 4.** Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds de ogenblikkelijke snelheid.

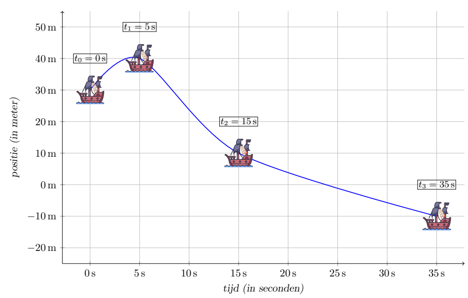
**Oefening 25** *Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van de zeilboot. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:*

**Vraag 25.1** *Waar is de snelheid 0?*

**Vraag 25.2** *Waar heeft de zeilboot een positieve snelheid?*

**Vraag 25.3** *Waar is de snelheid negatief?*

**Vraag 25.4** *Op welk moment beweegt de zeilboot het snelst?*




Figuur 25: De positie van de zeilboot met een tijd-as

## Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging op in loodrechte x- en y-componenten. Op die manier bekomt men gelijkaardige formules zoals in het 1D geval.

**Definition 7.** De **snelheidsvector** $\vec{v}$ van een lichaam wordt gedefinieerd als de afgeleide van de plaatsvector naar de tijd:

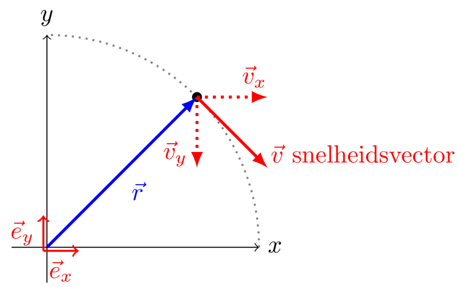
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplitst in snelheidscomponenten $v_x$ en $v_y$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y$$

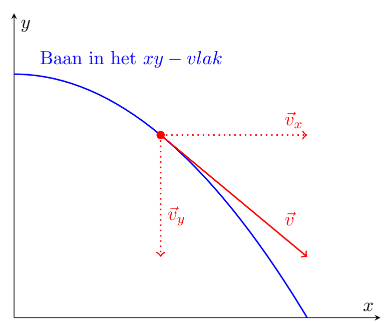
De grootte van de totale snelheid wordt genoteerd met het symbool $v$ en is gelijk aan

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$




Figuur 26: De snelheidsvector $\vec{v}$

**Theorem 1.** De snelheidsvector is altijd rakend aan de baan.




Figuur 27: De snelheidsvector is rakend aan de baan.

We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\dfrac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\dfrac{v_y}{v_x}$.

# De versnelling

Wanneer de snelheid van een voorwerpt verandert in de tijd, heeft het een *versnelling*. Een synoniem voor het woord versnelling is *acceleratie*, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid
$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheids*verandering*

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en beschrijft de bewegings*verandering*.

**Definition 8.** De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefinieerd als

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

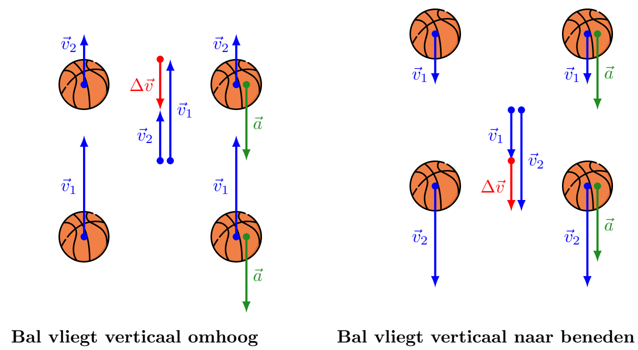
De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a]$ =m/s$^2$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

**Definition 9.** Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a_t}$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij eendimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

**Example 5.** Een verticaal omhoog geworpen basketbal versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen. De versnellingsvector staat evenwijdig met de snelheidsvector, dit volgt uit de constructie van $\Delta(\vec{v})$. Wegens de definitie van $\vec{a}$ staan $\vec(a)$ en $\Delta(\vec{v})$ altijd in dezelfde richting en zin.

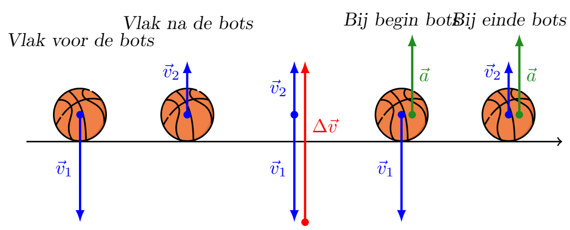
Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens




Figuur 28: Snelheid en versnelling bij een verticale worp

**Example 6.** Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van $3\,\mathrm{m/s^2}$. Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verandert (of in dit geval toeneemt).

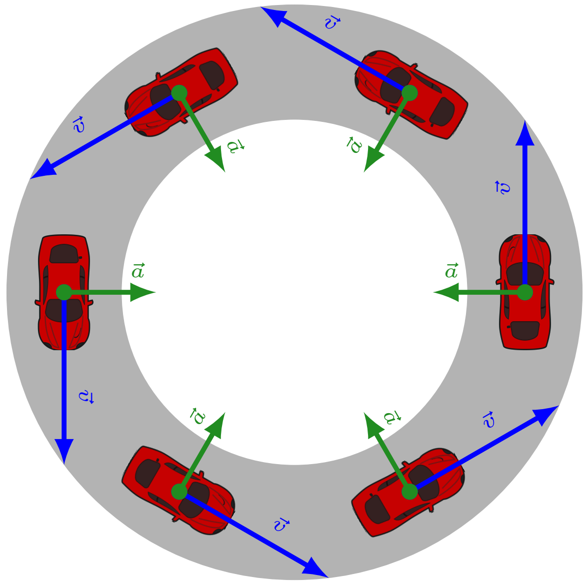
**Oefening 26 Vraag 26.1** *Als een basketbal botst op de grond verandert de snelheidsvector ook van zin. Maak een tekening met vectoren net voor en na de bots.*



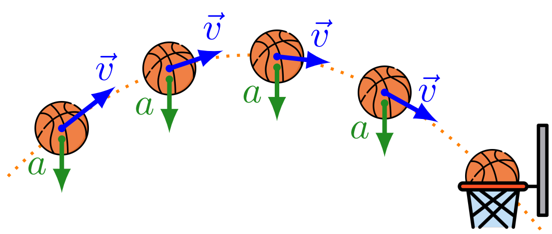

**Vraag 26.2** *Waarom is dit een tangentiële versnelling? De snelheidsvector is enkel in de grootte en zin gewijzigd.*

**Definition 10.** Als de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a_n}$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

**Example 7.** De auto in onderstaande afbeeldingen rijdt op een rotonde. De grootte van de snelheid is constant, maar de richting van de snelheid wijzigt. De auto ondergaat een normale versnelling.




**Remark 5.** Combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal.




## Gemiddelde versnelling bij eendimensionale bewegingen

**Definition 11.** Bij eendimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\overline{a}$ gedefinieerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

## Ogenblikkelijke versnelling bij eendimensionale bewegingen

De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen $t_1$ en $t_2$. Om de ogenblikkelijke versnelling $a$ op één tijdstip $t$ te bepalen wordt – net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid – gebruik gemaakt van de afgeleide.

**Definition 12.** De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de versnelling geeft.

## Ogenblikkelijke versnelling bij tweedimensionale bewegingen

In twee dimensies kan de snelheid naast een verandering van grootte ook een verandering van richting hebben. Om die te beschrijven is een vector het aangewezen object.

**Definition 13.** De **versnellingsvector** $\vec{a}$ van een lichaam wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsvector naar de tijd:

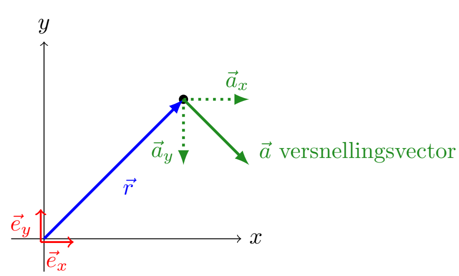
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplitst in versnellingscomponenten $a_x$ en $a_y$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

De grootte van de versnelling wordt genoteerd met het symbool $a$ en is gelijk aan

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$




Figuur 29: Een versnellingsvector $\vec{a}$

**Remark 6.** Het begrip versnelling in de fysica heeft niet dezelfde betekenis als hoe het begrip in de volksmond wordt gebruikt.

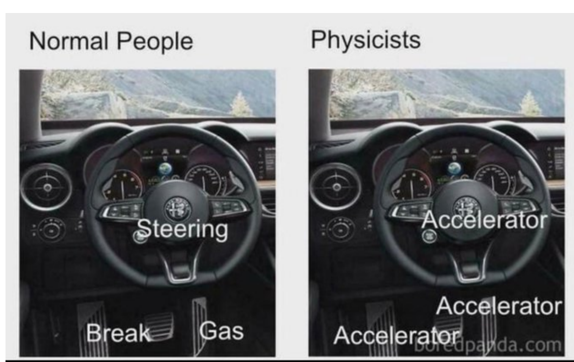
**In de volksmond** versnelling = vergroten van snelheid
vertraging = verkleinen van de snelheid
bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

**In de fysica** versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

De versnelling in de fysica is de grootheid $\vec{a}$ zoals die hierboven gedefinieerd is. We spreken van een vertraging wanneer de grootte van de snelheid afneemt. Dat kan voorkomen wanneer de snelheid (wat een vector is) en de versnelling (wat dus ook een vector is) een tegengestelde zin hebben. Hebben ze dezelfde zin, dan versnelt het voorwerp.

