Wiskunde Op Maat

Natuurkunde

Eerste semester

(Versie 2025/08/28.1)

Inhoudsopgave

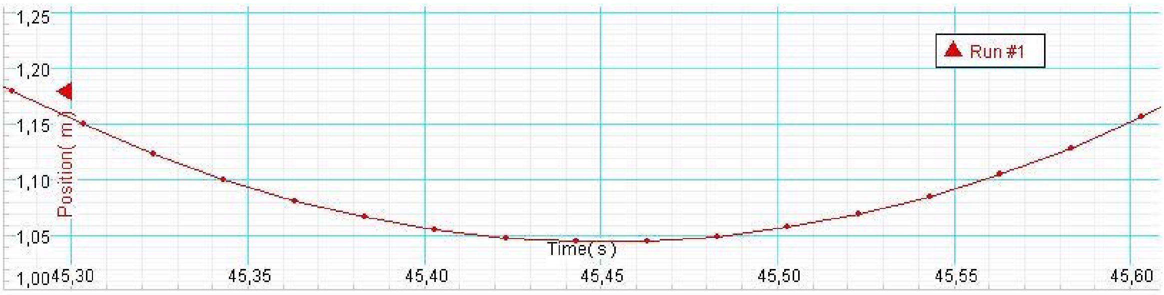
1.1 Inleiding

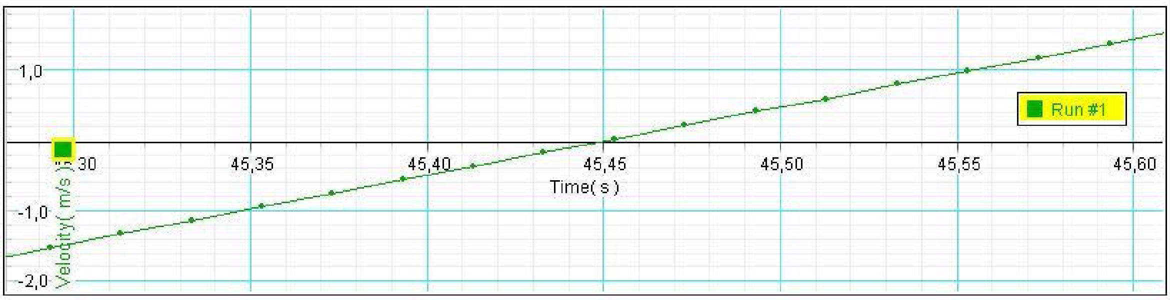
Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de beweging. De beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1] Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

Als de kracht de oorzaak is van de beweging, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met fietsen, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km/h}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.





[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3] Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

1.1 Inleiding

Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wil zeggen dat er per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bijkomt. De appel valt sneller en sneller maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid tegengesteld zijn aan elkaar. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.

Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting van de kracht.

We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg. . .

In hoofdstuk 1 en 2 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we kinematica. In hoofdstuk 3 en 4 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we dynamica. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we mechanica.

2.1 Het begrip vector

In de fysica wordt de natuur beschreven met grootheden die men opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: "Naar waar gericht?" zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

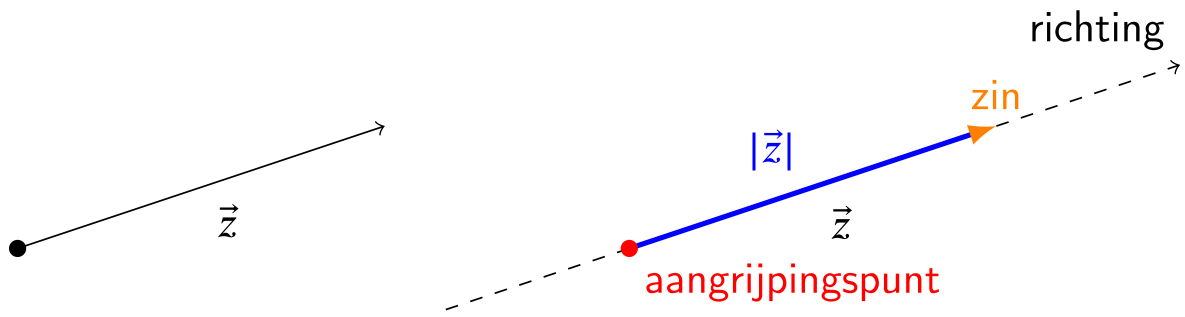
Voorbeeld: een helikopter vliegt met een snelheid van 40 km/h. Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, ..." Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is dus een vector. Stel het zwembadwater heeft een temperatuur van 27°C. Vraag: "Naar waar?" Antwoord: "Hier is geen zinnig antwoord op." Temperatuur is dus een scalar.

Een vectoriële grootheid heeft drie variabele kenmerken: grootte, richting en zin. Voorbeeld: de helikopter vliegt aan 40 km/h, horizontaal en naar het zuiden. Een scalaire grootheid heeft slechts één kenmerk: de grootte (waarin soms ook een teken vervat zit). Voorbeeld: een sneeuwbal heeft een temperatuur van -10°C. De plaats waar de vector aangrijpt, noemt men het aangrijpingspunt van de vector.

Opmerking 2.1.1. Het onderscheidt tussen scalar en vector is in de eerste plaats een verschil in *naamgeving*. Zo kan men zeggen dat de temperatuur in graden gelijk is aan de scalar 27 of gegeven wordt door de vector $\vec{temp} = (27)$ met slechts één component.

2.2 Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, \ldots$. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft de drie variabele kenmerken weer, evenals het aangrijpingspunt.

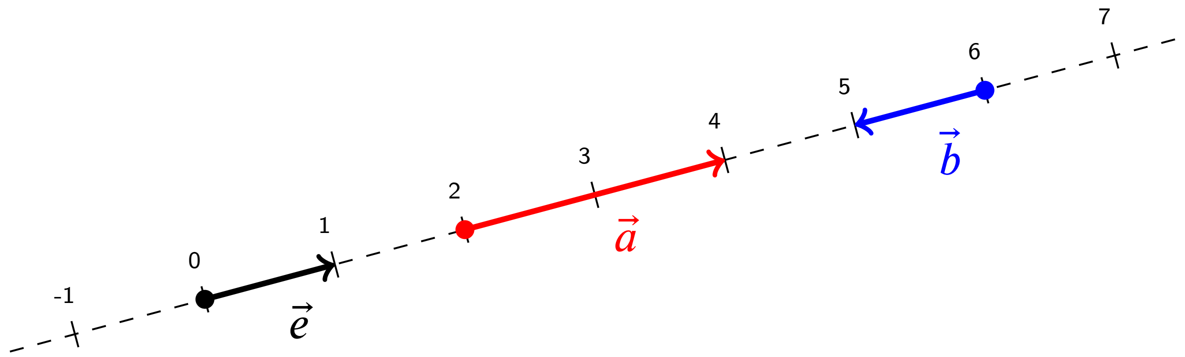


Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden aangeduid met een plusteken, vectoren tegen de zin van de referentie-as krijgen een minteken.

De grootte van de vector wordt vaak als enkel positief aanzien (vooral in een situatie zonder referentie-as). De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$.

De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties, zo kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.

Er geldt in onderstaande tekeningen dat $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2. Voor de vector $\vec{b}$ geldt $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.

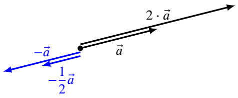


Opmerking 2.2.1. Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

2.3 Bewerkingen met vectoren

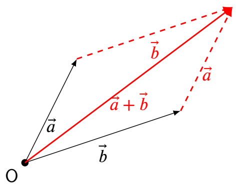
Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

Wanneer een reëel getal met een vector vermenigvuldigd wordt, dan is er een herschaling van de vector met behoud van richting. De grootte en zin kunnen veranderen. Het is een soort reëel veelvoud van de vector. De scalarie verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.



Samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Wanneer vectoren van dezelfde grootheid worden opgeteld, bekomt men een nieuwe vector die het netto resultaat is van de samenstelling van de gegeven vectoren. Men noemt dit resultaat daarom ook de resultante. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.



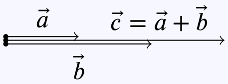
Figuur 1: De optelling van twee vectoren

De grootte van de resultante bepalen (kwantitatief) kan op verschillende manieren gebeuren, belangrijkste is de meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren optellen! In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (gewijzigde) cosinusregel:

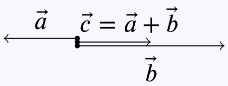
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Voorbeeld 2.3.1. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$.

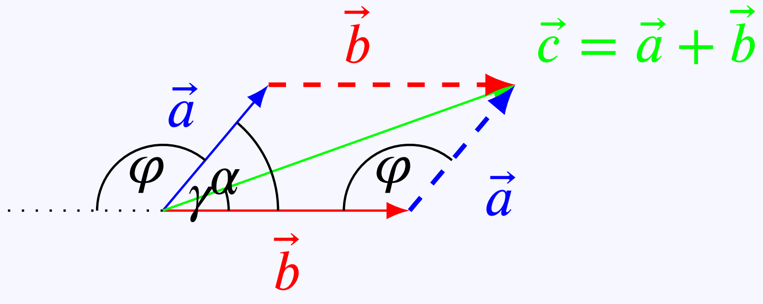


Voorbeeld 2.3.2. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = \| -3 + 5\| = 2\,\mathrm{N}$.



2.3 Bewerkingen met vectoren

Voorbeeld 2.3.3. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ en $\alpha = 50°$.



De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met de cosinusregel:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\varphi \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(180° - \alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|(-\cos\alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha \\
&= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

Opmerking 2.3.1. Als $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ geldt dus **niet** dat $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

De richting van de resultate (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{5\cdot\sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

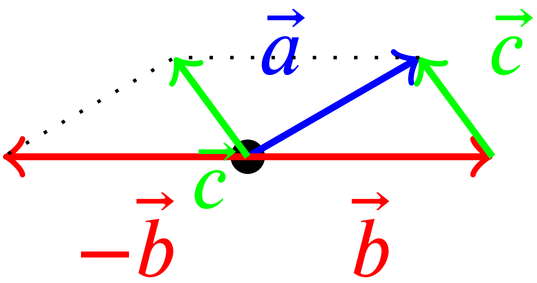
Indien meer dan twee vectoren worden samengesteld, telt men eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan telt men met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt).

Verschil van twee vectoren

Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus letterlijk het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$. De eenvoudigste manier om (zowel grafisch als rekenkundig) het verschil te bepalen is door van het verschil een som te maken.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ worden samengesteld.



2.3 Bewerkingen met vectoren

Grafisch blijkt overigens dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a}-\vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

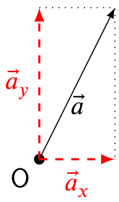
Het is vaak nuttig en noodzakelijk in vraagstukken om een vector (loodrecht) te ontbinden in componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de x-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De lengte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



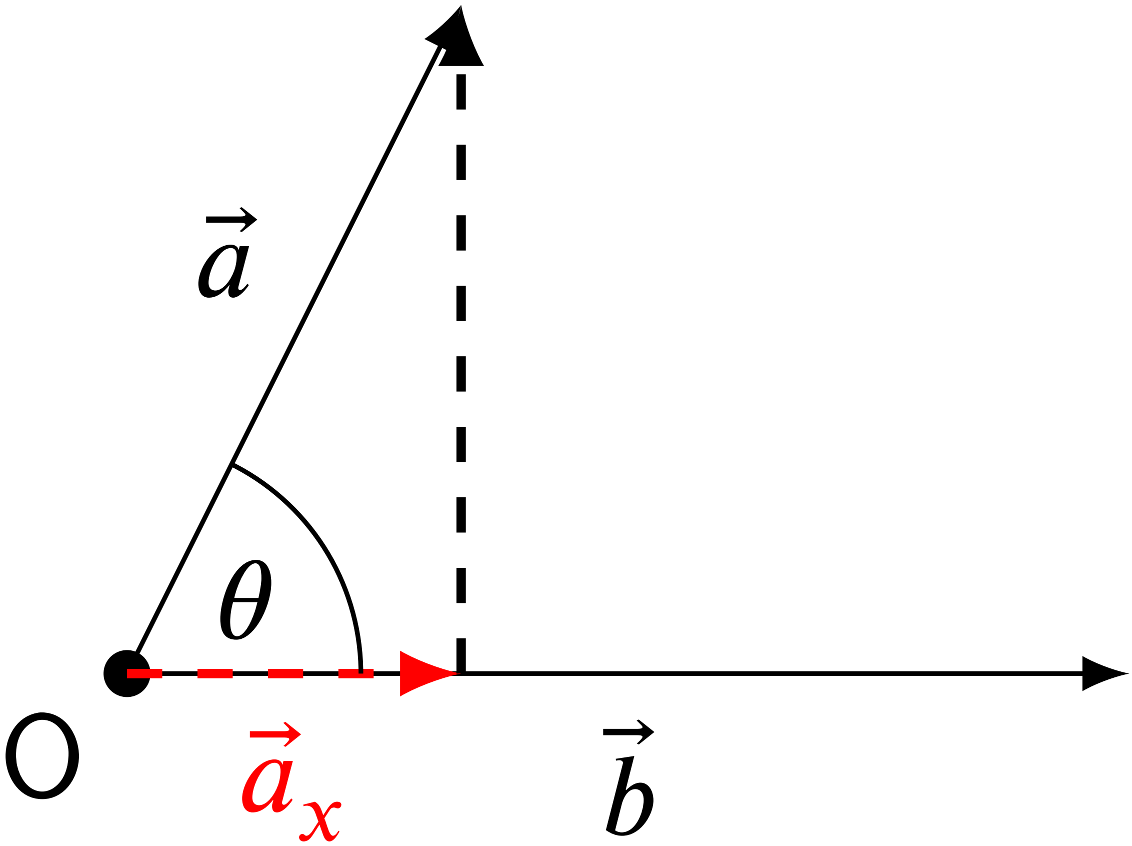
Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

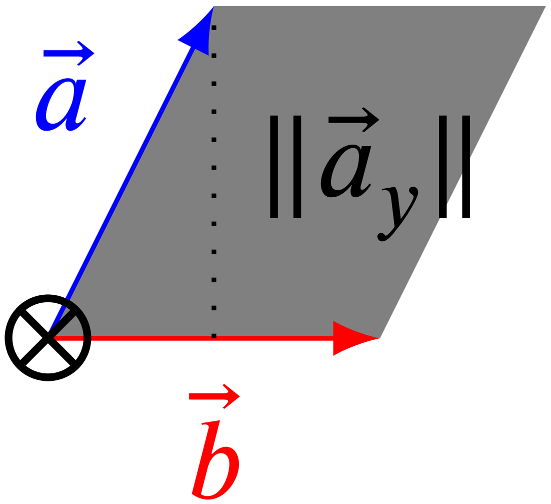
Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}_x\| \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha) \cdot \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$



Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

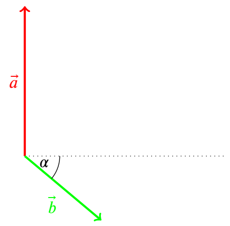
Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel.



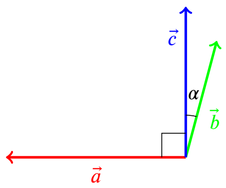
2.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 2.3.1. Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.

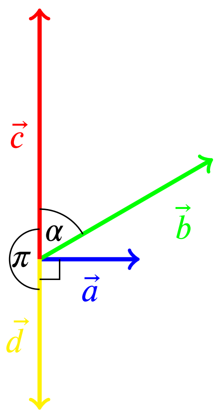
1. $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 40°$



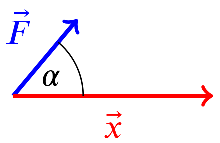
2. $\|\vec{a} = 4\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$



3. $\|\vec{a} = 5\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b} = 8\,\mathrm{N}$ $\|\vec{c} = 15\,\mathrm{N}$, $\|\vec{d} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 60°$



Oefening 2.3.2. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.

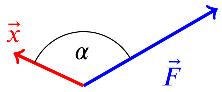
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.

3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$

4. $\vec{F} \times \vec{x}$

2.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 2.3.3. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:

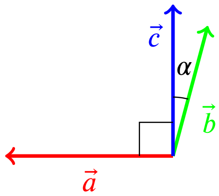


1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
4. $\vec{F} \times \vec{x}$

2.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

Oefening 2.3.4.

Gegeven de drie waarvoor geldt $||\vec{a} = 4\,\mathrm{N}$, $||\vec{b} = 2{,}5\,\mathrm{N}$ $||\vec{c} = 3\,\mathrm{N}$, $\alpha = 15°$



Construeer en bepaal de groottes van:

1. $\vec{a} - \vec{b}$

2. $\vec{b} - \vec{a}$

3. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

4. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

5. $4\vec{b} + \vec{c}$

6. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

7. $3\vec{a} - 4\vec{c}$

Oefening 2.3.5. Als $\vec{F} \perp \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

8. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = 0$

Oefening 2.3.6. Als $\vec{F} \parallel y$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$

2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$

3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$

2.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$

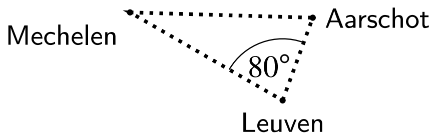
8. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

2.3.C Oefeningen vectoren reeks 3

Oefening 2.3.7. Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst 15 m evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van 45∘ met de zijlijn 18 m naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 2.3.8. Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt 9 m evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt 17 m in een richting die een hoek van 35∘ maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 2.3.9. Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van 10 m/s en 20 m/s. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.



1. Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!
2. Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?

Oefening 2.3.10. Toon aan dat $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$ met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Oefening 2.3.11. Geldt er algemeen dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$? Geldt er dat $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$? Verklaar kort.

Oefening 2.3.12. Kan er gelden dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.

3.1 Inleiding kinematica

Kinematica (afkomstig van het Griekse woord $\kappa\iota\nu\epsilon\mu\alpha$) is het belangrijke onderdeel van de fysica dat de **bewegingen van voorwerpen beschrijft** zonder zich af te vragen wat de oorzaak ervan is. Dat gaat bijvoorbeeld over vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook over de beweging van de maan rond de aarde, de aarde rond de zon, moleculen in water of ook in elkaar grijpende tandwieltjes in een mechanisch uurwerk.

Dit hoofdstuk bestudeert de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica om in een volgende fase enkele concrete basisbewegingen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort) te beschrijven.

