# Kinematica: ééndimensionale bewegingen

**4 september 2025**

## Inhoudsopgave

## Deel III

# Eendimensionale bewegingen

## Inleiding

Beweging beschrijven is niet zo simpel als het in eerste instantie lijkt. Zo is bijvoorbeeld de beweging van een wolk eerder complex. Wat reken je al dan niet tot de wolk? Ook de bewegingen van de afzonderlijke moleculen in kaart brengen is een onmogelijke opgave omdat het aantal moleculen eerder groot is. Om toch vooruitgang te kunnen boeken, beginnen we met voorwerpen die we als een punt kunnen voorstellen. We maken dan abstractie van de ruimtelijke vorm van het object dat we beschrijven en doen alsof we het kunnen reduceren tot één enkele plaats in de ruimte. Zo zouden we het vliegen van een vlieg doorheen de kamer kunnen bekijken als een stipje. Het bewegen van de vleugels of de oriëntatie van de kop van de vlieg laten we dan buiten beschouwing. Ook deze beschrijving kunnen we inperken; we gaan in eerste instantie enkel bewegingen beschrijven die voor te stellen zijn op een rechte lijn. Dit noemen we eendimensionale bewegingen. Als we de beschrijving hiervan eenmaal kennen, kunnen we later dit met behulp van vectoren gemakkelijk uitbreiden naar een beschrijving van bewegingen in twee- of drie dimensies.

Om het ons gemakkelijk te maken, zullen we in dit hoofdstuk enkel werken met de getalcomponenten van de vectoren. Dat gaat omdat we steeds in één dimensie werken en de eenheidsvector dan steeds gelijk blijft. Als we $v_x$ kennen, vinden we direct de vectorcomponent volgens de $x$-as met $\vec{v}_x = v_x \cdot \vec{e}_x$. Bovendien kunnen we de index $x$ ook weglaten. We weten dat het steeds over de $x$-as gaat. [1]

---

Author(s): Bart Lambregs

[1] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool $x$ maar het symbool $t$ omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool $f$ gebruiken wij nu het symbool $x$ omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

# Eenparige rechtlijnige beweging

Een eenvoudige beweging om te bestuderen is de *eenparig rechtlijnige beweging* (afgekort ERB). De snelheid van de beweging is eenparig of gelijkmatig verdeeld wat betekent dat de snelheid steeds gelijk blijft. M.a.w. is de snelheid constant en dus de versnelling gelijk aan nul. Aangezien de snelheid niet verandert is de ogenblikkelijke snelheid gelijk aan de gemiddelde snelheid. Met deze observatie kan je eenvoudig een functie opstellen voor de plaatsfunctie van deze beweging:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta x = v\Delta t \\ &\Leftrightarrow \quad x - x_0 = v(t - t_0) \\ &\Leftrightarrow \quad x = x_0 + v(t - t_0) \end{aligned}$$

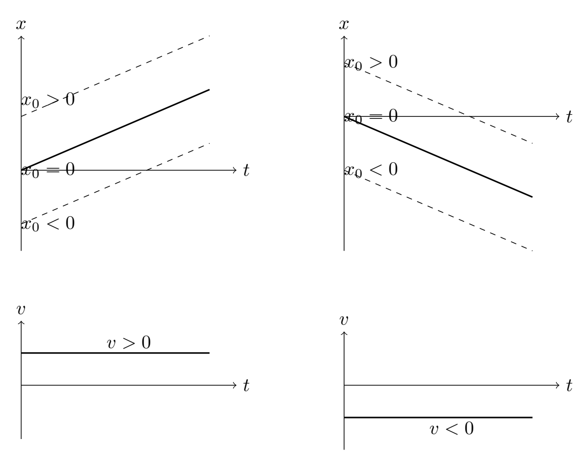
**Theorem 1.** De plaatsfunctie $x(t)$ van een ERB met snelheid $v$ is gegeven door:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

waarbij $x_0 = x(t_0)$ de coördinaat op het tijdstip $t_0$ is. Als $t_0 = 0$ dan vereenvoudigt de plaatsfunctie tot

$$x(t) = x_0 + vt \tag{1}$$

De snelheid $v$ is gelijk aan de beginsnelheid $v_0 = v(t_0)$ omdat in een ERB de snelheid constant is. De snelheidsfunctie is $v(t) = v$ en de versnellingsfunctie is $a(t) = 0$.