**Remark 7.** Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 $\mathrm{m/s^2}$. Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk "snelheid" geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: "vitesse" (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

**Oefening 27** *Verklaar onderstaande meme.*



# Oefeningen kinematica

**Oefening 28** *Kan de snelheid van een voorwerp gelijk zijn aan nul, terwijl de versnelling verschillend is van nul? Motiveer je antwoord.*

**Oefening 29** *Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook? Licht je antwoord toe.*

*Ja, dat kan. Neem bijvoorbeeld een voorwerp dat je verticaal omhoog gooit. Als je de referentieas waarmee je de beweging wil beschrijven verticaal naar benden kiest, zal de versnelling van de beweging positief zijn en de snelheid negatief. De snelheid is negatief omdat je tegengesteld aan de as beweegt en de versnelling is positief omdat de snelheid minder negatief wordt.*

*Het omgekeerde kan ook, draai gewoon de referentieas om.*

**Oefening 30** *Een puntmassa beweegt volgens de plaatsfunctie*

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 10t$$

*Bereken haar snelheidscomponent telkens als ze het vertrekpunt passeert. Hoe groot is dan de versnellingscomponent?* $x = t(t-5)(t+2)$

**Oefening 31** *Een veerman tracht een stromende rivier loodrecht over te roeien. Hij slaagt erin ten opzicht van het water een snelheid van* $2,00\,\mathrm{m/s}$ *te ontwikkelen – de stroomsnelheid is* $1{,}25\,\mathrm{m/s}$. *De rivier is* $150\,\mathrm{m}$ *breed.*

**Vraag 31.1** *Onder welke hoek ten opzichte van de loodlijn op de oever moet hij steeds blijven roeien? Er is gegeven dat*

- $v_1 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $v_2 = 1{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $d = 150\,\mathrm{m}$

*We berekenen de hoek* $\alpha$.

*De component, tegengesteld aan de stroomrichting, van de snelheid waarmee de veerman roeit ten opzichte van het water, moet even groot zijn als de stroomsnelheid zodat hij in de richting van de rivier resulterend geen snelheid zal hebben.*

*De hoek vinden we dan als volgt (zie figuur):*

Author(s): Bart Lambregs

$$\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = \text{bgsin}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 38,7^\circ$$

**Vraag 31.2** *Hoeveel tijd heeft de veerman nodig om de overzijde te bereiken?*

*De tijd nodig om de overzijde te bereiken vinden we door zijn snelheid loodrecht op de oever – zijn resulterende snelheid $v$ – te bekijken:*

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = 96,1\,\mathrm{s}$$

**Oefening 32** *De coördinaten van een deeltje zijn als functie van de tijd wordt gegeven door*

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases}$$

***Meerkeuze:***

(a) *Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de $x$-as.*

(b) *Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de $y$-as.*

(c) *Dan maakt de versnelling steeds een hoek van $45^\circ$ met de $x$-as.* ✓

(d) *Dan wordt het deeltje niet versneld*

**Oefening 33** *De positie van een deeltje als functie van de tijd wordt beschreven door*

$$\vec{r} = bt\vec{e}_x + (c - dt^2)\vec{e}_y$$

*met $b = 2,00\,\mathrm{m/s}$, $c = 5,00\,\mathrm{m}$ en $d = 1,00\,\mathrm{m/s^2}$.*

**Vraag 33.1** *Druk $y$ uit in functie van $x$. Hoe ziet de baan eruit?*

*We moeten dus de baanvergelijking geven. Dit doen we door de tijd uit te drukken i.f.v. de positie $x$ en dit te substitueren in de coördinaatvergelijking $y(t)$.*

$$x = bt \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{b}$$
$$\Downarrow$$
$$y = c - dt^2 = c - \frac{d}{b^2}x^2$$

*Dit is een bergparabool met top $(0, c) = (0, 5,00\,\mathrm{m})$.*

**Vraag 33.2** *Bepaal de snelheidsvector.*

*De componenten van de snelheid zijn:*

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -2dt$$

*zodat de snelheid(svector) wordt gegeven door*

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y\\ &= b\vec{e}_x - 2dt\vec{e}_y\end{aligned}$$

**Vraag 33.3** *Op welk tijdstip ($t > 0$) staat de snelheid loodrecht op de plaatsvector?*

*De rechte die de richting van de snelheid weergeeft, staat loodrecht op de rechte die de richting van de positievector weergeeft wanneer het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan $-1$:*

$$\begin{aligned}rc_r \cdot rc_v &= -1\\ &\Updownarrow\\ \frac{y}{x}\cdot\frac{v_y}{v_x} &= -1\\ &\Downarrow\\ \frac{c-dt^2}{bt}\cdot\frac{-2dt}{b} &= -1\\ &\Downarrow \quad (t>0)\\ t &= \sqrt{\frac{2cd-b^2}{2d^2}}\\ &= 1,73\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

**Oefening 34** *Een voorwerp maakt een beweging met volgende plaatscoördinaten:*

$$x = 8t^3, \qquad y = t^6 - 2,$$

*met $x, y$ in $\mathrm{m}$ en $t$ in $\mathrm{s}$.*

**Vraag 34.1** *Bepaal de verplaatsing tussen $t = 0\,\mathrm{s}$ en $t = 1\,\mathrm{s}$.*

**Vraag 34.2** *Bepaal de snelheidsvector en de versnellingsvector op tijdstip $t = 1\,\mathrm{s}$.*

**Vraag 34.3** *Is er op $t = 1\,\mathrm{s}$ een tangentiële versnelling, een normale versnelling, of beide? Licht kort toe welke componenten aanwezig zijn.*

**Vraag 34.4** *Bepaal de baanvergelijking (weg van $t$) van het projectiel: schrijf $y$ uit in functie van $x$.*

# Kinematica: ééndimensionale bewegingen

## Deel III

# Eendimensionale bewegingen

## Inleiding

Beweging beschrijven is niet zo simpel als het in eerste instantie lijkt. Zo is bijvoorbeeld de beweging van een wolk eerder complex. Wat reken je al dan niet tot de wolk? Ook de bewegingen van de afzonderlijke moleculen in kaart brengen is een onmogelijke opgave omdat het aantal moleculen eerder groot is. Om toch vooruitgang te kunnen boeken, beginnen we met voorwerpen die we als een punt kunnen voorstellen. We maken dan abstractie van de ruimtelijke vorm van het object dat we beschrijven en doen alsof we het kunnen reduceren tot één enkele plaats in de ruimte. Zo zouden we het vliegen van een vlieg doorheen de kamer kunnen bekijken als een stipje. Het bewegen van de vleugels of de oriëntatie van de kop van de vlieg laten we dan buiten beschouwing. Ook deze beschrijving kunnen we inperken; we gaan in eerste instantie enkel bewegingen beschrijven die voor te stellen zijn op een rechte lijn. Dit noemen we eendimensionale bewegingen. Als we de beschrijving hiervan eenmaal kennen, kunnen we later dit met behulp van vectoren gemakkelijk uitbreiden naar een beschrijving van bewegingen in twee- of drie dimensies.

Om het ons gemakkelijk te maken, zullen we in dit hoofdstuk enkel werken met de getalcomponenten van de vectoren. Dat gaat omdat we steeds in één dimensie werken en de eenheidsvector dan steeds gelijk blijft. Als we $v_x$ kennen, vinden we direct de vectorcomponent volgens de $x$-as met $\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{e}_x$. Bovendien kunnen we de index $x$ ook weglaten. We weten dat het steeds over de $x$-as gaat. [13]

Author(s): Bart Lambregs

Author(s): Bart Lambregs

[13] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool $x$ maar het symbool $t$ omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool $f$ gebruiken wij nu het symbool $x$ omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een

coördinaatas hebben.

# Eenparige rechtlijnige beweging

Een eenvoudige beweging om te bestuderen is de *eenparig rechtlijnige beweging* (afgekort ERB). De snelheid van de beweging is eenparig of gelijkmatig verdeeld wat betekent dat de snelheid steeds gelijk blijft. M.a.w. is de snelheid constant en dus de versnelling gelijk aan nul. Aangezien de snelheid niet verandert is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid. Met deze observatie kan je eenvoudig een functie opstellen voor de plaatsfunctie van deze beweging:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta x = v\Delta t \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 = v(t - t_0) \\ &\Leftrightarrow \quad x = x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$

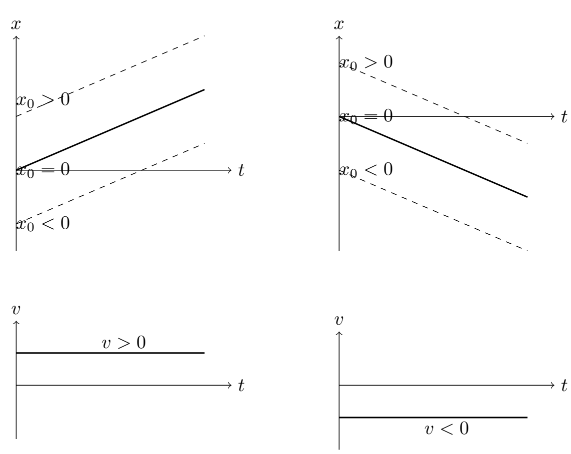
**Theorem 2.** De plaatsfunctie $x(t)$ van een ERB met snelheid $v$ is gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

waarbij $x_0 = x(t_0)$ de coördinaat op het tijdstip $t_0$ is. Als $t_0 = 0$ dan vereenvoudigt de plaatsfunctie tot

$$x(t) = x_0 + vt \tag{1}$$

De snelheid $v$ is gelijk aan de beginsnelheid $v_0 = v(t_0)$ omdat in een ERB de snelheid constant is. De snelheidsfunctie is $v(t) = v$ en de versnellingsfunctie is $a(t) = 0$.




Figuur 30: Grafieken van een ERB

Author(s): Bart Lambregs

# Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De ééndimensionale beweging met een constante versnelling wordt de *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* genoemd (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; bij een constante versnelling is de *verandering* van de snelheid steeds gelijk. De grafiek van $a(t) = a$ is een constante met $a$ een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Voor een constante versnelling is de snelheid in functie van de tijd een lineaire functie (in de tijd).

**Remark 8.** Strikt genomen wordt hier iets over het hoofd gezien. A priori zou het immers kunnen dat er nog andere functies dan lineaire functies zijn waarvoor de afgeleide een constante functie is. Dat is echter niet het geval. Het bewijs hiervan zie je later dit jaar in het vak wiskunde. Je bewijst dat alle mogelijke functies die in aanmerking komen slechts op een constante na aan elkaar gelijk zijn.

Uit het snelheidsverloop kan je de plaats afleiden. De snelheid is de afgeleide van de plaatsfunctie. Voor een lineaire snelheidsfunctie is de positie bijgevolg een kwadratische functie (in de tijd). De afgeleide van een kwadratische functie is immers een lineaire functie.[14]

Dat de positie in functie van de tijd een tweedegraadsveeltermfunctie is, geeft in symbolen:

$$x(t) = pt^2 + qt + r$$

De constanten $p$, $q$ en $r$ is deze formule hebben een fysische betekenis. De snelheid is de afgeleide van deze plaatsfunctie en de versnelling komt overeen met de tweede afgeleide. Dit levert:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2pt + q$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2p$$

Voor de EVRB is de versnelling constant en bijgevolg volgt uit de laatste regel dat $a(t) = a = 2p \Leftrightarrow p = \dfrac{a}{2}$.