Kwantitatief behandelt kinematica steeds de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijk met de scalaire grootheid **tijd**.

Voorbeeld 3.1.1. Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na 1 seconde? En op het moment dat de appel de grond raakt?

We bekommeren ons voorlopig nog niet over de vraag *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. Dat komt later, in het onderdeel *dynamica*, waar we de *krachten* zullen bestuderen die de bewegingen beïnvloeden. Wel, we zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

Voorbeeld 3.1.2. Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips?
- Hoe snel vliegt dat krijtje? Vertraagt het tijden zijn vlucht omdat het kracht verliest, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooid heeft?
- Als je uitglijdt en valt net bij het gooien, gaat het krijtje dan ook sneller naar beneden vallen?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Is dit voorbeeld niet erg verouderd in deze tijden van electronische borden? Kan je met stiften gooien? Mag dat? Zal ChatGPT ooit met krijtjes kunnen gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica. Enkele vragen zijn eigenlijk onzinnig, en uitzonderlijk kan een vraag worden behandeld in de strafstudie. Als een vraag grappig zou zijn, is dat toevallig en irrelevant.

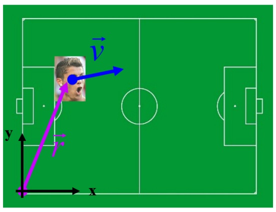
3.2 Het referentiestelsel

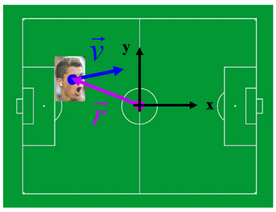
Elk bewegend systeem wordt beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Deze omvat een assenstelsel met een oorsprong (= het **referentiepunt**). Binnen dit referentiestelsel worden de kinematische grootheden beschreven, in de eerste plaats vectorieel.

Als je een vogel ziet vliegen kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of -indien het een kolibri is- misschien zelfs *blijven hangen*. Om deze bewegingen kwantitatief en nauwkeurig te bespreken kies je een referentiestelsel en coördinaatassen. Op die manier krijgt de vogel een positievector die de positie aangeeft, een snelheidsvector die de snelheid aangeeft, ...

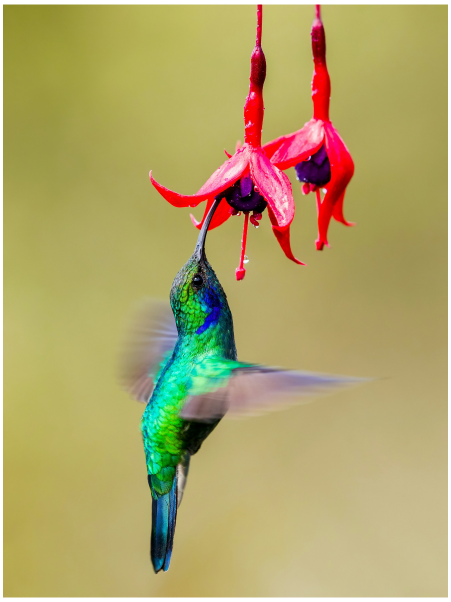
De keuze van het referentiestelsel is altijd relatief. Toch is het erg belangrijk om telkens duidelijk te maken van waaruit een beweging beschreven wordt. Stel je voor dat je nu aan een bureau gedreven aan het studeren bent en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

Voor de eenvoud wordt meestal een referentiestelsel gekozen dat voor de 'waarnemer' stilstaat. Hieronder een voorbeeld van een voetbalveld waarop de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend is naargelang het referentiepunt. Voor een toeschouwer in het publiek staan beide referentiestelsels stil, bijgevolg is de snelheid $\vec{v}$ voor beiden dezelfde.





Oefening 3.2.1. De kolibri in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht hangen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel **niet** stilstaat.



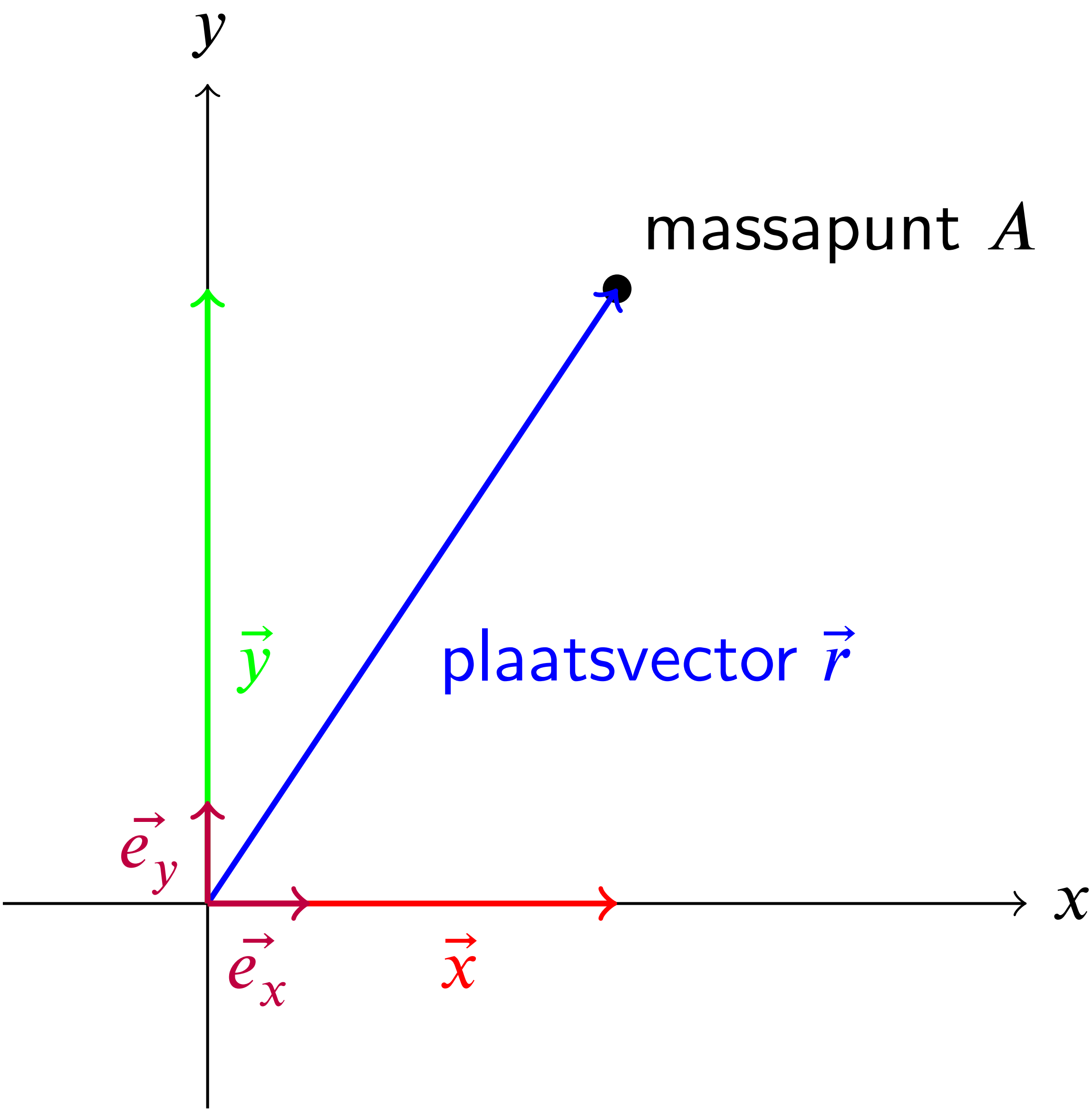
Uitwerking:

- Een referentiestelsel met de kern van de aarde als oorsprong. (De kolibri draait nu rond de as van de aarde...)
- Een referentiestelsel met de zon als middelpunt (De kolibri draait nu ook rond de zon...)

3.3 De positie

Positie en plaatsfunctie

Met een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden vastgelegd met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt heeft deze plaatsvector één, twee of drie componenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De (scalaire) getalcomponenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x,y en z.



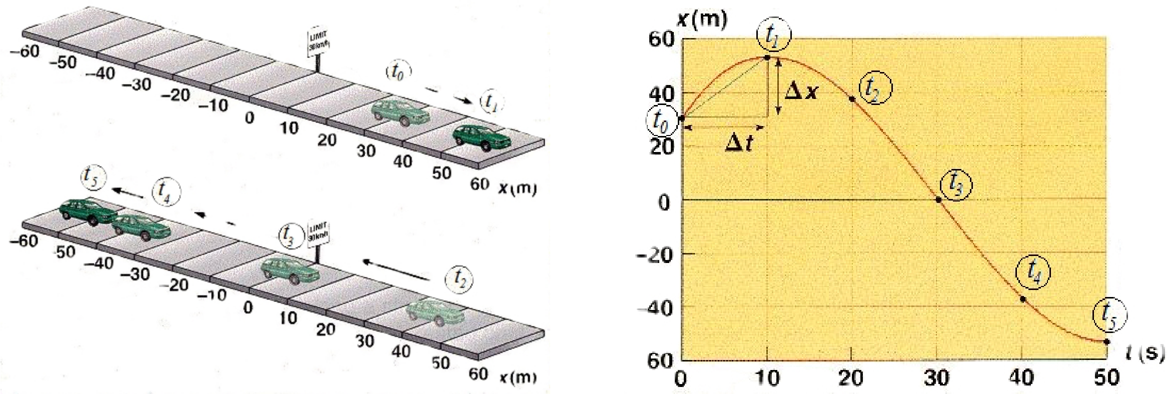
Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. Op middelbaarniveau zijn dergelijke vectorfuncties ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt geopteerd om te werken met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$. Bij een ééndimensionale beweging is er slechts één daarvan nodig, namelijk x. Dat is een getal, namelijk de positie op de enige coördinaatas en t is de variabele die symbool staat voor de tijd.

3.3 De positie

De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als

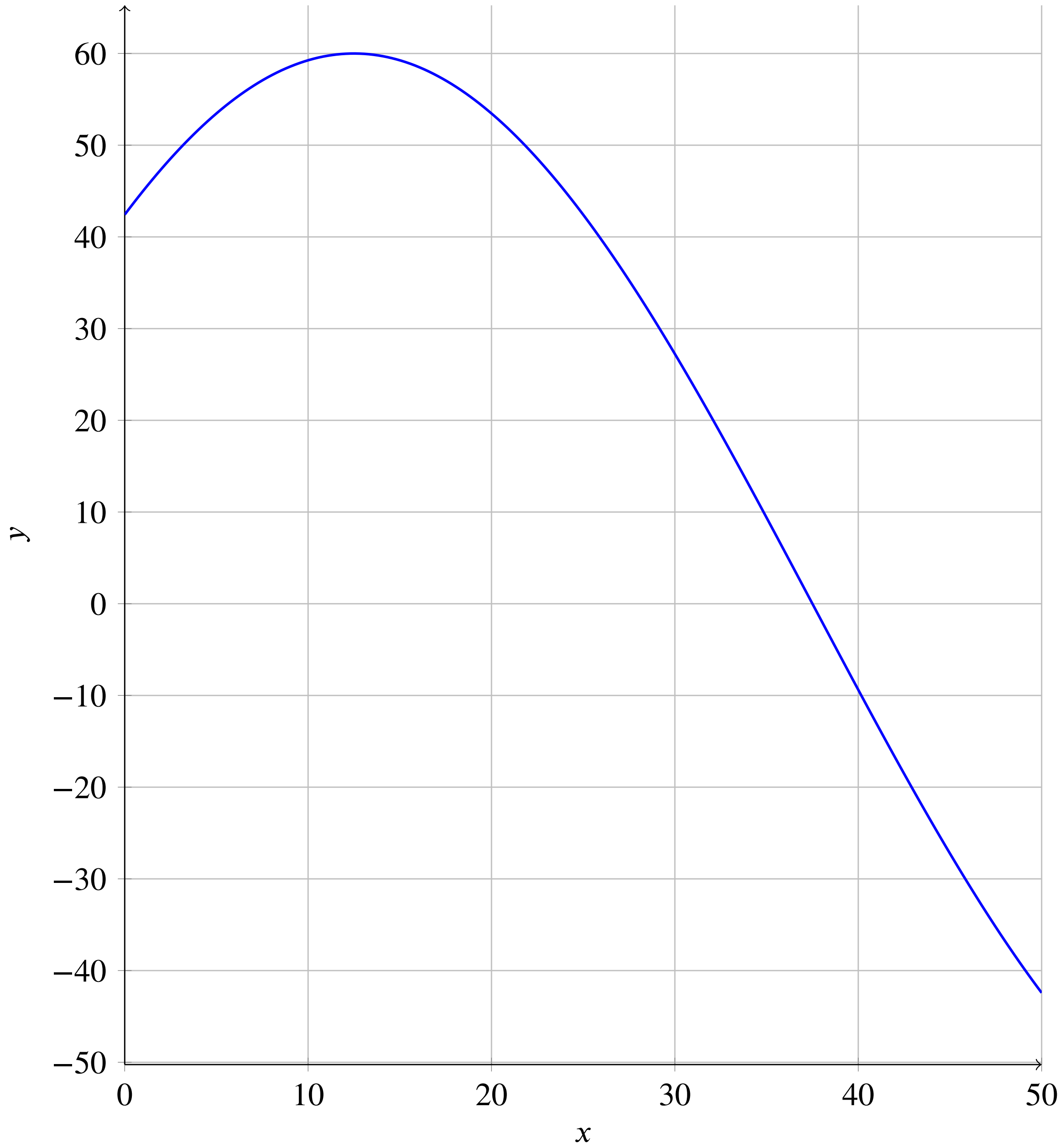
$$x_1 = x(t_1)$$

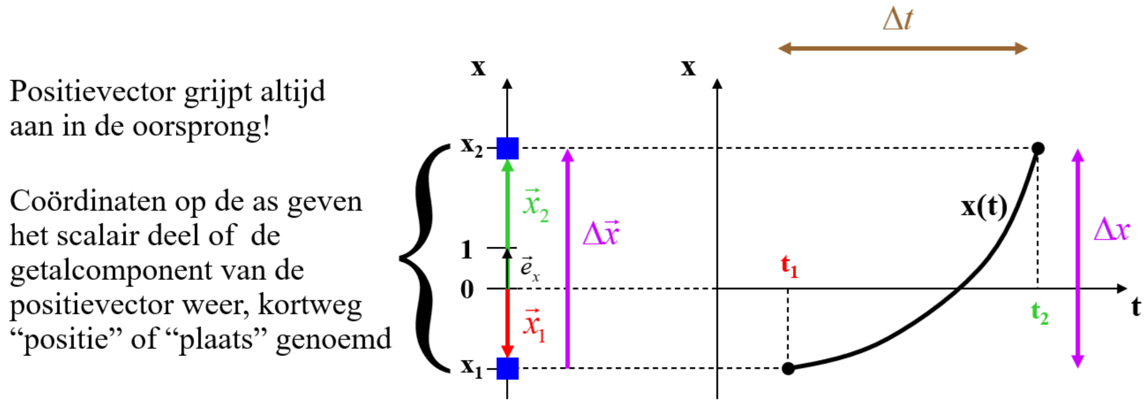
In onderstaande figuur zie je een auto op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ weergegeven op verschillende posities, met een grafiek van de bijbehorende plaatsfunctie.



Figuur 2: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

3.3 De positie



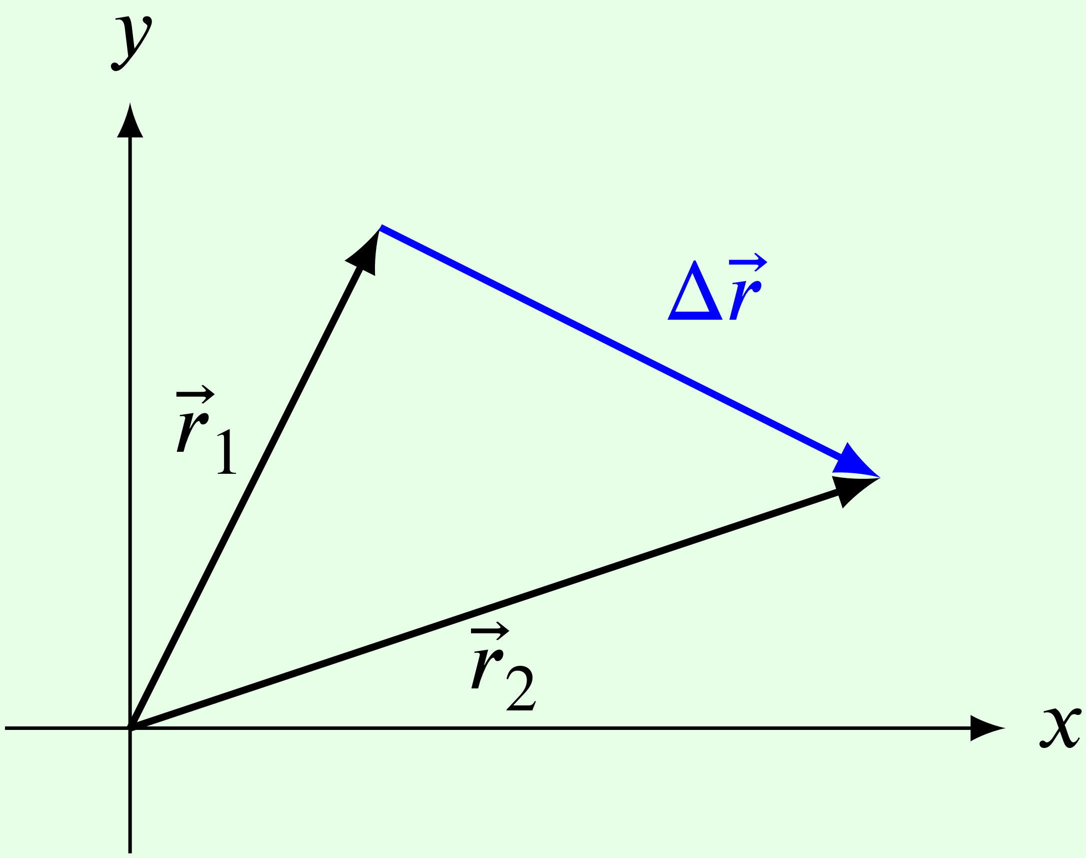


3.3 De positie

Figuur 3: Links het verplaatsend voorwerp met begin- en eindpositie. Rechts de grafiek van $x(t)$.
De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

Definitie 3.3.1. De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. In figuur 1 is de verplaatsing van de auto tussen de tijdstippen t_0 en t_1 gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 50\,\text{m} - 30\,\text{m} = 20\,\text{m}$ en is de verplaatsing tussen de tijdstippen t_2 en t_4 gelijk aan $\Delta x = x_4 - x_2 = -40\,\text{m} - 40\,\text{m} = -80\,\text{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de auto netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as.
Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.