Figuur 1: Grafieken van een ERB

Author(s): Bart Lambregs

# Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

De ééndimensionale beweging met een constante versnelling wordt de *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* genoemd (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; bij een constante versnelling is de *verandering* van de snelheid steeds gelijk. De grafiek van $a(t) = a$ is een constante met $a$ een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Voor een constante versnelling is de snelheid in functie van de tijd een lineaire functie (in de tijd).

**Remark 1.** Strikt genomen wordt hier iets over het hoofd gezien. A priori zou het immers kunnen dat er nog andere functies dan lineaire functies zijn waarvoor de afgeleide een constante functie is. Dat is echter niet het geval. Het bewijs hiervan zie je later dit jaar in het vak wiskunde. Je bewijst dat alle mogelijke functies die in aanmerking komen slechts op een constante na aan elkaar gelijk zijn.

Uit het snelheidsverloop kan je de plaats afleiden. De snelheid is de afgeleide van de plaatsfunctie. Voor een lineaire snelheidsfunctie is de positie bijgevolg een kwadratische functie (in de tijd). De afgeleide van een kwadratische functie is immers een lineaire functie.[2]

Dat de positie in functie van de tijd een tweedegraadsveeltermfunctie is, geeft in symbolen:

$$x(t) = pt^2 + qt + r$$

De constanten $p$, $q$ en $r$ is deze formule hebben een fysische betekenis. De snelheid is de afgeleide van deze plaatsfunctie en de versnelling komt overeen met de tweede afgeleide. Dit levert:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 2pt + q$$

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2p$$

Voor de EVRB is de versnelling constant en bijgevolg volgt uit de laatste regel dat $a(t) = a = 2p \Leftrightarrow p = \dfrac{a}{2}$.

Author(s): Bart Lambregs

[2]Hier geldt een gelijkaardige opmerking.

Noteer met $v_0 = v(0)$ de snelheid op tijdstip $t = 0$. In de eerste vergelijking $t = 0$ invullen levert dan $q = v_0$. De constante $q$ stelt de beginsnelheid voor.

Noteer met $x_0 = x(0)$ de positie op tijdstip $t = 0$. In de plaatsfunctie $t = 0$ invullen levert dan $r = x_0$. De constante $r$ stelt dus de beginpositie voor.

**Theorem 2.** De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling $a$ worden gegeven door:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

Hierin is $x_0$ de *beginpositie* en $v_0$ de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip $t_0$, dan wordt in de beschrijving $t$ vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip $t_0$. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

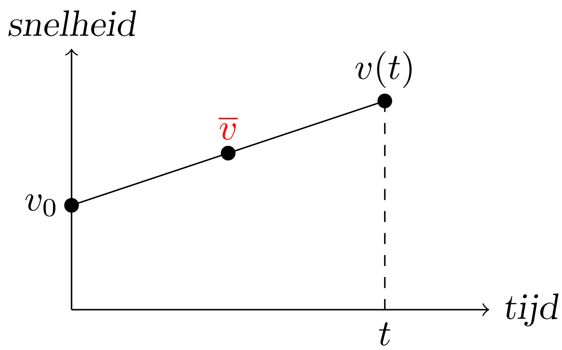
Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:

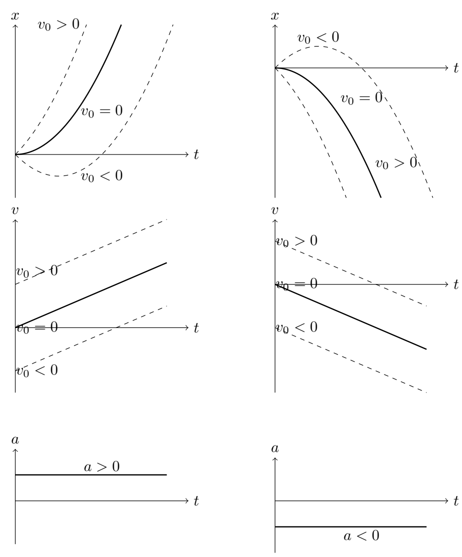
$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

**Oefening 1** *Bewijs bovenstaande formule.*

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{2v_0 + v - v_0}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

*bij een EVRB kan je dus het rekenkundig gemiddelde gebruiken om de gemiddelde snelheid te berekenen. In onderstaande figuur is $\overline{v}$ grafisch weergegeven als het midden van de lineaire snelheidsfunctie.*




Figuur 2: Grafieken van de EVRB

**Oefening 2** *Een auto die* 60 km/h *rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na* 70 cm *tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in $g$, waarbij $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.* *Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een uitdrukking vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.*[3] *Uit*

[3] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...