Author(s): Bart Lambregs

[14] Hier geldt een gelijkaardige opmerking.

Noteer met $v_0 = v(0)$ de snelheid op tijdstip $t = 0$. In de eerste vergelijking $t = 0$ invullen levert dan $q = v_0$. De constante $q$ stelt de beginsnelheid voor.

Noteer met $x_0 = x(0)$ de positie op tijdstip $t = 0$. In de plaatsfunctie $t = 0$ invullen levert dan $r = x_0$. De constante $r$ stelt dus de beginpositie voor.

**Theorem 3.** De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling $a$ worden gegeven door:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

Hierin is $x_0$ de *beginpositie* en $v_0$ de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip $t_0$, dan wordt in de beschrijving $t$ vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip $t_0$. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

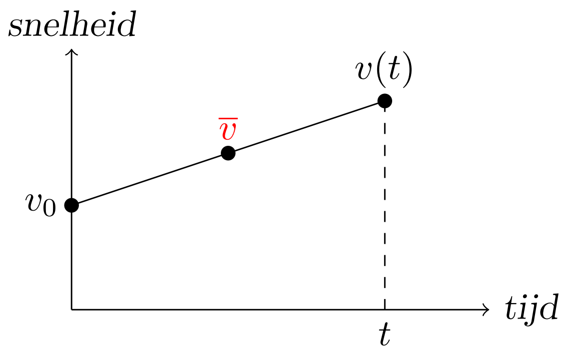
Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:

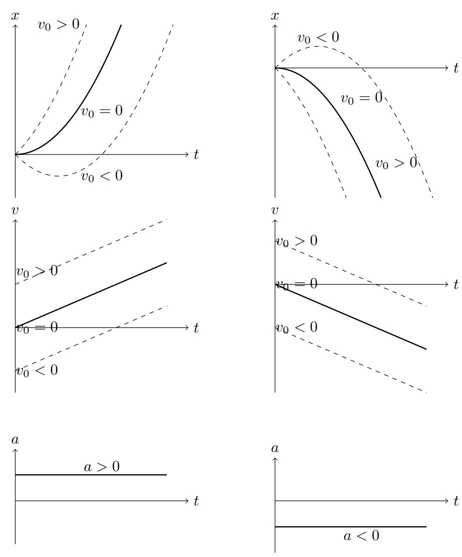
$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

**Oefening 35** *Bewijs bovenstaande formule.*

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{2v_0 + v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

*bij een EVRB kan je dus het rekenkundig gemiddelde gebruiken om de gemiddelde snelheid te berekenen. In onderstaande figuur is $\overline{v}$ grafisch weergegeven als het midden van de lineaire snelheidsfunctie.*




Figuur 31: Grafieken van de EVRB

**Oefening 36** *Een auto die* 60 km/h *rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na* 70 cm *tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in $g$, waarbij $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.* *Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een uitdrukking vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.*[15] *Uit*

[15] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...

*$v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:*

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

*Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

*De versnelling is dan gelijk aan:*

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

*Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, wat gelijk is aan $20g$.*

# Oplossingsstrategie

Vraagstukken in de kinematica kan je vaak op dezelfde manier banaderen. Elke opgave blijft echter anders, creativiteit is dus noodzakelijk.

(a) Lees het vraagstuk aandachtig. Zorg dat je duidelijk weet wat er gevraagd wordt.

- als je correct de snelheid op $t_3$ berekent maar de snelheid op $t_2$ was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- als je correct de postitie op $t_1$ berekent maar de positie op $t_0$ was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- ...

(b) Kies het systeem (object, lichaam, massa, geheel van lichamen) waarvan je een onbekende posititie, snelheid of versnelling wilt berekenen.

(c) Maak een tekening van dit systeem. Teken een coördinaatsas.

(d) Bepaal de gegevens uit het vraagstuk. Welke heb je nodig om de oplossing te bepalen?

(e) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor positie, snelheid en versnelling om het gevraagde te berekenen.

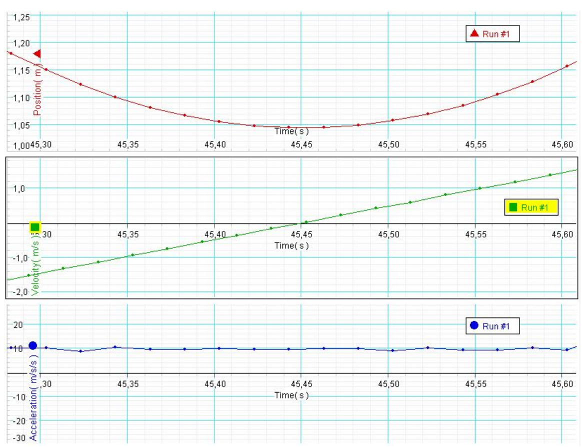
(f) Heeft je oplossing de juiste eenheiden en grootteorde? De snelheid van een tennisbal in de eenheid $\frac{s}{m^2}$ is waarschijnlijk fout. Als het enkele minuten duurt voordat de bowlingbal de kegels raakt, heb je waarschijnlijk ergens een (reken)fout gemaakt ...

Author(s): Bart Lambregs

# Verticale worp

In het jaar 1586 stond een wetenschapper uit Brugge op de Nieuwe Kerk van Delft . Onze perceptie leert dat zwaardere lichamen sneller vallen dan lichtere. Een pluim en een steen komen in regel niet op hetzelfde moment op de grond terecht. Toch blijkt deze intuitie niet te kloppen. Simon Stevin liet vanop de kerktoren twee loden bollen met een verschillend gewicht vallen en stelde vast dat ze op hetzelfde moment de grond raakten.

In vacuüm – waar voorwerpen geen luchtweerstand ondervinden – blijkt de massa geen rol te spelen bij de constante versnelling die de voorwerpen krijgen: alle voorwerpen vallen met dezelfde versnelling! Met lode bollen kon Simon Stevin dit effect uitschakelen. De theoretische verklaring voor dit experiment hoort thuis in de dynamica. In de kinematica wordt enkel de beweging beschreven. Omdat de valversnelling constant is, heb je hier simpelweg met een EVRB te maken.




Figuur 32: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp waarbij de as naar beneden is georiënteerd.

Strikt genomen verschilt de valversnelling van plaats tot plaats op de aarde, maar voor het gemak nemen wij in vraagstukken de waarde

$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}.$$

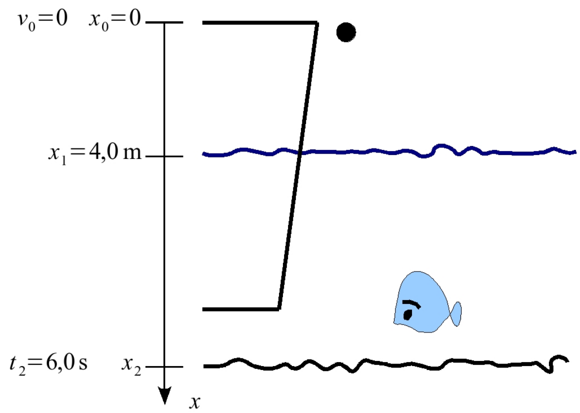
Omdat de verticale worp een EVRB is, kunnen we de formules (**??**) en (**??**) gebruiken om een valbeweging te beschrijven. Voor de versnelling $a$ nemen we dan $a = g$ of $a = -g$ al naargelang de oriëntatie van de coördinaatas.

Author(s): Bart Lambregs

**Quick Question 37** *Als je een tennisbal in de lucht gooit, op welk(e) moment(en) is de versnelling $0$? Op welk(e) moment(en) is de snelheid $0$?*

**Quick Question 38** *Leg de fysische betekenis uit indien de richting van de snelheidsvector en versnellingsvector tegengesteld zijn. Wat indien ze dezelfde richting hebben?*

**Oefening 39** *Simon Stevin laat van de boord van een schip een loden bol in het water vallen. De boord bevindt zich $4,0\,\mathrm{m}$ boven het wateroppervlak. De loden bol zinkt vervolgens met de snelheid waarmee hij het water raakte. Er zijn $6,0\,\mathrm{s}$ tussen het tijdstip waarop de bol valt en ze de bodem van het water bereikt.*




**Vraag 39.1** *Hoe diep is het water?*

**Vraag 39.2** *Wat is de gemiddelde snelheid van de bol over het hele traject?*

*De beweging is opgebouwd uit twee verschillende soorten bewegingen. Het eerste stuk is een vrije val, wat een EVRB is. In het tweede stuk (onder water) is de snelheid constant en is er dus geen versnelling. In geen geval kunnen we dus de formules voor een EVRB op het geheel toepassen. Die zijn immers afgeleid voor een beweging waar de versnelling (altijd, gedurende de hele beweging) constant is.*

*Omdat we weten hoe ver de bol moet vallen voordat hij het wateroppervlak bereikt, kunnen we zowel de tijd die de bol hiervoor nodig heeft als de snelheid waarmee de bol het wateroppervlak raakt, bepalen. We kiezen een as naar beneden zodat – omdat de snelheid in deze richting toeneemt – de versnelling positief is en gelijk aan de valversnelling $g$ (toch voor het eerste stuk). De beginsnelheid van de bol is nul omdat hij vanuit rust wordt losgelaten. Voor de tijd vinden we:*

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}}$$

*Met de tijd*[16] *kunnen we de snelheid op het wateroppervlak vinden.*

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{2gx_1}$$

*Onder water, in het tweede stuk, beweegt de kogel met deze snelheid gedurende de resterende tijd:* $6,0$ *seconden min de tijd* $t_1$ *(??) die de kogel nodig had om te vallen. De afstand die de bol onder water aflegt, vinden we met de eenvoudige formuletjes van een ERB*[17]*. We substitueren ook vergelijkingen (??) en (??).*

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & \overline{v} \cdot \Delta t \\ & \Downarrow & \\ x_2 - x_1 & = & v_1(t_2 - t_1) \\ & = & \sqrt{2gx_1}(t_2 - \sqrt{\frac{2x_1}{g}}) \\ & = & \sqrt{2gx_1}t_2 - 2x_1 \\ & = & 45\,\mathrm{m} \end{array}$$

*De gemiddelde snelheid vinden we door de totale afgelegde weg te delen door de totale benodigde tijd. Andere formuletjes zoals* $\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ *zijn niet van toepassing omdat het helemaal niet over één EVRB gaat waar dit formuletje geldt omdat de snelheid mooi lineair toeneemt. Hier gebeurt dat enkel in het eerste stuk en worden de verschillende snelheden niet even lang aangehouden zodat ze een verschillend aandeel hebben in de totale benodigde tijd.*

$$\begin{array}{rcl} \overline{v}_{02} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2}{t_2} & = & \frac{\sqrt{2gx_1}t_2 - x_1}{t_2} \\ & = & \sqrt{2gx_1} - \frac{x_1}{t_2} \\ & = & 8,2\,\mathrm{m/s} \end{array}$$

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o`

[16] We zouden de tijd met het gevonden formuletje kunnen uitrekenen en met het getalletje dat we vinden verder rekenen. Maar met het formuletje verder werken – algebraïsch of symbolisch – is toch o zo veel knapper en van toepassing voor álle boten en niet enkel voor een boot waarvoor het dek zich $4,0$ meter boven het wateroppervlak bevindt. Bovendien is het “echte” fysica omdat je een “model” uitwerkt en niet een rekensommetje oplost...