3.3 De positie

Samengevat:

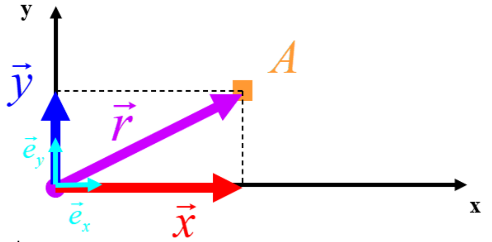
	Vectoriële notatie	Scalaire notatie
Positie op moment t:	$\boxed{\vec{x}(t) = x(t) \cdot \vec{e}_x = x \cdot \vec{e}_x}$	$\boxed{x(t) = x}$ (kan negatief zijn)
Verplaatsing op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:	$\boxed{\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1}$ $= x_2 \cdot \vec{e}_x - x_1 \cdot \vec{e}_x = (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x = \Delta x \cdot \vec{e}_x$	$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van de x-as)
Afgelegde weg op moment t: ($\neq$ verplaatsing)	/	$\boxed{s(t)}$ (kan niet negatief zijn, zie wiskunde)

	Vectoriële notatie	Scalaire notatie
Positie op moment t:	$\vec{x}_t = x(t) \cdot \vec{e}_x = x \cdot \vec{e}_x$	$x(t) = x$
Verplaatsing op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:	$\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$	$\Delta x = x_2 - x_1$
Afgelegde weg op moment t:	/	$s(t)$

3.3 De positie

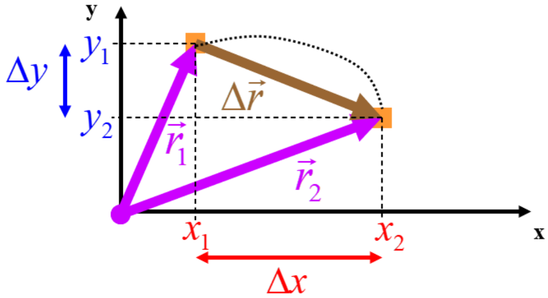
Voor tweedimensionale bewegingen worden de begrippen positie, verplaatsing en afgelegde weg complexer.

➢Positie (plaats) wordt vectorieel beschreven met de plaatsvector $\vec{r}$ of scalair met behulp van de coördinaten x en y. In dat laatste geval is de positie van een voorwerp A = co(A) = (x,y).



Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
$\vec{r}(t) = \vec{r} = \vec{x} + \vec{y} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$	$x(t) = x$; $y(t) = y$; $r(t) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

➢Verplaatsing wordt vectorieel beschreven met de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ of scalair met de horizontale verplaatsing Δx, de verticale verplaatsing Δy en de totale verplaatsing Δr.



Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y)$ $= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y = \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y$	$\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

- Verwar verplaatsing niet met afgelegde weg!
  Verplaatsing = rechtlijnige afstand tussen begin- en eindpunt (= afstand in vogelvlucht)
  Afgelegde weg = effectieve afstand die voorwerp heeft afgelegd (meestal langer)
- Zie ook figuren applet 2D bewegingen op Smartschool

3.4 De snelheid

Een voorwerp heeft snelheid als het beweegt, er is een verandering van de positie in de tijd. De snelheidsvector grijpt altijd aan op het voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke beweging, rakend aan de baan dus. In animaties lijkt het alsof de snelheidsvector aan de positievector "trekt". Bezie hiervoor animaties te vinden op https://www.hansbekaert.be/fysica/new/applets6.html.

Gemiddelde snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definitie 3.4.1. De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In de figuur is de gemiddelde snelheid van de auto tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{40\,\mathrm{m} - 50\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s}} = -1\,\mathrm{m/s}$. Als de snelheid negatief is betekent dit dat de auto achteruit rijdt.

Ogenblikkelijke snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t aan een puntmassa een positie x toe. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is m/s, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t, één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

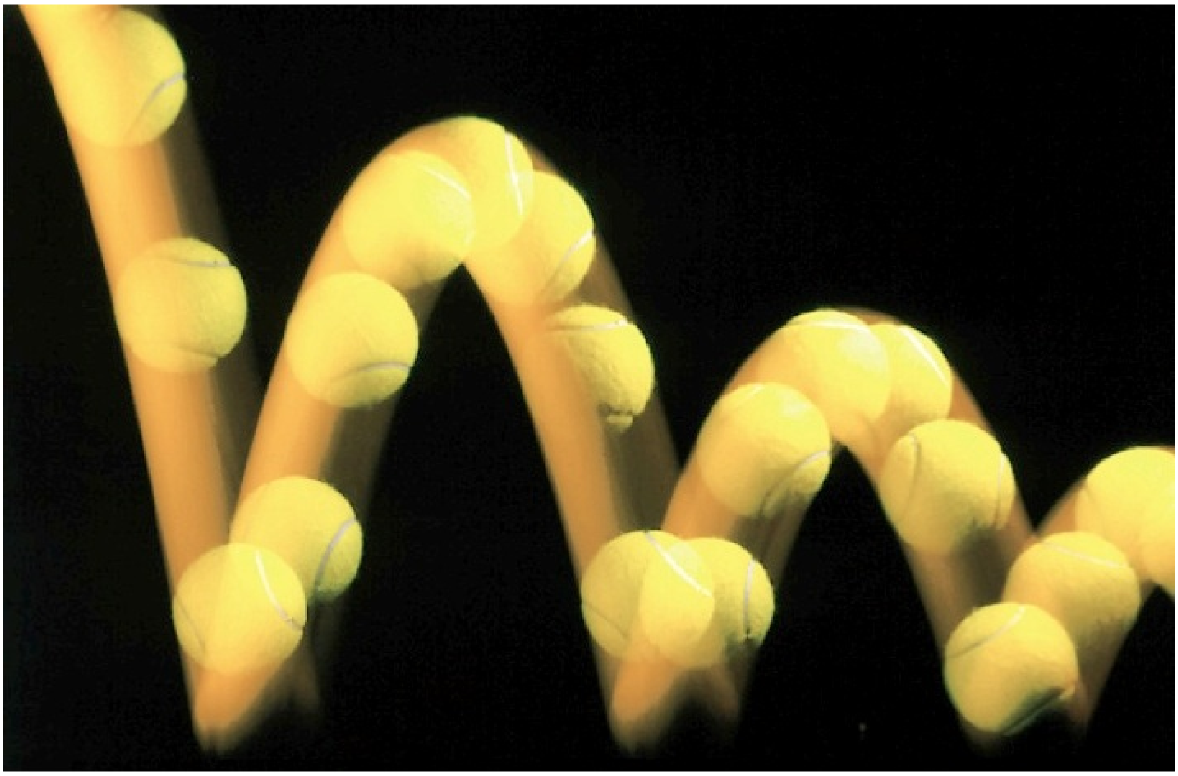
Om even over na te denken ...

Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul. **Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?**

‘Ja, maar’, ga je zeggen, ‘de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!’ Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[4] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

[4] Die je hebt moeten ingeven...

3.4 De snelheid



Figuur 4: Stuiterende tennisbal

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Op de stroboscopische foto van de stuiterende tennisbal is te zien dat de bal bovenaan trager beweegt dan wanneer hij de grond nadert. Bovenaan liggen de beelden immers dichter bij elkaar zodat de tennisbal minder afstand aflegt in de tijdsspanne tussen twee opeenvolgende opnames. Deze kwantitatieve[5] informatie die levert echter opnieuw gemiddelde snelheid en niet zomaar de ogenblikkelijke snelheid. De tennisbal verandert immers nog van snelheid tussen twee opeenvolgende opnames. Door de frequentie[6] waarmee de foto's worden genomen op te drijven, krijgen we een accurater beeld van de snelheid die de tennisbal op een gegeven moment heeft. De tijdsintervallen zijn nu immers korter zodat de bal minder van snelheid kan veranderen gedurende de intervallen en zodoende de gemiddelde snelheid een indicatie wordt van de ogenblikkelijke snelheid. De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de *limiet* van de gemiddelde snelheid over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

Definitie 3.4.2. De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

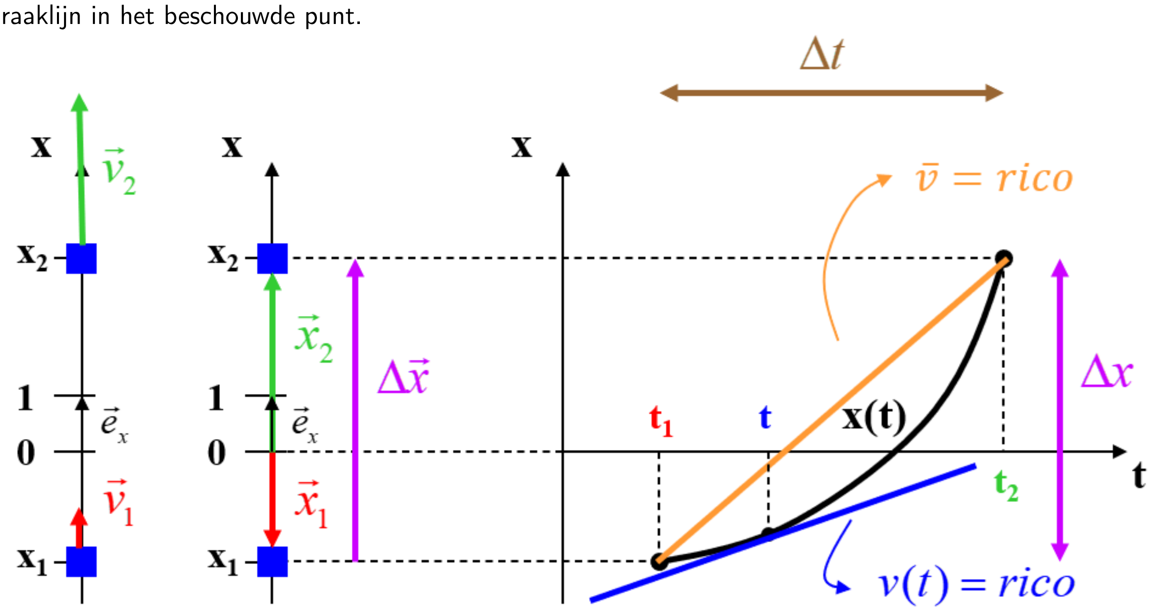
De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de

[5]Kwantitatief wil zeggen dat het over een hoeveelheid of een grootte gaat.

[6]Frequentie is een grootheid die aangeeft hoeveel cyclussen er per seconde worden doorlopen. Hier gaat het dus over het aantal beelden dat per seconde wordt gemaakt. De eenheid van frequentie is s^{-1} oftewel Hz (de Hertz).

raaklijn in het beschouwde punt.



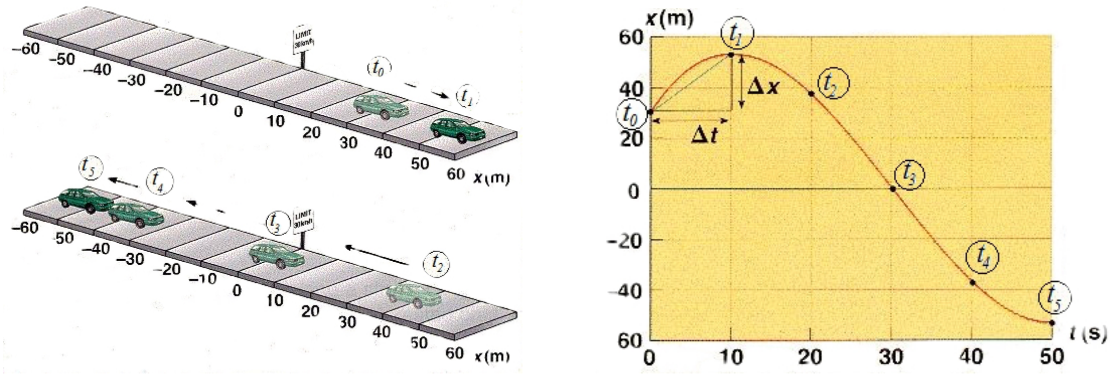
	Vectoriële notatie & definitie	Scalaire notatie & definitie
Gemiddelde snelheid op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:	$\boxed{<\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot\vec{e}_x}$	$\boxed{<v> = \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as)
Ogenblikkelijke snelheid op willekeurig tijdstip t	$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}}$ $= \frac{d(x\cdot\vec{e}_x)}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{e}_x + x\cdot\cancel{\frac{d\vec{e}_x}{dt}} = \frac{dx}{dt}\cdot\vec{e}_x = v\cdot\vec{e}_x$	$\boxed{v(t) = v = \frac{dx}{dt}}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van x-as)

Opmerking 3.4.1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

Oefening 3.4.1. Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van het autotje. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:

- Waar staat de auto stil?
- Waar heeft de auto een positieve snelheid?
- waar is de snelheid negatief?
- Op welk moment bewoog de auto het snelst?

3.4 De snelheid



Figuur 5: Verschillende posities en de grafiek van de plaatsfunctie

3.5 De versnelling

Een voorwerp versnelt of heeft versnelling wanneer de snelheid verandert in de tijd. Een synoniem voor het woord versnelling is acceleratie, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid

$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheids**verandering**

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke bewegings**verandering**.

Definitie 3.5.1. De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt uiteraard ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

- Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a}_t$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij ééndimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

  vb1 Een verticaal omhoog geworpen steen versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen.

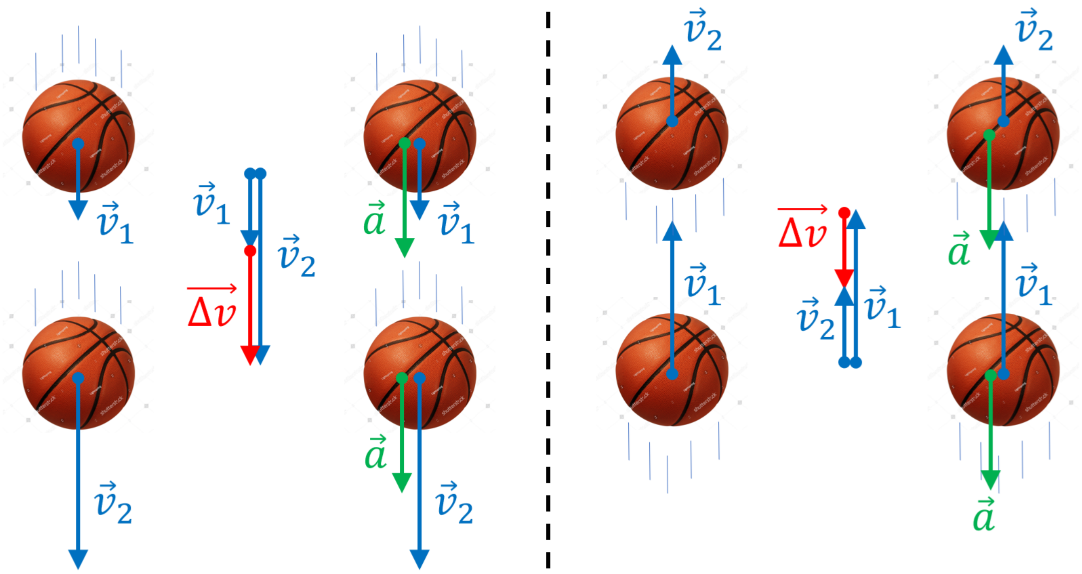
  vb2 Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van 3 $\mathrm{m/s^2}$. Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met 3 m/s verandert (of in dit geval toeneemt).

- Als enkel de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a}_n$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

- Combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal.

Opmerking 3.5.1. De zin van de snelheidsvector kan nooit plots veranderen omdat snelheid een grootheid is die enkel continu in de tijd kan veranderen. De zin van de snelheidsvector kan enkel wijzigen als de grootte van de snelheidsvector vermindert tot nul om dan nadien de tegengestelde zin uit te wijzen. In dit geval gaat het hier dus eveneens over de tangentiële versnelling.

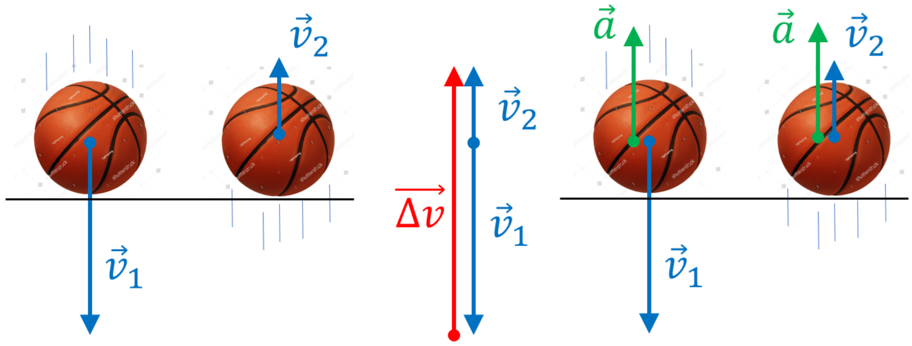
Verandering van snelheidsgrootte (tangentiële versnelling)



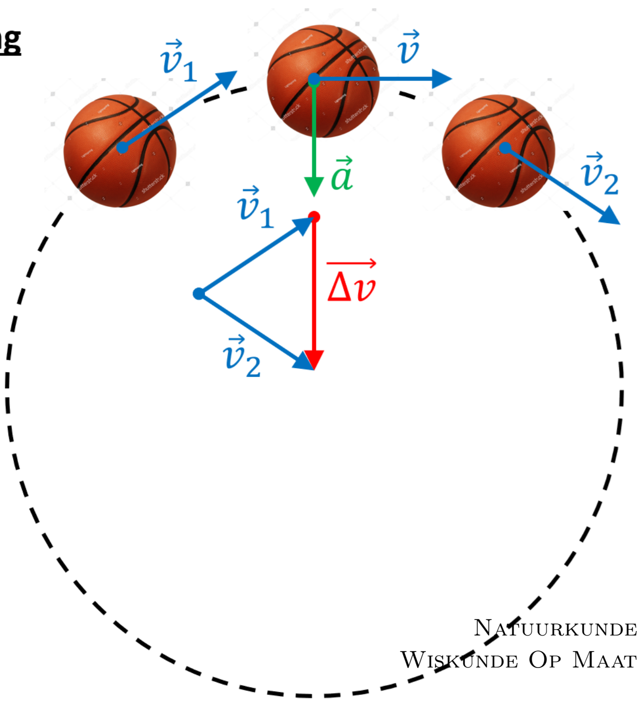
Bal valt verticaal naar beneden

Bal vliegt verticaal omhoog

Verandering van snelheidszin (tangentiële versnelling)



Verandering van snelheidsrichting (normale versnelling)



Combinatie van tangentiële en normale versnelling

In al deze voorbeelden lijkt het alsof de versnellingsvector aan de snelheidsvector "trekt".