*$v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:*

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

*Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

*De versnelling is dan gelijk aan:*

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

*Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, wat gelijk is aan $20g$.*

# Oplossingsstrategie

Vraagstukken in de kinematica kan je vaak op dezelfde manier banaderen. Elke opgave blijft echter anders, creativiteit is dus noodzakelijk.

(a) Lees het vraagstuk aandachtig. Zorg dat je duidelijk weet wat er gevraagd wordt.

- als je correct de snelheid op $t_3$ berekent maar de snelheid op $t_2$ was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- als je correct de postitie op $t_1$ berekent maar de positie op $t_0$ was gevraagd, is dat een jammere fout ...
- ...

(b) Kies het systeem (object, lichaam, massa, geheel van lichamen) waarvan je een onbekende posititie, snelheid of versnelling wilt berekenen.

(c) Maak een tekening van dit systeem. Teken een coördinaatsas.

(d) Bepaal de gegevens uit het vraagstuk. Welke heb je nodig om de oplossing te bepalen?

(e) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor positie, snelheid en versnelling om het gevraagde te berekenen.

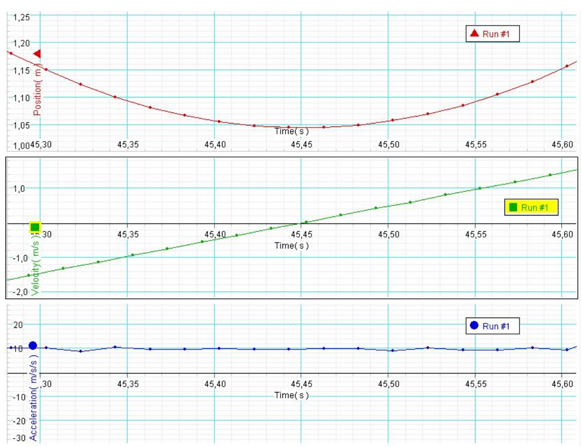
(f) Heeft je oplossing de juiste eenheiden en grootteorde? De snelheid van een tennisbal in de eenheid $\frac{s}{m^2}$ is waarschijnlijk fout. Als het enkele minuten duurt voordat de bowlingbal de kegels raakt, heb je waarschijnlijk ergens een (reken)fout gemaakt ...

Author(s): Bart Lambregs

# Verticale worp

In het jaar 1586 stond een wetenschapper uit Brugge op de Nieuwe Kerk van Delft . Onze perceptie leert dat zwaardere lichamen sneller vallen dan lichtere. Een pluim en een steen komen in regel niet op hetzelfde moment op de grond terecht. Toch blijkt deze intuitie niet te kloppen. Simon Stevin liet vanop de kerktoren twee loden bollen met een verschillend gewicht vallen en stelde vast dat ze op hetzelfde moment de grond raakten.

In vacuüm – waar voorwerpen geen luchtweerstand ondervinden – blijkt de massa geen rol te spelen bij de constante versnelling die de voorwerpen krijgen: alle voorwerpen vallen met dezelfde versnelling! Met lode bollen kon Simon Stevin dit effect uitschakelen. De theoretische verklaring voor dit experiment hoort thuis in de dynamica. In de kinematica wordt enkel de beweging beschreven. Omdat de valversnelling constant is, heb je hier simpelweg met een EVRB te maken.




Figuur 3: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp waarbij de as naar beneden is georiënteerd.