[17] Opmerking, een ERB is een speciaal geval van een EVRB. Een ERB heeft als constante versnelling $a = 0$.

# Oefeningen

De oefeningen zijn opgedeeld in denkvragen en vraagstukken. Zie daarvoor de hierbij horende onderdelen.

De denkvragen bevatten conceptuele oefeningen, oefeningen die zuiver op algebraïsche manipulaties focussen, grafische oefeningen, vragen die op theoretische aspecten ingaan …

Author(s): Bart Lambregs

# Denkvragen

**Oefening 40** *Als de grootte van de snelheid van een voorwerp toeneemt, neemt de versnelling dan noodzakelijkerwijs ook toe? Motiveer je antwoord.*

**Oefening 41** *Kan de gemiddelde snelheid van een deeltje over een gegeven tijdsinterval gelijk zijn aan nul, terwijl de grootte van de snelheid over een kortere tijdsduur binnen dat tijdsinterval verschillend is van nul? Verklaar je antwoord.*

**Oefening 42** *Geef een voorbeeld waarin zowel de snelheids- als de versnellingscomponent negatief zijn.*

**Oefening 43** *Wanneer een voorwerp zich met een constante snelheid verplaatst, verschilt de gemiddelde snelheid over een willekeurig tijdsinterval dan van de ogenblikkelijke snelheid op een willekeurig moment?*

**Oefening 44** *Een puntmassa voert een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging uit over het tijdsinterval* $[0\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}]$ *met beginsnelheid en beginpositie van respectievelijk* $0\,\mathrm{m/s}$ *en* $0\,\mathrm{m}$. *De versnelling is* $3\,\mathrm{m/s^2}$. *Waarom kan je onmiddellijk stellen dat als in het tijdsinterval de tijd half om is, de puntmassa nog niet halfweg is?*

**Vraag 44.1** *Leg in woorden uit op welke manier je onmiddellijk kan inzien dat het te bewijzen juist is.*

**Vraag 44.2** *Controleer het te bewijzen via de numerieke waarden van dit vraagstuk.*

**Vraag 44.3** *Geef nu het bewijs.*

**Oefening 45** *Een massa vertrekt vanuit rust om een eenparig versnelde rechtlijnige beweging uit te voeren. Als haar beginpositie* $0\,\mathrm{m}$ *is, welke van de volgende betrekkingen is dan juist?*

***Meerkeuze:***

(a) $t = \dfrac{x}{2v}$

(b) $t = \dfrac{2x}{v}$ ✓

---

Author(s): Bart Lambregs

(c) $t = \dfrac{v}{2x}$

(d) $t = \dfrac{2v}{x}$

**Oefening 46** *De snelheid van een lichaam dat vanuit rust vrij valt, bedraagt na een valafstand $x$:*

***Meerkeuze:***

(a) $v = 2gx$

(b) $v = \sqrt{2gx}$ ✓

(c) $v = gx$

(d) $v = \sqrt{\dfrac{gx}{2}}$

$v = gt = g\sqrt{\dfrac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$

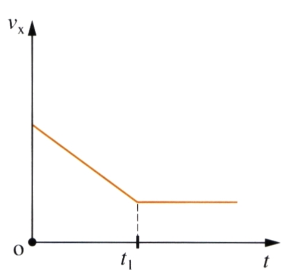
**Oefening 47** *Laat zien dat voor een EVRB volgende formule geldt:*

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

*Uit $v = v_0 + at$ volgt:*

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 \\ &= v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2) \\ &= v_0^2 + 2ax \end{aligned}$$

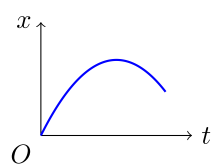
**Oefening 48** *Teken de overeenkomstige $x(t)$- en $a(t)$-grafiek bij de gegeven $v(t)$-grafiek. Ga ervan uit dat $x_0 = 0\,\mathrm{m}$.*

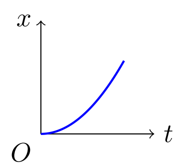


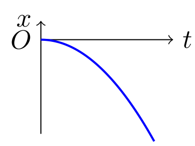
**Oefening 49** *De snelheid van een deeltje voldoet aan $v = at$ waarin $a$ constant en negatief is. De plaats van het deeltje wordt voorgesteld door $x$. Aangenomen wordt dat $x = 0\,\mathrm{m}$ op het ogenblik $t = 0\,\mathrm{s}$.*

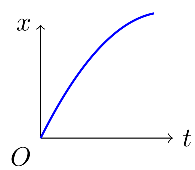
*Welke grafiek geeft het juiste verloop van $x(t)$?*

***Meerkeuze:***

(a) 


(b) 


(c)  ✓


(d) 


**Oefening 50** *Beargumenteer het gebruik van het model van een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB) voor de vrije beweging van een wagentje op een helling. Denk daarbij aan een proefneming die we in de klas deden. De notie kracht moet je hier even buiten beschouwing laten. Beschrijf hierbij de beweging van het wagentje en de bijbehorende grafieken van $x(t), v(v)$ en $a(t)$ Het model beschrijft de meetgegevens accuraat.*

*M.a.w. zijn de meetgegevens van de positie van het wagentje op de helling in functie van de tijd, gemeten met een (ultrasone) positiesensor, accuraat te beschrijven met de plaatsfunctie van een eenparig versnelde beweging.*

*Toelichting. De vraag gaat over de relatie tussen de theorie en de realiteit. Het is maar door metingen te doen dat we kunnen nagaan of gevolgen van de theorie (in dit geval bijvoorbeeld dat de positie kwadratisch in de tijd verloopt voor een beweging met constante versnelling) overeenkomen met de realiteit. In* *het gegeven geval van een wagentje op een helling, is bijvoorbeeld een model van constante snelheid niet van toepassing. Het zou immers impliceren dat het wagentje niet van zin kan veranderen. Dat laatste wordt door metingen of waarnemingen weerlegd.*

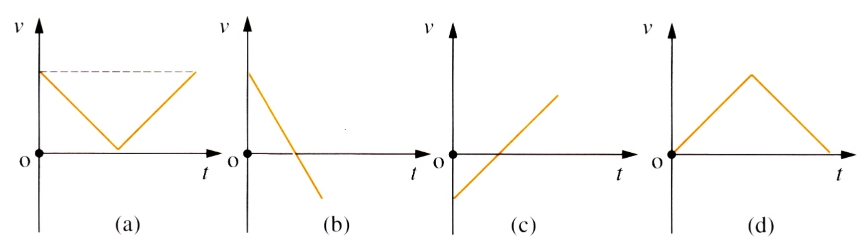
*We spreken over een* falsifieerbaar *model. Dat betekent dat zolang het niet weerlegd wordt, het geldig blijft. Je kan het alleen 'vals' maken door een situatie te tonen waarin het* niet *werkt.*

**Oefening 51** *Kan de bewegingszin van een voorwerp omkeren terwijl de versnelling gelijk blijft? Zo ja, geef dan een voorbeeld. Zo nee, leg uit waarom dat niet kan.* *Ja, dat kan. Als je een bal opwerpt zal op het hoogste punt de bewegingszin omdraaien terwijl de versnelling gelijk blijft. We kunnen immers een verticale worp modelleren als een EVRB. Kiezen we de referentieas om de beweging te beschrijven omhoog, dan is de snelheid van de bal positief bij het naar boven bewegen en negatief wanneer hij naar beneden komt, terwijl de verandering van de snelheid in de tijd (de versnelling) systematisch gelijk is aan de negatieve valversnelling.*

**Oefening 52** *Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook?* *Ja, dat kan. Neem bijvoorbeeld een voorwerp dat je verticaal omhoog gooit. Als je de referentieas waarmee je de beweging wil beschrijven verticaal naar benden kiest, zal de versnelling van de beweging positief zijn en de snelheid negatief. De snelheid is negatief omdat je tegengesteld aan de as beweegt en de versnelling is positief omdat de snelheid minder negatief wordt.*

*Het omgekeerde kan ook, draai gewoon de referentieas om.*

**Oefening 53** *Een lichaam wordt verticaal omhoog geworpen. De referentieas is omhoog gericht. Welke van de volgende $v(t)$-diagrammen geeft dan het juiste verloop van de snelheid weer?*




*Het juist antwoord is (b). De versnelling is constant waardoor de snelheid lineair moet verlopen in de tijd. Aangezien de referentieas naar boven is gekozen, moet de snelheid in het naar boven bewegen positief zijn. Dat is het geval bij (b).*

**Oefening 54** *Vanaf een klif laat men vanop dezelfde hoogte twee identieke bollen vallen. Men laat de tweede bol één seconde later vallen dan de eerste. De luchtwrijving is* niet *te verwaarlozen. Dan*

***Meerkeuze:***

(a) *zal de tweede bol iets later dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(b) *zal de tweede bol iets vroeger dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(c) *zal de tweede bol exact één seconde na de eerste neerkomen.* ✓

(d) *kunnen we hieromtrent geen uitspraak doen bij gebrek aan gegevens.*

*Voor beide bollen is de omstandigheid waarin ze vallen gelijk.*

**Oefening 55** *Vanop een grote hoogte laat men achtereenvolgens twee stenen vallen met een tussentijd van 2 seconden. Op welke wijze verandert de afstand tussen beide stenen in de tijdsduur dat beide vallen? Geef een tijdsafhenkelijk voorschrift voor die afstand.* *De afstand verandert lineair in functie van de tijd:* $\Delta x(t) = gt_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt_0^2$ *(*$= \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$ *met* $t \geqslant t_0 = 2\,\mathrm{s}$*)*