Gemiddelde (tangentiële) versnelling bij ééndimensionale bewegingen

Definitie 3.5.2. Bij ééndimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\overline{a}$ scalair gedefinieerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Om even over na te denken ...

Kan je uitleggen wat de eenheid meter per seconde, per seconde betekent?

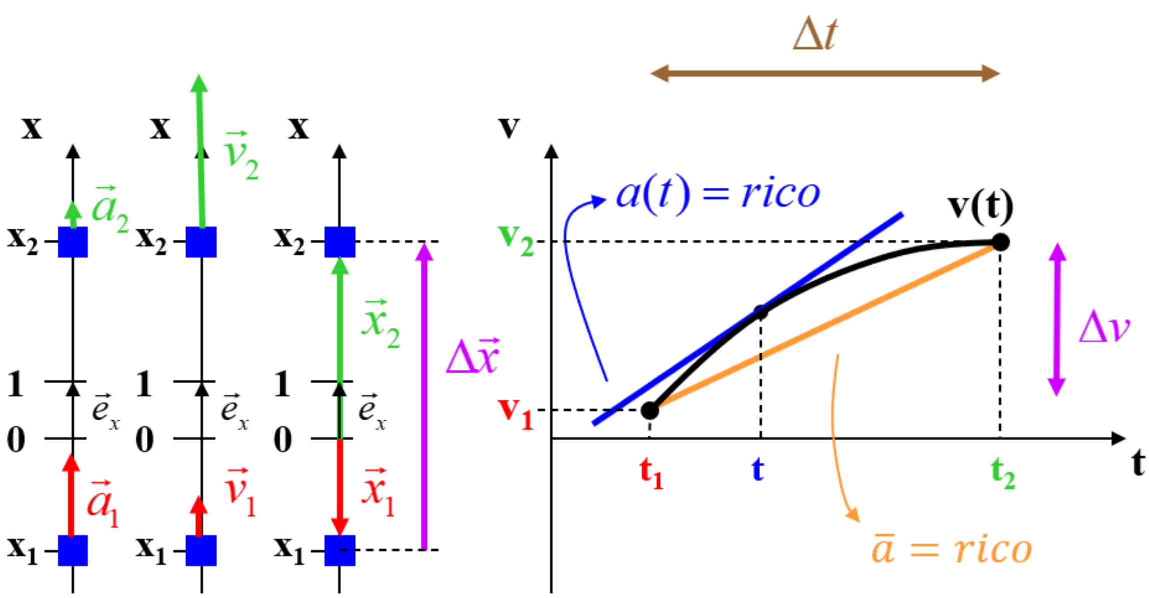
Ogenblikkelijke versnelling bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen t_1 en t_2. Om de ogenblikkelijke versnelling a op één tijdstip t te bepalen wordt -net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid- gebruik gemaakt van de afgeleide.

Definitie 3.5.3. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.



Opmerking 3.5.2. Het begrip versnelling in de fysica heeft niet dezelfde betekenis als hoe het begrip in de volksmond wordt gebruikt.

in de volksmond versnelling = vergroten van snelheid
vertraging = verkleinen van de snelheid
bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

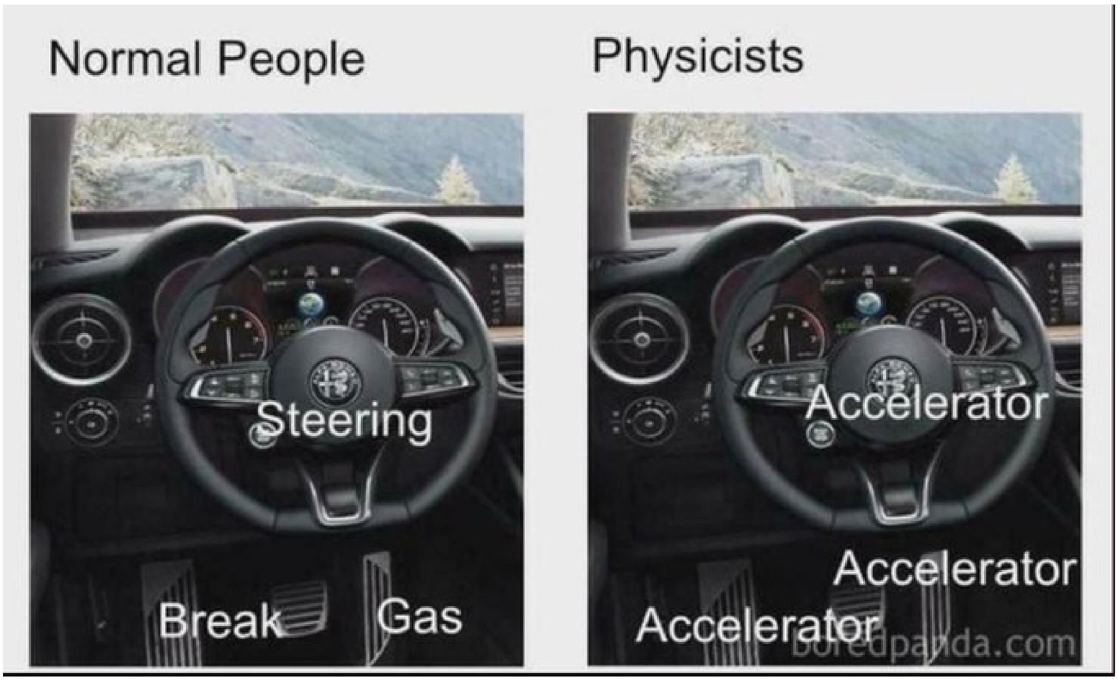
in de fysica versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

3.5 De versnelling

Fysisch zal men dus nooit spreken over een vertraging. Het vergroten of verkleinen van de snelheid moet bij ééndimensionale bewegingen tot uiting komen in de zin van de versnellingsvector ten op zichte van de zin van de snelheidsvector. Men kan dit ook zien aan het teken van de getalcomponent van de versnelling tegenover die van de snelheid. Voor ééndimensionale bewegingen geldt dat als $\vec{v}$ en $\vec{a}$ dezelfde zin hebben (of hun getalcomponenten eenzelfde teken hebben) dat de snelheid (in absolute waarde) vergroot. Bij tegengestelde zin (of teken) is er in absolute waarde een verkleining van de snelheid.

Opmerking 3.5.3. Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 m/s². Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk "snelheid" geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: "vitesse" (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

Oefening 3.5.1. Verklaar onderstaande meme.



3.6 Oefeningen kinematica

4.1 Inleiding

Beweging beschrijven is niet zo simpel als het in eerste instantie lijkt. Zo is bijvoorbeeld de beweging van een wolk eerder complex. Wat reken je al dan niet tot de wolk? Ook de bewegingen van de afzonderlijke moleculen in kaart brengen is een onmogelijke opgave omdat het aantal moleculen eerder groot is. Om toch vooruitgang te kunnen boeken, beginnen we met voorwerpen die we als een punt kunnen voorstellen. We maken dan abstractie van de ruimtelijke vorm van het object dat we beschrijven en doen alsof we het kunnen reduceren tot één enkele plaats in de ruimte. Zo zouden we het vliegen van een vlieg doorheen de kamer kunnen bekijken als een stipje. Het bewegen van de vleugels of de oriëntatie van de kop van de vlieg laten we dan buiten beschouwing. Ook deze beschrijving kunnen we inperken; we gaan in eerste instantie enkel bewegingen beschrijven die voor te stellen zijn op een rechte lijn. Dit noemen we eendimensionale bewegingen. Als we de beschrijving hiervan eenmaal kennen, kunnen we later dit met behulp van vectoren gemakkelijk uitbreiden naar een beschrijving van bewegingen in twee- of drie dimensies.

Om het ons gemakkelijk te maken, zullen we in dit hoofdstuk enkel werken met de getalcomponenten van de vectoren. Dat gaat omdat we steeds in één dimensie werken en de eenheidsvector dan steeds gelijk blijft. Als we v_x kennen, vinden we direct de vectorcomponent volgens de x-as met $\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{e}_x$. Bovendien kunnen we de index x ook weglaten. We weten dat het steeds over de x-as gaat.

[7]

[7] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

4.2 Eenparige rechtlijnige beweging

Een eenvoudige beweging om te bestuderen is de *eenparig rechtlijnige beweging* (afgekort ERB). De snelheid van de beweging is eenparig of gelijkmatig verdeeld wat betekent dat de snelheid steeds gelijk blijft. M.a.w. is de snelheid constant en dus de versnelling gelijk aan nul. Aangezien de snelheid niet verandert is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid. Met deze observatie kan je eenvoudig een functie opstellen voor de plaatsfunctie van deze beweging:

$$
\begin{aligned}
v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta x = v\Delta t \\
&\Leftrightarrow \quad x - x_0 = v(t - t_0) \\
&\Leftrightarrow \quad x = x_0 + v(t - t_0)
\end{aligned}
$$

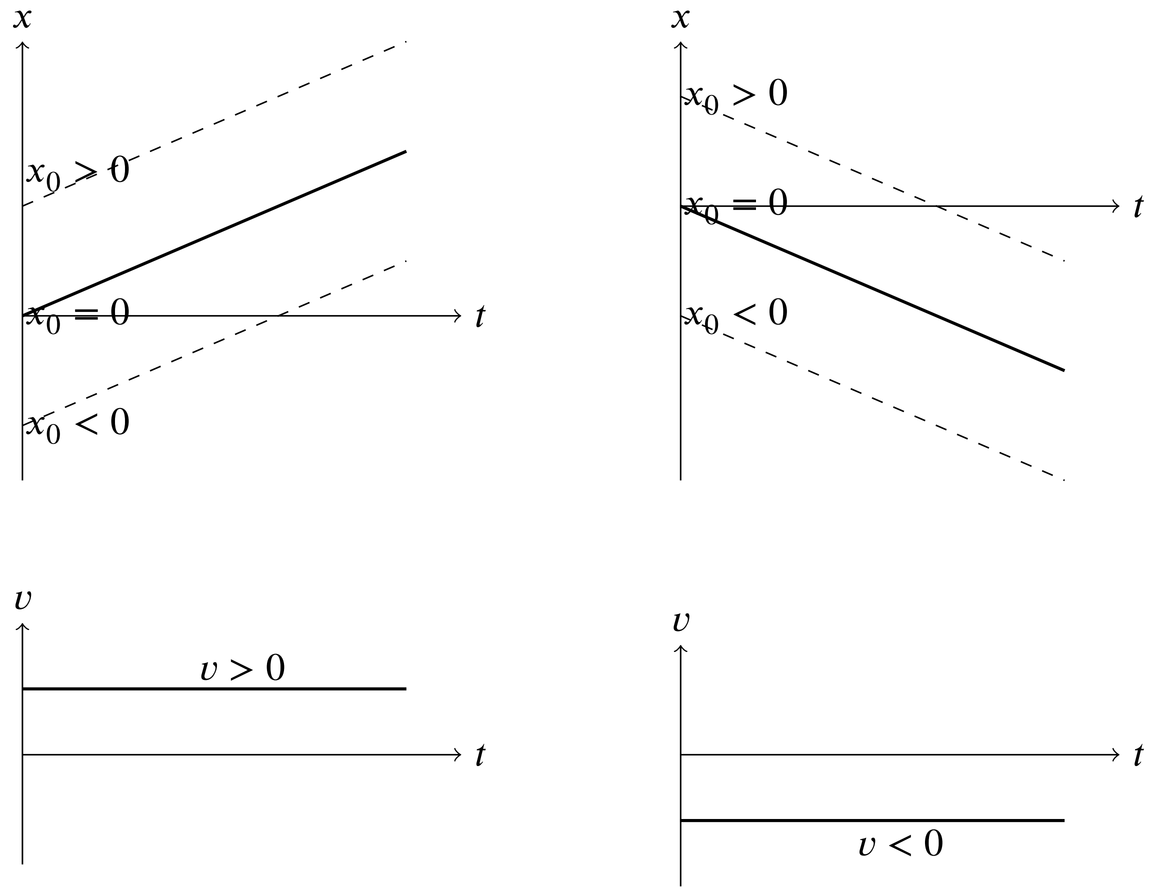
Stelling 4.2.1. De plaatsfunctie $x(t)$ van een ERB met snelheid v is gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

waarbij $x_0 = x(t_0)$ de coördinaat op het tijdstip t_0 is. Als $t_0 = 0$ dan vereenvoudigt de plaatsfunctie tot

$$x(t) = x_0 + vt \tag{1}$$

De snelheid v is gelijk aan de beginsnelheid $v_0 = v(t_0)$ omdat in een ERB de snelheid constant is. De snelheidsfunctie is $v(t) = v$ en de versnellingsfunctie is $a(t) = 0$.



Figuur 6: Grafieken van een ERB

4.3 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De ééndimensionale beweging met een constante versnelling wordt de *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* genoemd (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; bij een constante versnelling is de *verandering* van de snelheid steeds gelijk. De grafiek van $a(t) = a$ is een constante met a een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Voor een constante versnelling is de snelheid in functie van de tijd een lineaire functie (in de tijd).

> **Opmerking 4.3.1.** Strikt genomen wordt hier iets over het hoofd gezien. A priori zou het immers kunnen dat er nog andere functies dan lineaire functies zijn waarvoor de afgeleide een constante functie is. Dat is echter niet het geval. Het bewijs hiervan zie je later dit jaar in het vak wiskunde. Je bewijst dat alle mogelijke functies die in aanmerking komen slechts op een constante na aan elkaar gelijk zijn.

Uit het snelheidsverloop kan je de plaats afleiden. De snelheid is de afgeleide van de plaatsfunctie. Voor een lineaire snelheidsfunctie is de positie bijgevolg een kwadratische functie (in de tijd). De afgeleide van een kwadratische functie is immers een lineaire functie.[8]

Dat de positie in functie van de tijd een tweedegraadsveeltermfunctie is, geeft in symbolen:

$$x(t) = pt^2 + qt + r$$

De constanten p, q en r is deze formule hebben een fysische betekenis. De snelheid is de afgeleide van deze plaatsfunctie en de versnelling komt overeen met de tweede afgeleide. Dit levert:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2pt + q$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2p$$

Voor de EVRB is de versnelling constant en bijgevolg volgt uit de laatste regel dat $a(t) = a = 2p \Leftrightarrow p = \frac{a}{2}$.

Noteer met $v_0 = v(0)$ de snelheid op tijdstip $t = 0$. In de eerste vergelijking $t = 0$ invullen levert dan $q = v_0$. De constante q stelt de beginsnelheid voor.

Noteer met $x_0 = x(0)$ de positie op tijdstip $t = 0$. In de plaatsfunctie $t = 0$ invullen levert dan $r = x_0$. De constante r stelt dus de beginpositie voor.

> **Stelling 4.3.1.** De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling a worden gegeven door:
>
> $$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$
>
> Hierin is x_0 de *beginpositie* en v_0 de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip t_0, dan wordt in de beschrijving t vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip t_0. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

[8] Hier geldt een gelijkaardige opmerking.

4.3 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:

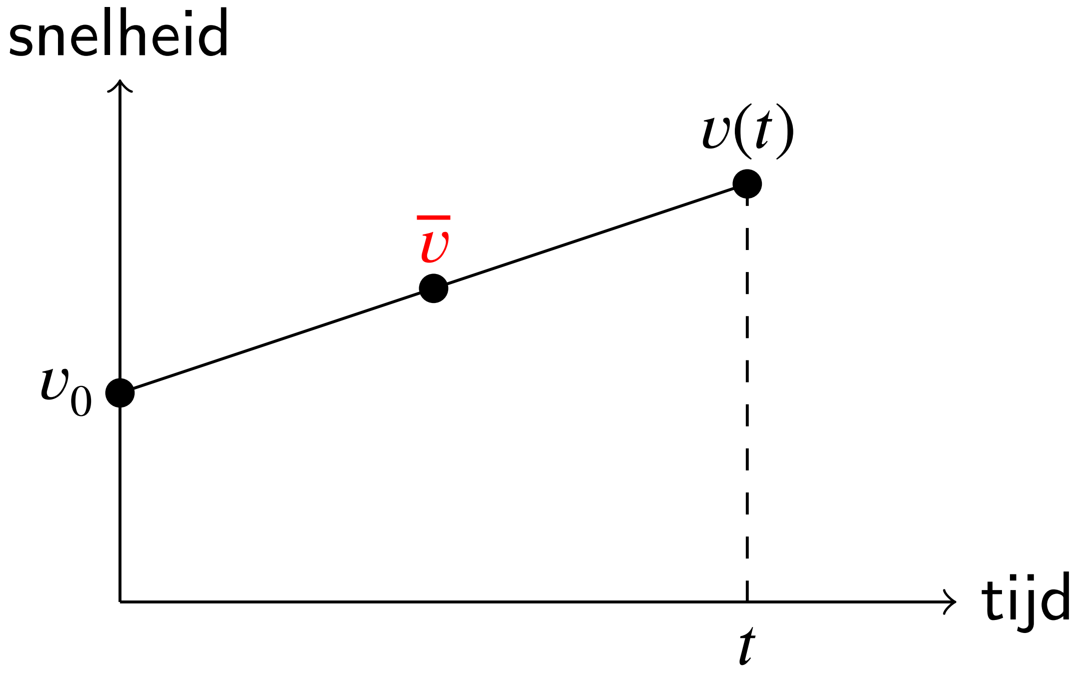
$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Oefening 4.3.1. Bewijs bovenstaande formule.