Strikt genomen verschilt de valversnelling van plaats tot plaats op de aarde, maar voor het gemak nemen wij in vraagstukken de waarde

$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}.$$

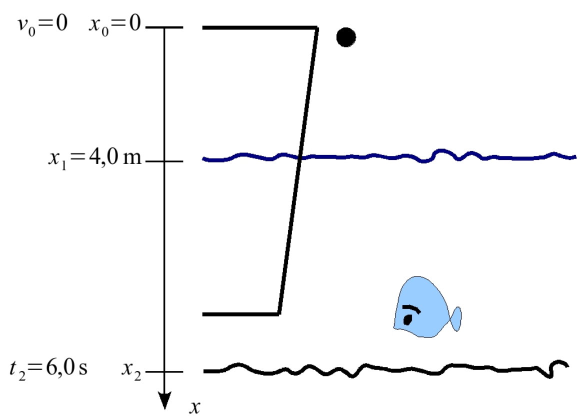
Omdat de verticale worp een EVRB is, kunnen we de formules (**??**) en (**??**) gebruiken om een valbeweging te beschrijven. Voor de versnelling $a$ nemen we dan $a = g$ of $a = -g$ al naargelang de oriëntatie van de coördinaatas.

Author(s): Bart Lambregs

**Quick Question 3** *Als je een tennisbal in de lucht gooit, op welk(e) moment(en) is de versnelling* $0$*? Op welk(e) moment(en) is de snelheid* $0$*?*

**Quick Question 4** *Leg de fysische betekenis uit indien de richting van de snelheidsvector en versnellingsvector tegengesteld zijn. Wat indien ze dezelfde richting hebben?*

**Oefening 5** *Simon Stevin laat van de boord van een schip een loden bol in het water vallen. De boord bevindt zich* $4,0\,\mathrm{m}$ *boven het wateroppervlak. De loden bol zinkt vervolgens met de snelheid waarmee hij het water raakte. Er zijn* $6,0\,\mathrm{s}$ *tussen het tijdstip waarop de bol valt en ze de bodem van het water bereikt.*




**Vraag 5.1** *Hoe diep is het water?*

**Vraag 5.2** *Wat is de gemiddelde snelheid van de bol over het hele traject?*

*De beweging is opgebouwd uit twee verschillende soorten bewegingen. Het eerste stuk is een vrije val, wat een EVRB is. In het tweede stuk (onder water) is de snelheid constant en is er dus geen versnelling. In geen geval kunnen we dus de formules voor een EVRB op het geheel toepassen. Die zijn immers afgeleid voor een beweging waar de versnelling (altijd, gedurende de hele beweging) constant is.*

*Omdat we weten hoe ver de bol moet vallen voordat hij het wateroppervlak bereikt, kunnen we zowel de tijd die de bol hiervoor nodig heeft als de snelheid waarmee de bol het wateroppervlak raakt, bepalen. We kiezen een as naar beneden zodat – omdat de snelheid in deze richting toeneemt – de versnelling positief is en gelijk aan de valversnelling* $g$ *(toch voor het eerste stuk). De beginsnelheid van de bol is nul omdat hij vanuit rust wordt losgelaten. Voor de tijd vinden we:*

$$x_1 = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g}}$$

*Met de tijd*[4] *kunnen we de snelheid op het wateroppervlak vinden.*

$$v_1 = gt_1 = g\sqrt{\frac{2x_1}{g}} = \sqrt{2gx_1}$$

*Onder water, in het tweede stuk, beweegt de kogel met deze snelheid gedurende de resterende tijd:* $6,0$ *seconden min de tijd* $t_1$ *(**??**) die de kogel nodig had om te vallen. De afstand die de bol onder water aflegt, vinden we met de eenvoudige formuletjes van een ERB*[5]*. We substitueren ook vergelijkingen (**??**) en (**??**).*

$$\begin{array}{rcl}
\Delta x & = & \overline{v} \cdot \Delta t \\
& \Downarrow & \\
x_2 - x_1 & = & v_1(t_2 - t_1) \\
& = & \sqrt{2gx_1}(t_2 - \sqrt{\frac{2x_1}{g}}) \\
& = & \sqrt{2gx_1}t_2 - 2x_1 \\
& = & 45\,\mathrm{m}
\end{array}$$

*De gemiddelde snelheid vinden we door de totale afgelegde weg te delen door de totale benodigde tijd. Andere formuletjes zoals* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ *zijn niet van toepassing omdat het helemaal niet over één EVRB gaat waar dit formuletje geldt omdat de snelheid mooi lineair toeneemt. Hier gebeurt dat enkel in het eerste stuk en worden de verschillende snelheden niet even lang aangehouden zodat ze een verschillend aandeel hebben in de totale benodigde tijd.*

$$\begin{array}{rcl}
\overline{v}_{02} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2}{t_2} & = & \dfrac{\sqrt{2gx_1}t_2 - x_1}{t_2} \\
& = & \sqrt{2gx_1} - \dfrac{x_1}{t_2} \\
& = & 8,2\,\mathrm{m/s}
\end{array}$$

