

Basisbegrippen

Opmerking 1. Deze open-source cursus is in ontwikkeling. Leerkrachten en leerlingen die van dit materiaal gebruik maken kunnen eenvoudig fouten/verbetering/... melden.

- Via de 'wijzig' knop kan je kleine fouten en typo's zelf aanpassen. [stappenplan](#)
- Mailen naar info@wiskunde.opmaat.org
- Via

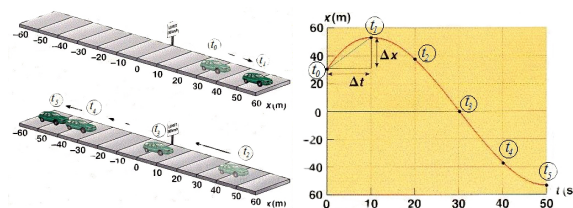
Positie en plaatsfunctie

De beweging van een puntmassa kan beschreven worden door de positie in functie van de tijd weer te geven. De *plaatsfunctie* $x(t)$ geeft voor elk tijdstip t de positie x waar de puntmassa zich bevindt. Een coördinaat¹ bepaald de positie x . De variabele t staat symbool voor de tijd. De notatie voor de positie op tijdstip t_1 is:

$$x_1 = x(t_1)$$

Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices, zo is $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

Zo zie je onderstaande figuur een auto op verschillende tijdstippen t_0, t_1, t_2, \dots weergegeven op verschillende posities. Je ziet ook een grafiek van de bijbehorende plaatsfunctie.



Figuur 1: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

Definitie 1. De *verplaatsing* Δx is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Zo is de verplaatsing van de auto in de figuur tussen de tijdstippen t_0 en t_1 gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 50\text{ m} - 30\text{ m} = 20\text{ m}$ en is de verplaatsing tussen de tijdstippen t_2 en t_4 gelijk aan $\Delta x = x_4 - x_2 = -80\text{ m} - 40\text{ m} = -120\text{ m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de auto netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.

Gemiddelde snelheid

De tijd nodig om een bepaalde afstand af te leggen geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definitie 2. De gemiddelde snelheid \bar{v} van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \text{m/s}$.

¹Een coördinaat is een as van een cartesiaans assenstelsel, met een oorsprong en een oriëntatie.

Basisbegrippen

In de figuur is de gemiddelde snelheid van de auto tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\text{ m} - 50\text{ m}}{20\text{ s} - 10\text{ s}} = -1\text{ m/s}$. Als de snelheid negatief is betekent dit dat de auto achteruit rijdt.

Gemiddelde versnelling

Ook de snelheid kan veranderen in de tijd. Dit ken je uit het dagelijks leven als versnellen of vertragen.

Definitie 3. De gemiddelde versnelling \bar{a} tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \text{m/s}^2$.

Om even over na te denken ... 1: K
n je uitleggen wat de eenheid meter per seconde, per seconde betekent?

Ogenblikkelijke snelheid

De plaatsfunctie $x(t)$ kent op elke tijdstip t een positie toe aan een voorwerp. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

Om even over na te denken ... 2: A
n elk moment een snelheid toe te kennen is niet evident. Laat ons volgende video bekijken van een raket die opstijgt. Op het lanceerplatform is de snelheid 0. Als een raket op weg is naar de ruimte kan de snelheid tot 100 m/s bedragen. **Wat is volgens jou de snelheid op het moment dat de raket de grond niet meer raakt? Het eerste moment dat hij niet meer op de grond staat.**

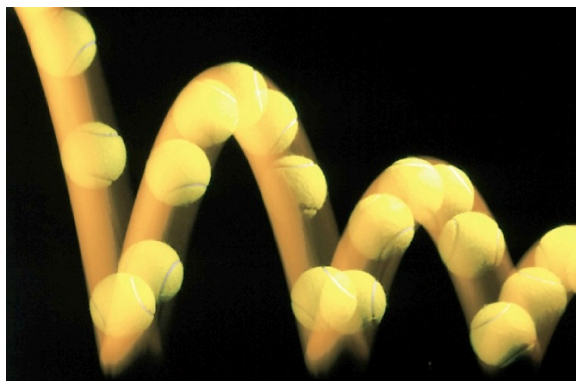
De eenheid van snelheid is m/s , het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment, één ogenblik, er helemaal geen tijdsverloop is en we bijgevolg ook geen verplaatsing kunnen hebben...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

Om even over na te denken ... 3: A
s een raket opstijgt vanuit stilstand lijkt de snelheid in eerste instantie positief. **Hoe zou je toch beargumenteren dat de raket een positieve snelheid heeft op het eerste moment dat hij van de grond is?**

'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek² te delen door de tijd van één omwenteling. Als jij plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

²Die je hebt moeten ingeven...

Basisbegrippen



Figuur 2: Stuiiterende tennisbal

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Op de stroboscopische foto van de stuiiterende tennisbal is te zien dat de bal bovenaan trager beweegt dan wanneer hij de grond nadert. Bovenaan liggen de beelden immers dichter bij elkaar zodat de tennisbal minder afstand aflegt in de tijdsspanne tussen twee opeenvolgende opnames. Deze kwantitatieve³ informatie die levert echter opnieuw gemiddelde snelheid en niet zomaar de ogenblikkelijke snelheid. De tennisbal verandert immers nog van snelheid tussen twee opeenvolgende opnames. Door de frequentie⁴ waarmee de foto's worden genomen op te drijven, krijgen we een accurater beeld van de snelheid die de tennisbal op een gegeven moment heeft. De tijdsintervallen zijn nu immers korter zodat de bal minder van snelheid kan veranderen gedurende de intervallen en zodoende de gemiddelde snelheid een indicatie wordt van de ogenblikkelijke snelheid. De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner... te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadt het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de *limiet* van de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definitie 4. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $v(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

Opmerking 2. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

Ogenblikkelijke versnelling

Voor een ogenblikkelijke verandering van de snelheid maken we eenzelfde redenering als voor de ogenblikkelijke verandering van de positie.

Definitie 5. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie

³Kwantitatief wil zeggen dat het over een hoeveelheid of een grootte gaat.

⁴Frequentie is een grootheid die aangeeft hoeveel cyclussen er per seconde worden doorlopen. Hier gaat het dus over het aantal beelden dat per seconde wordt gemaakt. De eenheid van frequentie is s^{-1} oftewel Hz (de Hertz).

Basisbegrippen

$v(t)$:

$$a = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.