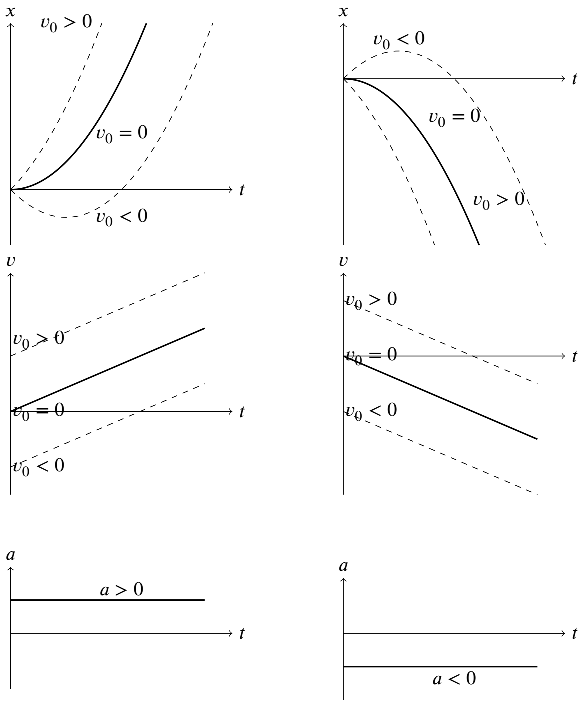
Uitwerking:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{2v_0 + v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

bij een EVRB kan je dus het rekenkundig gemiddelde gebruiken om de gemiddelde snelheid te berekenen. In onderstaande figuur is $\overline{v}$ grafisch weergegeven als het midden van de lineaire snelheidsfunctie.



4.3 Eenparige versnelde rechtlijnige beweging



Figuur 7: Grafieken van de EVRB

Oefening 4.3.2. Een auto die 60 km/h rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na 70 cm tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in g, waarbij $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Uitwerking: Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een *uitdrukking* vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.[a] Uit $v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, wat gelijk is aan $20g$.

[a] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...

4.4 Oplossingsstrategie

Vraagstukken in de kinematica kan je vaak op dezelfde manier banaderen. Elke opgave blijft echter anders, creativiteit is dus noodzakelijk.

(a) Lees het vraagstuk aandachtig. Zorg dat je duidelijk weet wat er gevraagd wordt.

- als je correct de snelheid op t_3 berekent maar de snelheid op t_2 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- als je correct de postitie op t_1 berekent maar de positie op t_0 was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- ...

(b) Kies het systeem (object, lichaam, massa, geheel van lichamen) waarvan je een onbekende posititie, snelheid of versnelling wilt berekenen.

(c) Maak een tekening van dit systeem. Teken een coördinaatsas.

(d) Bepaal de gegevens uit het vraagstuk. Welke heb je nodig om de oplossing te bepalen?

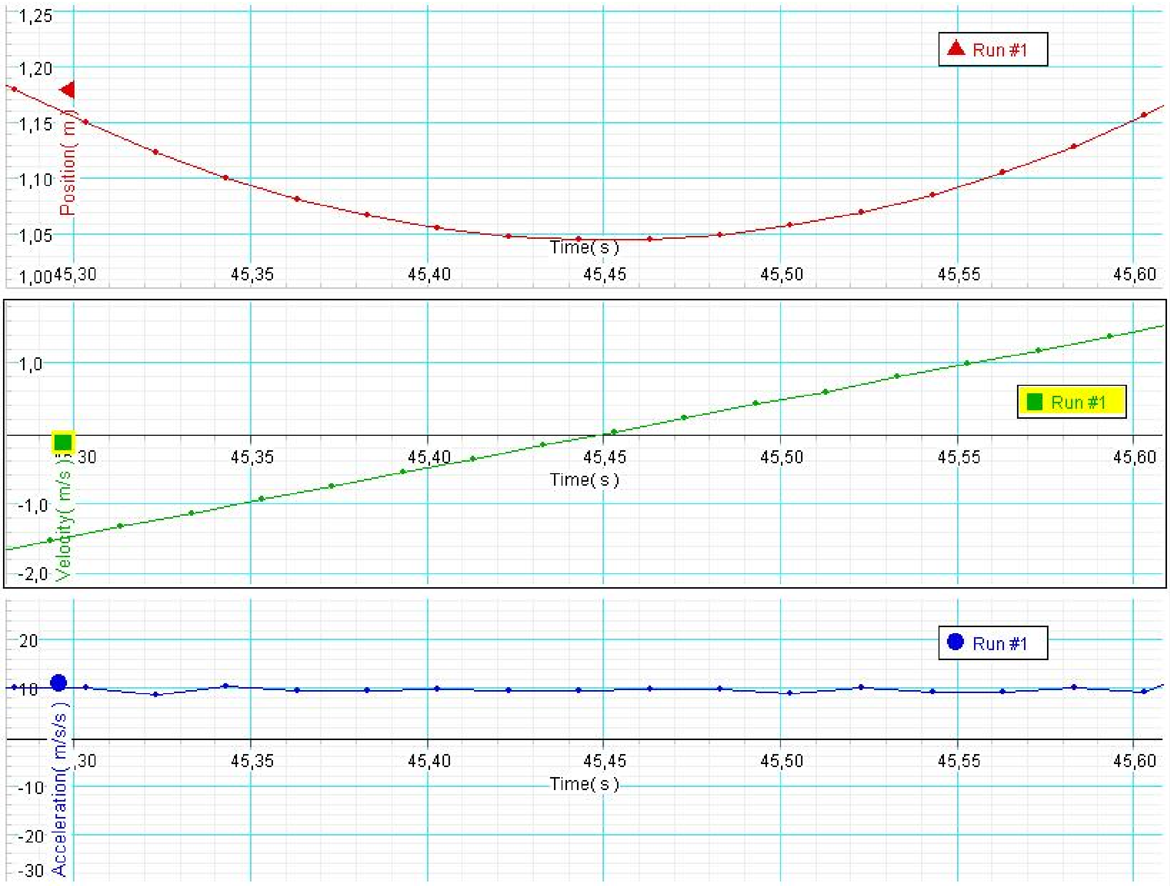
(e) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor positie, snelheid en versnelling om het gevraagde te berekenen.

(f) Heeft je oplossing de juiste eenheiden en grootteorde? De snelheid van een tennisbal in de eenheid $\frac{s}{m^2}$ is waarschijnlijk fout. Als het enkele minuten duurt voordat de bowlingbal de kegels raakt, heb je waarschijnlijk ergens een (reken)fout gemaakt ...

4.5 Verticale worp

In het jaar 1586 stond een wetenschapper uit Brugge op de Nieuwe Kerk van Delft . Onze perceptie leert dat zwaardere lichamen sneller vallen dan lichtere. Een pluim en een steen komen in regel niet op hetzelfde moment op de grond terecht. Toch blijkt deze intuitie niet te kloppen. Simon Stevin liet vanop de kerktoren twee loden bollen met een verschillend gewicht vallen en stelde vast dat ze op hetzelfde moment de grond raakten.

In vacuüm – waar voorwerpen geen luchtweerstand ondervinden – blijkt de massa geen rol te spelen bij de constante versnelling die de voorwerpen krijgen: alle voorwerpen vallen met dezelfde versnelling! Met lode bollen kon Simon Stevin dit effect uitschakelen. De theoretische verklaring voor dit experiment hoort thuis in de dynamica. In de kinematica wordt enkel de beweging beschreven. Omdat de valversnelling constant is, heb je hier simpelweg met een EVRB te maken.



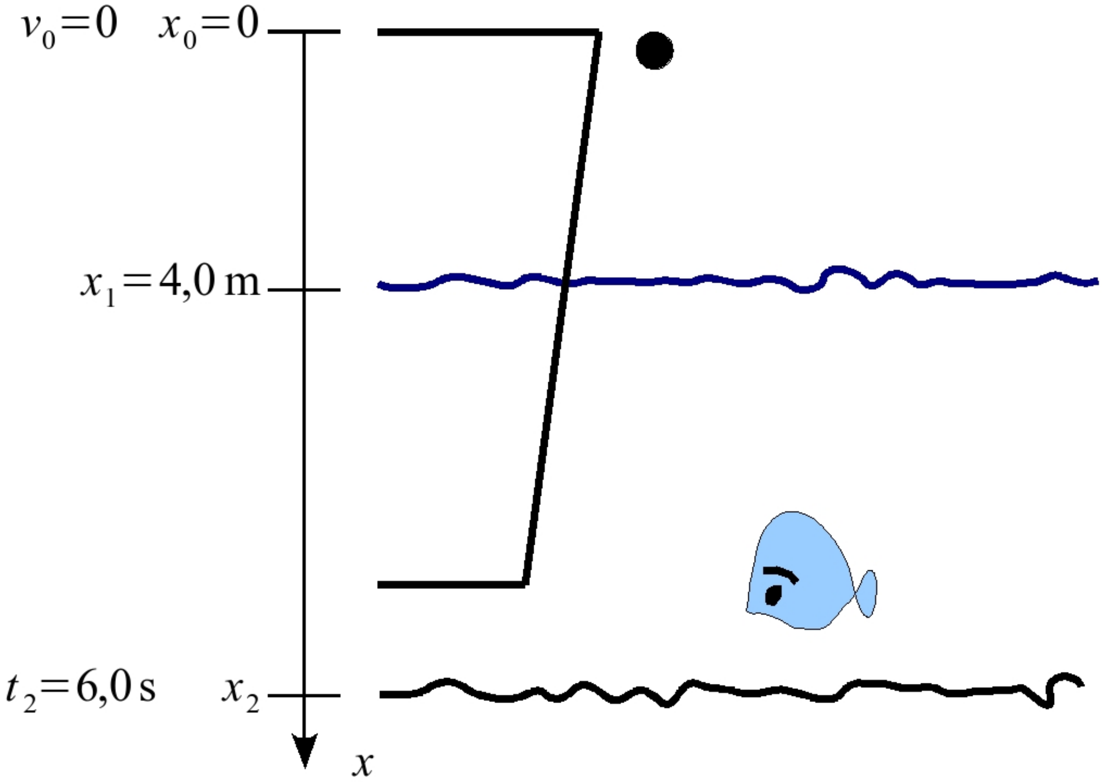
Figuur 8: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp waarbij de as naar beneden is georiënteerd.

Strikt genomen verschilt de valversnelling van plaats tot plaats op de aarde, maar voor het gemak nemen wij in vraagstukken de waarde

$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}.$$

Omdat de verticale worp een EVRB is, kunnen we de formules (**??**) en (**??**) gebruiken om een valbeweging te beschrijven. Voor de versnelling a nemen we dan $a = g$ of $a = -g$ al naargelang de oriëntatie van de coördinaatas.

Oefening 4.5.1. Simon Stevin laat van de boord van een schip een loden bol in het water vallen. De boord bevindt zich $4,0\,\mathrm{m}$ boven het wateroppervlak. De loden bol zinkt vervolgens met de snelheid waarmee hij het water raakte. Er zijn $6,0\,\mathrm{s}$ tussen het tijdstip waarop de bol valt en ze de bodem van het water bereikt.



1. Hoe diep is het water?

2. Wat is de gemiddelde snelheid van de bol over het hele traject?

Uitwerking: De beweging is opgebouwd uit twee verschillende soorten bewegingen. Het eerste stuk is een vrije val, wat een EVRB is. In het tweede stuk (onder water) is de snelheid constant en is er dus geen versnelling. In geen geval kunnen we dus de formules voor een EVRB op het geheel toepassen. Die zijn immers afgeleid voor een beweging waar de versnelling (altijd, gedurende de hele beweging) constant is.

Omdat we weten hoe ver de bol moet vallen voordat hij het wateroppervlak bereikt, kunnen we zowel de tijd die de bol hiervoor nodig heeft als de snelheid waarmee de bol het wateroppervlak raakt, bepalen. We kiezen een as naar beneden zodat – omdat de snelheid in deze richting toeneemt – de versnelling positief is en gelijk aan de valversnelling g (toch voor het eerste stuk). De beginsnelheid van de bol is nul omdat hij vanuit rust wordt losgelaten. Voor de tijd vinden we:

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}}$$

Met de tijd[a] kunnen we de snelheid op het wateroppervlak vinden.

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{2gx_1}$$

Onder water, in het tweede stuk, beweegt de kogel met deze snelheid gedurende de resterende tijd: $6{,}0$ seconden min de tijd t_1 (**??**) die de kogel nodig had om te vallen. De afstand die de bol onder water aflegt, vinden we met de eenvoudige formuletjes van een ERB[b]. We substitueren ook vergelijkingen (**??**) en (**??**).

4.5 Verticale worp

$$\begin{array}{rcl} \Delta x & = & \overline{v} \cdot \Delta t \\ & \Downarrow & \\ x_2 - x_1 & = & v_1(t_2 - t_1) \\ & = & \sqrt{2gx_1}(t_2 - \sqrt{\frac{2x_1}{g}}) \\ & = & \sqrt{2gx_1}t_2 - 2x_1 \\ & = & 45\,\mathrm{m} \end{array}$$

De gemiddelde snelheid vinden we door de totale afgelegde weg te delen door de totale benodigde tijd. Andere formuletjes zoals $\overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ zijn niet van toepassing omdat het helemaal niet over één EVRB gaat waar dit formuletje geldt omdat de snelheid mooi lineair toeneemt. Hier gebeurt dat enkel in het eerste stuk en worden de verschillende snelheden niet even lang aangehouden zodat ze een verschillend aandeel hebben in de totale benodigde tijd.

$$\begin{array}{rcl} \overline{v}_{02} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2}{t_2} & = & \frac{\sqrt{2gx_1}t_2 - x_1}{t_2} \\ & = & \sqrt{2gx_1} - \frac{x_1}{t_2} \\ & = & 8,2\,\mathrm{m/s} \end{array}$$

[a]We zouden de tijd met het gevonden formuletje kunnen uitrekenen en met het getalletje dat we vinden verder rekenen. Maar met het formuletje verder werken – algebraïsch of symbolisch – is toch o zo veel knapper en van toepassing voor álle boten en niet enkel voor een boot waarvoor het dek zich $4,0$ meter boven het wateroppervlak bevindt. Bovendien is het "echte" fysica omdat je een "model" uitwerkt en niet een rekensommetje oplost...

[b]Opmerking, een ERB is een speciaal geval van een EVRB. Een ERB heeft als constante versnelling $a = 0$.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=[Een universiteitscollege over de leerstof van dit hoofdstuk.]
YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o

5.1 Inleiding

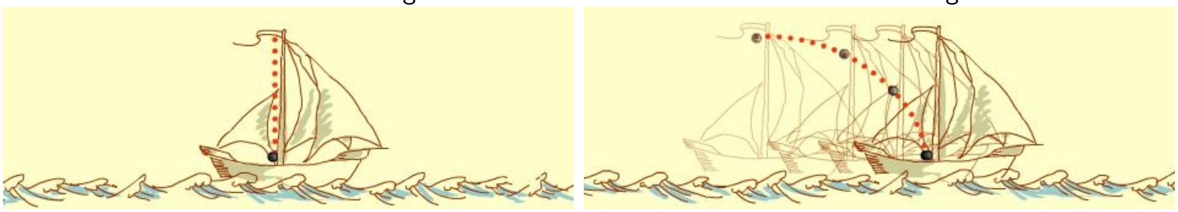
Als we in een vlak bewegen, hebben we te maken met een tweedimensionale beweging. Om ze te beschrijven voeren we nu een referentiestelsel met twee assen in. In de regel kiezen we een cartesiaans assenstelsel. Door de coördinaten (x, y) van een punt dat het bewegende object voorstelt te geven, kunnen we de positie beschrijven. We kunnen echter ook een vector gebruiken.

Figuur 9: Sterrentrajecten aan de hemel

Omdat we om de snelheid van het object te kunnen beschrijven niet voldoende hebben aan alleen maar de grootte maar ook nood hebben aan een richting, maken we nu expliciet gebruik van vectoren en hun geschikte eigenschappen. Naast een nieuwe as voor de extra dimensie is het gebruik van vectoren de enige aanpassing die we aan ons formalisme van de kinematica moeten doen om bewegingen in twee dimensies te kunnen beschrijven.

5.2 Onafhankelijkheidsbeginsel

Stel je voor dat het heel mooi weer is. Zo van dat weer waar de hemel hemelsblauw is, er geen wolken aan de lucht zijn, de zon aan de hemel schittert en je niets liever doet dan een frisse neus halen. In zo'n weer zouden we diep in en uit ademen. Oh ja, detail, stel je ook voor dat er *geen*[9] lucht is. Stel je bovendien voor dat je in het kraaiennest van een piratenschip zit. Het schip vaart met een gestadige, grote en constante snelheid over het zee-oppervlak dat geen enkele rimpeling vertoont. Golven zijn er niet[10]. Stel je ook voor dat je een nogal zware kogel naar je uitkijkpost hebt meegenomen[11]. Als je nu deze kogel laat vallen, met zicht op het achtersteven van het schip, dan ...dan valt hij natuurlijk regelrecht naar beneden op het hoofd van de kapitein die aan de voet van de mast staat en waarvoor me het arsenaal bijvoeglijke naamwoorden om zijn onuitstaanbaarheid te kunnen uitdrukken, even ontbreekt. Stel je nu ook voor dat zogezegd door de snelheid van het schip de kogel *achter* het schip zou terechtkomen[12] ..., dan zouden in een snel rijdende trein de valiezen die je op het rek legt zich met een enorme snelheid naar de achterkant van de wagon begeven, de kaarten die je wilt afleggen eveneens dezelfde plaats opzoeken i.p.v. netjes op de aflegstapel te blijven liggen en dan zou de dame van de koffiebar enig kuiswerk hebben met de koffie die een ware ravage zou aanrichten ...



Figuur 10: Dezelfde beweging van een kogel gezien door een waarnemer op het schip en een waarnemer buiten het schip.