**Oefening 56** *Aan de rand van een afgrond laat men een steen vallen. Op hetzelfde ogenblik werpt men een steen op. Zou het kunnen dat, als de afgrond diep genoeg is, beide stenen elkaar nog ontmoeten?*

*Aangezien de opgeworpen steen later (en zelfs hoger) begint met vallen en beide stenen eenzelfde versnelling hebben, kan op geen enkel moment de opgeworpen steen een grotere snelheid hebben dan de steen die wordt losgelaten. Dat laatste zou op het moment van inhalen nochtans op zijn minst het geval moeten zijn.*

*In formules moet gelden, met* $v_0$ *een negatieve beginsnelheid:*

$$\frac{1}{2}gt^2 \quad = \quad v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

*Dat is enkel het geval wanneer* $t = 0$*.*

**Oefening 57** *Op de maan is de valversnelling slechts een zesde van die op de aarde. Als een voorwerp op de maan verticaal omhoog wordt gegooid, hoeveel maal hoger komt het dan dan een voorwerp dat met dezelfde beginsnelheid vanaf de aarde wordt opgeworpen?*

*De tijd die het voorwerp nodig heeft om tot zijn hoogste punt (*$v = 0$*) te geraken, is* $t = -\frac{v_0}{a}$ *waarbij* $a$ *de negatieve versnelling op aarde of op de maan is. Met deze tijd en de gemiddelde snelheid gedurende de opwaartse beweging, kunnen we de bereikte hoogte uitdrukken in functie van de beginsnelheid* $v_0$*:*

$$x = \bar{v}t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) = -\frac{v_0^2}{2a}$$

*Uit deze uitdrukking volgt dat de bereikte hoogte omgekeerd evenredig is met de versnelling. Op de maan zal het voorwerp dan ook zes keer zo hoog geraken.*

# Vraagstukken

**Oefening 58** *Een automobilist rijdt op een rechte baan gedurende* $1{,}5\,\mathrm{h}$ *aan* $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *en daarna gedurende dezelfde tijdsduur aan* $70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *in dezelfde zin.*

(a) *Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

(b) *Met welke snelheid had hij moeten rijden om met een constante snelheid hetzelfde traject in dezelfde tijd af te leggen?*

**Oefening 59** *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de tijd houdt hij constant een snelheid* $v_1$ *aan, gedurende de tweede helft een snelheid* $v_2$*. Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

**Oefening 60** *Een automobilist legt* $120\,\mathrm{km}$ *af. De eerste helft van de weg legt hij af aan* $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*, de tweede helft aan* $120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*. Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

**Oefening 61** *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de af te leggen afstand houdt hij constant een snelheid* $v_1$ *aan, gedurende de tweede helft een snelheid* $v_2$*. Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

**Oefening 62** *Als je met de fiets heen en terug naar school rijdt en in het heengaan tegenwind en in het terugkeren rugwind hebt, compenseert dat dan mekaar precies?*

*Stel om dit op te lossen dat de weg rechtlijnig is. Bereken je gemiddelde snelheid over het traject heen en terug en vergelijk die met de snelheid die je zonder wind zou halen. Neem aan dat je normaal* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *zou fietsen, maar door de wind win of verlies je* $2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*.*

***Meerkeuze:***

(a) *Nee, je hebt netto een nadeel vanwege de tegenwind.* ✓

(b) *Nee, je hebt netto een voordeel vanwege de rugwind.*

(c) *Ja, de afstand heen is de afstand terug, dus het is net alsof je helemaal geen wind had.*

---

Author(s): Bart Lambregs

**Oefening 63** *Een bowlingbal die met een constante snelheid voortrolt, raakt de kegels aan het einde van een kegelbaan van* 16,5 m *lengte. De werper hoorde het geluid waarmee de bal op de kegels botst* 2,5 s *nadat hij de bal losliet. Welke snelheid had de bal? De snelheid van het geluid is* 343 m/s. $v_1 = \frac{x_1}{t_2 - \frac{x_1}{v_2}} =$ 6,73 m/s

**Oefening 64** *Een vliegtuig moet minstens een snelheid van* $108\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *hebben om te kunnen opstijgen. Indien de propellers aan het toestel een versnelling van* $1{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ *geven, hoe lang moet de startbaan dan minstens zijn? Doordat we de versnelling van het vliegtuig kennen en de snelheid die het moet bereiken, kunnen we de tijd die het vliegtuig hiervoor nodig heeft, gemakkelijke berekenen met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid van een EVRB:*

$$t = \frac{v}{a}$$

*De afstand die in deze tijd wordt afgelegd, kunnen we berekenen doordat we de gemiddelde snelheid kennen*[18]*:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \\ &= \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} \\ &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned}$$

*De startbaan moet dus minstens* 300 m *lang zijn.*

**Oefening 65** *Een trein rijdt aan een snelheid van* $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *en remt met een versnelling waarvan de grootte* $1{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ *bedraagt. Na hoeveel tijd komt de trein tot stilstand en welke afstand wordt er tijdens dit afremmen afgelegd?*

*Aangezien er per seconde een snelheid van* 1,0 m/s *van de beginsnelheid afgaat, vinden we de tijd die nodig is voor het remmen, door de beginsnelheid te delen door de versnelling. Dat is namelijk de tijd die nodig is voor de trein om tot stilstand te komen:*

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 + at &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= -\frac{v_0}{a} \end{aligned}$$

[18] De benodigde afstand kunnen we evenzeer berekenen met de formule $x = x_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$ door de tijd in te vullen.

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* 20 s. *De afgelegde afstand gedurende het remmen vinden we nu met de plaatsfunctie. We kennen de benodigde tijd, die we in de plaatsfunctie invullen.*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= v_0 \left( -\frac{v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} a \left( -\frac{v_0}{a} \right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegevens levert een remafstand van* 200 m.

*Een andere mogelijkheid om de remafstand te vinden is te werken met de gemiddelde snelheid,* $x = \overline{v} t$.

**Oefening 66** *Op een bevroren meer komt een glijdende hockeyschijf na* 200 m *tot stilstand. Als zijn initiële snelheid* 3,00 m/s *was, bepaal dan*

(a) *de versnelling in de veronderstelling dat deze constant is,*

(b) *de tijd die de schijf nodig heeft om tot stilstand te komen.*

$a = \frac{v_0^2}{2x} = 0,0225\,\mathrm{m/s^2}$; $t = \frac{2x}{v_0} = 133{,}33\,\mathrm{s}$

**Oefening 67** *Een bootje vaart met een snelheid van* $36{,}0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *een eerste tijdopnemer voorbij en drijft daarna eenparig zijn snelheid op. Na* 20,0 s *komt het voorbij een tweede tijdopnemer met een snelheid van* $90{,}0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Bereken de versnelling van het bootje en de afstand tussen beide tijdopnemers.* $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = 0,750\,\mathrm{m/s^2}$, $x - x_0 = \left( \frac{v_0 + v}{2} \right) (t - t_0) = 350\,\mathrm{m}$

**Oefening 68** *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* 3,0 km *een snelheid van* $450\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken de versnelling en de tijd, nodig om die* 3,0 km *af te leggen. Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. *De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \overline{v} \Delta t \\ &\Downarrow \\ t &= \frac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{2x}{v} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* 48 s. *Met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd erin te substitueren, en de beginsnelheid nul te nemen:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{v}{t} = \frac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ &= \frac{v^2}{2x} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van* $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

**Oefening 69** *Een auto begint te remmen als hij zich* 35 m *van een stilstaande hindernis bevindt. Zijn snelheid op dat moment is* $54\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Na* 4,0 s *botst hij tegen de hindernis. Bereken de snelheid waarmee hij de hindernis raakt en zijn constante versnelling gedurende de remweg.* *Uit de plaatsfunctie* $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ *kunnen we de versnelling halen:*

$$a = \frac{2x - 2v_0 t}{t^2} = -3{,}125\,\mathrm{m/s^2}$$

*Substitutie van de versnelling in de snelheidsfunctie levert:*

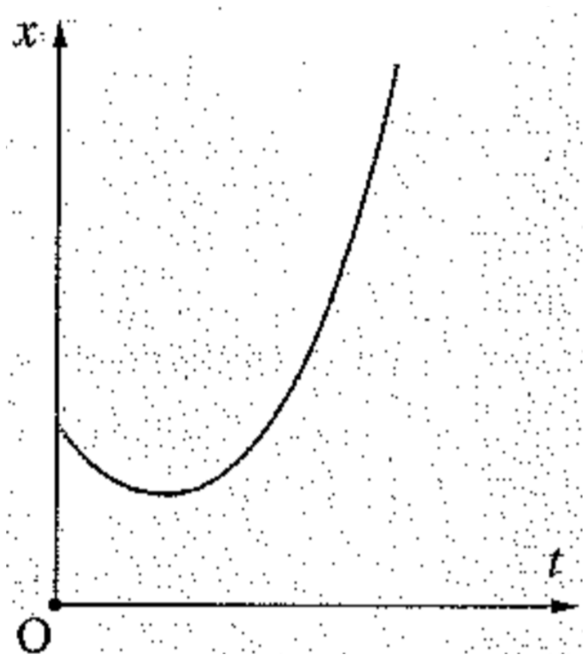
$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= v_0 + \left(\frac{2x - 2v_0 t}{t^2}\right) t \\ &= \frac{2x}{t} - v_0 \\ &= 2{,}5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

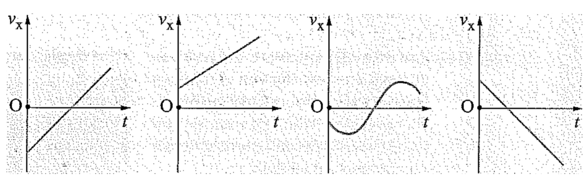
*Een andere (snellere) mogelijkheid om de snelheid te vinden is die te halen uit* $x = \frac{v_0 + v}{2} t$.

