De positie

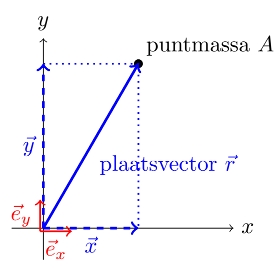
Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt, heeft deze plaatsvector één, twee of drie vectorcomponenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De getalcomponenten of kortweg componenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x,y en z. Dat zijn scalaire grootheden, omdat ze een getalcomponent en een eenheid bevatten.

Definition 1. De positie van een puntmassa A wordt vectorieel beschreven met de **plaatsvector** $\vec{r}$. Het is de vector die van de oorsprong wijst naar het punt waar de massa zich bevindt. Een plaatsvector $\vec{r}$ kan ontbonden worden volgens de assen:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

Hierin is $co(A) = (x, y)$ de coördinaat van het punt en zijn $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ eenheidsvectoren volgens de assen.



Figuur 1: De plaatsvector $\vec{r}$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De componenten ervan hangen dus af van de tijd. Elke coördinaatfunctie geeft voor elk moment t de coördinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentfuncties samen beschrijven op een equivalente manier de volledige beweging van de puntmassa.

De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(\text{t})$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een

Author(s): Bart Lambregs, Vincent Gellens

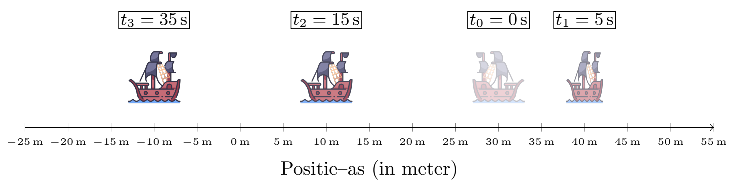
dergelijke vectorfunctie ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$.

Bij eendimensionale bewegingen is er slechts één as nodig om de beweging te beschrijven. Het is dan handig om met de componenten te werken, die tijdsafhankelijk kunnen zijn.[1]

De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als [2]

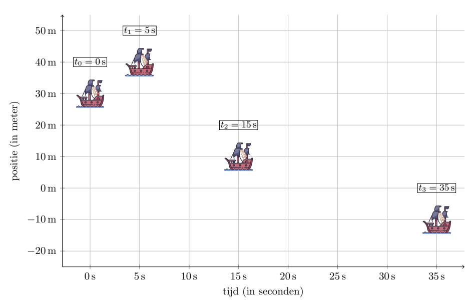
$$x_1 = x(t_1).$$

In onderstaande figuur zie je de rechtlijnige tocht van een zeilschip. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het schip zich bevindt.



Figuur 2: De positie van de zeilboot voor elke tijd t

In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[3] In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ op de positie $40\,\mathrm{m}$, dus $x_1 = 40\,\mathrm{m}$. De startpositie van de zeilboot x_0 is gelijk aan $30\,\mathrm{m}$, want voor $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ geldt $x(0) = 30\,\mathrm{m}$. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.



[1] In fysica gebruiken we wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x, maar het symbool t. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat die de beeldwaarden zijn van de functie f, x is afhankelijk van t.

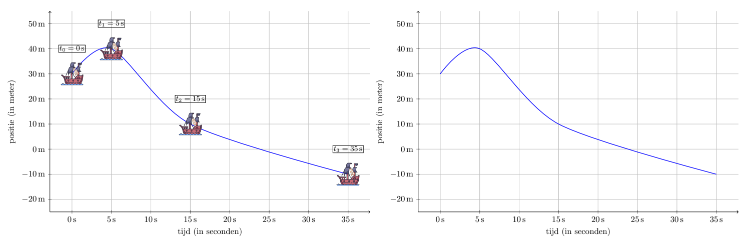
[2] Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices. Voorbeelden zijn $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

[3] Einstein gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

Figuur 3: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as en de positie op de verticale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Dan verandert de positie volgens de positie-as natuurlijk niet, maar het blad beweegt zich wel voort op de tijd-as. [4]

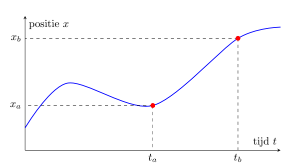
De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten t_0, t_1, t_2, t_3 en t_4. De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie . . .



Figuur 4: De plaatsfunctie van de zeilboot voor elke $t \in [0, 35]$

Definition 2. De plaatsfunctie $x(t)$ geeft voor elk moment t de component x van de positie van het voorwerp. $x(t)$ geeft de plaatsfunctie die je kan uitzetten in een grafiek met verticale x-as en horizontale t-as. De positie op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$x_a = x(t_a)$$



Figuur 5: De grafiek van een plaatsfunctie $x(t)$

De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

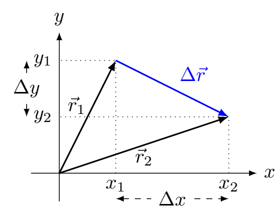
[4]Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[5]

[5]Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[6]

[6]Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.

Definition 3. De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

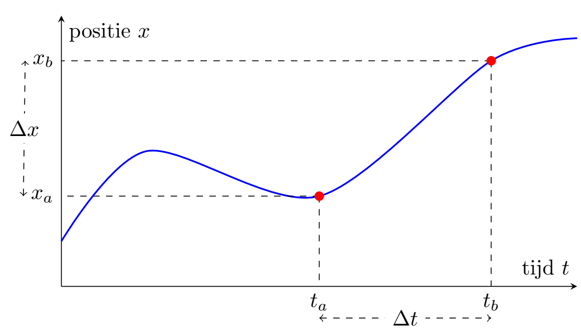
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Zoals aangegeven in de figuur kan ook de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ ontbonden worden.

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\
&= (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) \\
&= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y \\
&= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen t_0 en t_1 is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 40\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$. Tussen t_2 en t_3 is de verplaatsing gelijk aan $\Delta x = x_3 - x_2 = -10\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m} = -20\,\mathrm{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:



Figuur 6: De verplaatsing op de plaatsfunctie

Quick Question 1 *Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duid deze verplaatsing aan op de grafiek.*

Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging.

Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,...). Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar t en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.

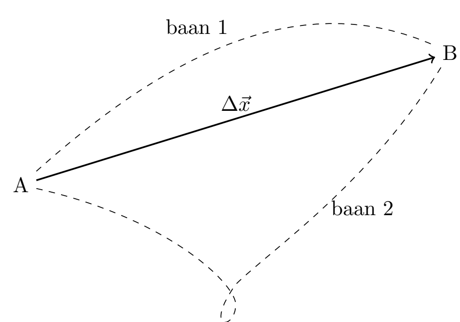
Example 1. De positie van puntmassa A in het xy-vlak wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = t^7 \\ y = -t^2 - 3t \end{cases}$$

Een rechtstreekse berekening levert $x = t^7 \Rightarrow t = \sqrt[7]{x}$. Dit substitueren in het voorschrift $y(t)$ geeft de baanvergelijking $y(x)$:

$$y = -t^2 - 3t \Rightarrow y(x) = -(\sqrt[7]{x})^2 - 3\sqrt[7]{x}$$

Let op: de *verplaatsing* is niet hetzelfde als de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar je hebt wel degelijk afstand afgelegd. De verplaatsing geeft enkel het verschil (in vogelvlucht) tussen begin- en eindpunt, terwijl de afgelegde weg s gaat over de afstand die het bewegende voorwerp over zijn baan aflegt.



Figuur 7: Verplaatsing en afgelegde weg