Conclusie? Wel, de conclusie is enerzijds dat door de traagheid de kogel tijdens de val zijn snelheid vooruit, volgens de beweging van het schip, behoudt en recht op de kapitein terechtkomt en anderzijds dat de tijd die de kogel nodig heeft om in het luchtledige op de grond terecht te komen, onafhankelijk is van de snelheid die de kogel al dan niet meekrijgt in horizontale richting. De beweging van de kogel is immers voor iemand op het schip een verticale valbeweging en voor een buitenstaander een horizontale worp. Maar in beide gevallen gaat het om dezelfde beweging en dus ook over dezelfde benodigde tijd.[13]

[9] Begrijpelijk zou je kunnen opwerpen dat het nogal moeilijk is om frisse lucht die er niet is, in te ademen.
[10] Ook hier zou je kunnen opperen dat een zee zonder golven niet echt een zee is.
[11] Tja, in een gedachte-experiment zoals dit is veel mogelijk.
[12] Jawel, er zijn er onder ons die zich dat voorstellen
[13] Mooie animatie: http://www.pbs.org/wgbh/nova/galileo/expe_flash_2.html

5.3 Eenparige cirkelbeweging

5.3.1 Plaats, verplaatsing, afgelegde weg

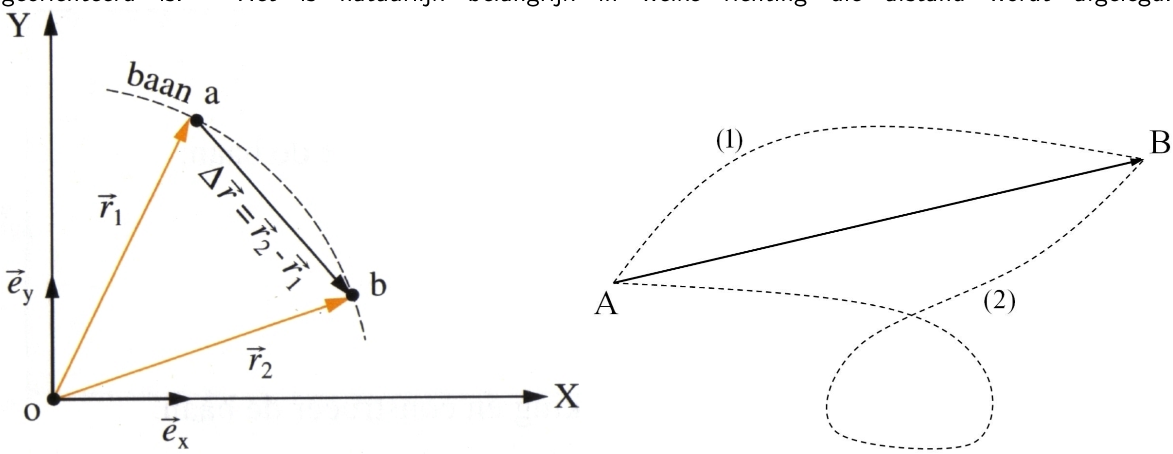
Om aan een vectoriële snelheid te komen, voeren we een plaatsvector $\vec{r}$ in. Deze kan van de tijd afhangen en kunnen we met behulp van de eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ schrijven als

$$\vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y.$$

De tijdsafhankelijkheid kunnen we expliciet weergeven door $x(t)$ en $y(t)$ te gebruiken i.p.v. x en y. De functies $x(t)$ en $y(t)$ noemen we de *coördinaatfuncties*. Door de plaats met een vector te beschrijven, kunnen we het begrip verplaatsing Δx ook gemakkelijk en analoog uitbreiden naar twee dimensies. De verplaatsing

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

is nu immers ook een vector die naast de afstand in vogelvlucht tussen twee punten, ook geöriënteerd is. Het is natuurlijk belangrijk in welke richting die afstand wordt afgelegd.



Figuur 11: Het verschil tussen afgelegde weg en verplaatsing

Merk op dat de begrippen verplaatsing en afgelegde weg niet hetzelfde zijn. De afgelegde weg hangt af van de gevolgde baan en is de totale afgelegde afstand terwijl de verplaatsing enkel van begin- en eindpunt afhangt en een vectorgrootheid is.

Naast de coördinaatfuncties $x(t)$ en $y(t)$ is er ook de vergelijking van de baan $y(x)$. We bekomen deze door de tijd uit de coördinaatfuncties te elimineren[14]. De grafiek van deze baanvergelijking geeft ons het beeld van de baan maar zegt niets over de snelheid waarmee het object over deze baan beweegt. Daarvoor hebben we de afhankelijkheid van de tijd nodig.

[14] Dit komt neer op de inverse $t(x)$ van $x(t)$ te vinden en deze te substitueren in $y(t)$. Dus $y(x) = y(t(x))$.

5.3 Eenparige cirkelbeweging

5.3.2 Snelheid

Analoog aan de snelheid in één dimensie, kunnen we in meerdere dimensies de snelheid definiëren als de afgeleide – nu van de plaatsvector. De snelheid is dan opnieuw een vector:[15]

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y\right) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y$$

De eenheidsvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ veranderen niet in de tijd zodat we die buiten de afgeleide hebben kunnen brengen. We zien dat de snelheidsvector dus te ontbinden is in componenten waarbij de componenten gewoonweg de snelheden van de afzonderlijke coördinaten zijn.

$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y \quad \text{met} \quad v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt}$$

Eigenschap 1. *De snelheidsvector is rakend aan de baan.*

Bewijs We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\dfrac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\dfrac{v_y}{v_x}$. ■

5.3.3 Versnelling

Ook de versnelling definieren we analoog; als afgeleide van de snelheid.

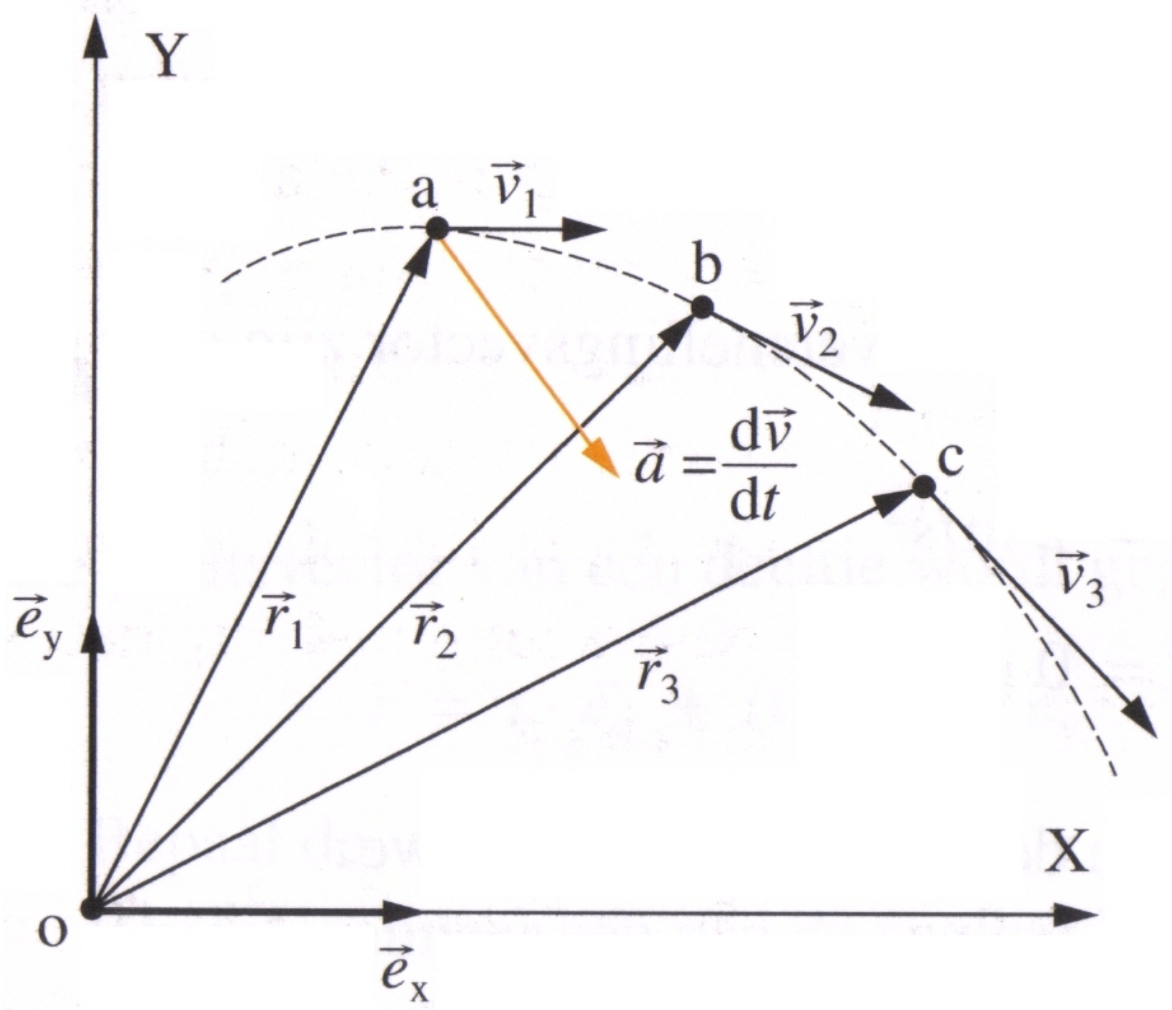
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y$$

Merk op dat er een versnelling kan zijn wanneer de snelheidsvector van grootte verandert maar óók wanneer de snelheidsvector van richting verandert! Als de snelheidsvector immers van richting verandert, veranderen zijn coördinaten v_x en/of v_y. Merk bovendien op dat de versnelling niet noodzakelijk samen hoeft te vallen met de baan

[15] De definitie van een afgeleide van een vector is evenzeer met een limiet. We maken gebruik van de uitdrukkingen $\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{e}_x + y(t+\Delta t)\vec{e}_y$ en $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$.

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[x(t+\Delta t)\vec{e}_x + y(t+\Delta t)\vec{e}_y] - [x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{[x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{e}_x + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{e}_y}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right)\vec{e}_x + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\right)\vec{e}_y \\
&= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y
\end{aligned}$$

5.3 Eenparige cirkelbeweging



...

Figuur 12: De versnelling raakt niet noodzakelijk aan de baan

Opdracht De positie van een deeltje als functie van de tijd wordt beschreven door

$$\vec{r} = bt\vec{e}_x + (c - dt^2)\vec{e}_y$$

met $b = 2,00\,\mathrm{m/s}$, $c = 5,00\,\mathrm{m}$ en $d = 1,00\,\mathrm{m/s^2}$.

(i) Druk y uit in functie van x. Hoe ziet de baan eruit?

(ii) Bepaal de snelheidsvector.

(iii) Op welk tijdstip ($t > 0$) staat de snelheid loodrecht op de plaatsvector?

oplossing (i) We moeten dus de baanvergelijking geven. Dit doen we door de tijd uit te drukken i.f.v. de positie x en dit te substitueren in de coördinaatvergelijking $y(t)$.

$$\begin{aligned} x &= bt \Leftrightarrow t = \frac{x}{b} \\ &\Downarrow \\ y &= c - dt^2 = c - \frac{d}{b^2}x^2 \end{aligned}$$

Dit is een bergparabool met top $(0, c) = (0, 5,00\,\mathrm{m})$

(ii) De componenten van de snelheid zijn:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = b \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -2dt \end{aligned}$$

zodat de snelheid(svector) wordt gegeven door

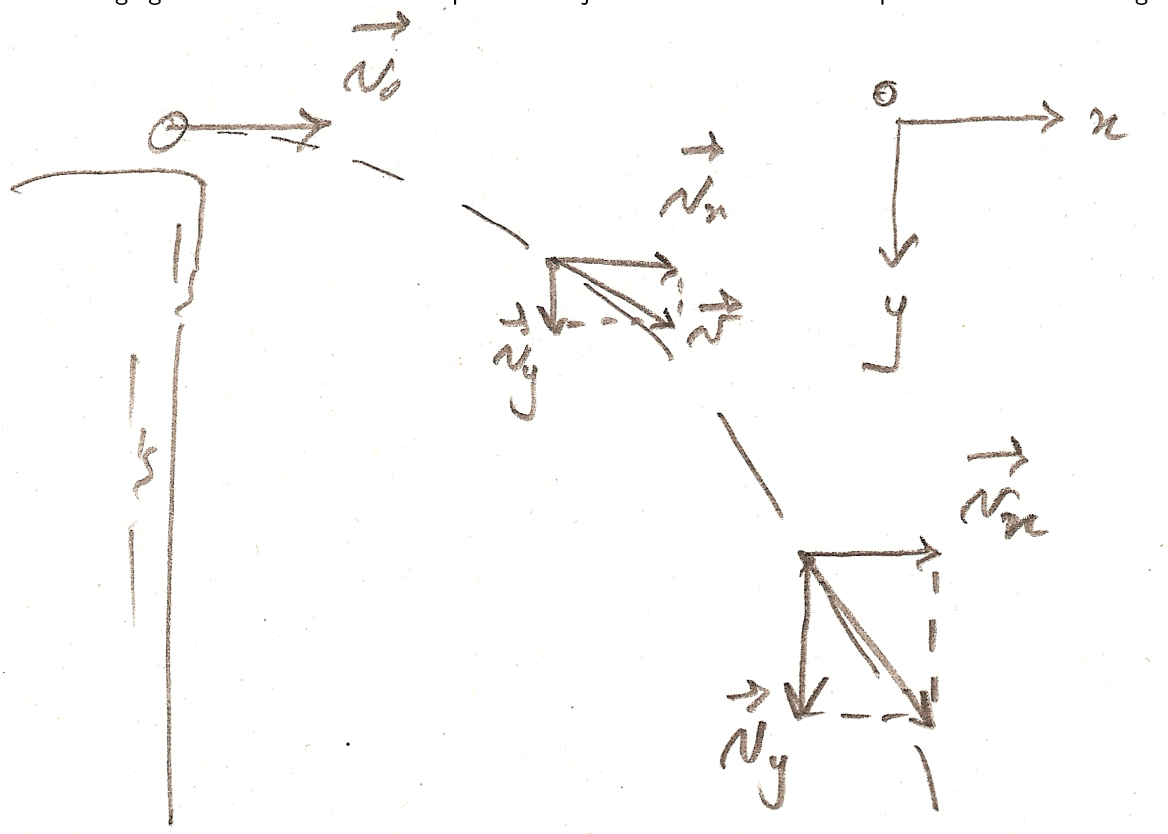
$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y \\ &= b\vec{e}_x - 2dt\vec{e}_y \end{aligned}$$

(iii) De rechte die de richting van de snelheid weergeeft, staat loodrecht op de rechte die de richting van de positievector weergeeft wanneer het product van de richtingscoöefficiënten gelijk is aan -1:

$$\begin{aligned} rc_r \cdot rc_v &= -1 \\ &\Updownarrow \\ \frac{y}{x} \cdot \frac{v_y}{v_x} &= -1 \\ &\Downarrow \\ \frac{c - dt^2}{bt} \cdot \frac{-2dt}{b} &= -1 \\ &\Downarrow \quad (t > 0) \\ t &= \sqrt{\frac{2cd - b^2}{2d^2}} \\ &= 1,73\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

5.4 Horizontale worp

We bekijken een voorbeeld van een tweedimensionale beweging. Wanneer een object horizontaal met een bepaalde beginsnelheid wordt gecatapulteerd, noemen we die beweging een horizontale worp. Wij beschouwen de worp in het luchtledige.



Figuur 13: De snelheid in horizontale richting verandert niet, die in de verticale richting neemt lineair toe in de tijd

In de beschrijving kunnen we de x-as horizontaal en de y-as verticaal naar beneden nemen. Omdat er volgens de x-as geen versnelling is het lichaam volgens de y-as valt met de valversnelling g, kunnen we de formules voor een ERB en een EVRB (Zie (**??**) en (**??**)) op de afzonderlijke assen toepassen en zo de volledige beweging beschrijven.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

De baanvergelijking vinden we zoals eerder vermeld, door t in functie van x te schrijven $x = v_0 t \Leftrightarrow t = \dfrac{x}{v_0}$ en dit in $y(t)$ te substitueren:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

De baan is dus een parabool.

Opdracht Een vliegtuig vliegt met een snelheid van 450 km/h op een hoogte van 920 m.

(i) Hoever voor het doel moeten de voedselpakketten gelost worden om op het doel terecht te komen?

(ii) Hoeveel tijd hebben de pakketten nodig om het doel te bereiken?

5.4 Horizontale worp

gegeven $v_0 = 125\,\mathrm{m/s}$

gevraagd x, t

oplossing De afstand waarover de voedselpakketten in horizontale richting zijn vooruit gegaan, kunnen we vinden met de baanvergelijking. We weten namelijk hoever de pakketten naar beneden zijn gevallen en wat hun beginsnelheid is:

$$\begin{aligned} y &= \frac{g}{2v_0^2}x^2 \\ &\Downarrow \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}} = 1712\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

De valtijd voor de pakketten vinden we o.a. door naar de verticale valbeweging te kijken. Deze gebeurt onafhankelijk van wat er in de horizontale richting gebeurt, zodat:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}gt^2 \\ &\Downarrow \\ t &= \sqrt{\frac{2y}{g}} = 13,7\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

6.1 Inleiding

In de voorgaande hoofdstukken hebben we in de kinematica enkel bewegingen beschreven, door o.a. de fysische grootheden positie, snelheid en versnelling te gebruiken. Nu willen we die bewegingen ook kunnen verklaren; waardoor bewegen voorwerpen en hoe doen ze dat, gegeven de oorzaken? In de dynamica wordt het concept kracht als oorzaak van beweging gegeven en geeft de tweede wet van Newton het verband tussen de kracht de beweging.

De drie beginselen van Newton vormen, samen met enkele krachten, de fundamenten waarop de klassieke mechanica is gebouwd.

We focussen hier op de dynamische uitwerking van een kracht, de statische laten we voornamelijk achterwege. Dat doen we door de lichamen te beschouwen als puntmassa's.

6.2 De eerste wet van Newton

Om een boek met een constante snelheid over de tafel te duwen, is een zekere kracht nodig. Met een smeermiddel tussen boek en tafel is al minder kracht nodig. In de praktijk geen wrijving realiseren is niet mogelijk maar duidelijk is dat hoe minder wrijving hoe minder kracht nodig is om het boek met een constante snelheid te laten bewegen. Eenmaal in beweging gebracht, nadert de benodigde kracht tot nul, en dat terwijl het boek met constante snelheid blijft bewegen.