**Oefening 70** *Twee fietsers vertrekken gelijktijdig om een afstand van* 200 m *af te leggen. De eerste rijdt met een constante snelheid van* 4,0 m/s, *terwijl de tweede vertrekt met een snelheid van* 1,00 m/s *en de afstand van* 200 m *met een EVRB met een versnelling van* $0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ *aflegt. Waar zal de tweede fietser de eerste inhalen en wanneer?* $t = \frac{2(v_a - v_{b,0})}{a} = 30\,\mathrm{s}$, $x = v_a t = \frac{2v_a(v_a - v_{b,0})}{a} = 120\,\mathrm{m}$

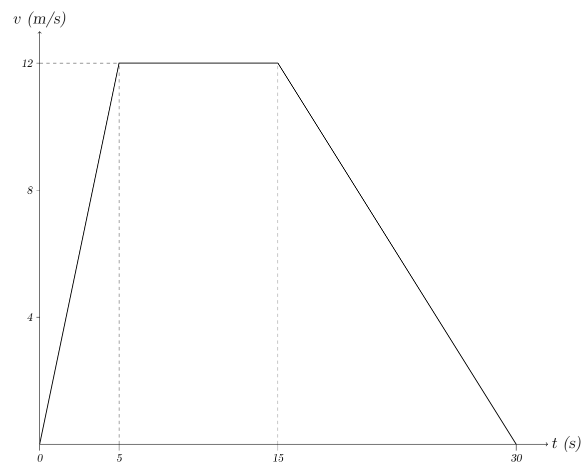
**Oefening 71** *Een trein vertrekt om 12u00 in het station a en rijdt naar het station b, op* 15 km *van a gelegen. De eerste* 1000 m *worden afgelegd met een EVRB en de verkregen snelheid is* $72\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. *Die snelheid blijft constant tot op* 250 m *van b. Hier begint de trein te vertragen. Om hoe laat komt de trein in station b toe? Maak de* $v(t)$*-grafiek.*

**Oefening 72** *Een deeltje beschrijft een eendimensionale beweging op de $x$-as. De positie als functie van de tijd is hiernaast weergegeven in een $x(t)$-diagram. Duid de onderstaande grafiek aan die het best het verloop weergeeft van de snelheidscomponent $v$ van dat deeltje als functie van de tijd.*




**Oefening 73** *Een deeltje beweegt in de zin van de $x$-as. De onderstaande grafiek geeft aan hoe de grootte van de snelheid verandert als functie van de tijd.*

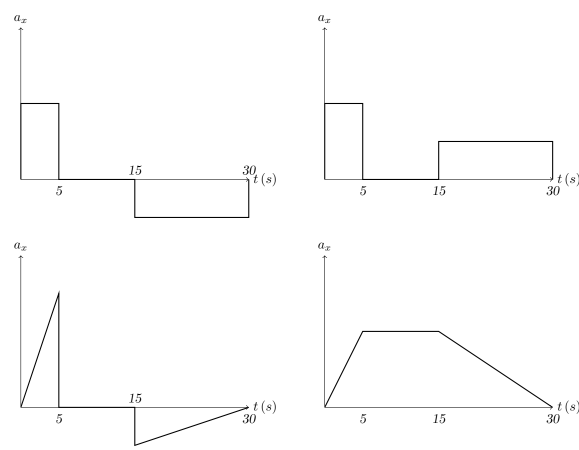



Figuur 33: snelheidsfunctie

**Vraag 73.1** *De afstand afgelegd na* 15 s *bedraagt:*

**Vraag 73.2** *Na* 30 s *heeft het deeltje een welbepaalde afstand afgelegd. Hoe groot zou de constante snelheid van het deeltje moeten zijn om in* 30 s *dezelfde afstand af te leggen?*

**Vraag 73.3** *Welke figuur geeft kwalitatief het verloop van de versnellingscompent van het deeltje weer?*




**Oefening 74** *(∗ ∗ ∗) Maggie en Jennifer lopen de* 100 m*. Beiden doen ze er exact* 10,2 s *over. Met een eenparige versnelling bereikt Maggie na* 2 s *haar maximale snelheid, Jennifer doet dat na* 3 s*. Hun maximale snelheden houden ze aan voor de rest van de wedstrijd.*

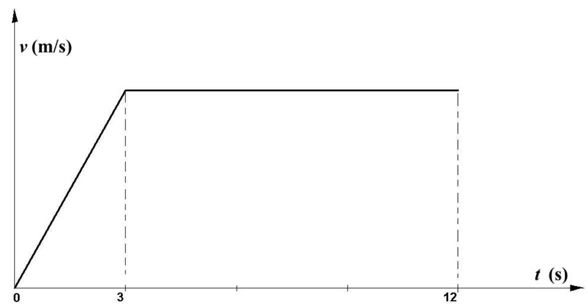
(a) *Wat zijn hun maximale snelheden?*

(b) *Wat is de versnelling van iedere sprinter?*

(c) *Wie heeft er voorsprong na* 6 s*, en hoeveel?*

$v_1 = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_1}$; $a = \dfrac{2x_2}{(2t_2 - t_1)t_1}$; $x_M - x_J = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,M}}(t - \dfrac{t_{1,M}}{2}) - \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,J}}(t - \dfrac{t_{1,J}}{2})$

*Snelheidsgrafiek van Jennifer:*




**Oefening 75** *Een auto die* $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *rijdt, ligt* $100\,\mathrm{m}$ *achter op een vrachtwagen die* $75\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *rijdt. Hoeveel tijd kost het de auto om de vrachtwagen in te halen?* $t = \dfrac{x_0}{v_a - v_v} = 24\,\mathrm{s}$

**Oefening 76** *De snelheid van een trein verandert eenparig in 2 minuten van* $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *tot* $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$*. De trein rijdt gedurende die tijd over een rechte spoorlijn.*

(a) *Bepaal de versnelling.*

(b) *Bepaal de afstand die de trein heeft afgelegd gedurende deze 2 minuten.*

**Oefening 77** *Een auto trekt in* 5,0 s *op van* 10 m/s *naar* 25 m/s*. Wat was de versnelling in de veronderstelling dat de auto een EVRB ondergaat? Welke afstand legde de auto in deze periode af?* $a = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} = 3\,\mathrm{m/s}$, $x - x_0 = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 87,5\,\mathrm{m}$

**Oefening 78** *Op een vliegdekschip worden vliegtuigen gekatapulteerd op een startbaan van* 25 m*. Een opstijgend vliegtuig doorloopt dat traject vanuit rust op* 1 s *tijd en dat op eenparig versnelde manier.*

*Zoek zijn versnelling en de snelheid waarmee het de baan verlaat.*

**Oefening 79** *Een auto trekt vanuit rust op tot* $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *in* $6{,}0\,\mathrm{s}$*. Als hij dat doet op een rechte baan met constante versnelling, welke afstand is er dan hiervoor nodig?* $a = \dfrac{v}{t} = 4,63\,\mathrm{m/s^2}$, $x = \dfrac{vt}{2} = 83,3\,\mathrm{m}$

**Oefening 80** *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* $3{,}0\,\mathrm{km}$ *een snelheid van* $450\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken de versnelling en de tijd, nodig om die* $3{,}0\,\mathrm{km}$ *af te leggen. Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$, $x_0 = 0$*. De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & \overline{v}\Delta t \\ & \Downarrow & \\ t & = & \dfrac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \dfrac{2x}{v} \end{array}$$

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* $48\,\mathrm{s}$*. Met het formuletje voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd te substitueren:*

$$\begin{array}{rcl} v & = & at \\ & \Updownarrow & \\ a & = & \dfrac{v}{t} = \dfrac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ & = & \dfrac{v^2}{2x} \end{array}$$

*Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van* $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$*.*

**Oefening 81** *Een vliegtuig landt met een snelheid van* $100\,\mathrm{m/s}$*. Op de landingsbaan heeft het een vertraging van* $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$*. Welke afstand heeft het vliegtuig nodig om tot stilstand te komen?*

**Oefening 82** *Een trein vertrekt uit een station en rijdt op een recht spoor met een eenparig versnelde beweging waarvan de versnelling* $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ *bedraagt. Hoe groot is de afstand die de trein heeft afgelegd als zijn snelheid* $72{,}0\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ *bedraagt?*

**Oefening 83** *Twee personen A en B voeren op dezelfde rechte en vanuit dezelfde beginstand een eenparige beweging uit. A vertrekt* $100\,\mathrm{s}$ *eerder dan B. Met een snelheid die dubbel zo groot is als die van A haalt B, op* $400\,\mathrm{m}$ *van het vertrekpunt, A in. Bereken beide snelheden en stel ze grafisch voor.*

**Oefening 84** *Aan het begin van een rechte landingsbaan, start een vliegtuig vanuit rust en versnelt met een constante versnelling langs de grond alvorens op* *te stijgen. Het legt* 600 m *af in* 12 s. *Bepaal de versnelling, de snelheid na* 12 s *en de afstand afgelegd gedurende de twaalfde seconde.*

$a = \dfrac{2x}{t^2} = 8{,}33\,\mathrm{m/s^2}$, $v = \dfrac{2x}{t} = 100\,\mathrm{m/s}$, $x(t = 12) - x(t = 11) = \dfrac{1}{2}a(t_{12}^2 - t_{11}^2) = 95{,}8\,\mathrm{m}$

# Vraagstukken vrije val

**Oefening 85** *Welke afstand wordt er door een bungeejumper na een vrije val van* 2,5 s *afgelegd?* $x = \dfrac{1}{2}gt^2 = 31\,\mathrm{m}$

**Oefening 86** *Uit een punt op* 28,0 m *boven de grond wordt een bal verticaal omhoog geworpen met een snelheid van* 12 m/s.

