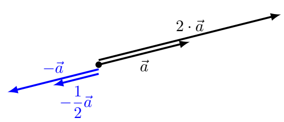
Bewerkingen met vectoren

Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

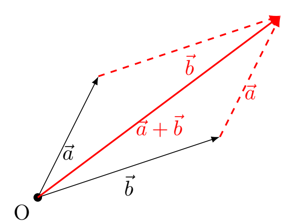
Een vector kan 'herschaald' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalaire verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.



Figuur 1: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren van dezelfde grootheid met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.



Figuur 2: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren op te tellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultante berekend met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (aangepaste) cosinusregel voor de lengte van $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$:

Author(s): Bart Lambregs

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$$

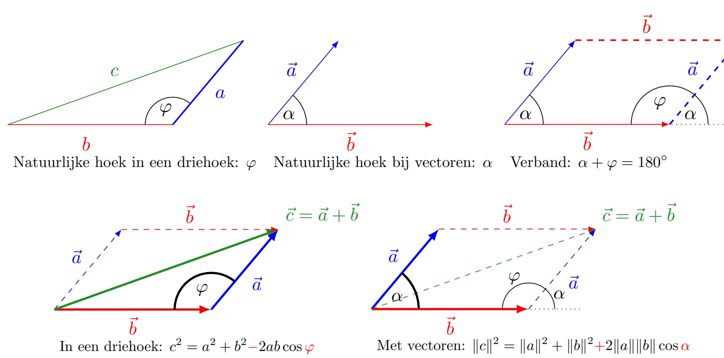
met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Quick Question 1 *Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan?*
Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en dezelfde zin hebben? Hoe vereenvoudigt de cosinusregel als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ dezelfde richting en tegengestelde zin hebben?

De 'klassieke' cosinusregel wordt geformuleerd voor de zijden van een driehoek, en zegt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

met φ de overstaande hoek van zijde c.
Merk op dat het teken van de derde term verschillend is. Waarom is dat zo, en hoe moet je dat onthouden?
In een driehoek gebruik je natuurlijkerwijze niet de hoek α tussen de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, maar wel de *complementaire* hoek φ tussen de lijnstukken a en b.
Volgende tekening en redenering geeft het verband tussen beide situaties, en de bijhorende formuleringen. Het enige verschil is een minteken, en dat komt omdat je afhankelijk van de situatie liever met één van de twee complementaire hoeken werkt. En zoals je op de goniometrische cirkel onmiddellijk kan zien, hebben complementaire hoeken tegengestelde cosinussen. Dat precies dat verschil wordt gecompenseerd door het extra minteken.



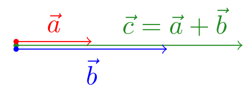
Figuur 3: Omdat $\alpha+\varphi=180°$, is $\cos\varphi = -\cos\alpha$.

Het verband tussen beide versies van de cosinusregel is nu duidelijk: afhankelijk van welke hoek je neemt tussen de richtingen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ krijg je ofwel een plusteken, ofwel een minteken. Het is niet de moeite om dat teken van buiten te leren, want het teken volgt onmiddellijk uit het speciale geval wanneer $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht op elkaar staan: dan zijn zowel α als φ dus $90°$, en de cosinus is dus nul.[1]

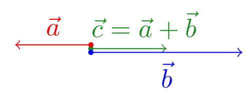
[1] Gelukkig, want de Stelling van Pythagoras zegt dat bij een rechte hoek $c^2 = a^2 + b^2$, en dat klopt enkel met de cosinusregel als de derde term nul is.

Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *kleiner* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *kleiner* en moet de derde term in de cosinusregel *negatief* zijn.
Als de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ *groter* wordt, wordt ook $\|\vec{c}\|$ *groter* en moet de derde term in de cosinusregel *positief* zijn.
Naargelang je met de hoek α rekent dan wel met de hoek φ wordt het teken van de term met de cosinus dus aangepast.

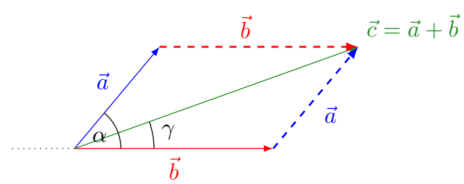
Example 1. **Vraag 2** *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ *en* $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$, *dan is hier* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 8\,\mathrm{N}$.



Vraag 3 *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ *en* $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$, *dan is hier* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$.



Vraag 4 *Als in onderstaande figuur* $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ *en* $\alpha = 50°$, *dan moet* $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\|$ *worden berekend met de cosinusregel.*



De grootte van de resultante $\vec{c}$ *wordt bepaald met bovenstaande versie van de cosinusregel:*

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}/\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.$$

Remark 1. In het algemeen geldt dus **niet** dat $\cancel{\|a + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$. In welk(e) geval(len) geldt de geljkheid wel?

De **richting van de resultante** (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \text{bgsin}\left(\frac{5 \cdot \sin 50^\circ}{7.3}\right) \approx 18^\circ$$

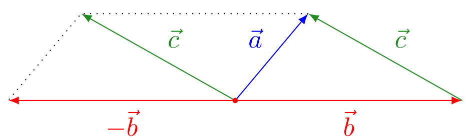
De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren. Indien er dus meer dan twee vectoren worden samengesteld, tel je eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan tel je met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt)

Verschil van twee vectoren

Net zoals bij getallen $5 - 3 = 5 + (-3)$, kan je ook bij vectoren een verschil schrijven als een som met de tegengestelde:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Figuur 4: Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

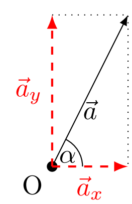
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In bepaalde contexten is het vaak erg nuttig om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de x-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De grootte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 5: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

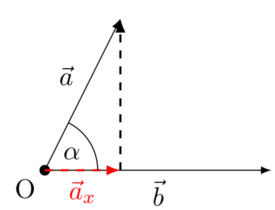
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Quick Question 5 *Is de eerste bewerking '·' dezelfde als de tweede bewerking '·'? Verklaar.*

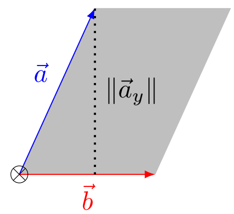


Figuur 6: De projectie van de vector $\vec{a}$ op $\vec{b}$

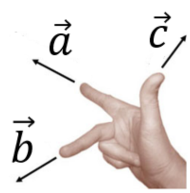
Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}_y\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 7: Het vectorieel product



Figuur 8: De rechterhandregel

Remark 2. Een vector met zin in het blad wordt genoteerd met $\otimes$. Een vector met zin uit het blad wordt genoteerd met $\odot$.