Door aan te nemen dat er geen kracht nodig is om in beweging te blijven, valt deze opeenvolging van waarnemingen te verklaren.

Deze aanname zit vervat in de eerste wet van Newton.

Definitie 6.2.1. De eerste wet van Newton

Een voorwerp behoudt zijn toestand van rust of van eenparige rechtlijnige beweging, tenzij er een resulterende kracht op werkt.

Opmerking 6.2.1. De eerste wet van Newton wordt ook wel de traagheidswet genoemd. De eigenschap dat een lichaam zijn rust of constante snelheid op een rechte lijn behoudt, wordt inertie of traagheid genoemd. Vandaar de alternatieve naam voor de wet.

Om even over na te denken ...

Als je tegen een van 300 km/h in de Thalys richting Parijs zit, voel je de zetel dan harder tegen jou duwen dan dat ze dat doet wanneer je nog stilstaat in Brussel-Zuid?

Om even over na te denken ...

(a) Hoe kunnen de broers Staf en Mathias Coppens in het filmpje gemaakt voor het programma Het Lichaam van Coppens blijven bewegen door de lucht terwijl de zetel toch niet meer duwt?

(b) Waarom wrijven de broers bruine zeep op de plank?

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=l-X8sG1JV6Q

Oefening 6.2.1. Wanneer je met de fiets fietst, rechtdoor en met een constante snelheid, dan is de kracht die je voorwaarts uitoefent $\boxed{\text{gelijk aan✓}}$ de weerstandskracht die achterwaarts is gericht?

Met andere woorden: de resulterende kracht op jouw fiets is dan $\boxed{\text{nul✓}}$.

Uitwerking: De resulterende kracht is nul! Want als er een resulterende kracht was, dan zou volgens de wet van de traagheid de toestand van eenparige rechtlijnige beweging niet worden behouden, en zou je ofwel trager ofwel sneller gaan rijden.

Als je met een constante snelheid fiets, is de kracht die je uitoefent precies voldoende om alle wrijvingskrachten op te heffen. Als je minder kracht uitoefent, vertraag je en als je meer kracht uitoefent versnel je.

Oefening 6.2.2. Als je plots remt met je fiets kan je over je stuur vliegen. Hoe komt dat?

Uitwerking: Volgens de wet van de traagheid wil je je toestand van beweging voortzetten. Omdat de fiets slechts een beperkte kracht op jou kan uitoefenen, bestaat de kans dat die niet groot genoeg is om je tot stilstand te brengen.

6.3 De tweede wet van Newton

De eerste wet vertelt ons niet volledig wat er gebeurt wanneer op een lichaam een kracht werkt. Ze vertelt ons niet wat de relatie tussen kracht en beweging is. Dat doet de tweede wet.

Een bal waar je harder tegen schopt, krijgt een grotere snelheid mee en een pingpongballetje vliegt gemakkelijker weg dan een basketbal wanneer je er een tik tegen geeft. Als je het nader onderzoekt, door bijvoorbeeld verschillende krachten op een wagentje met eventueel steeds andere massa's te laten inwerken en de bijbehorende versnellingen te meten, merk je dat de versnelling recht evenredig is met de resulterende kracht en dat massa en versnelling omgekeerd evenredig zijn. M.a.w. $a \sim F/m$. Als bovendien een kracht zijdelings inwerkt op een bewegend voorwerp, dan merk je dat de baan afbuigt, in de richting van de kracht.

De eenheid van de grootheid kracht is de newton (symbool N). Eén newton wordt gedefinieerd als de grootte van de kracht die een massa van één kilogram een versnelling van één meter per seconde kwadraat geeft.

Bovenstaande observaties, samen met de definitie van de eenheid van kracht, zitten vervat in de tweede wet van Newton, die een kwantitatieve relatie tussen kracht en versnelling poneert.

Definitie 6.3.1. De tweede wet van Newton

De versnelling van een voorwerp is recht evenredig met de erop inwerkende resulterende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het voorwerp. In symbolen:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Opmerking 6.3.1. De wet spreekt over de *resulterende* kracht. Het is de resulterende kracht die gelijk is aan $m\vec{a}$, niet zomaar een van de inwerkende krachten.

Opmerking 6.3.2. Het gaat over de resulterende kracht die *op* het voorwerp met massa m wordt uitgeoefend en over de versnelling a *van* het voorwerp. De krachten worden door andere voorwerpen op het voorwerp uitgeoefend. Het is niet dat het voorwerp een kracht 'bezit' of een kracht op zichzelf kan uitoefenen.

Opmerking 6.3.3. De formulevorm is een vectorvergelijking. Zoals de kracht is, is ook de versnelling. Omdat de formule een vectorvergelijking is, is de gegeven formule equivalent met de componentsvergelijkingen:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

De componentsvergelijkingen zijn in de praktijk handiger, er valt algebraïsch mee te rekenen.

De tweede bewegingswet geeft een verband tussen de oorzaak van een beweging (de resulterende kracht) en de versnelling van de beweging.

De formulevorm van de tweede wet ziet er misschien gemakkelijk uit maar is in al haar eenvoud *immens* krachtig. De wetmatigheid verklaart alle mechanische bewegingen; als we de krachten kennen, kennen we de versnelling van het voorwerp en kunnen we (althans op zijn minst in theorie) de baan van het voorwerp bepalen.

In feite zit de eerste wet vervat in de tweede. Toch blijven we hem gebruiken, vooral om het concept traagheid te benadrukken.

Oefening 6.3.1. Een massa van $2{,}0\,\mathrm{kg}$ bevindt zich in een lift aan een dynamometer. Die laatste duidt een kracht van $10\,\mathrm{N}$ aan. Welke beweging voert de lift uit?

6.3 De tweede wet van Newton

Meerkeuze:

(a) De lift beweegt naar omlaag met een versnelling van $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$. ✓

(b) De lift beweegt naar omhoog met een versnelling van $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

(c) De lift beweegt naar omlaag met een constante snelheid.

(d) De lift beweegt naar omhoog met een constante snelheid.

Oefening 6.3.2. Op een luchthaven trekt een vrouw haar koffer met een constante snelheid voort. Het handvat maakt een hoek θ met de horizontale. De massa van de koffer is $10{,}5\,\mathrm{kg}$. De vrouw trekt volgens de richting van het handvat met een kracht van $25{,}0\,\mathrm{N}$ terwijl de grootte van de wrijvingskracht op de valies $11{,}0\,\mathrm{N}$ bedraagt.

(a) Teken het krachtendiagram van de koffer.

(b) Bepaal de hoek θ tussen het handvat en de horizontale.

(c) Bepaal de normaalkracht die de grond op de koffer uitoefent.

Uitwerking: De snelheid is constant zodat volgens de horizontale richting de versnelling nul is. De component van de trekkracht volgens deze richting moet dan ook even groot zijn als de wrijvingskracht:

$$\begin{aligned} F\cos\theta &= F_w \\ &\Updownarrow \\ \theta &= \mathrm{bgcos}\left(\frac{F_w}{F}\right) \\ &= 1{,}16\,\mathrm{rad} \qquad = 64^\circ \end{aligned}$$

Ook volgens de verticale richting is de versnelling nul zodat[a]:

$$\begin{aligned} F\sin\theta + F_n &= F_z \\ &\Updownarrow \\ F_n &= mg - F\sin\theta \\ &= 83\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

[a] Als je expliciet het gevraagde in functie van de gegevens wil zetten, moet je de y-component van de trekkracht met de stelling van Pythagoras berekenen. De uitkomst is dan $F_n = mg - \sqrt{F^2 - F_w^2}$.

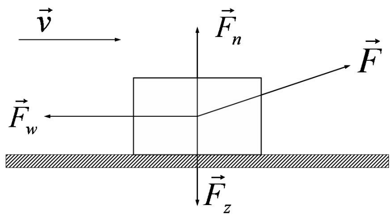
Oefening 6.3.3. In de laadruimte van een vrachtwagen hangt een slinger aan het plafond vast. Doordat de vrachtwagen met een constante versnelling optrekt, maakt het touw van de slinger een

6.3 De tweede wet van Newton

hoek van 37° met de verticale.

Bepaal de grootte van de versnelling van de vrachtwagen.

Oefening 6.3.4. Onder invloed van een kracht $\vec{F}$ beweegt een blok met constante snelheid over een ruw horizontaal oppervlak. De krachten op de figuur hebben de juiste oriëntatie maar niet noodzakelijk de juiste grootte. Welke van de volgende relaties tussen $\vec{F}$, $\vec{F}_w$, $\vec{F}_z$ en $\vec{F}_n$ moet in ieder geval waar zijn?



Meerkeuze:

(a) $F_w = F$ en $F_n = F_z$

(b) $F_w < F$ en $F_n < F_z$ ✓

(c) $F_w = F$ en $F_n > F_z$

(d) $F_w < F$ en $F_n = F_z$

Uitwerking: We ontbinden de kracht $\vec{F}$ in zijn twee componenten volgens de horizontale en verticale richting: $\vec{F}_x, \vec{F}_y$. Aangezien het blok in de verticale richting niet versnelt, moet $F_z = F_n + F_y$ of $F_n < F_z$.

6.4 De derde wet van Newton

Krachten komen niet uit het niets, ze worden altijd door een ander voorwerp uitgeoefend. Zo is het de hamer die de spijker in de muur drijft en is het de voet die een trap tegen de bal geeft. In deze voorbeelden oefent het ene voorwerp een kracht uit en ondergaat het andere voorwerp die kracht. Maar, is het zo eenzijdig ...? Het volgende voorbeeld geeft aan van niet. Het geeft aan dat er naast een 'actie'kracht ook altijd een 'reactie'kracht optreedt.

Meestal plooien vingers naar de handpalm toe. De praktijk leert dat het andersom toch iets moeilijker gaat, misschien vandaar. Als de andere hand echter wat helpt door te duwen (dus een kracht uitoefent op de vingers), plooien de vingers al iets verder naar achter; uit zichzelf geraken ze niet zo ver. Als je nu – ter vergelijking – met gestrekte vingers tegen de tafel duwt, plooien je vingers eveneens meer naar achteren dan dat ze uit zichzelf zouden kunnen. Omdat de vingers zonder een extern uitgeoefende kracht niet zo ver kunnen doorbuigen, valt te concluderen dat naast de kracht die door de vingers op de tafel wordt uitgeoefend, de tafel op zijn beurt een kracht uitoefent op de vingers.

De derde bewegingswet van Newton – ook wel de wet van actie en reactie genoemd – geeft de relatie tussen de krachten die lichamen onderling op elkaar uitoefenen.

Definitie 6.4.1 (De wet van actie en reactie).

Wanneer lichaam A op lichaam B een kracht uitoefent, oefent lichaam B op lichaam A een even grote maar tegengestelde kracht uit. In symbolen:

$$\vec{F}_{a,b} = -\vec{F}_{b,a}$$

Opmerking 6.4.1 (De actie- en reactiekracht zijn altijd even groot.).

Het even groot zijn van die krachten is misschien opmerkelijk. Het is toch de appel die naar de aarde valt en niet andersom?! Of, als de kracht die de aarde op de appel uitoefent even groot is als die de appel op de aarde uitoefent, waarom gaan ze dan niet naar mekaar toe? Het antwoord is dat de *uitwerking* van een kracht niet hetzelfde is als de kracht zelf. De massa van de aarde is gigantisch veel groter dan die van de appel zodat die, volgens de tweede wet van Newton, een veel kleinere versnelling krijgt. En het is de versnelling die we zien, niet de kracht.

Opmerking 6.4.2 (Van het krachtenpaar grijpen de krachten op verschillende lichamen aan.).

Er is altijd een voorwerp *waardoor* de kracht wordt uitgeoefend en een voorwerp *waarop* de kracht wordt uitgeoefend.

Om even over na te denken ...

De ezel van boer Teun, Donkey, wil de kar met waar voor de markt niet trekken. Hij maakt namelijk de volgende redenering: 'Voor elke poging die ik doe om de wagen vooruit te trekken, oefent de kar een even grote maar achterwaartse kracht uit. De nettokracht zal dan ook onvermijdelijk altijd nul zijn, zodat ik niet in beweging zal geraken. Ik doe geen moeite.'

Waar loopt de redenering van de ezel mis?

Opmerking 6.4.3 (Actie- en reactiekracht zijn niet eenduidig.).

Omdat de twee krachten van het krachtenpaar tegelijk optreden, is het in feite niet mogelijk aan te geven wie nu de actiekracht en wie de reactiekracht is.

Met deze derde wet kunnen we verschillende verschijnselen verklaren. Hier volgen enkele voorbeelden.

Voorbeeld 6.4.1 (Hoe kunnen we eigenlijk lopen?).

Zo is de wet van actie en reactie van toepassing op wandelen. Wij kunnen vanuit rust in beweging komen door ons af te zetten. Wij oefenen een kracht op de grond uit waarbij deze laatste op zijn beurt een even grote en tegengestelde kracht op ons uitoefent. Zo krijgen wij een versnelling.

6.4 De derde wet van Newton

Voorbeeld 6.4.2 (Hoe stuwt een raket zich voort?).

Een vliegtuig met straalmotoren of een raket doen hetzelfde. Door het uitoefenen van een kracht op de naar achter uitgeworpen gassen, oefenen de uitgeworpen gassen een kracht uit op het vliegtuig of de raket. Maar dan voorwaarts. (Een vliegtuig of raket duwt zich dus niet af tegen de (eventuele) lucht.)

Oefening 6.4.1. Een grote magneet oefent op een ijzeren spijkertje een kracht uit. Welke van de volgende uitspraken is dan juist?

Meerkeuze:

(a) Het spijkertje zelf oefent op de magneet geen kracht uit.

(b) De kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent is veel kleiner dan deze door de magneet op het spijkertje uitgeoefend.

(c) De kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent is even groot als deze door de magneet op het spijkertje uitgeoefend. ✓

(d) Over de grootte van de kracht die het spijkertje op de magneet uitoefent, kan niets met zekerheid gezegd worden.

Oefening 6.4.2. Je springt vanuit een roeibootje naar de oever. Verklaar wat er kan gebeuren als het roeibootje niet of wel vastgemeerd is. Wanneer je nu vanaf een groot binnenschip naar de oever springt, wat zou het resultaat dan zijn? Verklaar!

Uitwerking: Bij een roeibootje dat niet vastgemeerd is, is er veel kans dat je in het water belandt. Bij het afzetten, schiet het bootje namelijk gemakkelijk onder je weg. Hoe komt dat? Wel, doordat je je afzet, oefen je een kracht uit op het bootje. De **derde wet van Newton** zegt dat het bootje dan een even grote kracht op jou uitoefent, in de tegengestelde richting. Het is die reactiekracht die je zou willen aanwenden om op de oever te geraken. De massa van het bootje is echter zo klein in vergelijking met jouw massa dat, volgens de **tweede wet van Newton** ($\vec{F} = m\vec{a}$), de versnelling die het bootje krijgt als gevolg van jouw actiekracht veel groter is dan de versnelling die je zelf krijgt door de afzet. In de korte tijd dat je jezelf kan afzetten, verwerft het bootje dus een grote snelheid waardoor het onder je wegschiet en krijg jij geen noemenswaardige snelheid opgebouwd.

Als het bootje is vastgemeerd, lukt het je wel de oever te bereiken. Het bootje kan immers niet wegschieten waardoor je je voldoende lang kan afzetten (er werkt voldoende lang een kracht op jou) en zo de nodige snelheid kan verwerven (je krijgt immers een versnelling) om de sprong te kunnen maken.

Voor een groot binnenschip is de massa zo groot in vergelijking met die van jou, dat het binnenschip een verwaarloosbare versnelling weg van de oever krijgt. Je kan een voldoende grote versnelling opbouwen die lang genoeg aanhoudt om je op de oever te krijgen.

Oefening 6.4.3. Twee ploegen zijn aan het touwtrekken. Volgens het derde beginsel van Newton oefenen de twee ploegen steeds even grote maar tegengestelde krachten op elkaar uit. Hoe is het dan mogelijk dat er toch een winnende ploeg is?

Uitwerking: Er is een winnende ploeg mogelijk omdat het samenstellen van krachten op elke ploeg afzonderlijk gebeurt. Het zijn niet de actie- en reactiekracht (derde wet van Newton) die worden samengesteld.

De winnende ploeg slaagt erin zich beter af te zetten dan de verliezende ploeg. Dat wil zeggen dat de reactiekracht van de kracht die ze op de grond uitoefenen (de weerstandskracht dus) groter is dan de kracht tussen de twee ploegen. De resulterende kracht van de weerstandskracht en de spankracht op de ploeg, zorgt volgens de tweede wet van Newton voor een versnelling; de ploeg komt in beweging. Voor de verliezende groep is dat net omgekeerd.

6.4 De derde wet van Newton

Oefening 6.4.4. Een eekhoorntje glijdt over een gladde tafel met een heleboel nootjes tussen zijn voorpoten. Wat zou het moeten doen om te verhinderen dat het van de tafel valt? Leg uit.

Uitwerking: Het eekhoorntje moet de noten *voor* zich uit gooien. De reactiekracht van de kracht die de eekhoorn op de nootjes uitoefent, grijpt aan op de eekhoorn en is tegengesteld gericht. Die reactiekracht kan hem afremmen en hem verhinderen van de tafel te glijden.

6.5 Oefeningen Wetten van Newton

6.5.A Denkvragen

Oefening 6.5.1. Kan een voorwerp bewegen zonder dat er een kracht op werkt?

Oefening 6.5.2. Waarom is een met boomstammen geladen vrachtwagen voor de bestuurder zo gevaarlijk, als hij bruusk moet remmen, of bij een botsing betrokken raakt?

Uitwerking: De boomstammen willen volgens de eerste wet van Newton tijdens het remmen hun beweging voortzetten.

Oefening 6.5.3. Hoe komt het dat een vrachtwagen binnen een veel kortere afstand kan stoppen dan een trein die dezelfde snelheid heeft?

Oefening 6.5.4. Wat word je gewaar als je met een wapen een kogel afvuurt? Waarom druk je best de kolf stevig tegen de schouder aan?

Oefening 6.5.5. Hoe komt het dat je gemakkelijk vaststelt dat de aarde een kracht uitoefent op een appel, maar dat je niets merkt van de kracht door de appel op de aarde uitgeoefend?