**Vraag 86.1** *Bepaal de door de bal bereikte hoogte boven de grond;* $v = 0 \Rightarrow x = x_0 + \dfrac{v_0^2}{2g} = 35{,}34\,\mathrm{m}$

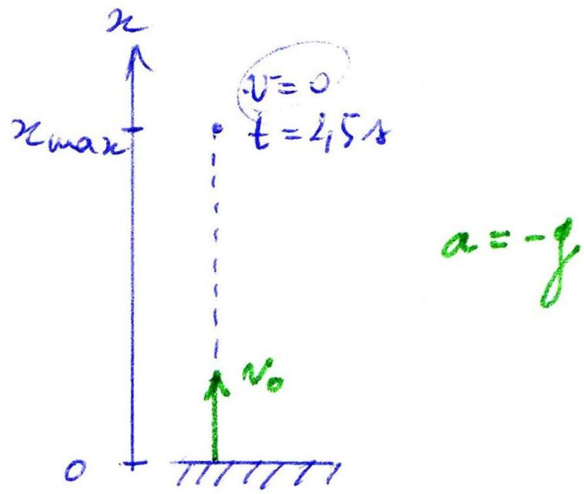
**Vraag 86.2** *Bepaal de tijd nodig om de grond te bereiken;* $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g} = 3{,}91\,\mathrm{s}$

**Vraag 86.3** *Bepaal de snelheid bij het bereiken van de grond.* $v = -\sqrt{v_0^2 + 2gx_0} = -26{,}33\,\mathrm{m/s}$

**Oefening 87** *Een pijl wordt verticaal van de grond omhooggeschoten en bereikt na* 2,8 s *het hoogste punt. Bepaal deze hoogte. Op het hoogste punt is de snelheid van de pijl nul. Aangezien we weten hoe lang hij onderweg is en de pijl per seconde* $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ *trager omhoog vliegt, kunnen we hieruit de beginsnelheid bepalen.*

*We kiezen de referentie-as met de oorsprong op de grond. De versnellingscomponent is dan het tegengestelde van de valversnelling,* $a = -g$.

Author(s): Bart Lambregs




*We krijgen:*

$$v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt$$

*Dat is in grootte gelijk aan* $27\,\mathrm{m/s}$*. Nu dat we ook de beginsnelheid kennen, vinden we de afgelegde afstand, wat ook de maximale hoogte is:*

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = (gt)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

*Vullen we de getalwaardes in, dan vinden we* $38\,\mathrm{m}$

*Merk op dat deze afstand gelijk is aan de afstand die de pijl vanuit rust zou afleggen bij een vrije val die* $2{,}8\,\mathrm{s}$ *duurt. Dat is niet heel verwonderlijk; de vertraging naar boven toe is namelijk gelijk aan de versnelling bij het vallen naar beneden. Wiskundig loopt de symmetrieas van een parabool door de top.*

**Oefening 88** *Een parachutist in vrije val bereikt een uiteindelijke valsnelheid van* $50\,\mathrm{m/s}$*. Neem aan dat een geopende parachute voor een constante vertraging van* $30\,\mathrm{m/s^2}$ *zorgt.*[19] *Wil er bij het neerkomen geen kans op letsel bestaan, dan mag de landingssnelheid niet groter dan* $5{,}0\,\mathrm{m/s}$ *zijn.*

*Wat is de minimumhoogte voor het openen van de parachute? Aangezien we de versnelling en begin- en eindsnelheid kennen, kunnen we de tijd die nodig is om de eindsnelheid te bereiken, berekenen:*

$$v = v_0 + at \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

[19] Dit is een heel ruwe benadering. In feite hangt de vertraging door de parachute namelijk af van de snelheid en is die afhankelijkheid bovendien voor grote snelheden sterker dan voor kleine.

*De afgelegde afstand is dan met de gemiddelde snelheid te berekenen:*

$$\begin{aligned} x &= \overline{v}t \\ &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} \\ &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= 41{,}25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

**Oefening 89** *Iemand laat een meloen vallen vanop een hoogte van* 20 m. *Op hetzelfde moment schiet je een pijl verticaal omhoog vanop de grond. De pijl treft de meloen na* 1,0 s.

(a) *Geef in één assenstelsel een verzorgde schets van de grafiek van de plaats in functie van de tijd voor beide objecten.*

(b) *Met welke snelheid heb je de pijl afgeschoten?*

*De plaatsfunctie van de meloen gelijkstellen aan die van de afgeschoten pijl, geeft (we kiezen de $y$-as omhoog waardoor de versnelling de negatieve valversnelling is):*

$$y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

*Oplossen naar $v_0$ geeft:* $v_0 = \frac{y_0}{t} = 20\,\mathrm{m/s}$.

**Oefening 90** *(∗∗∗) Wanneer de pelikaan naar vis duikt, trekt hij zijn vleugels in om als een steen verticaal naar beneden te vallen.*

*Stel een pelikaan duikt vanaf* 25 m *hoogte en verandert onderweg dus niet meer van koers. Als het een vis* 0,15 s *kost om te vluchten, wat is dan de hoogte waarop de vis de pelikaan minstens moet opmerken, wil de vis nog kans maken te ontsnappen?*

*Neem aan dat de vis zich aan het wateroppervlak bevindt.*

*We kiezen de referentie-as naar beneden, met de oorsprong op de positie waar de pelikaan begint aan zijn duik De versnelling is dan gelijk aan de valversnelling.*

*We kennen de afstand waarover de pelikaan valt zodat we de tijd die de pelikaan nodig heeft om het wateroppervlak te bereiken, de valtijd, kunnen berekenen uit $x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$:*

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x_2}{g}}$$

*De pelikaan heeft namelijk geen beginsnelheid.*

*Gedurende een tijd $t_1 = t_2 - \Delta t$ (15 honderdste van een seconde minder dan de valtijd) mag de pelikaan vallen zonder door de vis te worden opgemerkt. De afstand boven het wateroppervlak is dan:*

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ &= x_2 - \frac{1}{2} g \left(t_2 - \Delta t\right)^2 \\ &= 3{,}2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

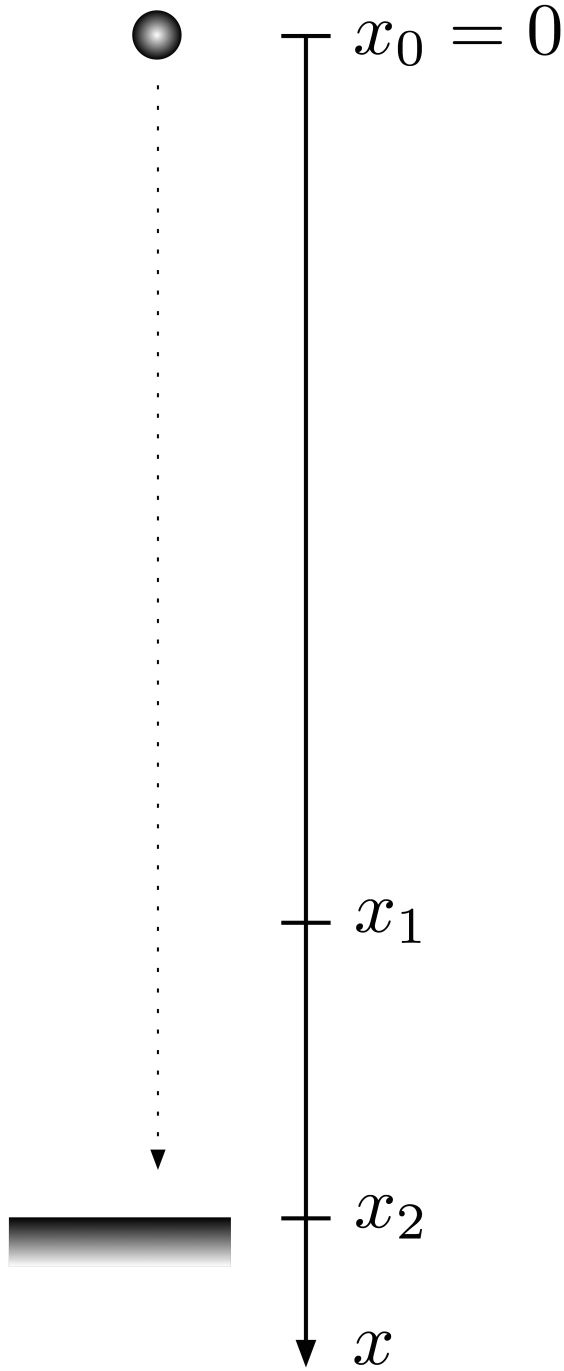
**Oefening 91** *($***$) Een verticaal vallende steen legt in de laatste seconde, voor hij de grond bereikt, $100\,\mathrm{m}$ af. Men veronderstelt dat hij vanuit rust vertrok.*

(a) *Bepaal de snelheid op het ogenblik dat hij de grond bereikt.*

(b) *Bepaal de hoogte vanwaar de steen viel en de tijd die hij daarvoor nodig had.*

*We kiezen de $x$-as naar beneden zodat de versnelling de valversnelling is, $a = g$. Als we $x_1$ beschouwen als de beginpositie van de beweging die de steen uitvoert in de laatste honderd meter, kunnen we de snelheid vinden waarmee de steen hieraan 'begint'.*

$$\begin{aligned} & \Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_1 = \frac{\Delta x - \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} \end{aligned}$$


$x_0 = 0$
$x_1$
$x_2$
$x$

*Met de formule voor de snelheid van een EVRB, vinden we de snelheid op het einde van het interval.*

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + g\Delta t \\ &= \frac{\Delta x - \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} + g\Delta t \\ &= \cdots \\ &= \overline{v} + g\frac{\Delta t}{2} \\ &= 105\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

*Je kan dit ook afleiden door gebruik te maken van de formule voor gemiddelde snelheid,* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

*Omdat we de snelheid kennen, kunnen we de tijd vinden die de steen nodig heeft gehad om aan deze snelheid te komen. Vervolgens vinden we dan ook de afstand.*

$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \frac{\overline{v}}{g} + \frac{\Delta t}{2} = 10{,}7\,\mathrm{s}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 561\,\mathrm{m}$$

**Oefening 92** *(∗ ∗ ∗) Van de Empire Stage Building in New York komt op* $250\,\mathrm{m}$ *een ijskegel los en valt naar beneden.*

(a) *Na hoeveel tijd en met welke snelheid bereikt het ijskegeltje uiteindelijk de grond?*

(b) *Hoelang en over welke afstand moet de ijskegel al gevallen zijn om in de daaropvolgende* $2\,\mathrm{s}$ *een afstand te kunnen afleggen van* $100\,\mathrm{m}$*?*

*Gegeven* $x_3 = 250\,\mathrm{m}$
$\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$
$\Delta x = x_2 - x_1 = 100\,\mathrm{m}$

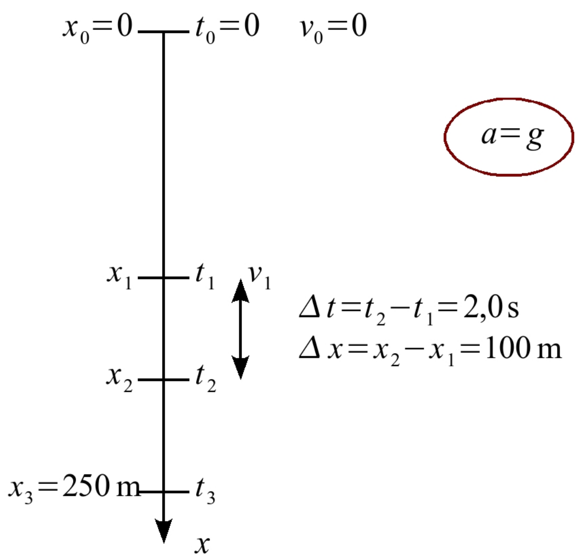
*Gevraagd* $t_3, v_3, t_1$ en $x_1$

*Omdat de beweging enkel naar beneden is, is de beschrijving gemakkelijk met een* $x$*-as naar beneden gericht. De versnellingscomponent* $a$ *is dan gelijk aan de valversnelling* $g$*. Omdat de kegel vanuit rust vertrekt, vinden we de valtijd uit* $x = \dfrac{1}{2}gt^2$*:*

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

*De valtijd bepaalt de eindsnelheid:*

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$$




*Invullen van de gegevens geeft* $t_3 = 7{,}1\,\mathrm{s}$ *en* $v_3 = 70\,\mathrm{m/s} = 252\,\mathrm{km/h}$.