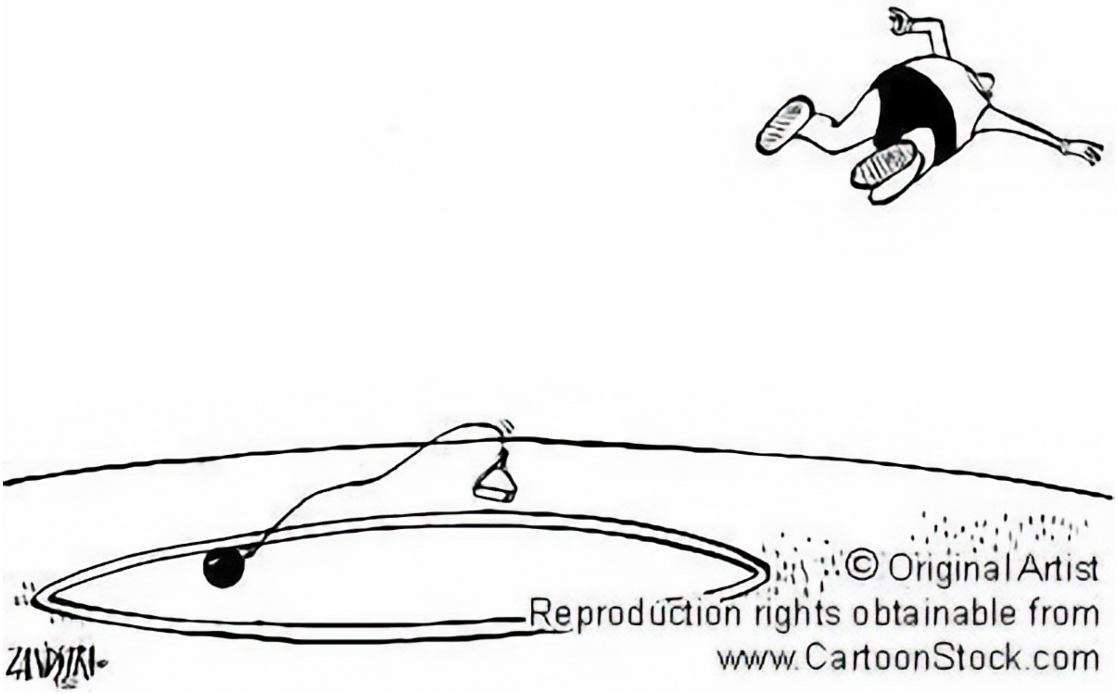
Oefening 6.5.6. Wat gebeurt er met een roeiboot als men snel van de voor- naar de achterkant loopt?

Oefening 6.5.7. Op een bierglas ligt een plastic plaat met daarop een appel. Als Els de plaat snel wegtrekt valt de appel in het glas. Bij Lien die de plaat langzaam wegtrekt, niet. Verklaar het verschil tussen beide verschijnselen.

Uitwerking: Als je de plaat snel wegtrekt, is de wrijvingskracht te kortstondig aanwezig om de appel een noemenswaardige versnelling te geven. Trek je traag, dan is de versnelling misschien klein maar is ze lang genoeg aanwezig om de appel een voldoende grote snelheid te geven.

6.5.A Denkvragen

Oefening 6.5.8. Wat klopt er fysisch niet aan wat er gebeurt in de cartoon?



Oefening 6.5.9. Waarom valt in het luchtledige een massa van $2\,\mathrm{kg}$ niet twee keer zo snel als een massa van $1\,\mathrm{kg}$?

Uitwerking: In het vacuüm werkt op een vrije massa enkel de zwaartekracht in. Dat is dan ook de resulterende kracht op de massa. Die kracht is inderdaad twee keer zo groot voor een twee keer zo grote massa, maar een twee keer zo grote massa verzet zich ook twee keer zo hard tegen het het veranderen van beweging; de traagheid is twee keer zo groot. Het resultaat is dat elk object met dezelfde versnelling naar de aarde valt.

Die hierboven eerder kwalitatieve redenering is kwantitatief uit te leggen met de tweede wet van Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$F_z = ma$$

Met de formule $F_z = mg$ voor de zwaartekracht vinden we

$$mg = ma$$

Zodat, na de massa's te hebben geschrapt

$$a = g$$

De massa van het object heeft m.a.w. geen invloed op de versnelling waarmee het valt. Die versnelling is constant en in waarde gelijk aan de waarde van de veldsterkte. Omdat ook de eenheden overeenkomen (uit de tweede wet van Newton volgt dat $\mathrm{N}{=}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$) wordt het symbool g voor zowel de veldsterkte als de valversnelling gebruikt. Bij ons heeft die de waarde $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

6.5.B Vraagstukken

Oefening 6.5.10. Hoe groot is de snelheid die een slee met een massa van $5{,}0\,\mathrm{kg}$ krijgt, als er gedurende $6{,}0\,\mathrm{s}$ een kracht van $0{,}20\,\mathrm{N}$ horizontaal op inwerkt?

Uitwerking: $0{,}24\,\mathrm{m/s}$

Oefening 6.5.11. Twee blokken met respectievelijke massa's m_1 en m_2 rusten op een horizontaal vlak. De wrijving tussen de blokken en het horizontale vlak mag verwaarloosd worden. Op één van de blokken wordt een horizontale kracht $\vec{F}$ uitgeoefend zoals op de figuur is weergegeven. De kracht die blok 1 op blok 2 uitoefent is dan:

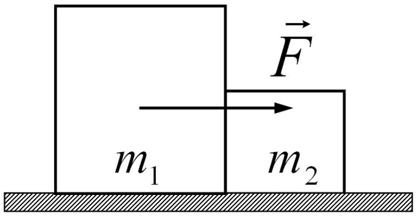
Meerkeuze:

(a) $\frac{m_1}{m_2}\vec{F}$

(b) $\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{F}$

(c) $\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{F}$ ✓

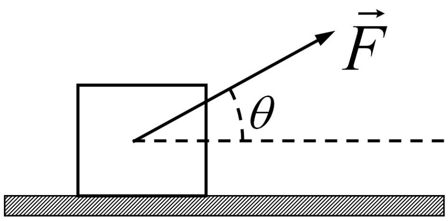
(d) $\vec{F}$



Oefening 6.5.12. Een doos van $10\,\mathrm{kg}$ wordt met een kracht van $40\,\mathrm{N}$ over een glad tafeloppervlak getrokken. De uitgeoefende kracht maakt een hoek van 30° met de horizontaal. Als de wrijving mag worden verwaarloosd, bepaal dan

(a) de versnelling van de doos,

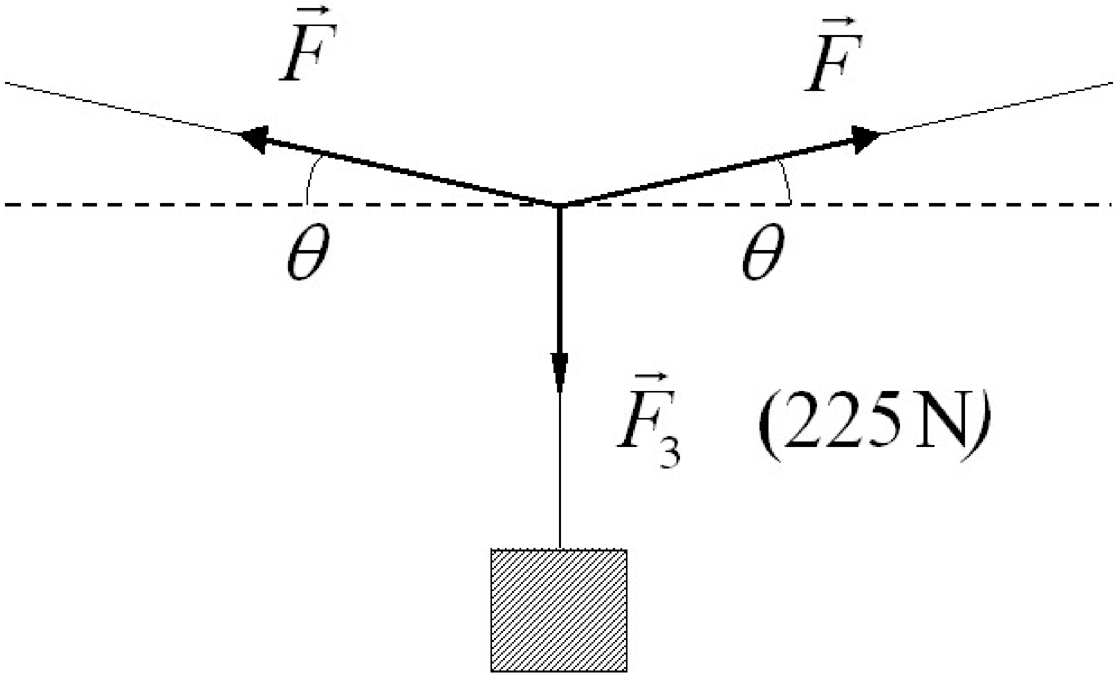
(b) de grootte van de normaalkracht, die de tafel op de doos uitoefent.



Uitwerking: (a) $a = \frac{F\cos\theta}{m} = 3{,}46\,\mathrm{m/s^2}$

(b) $F_n = mg - F\sin\theta = 78{,}1\,\mathrm{N}$

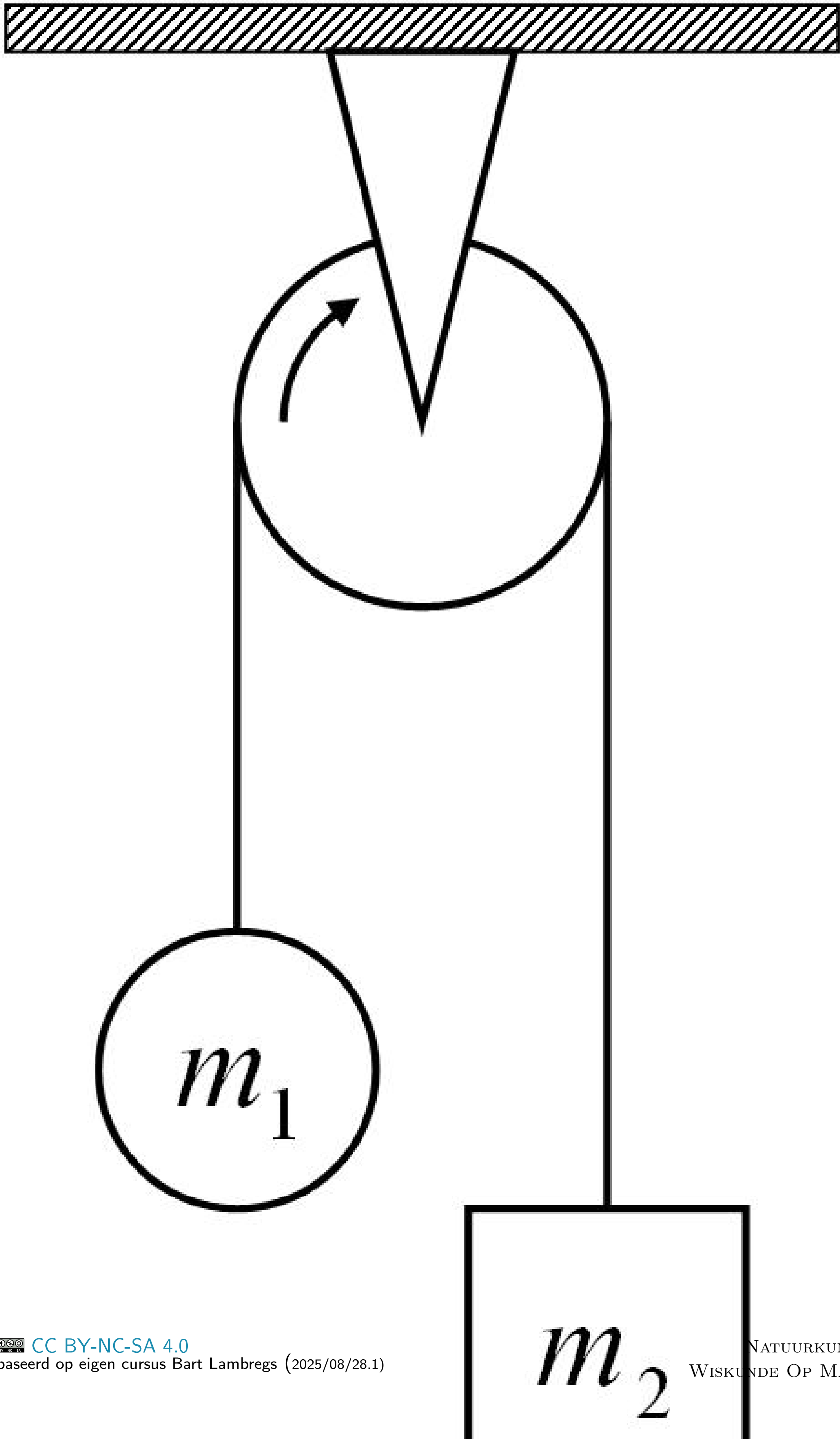
Oefening 6.5.13. Een gewicht van $225\,\mathrm{N}$ is bevestigd in het midden van een sterk touw. Door aan beide kanten een even grote kracht uit te oefenen wordt het gewicht opgetild. Bepaal de grootte van die krachten opdat het gewicht zoals in de figuur met $\theta = 10°$ komt te hangen.



Oefening 6.5.14. (**Toestel van Atwood**) Twee verschillende massa's zijn via een katrol van te

6.5.B Vraagstukken

verwaarlozen massa met elkaar verbonden zoals in de figuur. De wrijving is eveneens te verwaarlozen.

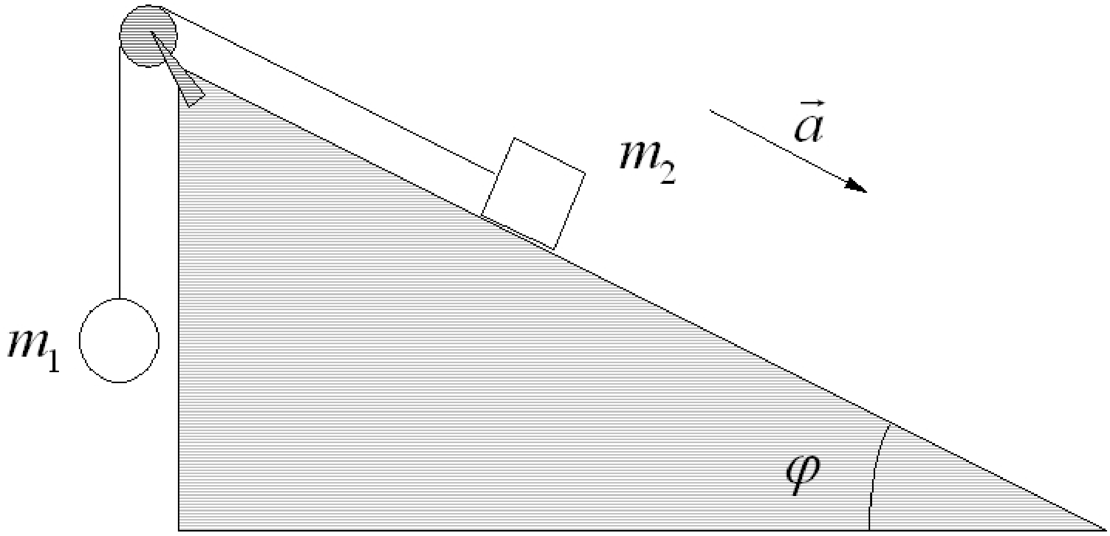


6.5.B Vraagstukken

Bepaal de grootte van de versnelling van beide massa's en de spankracht in het touw.

Uitwerking: $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad F_s = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

Oefening 6.5.15. Twee massa's m_1 en m_2 zijn via een touwtje en een katrol van te verwaarlozen massa met elkaar verbonden zoals in de figuur. Er is geen wrijving aanwezig. De massa's hebben een versnelling zoals aangegeven.



Bepaal de grootte van de versnelling van beide massa's en de grootte van de spankracht in het touw.

Oefening 6.5.16. Hoe kan een man die 686 N weegt langs een touw naar beneden glijden, dat slechts 600 N kan dragen zonder te breken?

Stel dat de man inschat dat hij, zonder zijn botten te breken, in staat is te springen van toch wel 3,0 m hoog. Van hoe hoog zou hij dan met een dergelijk touw kunnen ontsnappen?

Uitwerking: Door niet met zijn volle gewicht aan het touw te gaan hangen kan de man verhinderen dat het touw breekt. Het gevolg is wel dat hij een nettokracht naar beneden ondervindt waardoor hij toch naar beneden versnelt, al is het met een kleinere versnelling dan de valversnelling.

Door met 600 N aan het touw te trekken, ondervindt hij een spankracht omhoog met diezelfde grootte. Met een referentieas naar beneden volgt uit $F_z - F_s = ma$ en uit $m = \dfrac{F_z}{g}$ voor de versnelling van de man:

$$a = \left(1 - \frac{F_s}{F_z}\right) g \qquad (2)$$

wat gelijk is aan $1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$.

Uit $v^2 = v_0^2 + 2ax$ volgt de maximale snelheid die hij bij de impact op de grond aankan als we voor a de valversnelling g nemen en voor x de gegeven 3,0 m. Uit diezelfde formule vinden we de hoogte h vanwaar de man kan ontsnappen als we nu de netto versnelling $a = 1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$ (2) nemen:

$$h = \frac{v^2}{2a} = \ldots = \frac{F_z}{F_z - F_s} x$$

wat gelijk is aan 24 m.

6.5.B Vraagstukken

Oefening 6.5.17. Een jager (massa $70\,\mathrm{kg}$) heeft een ijsbeer (massa $350\,\mathrm{kg}$) geschoten met een harpoen en wil die nu naar zich toe trekken met het touw. Jager en ijsbeer zijn oorspronkelijk allebei in rust op het ijsoppervlak en op $30\,\mathrm{m}$ van elkaar. Verwaarloos de wrijving met het ijs. Bepaal de afstand waarover de ijsbeer is verschoven als de jager de ijsbeer binnenhaalt.

7.1 Inleiding

7.2 Algemeen (heuristiek)

7.3 Dynamica van de ECB