*Uit de plaatsfunctie kunnen we de beginsnelheid*[20] *halen. De beginsnelheid* $v_1$ *is immers de enige onbekende in de vergelijking:*[21]

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

*Dus:* $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t}$.[22]

*Omdat de kegel vanuit rust begint te vallen en per seconde* $9{,}81\,\mathrm{m/s}$ *sneller valt, vinden we de valtijd als* $t_1 = \dfrac{v_1}{g}$*:*

$$t_1 = \frac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2g\Delta t} = \frac{2 \cdot 100\,\mathrm{m} - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (2,0\,\mathrm{s})^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2,0\,\mathrm{s}} = 4{,}1\,\mathrm{s}$$

[20] Voor de honderd meter is de beginsnelheid $v_1$.

[21] Hoe komen we aan deze uitdrukking? De plaatsfunctie toegepast op de honderd meter geeft: $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2$ waarin de variabele $t$ de verstreken tijd tussen tussen de posities $x_1$ en $x_2$ weergeeft. In dit geval stellen we die echter voor door $\Delta t$. Ook is $\Delta x = x_2 - x_1$.

[22] Als we de uitdrukking uitwerken: $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} - g\dfrac{\Delta t}{2} = \bar{v} - g\dfrac{\Delta t}{2}$, is te zien dat $v_1$ één seconde eerder dan de gemiddelde snelheid bereikt wordt. De gemiddelde snelheid is immers $\bar{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ en wordt dus halverwege de valtijd van de honderd meter bereikt. Bovendien toont deze uitwerking dat we het vraagstuk ook anders hadden kunnen oplossen. Uit $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2} = \dfrac{v_1 + (v_1 + g\Delta t)}{2}$ is immers $v_1$ te bepalen.

*De bijbehorende afgelegde weg is dan* $x_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 82\,\mathrm{m}$.

**Oefening 93** *(∗∗∗) Een zieke man zit voor een raam dat* $1{,}20\,\mathrm{m}$ *hoog is. Een steen wordt vanop de grond opgeworpen en passeert het raam een keer opwaarts en een keer neerwaarts. De man ziet de steen in totaal voor exact één seconde.*

**Vraag 93.1** *Bepaal de snelheid waarmee de steen de onderkant van het raam bereikt.* $\Delta x = v_1 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$ *zodat* $v_1 = \bar{v} + g\frac{\Delta t}{2} = 4{,}85\,\mathrm{m/s}$ *(*$\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$*)*

**Vraag 93.2** *Toon aan dat het met deze gegevens niet mogelijk is te berekenen hoe hoog het raam boven de grond is gelegen.* *Naast de hoogte van het raam boven de grond, zijn ook de benodigde tijd en de beginsnelheid onbekende grootheden. Met maar twee vergelijkingen die een EVRB beschrijven (*$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ *en* $v = v_0 + at$*), zijn deze onbekenden niet vast te leggen. In een meer fysische uitleg kan je je realiseren dat eenzelfde snelheid aan de onderkant van het raam voor een grotere hoogte boven de grond te realiseren is met een grotere snelheid waarmee de steen opgeworpen wordt.*

**Oefening 94** *(∗ ∗ ∗) Een student gooit een sleutelbos verticaal omhoog naar een medebewoonster in een raam* $4{,}00\,\mathrm{m}$ *hoger. De sleutels worden* $1{,}50\,\mathrm{s}$ *later opgevangen.*

(a) *Wat was de snelheid waarmee de sleutels omhoog werden gegooid?*

(b) *Welke snelheid had de sleutelbos vlak voordat hij werd opgevangen?*

$v_0 = \dfrac{x + \frac{1}{2}gt^2}{t} = 10,02\,\mathrm{m/s}$

$v = v_0 - gt = \dfrac{x}{t} - \dfrac{1}{2}gt = -4{,}69\,\mathrm{m/s}$

*Merk op dat de sleutelbos wordt opgevangen bij het terug naar beneden komen. De snelheidscomponent is immers negatief.*

**Oefening 95** *(∗ ∗ ∗) Een voorwerp wordt verticaal omhoog geworpen en bereikt na een tijd* $t$ *een hoogte* $h$*. Toon aan dat de maximale hoogte* $h_{max}$ *die het voorwerp bereikt, wordt gegeven door:*

$$h_{max} = \frac{(gt^2 + 2h)^2}{8gt^2}.$$

*We zoeken eerst een uitdrukking voor de maximale hoogte. Op het hoogste* *punt is de snelheid nul zodat:*

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 - gt &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= \frac{v_0}{g} \end{aligned}$$

*Deze tijd is dus de tijd die het voorwerp nodig heeft om het hoogste punt te bereiken. Als we de oorsprong van de $y$-as op de grond kiezen en naar boven gericht, dan vinden we de maximale hoogte door dit tijdstip in de plaatsfunctie in te vullen:*

$$\begin{aligned} y_{max} &= y(t_{max}) \\ &= v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

*Doordat we weten hoe hoog het voorwerp zich bevindt na een tijd $t_1$, kunnen we de beginsnelheid $v_0$ bepalen:*

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ &\Updownarrow \\ v_0 &= \frac{2y_1 + g t_1^2}{2t_1} \end{aligned}$$

*Substitutie hiervan in de uitdrukking voor de maximale hoogte geeft de te bewijzen uitdrukking.*

# Kinematica: tweedimensionale bewegingen

## Deel IV

# Tweedimensionale bewegingen

## Inleiding

Als we in een vlak bewegen, hebben we te maken met een tweedimensionale beweging. Ten opzichte van een referentiestelsel met twee assen, kunnen we de beweging beschrijven.

Figuur 34: Sterrentrajecten aan de hemel

We behandelen twee concrete bewegingen in dit hoofdstuk, de horizontale worp en de eenparig cirkelvormige beweging.

Author(s): Bart Lambregs
Author(s): Bart Lambregs

# Het onafhankelijkheidsbeginsel

**Denkvraag 96** *Kan je in het filmpje vaststellen dat de horizontale beweging van de bal die wordt opgeworpen vanuit de laadbak van een pickup truck een invloed heeft op de manier waarop de bal in verticale zin beweegt?*

*YouTube link:* `https://www.youtube.com/watch?v=j1URC2G2qnc`

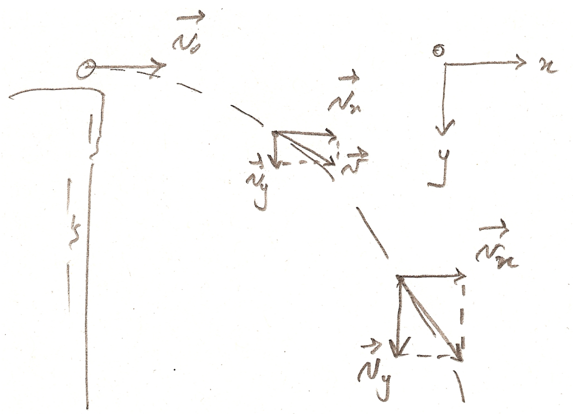
**Definition 14.** onafhankelijkheidsbeginsel Het onafhankelijkheidsbeginsel stelt dat een beweging in een bepaalde richting geen invloed uitoefent op de beweging in een andere richting.

Als gevolg kunnen we de beweging beschrijven als een samenstelling van een horizontale en een verticale beweging, onafhankelijk van elkaar.

Author(s): Bart Lambregs

# De horizontale worp

We bekijken een voorbeeld van een tweedimensionale beweging. Wanneer een object horizontaal met een bepaalde beginsnelheid wordt gekatapulteerd, noemen we die beweging een horizontale worp. Wij beschouwen de worp in het luchtledige.




Figuur 35: De snelheid in horizontale richting verandert niet, die in de verticale richting neemt lineair toe in de tijd

In de beschrijving kunnen we de $x$-as horizontaal en de $y$-as verticaal naar beneden nemen. Omdat er volgens de $x$-as geen versnelling is het lichaam volgens de $y$-as valt met de valversnelling $g$, kunnen we de formules voor een ERB en een EVRB op de afzonderlijke assen toepassen en zo de volledige beweging beschrijven.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

De baanvergelijking vinden we zoals eerder vermeld, door $t$ in functie van $x$ te schrijven $x = v_0 t \Leftrightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$ en dit in $y(t)$ te substitueren:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 = \frac{g}{2 v_0^2} x^2$$

De baan is dus een parabool.

**Example 8.** Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 450 km/h op een hoogte van 920 m.

Author(s): Bart Lambregs

(a) Hoever voor het doel moeten de voedselpakketten gelost worden om op het doel terecht te komen?

(b) Hoeveel tijd hebben de pakketten nodig om het doel te bereiken?

De afstand waarover de voedselpakketten in horizontale richting zijn vooruit gegaan, kunnen we vinden met de baanvergelijking. We weten namelijk hoever de pakketten naar beneden zijn gevallen en wat hun beginsnelheid is:

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{2v_0^2}x^2 \\ &\Downarrow \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 1712\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

De valtijd voor de pakketten vinden we o.a. door naar de verticale valbeweging te kijken. Deze gebeurt onafhankelijk van wat er in de horizontale richting gebeurt, zodat:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ &\Downarrow \\ t &= \sqrt{\frac{2y}{g}} = 13{,}7\,\mathrm{s} \end{aligned}$$