YouTube link: `https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o`

[4]We zouden de tijd met het gevonden formuletje kunnen uitrekenen en met het getalletje dat we vinden verder rekenen. Maar met het formuletje verder werken – algebraïsch of symbolisch – is toch o zo veel knapper en van toepassing voor álle boten en niet enkel voor een boot waarvoor het dek zich $4,0$ meter boven het wateroppervlak bevindt. Bovendien is het "echte" fysica omdat je een "model" uitwerkt en niet een rekensommetje oplost...

[5]Opmerking, een ERB is een speciaal geval van een EVRB. Een ERB heeft als constante versnelling $a = 0$.

# Oefeningen

De oefeningen zijn opgedeeld in denkvragen en vraagstukken. Zie daarvoor de hierbij horende onderdelen.

De denkvragen bevatten conceptuele oefeningen, oefeningen die zuiver op algebraïsche manipulaties focussen, grafische oefeningen, vragen die op theoretische aspecten ingaan …

Author(s): Bart Lambregs

# Denkvragen

**Oefening 6** *Als de grootte van de snelheid van een voorwerp toeneemt, neemt de versnelling dan noodzakelijkerwijs ook toe? Motiveer je antwoord.*

**Oefening 7** *Kan de gemiddelde snelheid van een deeltje over een gegeven tijdsinterval gelijk zijn aan nul, terwijl de grootte van de snelheid over een kortere tijdsduur verschillend is van nul? Verklaar je antwoord.*

**Oefening 8** *Geef een voorbeeld waarin zowel de snelheids- als de versnellingscomponent negatief zijn.*

**Oefening 9** *Wanneer een voorwerp zich met een constante snelheid verplaatst, verschilt de gemiddelde snelheid over een willekeurig tijdsinterval dan van de momentane snelheid op een willekeurig moment?*

**Oefening 10** *Een puntmassa beweegt volgens de plaatsfunctie*

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 10t$$

*Bereken haar snelheidscomponent telkens als ze het vertrekpunt passeert. Hoe groot is dan de versnellingscomponent?* $x = t(t-5)(t+2)$

**Oefening 11** *Een puntmassa voert een eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging uit over het tijdsinterval* $[0\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}]$ *met beginsnelheid en beginpositie van respectievelijk* $0\,\mathrm{m/s}$ *en* $0\,\mathrm{m}$*. De versnelling is* $3\,\mathrm{m/s^2}$*. Waarom kan je onmiddellijk stellen dat als in het tijdsinterval de tijd half om is, de puntmassa nog niet halfweg is?*

(a) *Leg in woorden uit op welke manier je onmiddellijk kan inzien dat het te bewijzen juist is.*

(b) *Controleer het te bewijzen via de numerieke waarden van dit vraagstuk.*

(c) *Geef nu het bewijs.*

**Oefening 12** *Een massa vertrekt vanuit rust om een eenparig versnelde rechtlijnige beweging uit te voeren. Als haar beginpositie* $0\,\mathrm{m}$ *is, welke van de volgende betrekkingen is dan juist?*

***Meerkeuze:***

---

Author(s): Bart Lambregs

(a) $t = \frac{x}{2v}$

(b) $t = \frac{2x}{v}$ ✓

(c) $t = \frac{v}{2x}$

(d) $t = \frac{2v}{x}$

**Oefening 13** *De snelheid van een lichaam dat vanuit rust vrij valt, bedraagt na een valafstand $x$:*

***Meerkeuze:***

(a) $v = 2gx$

(b) $v = \sqrt{2gx}$ ✓

(c) $v = gx$

(d) $v = \sqrt{\frac{gx}{2}}$

$v = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$

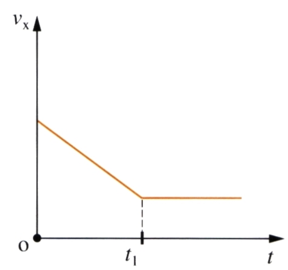
**Oefening 14** *Laat zien dat voor een EVRB waarvoor $x_0 = 0$ de volgende formule geldt:*

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

*Uit $v = v_0 + at$ volgt:*

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 \\ &= v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2) \\ &= v_0^2 + 2ax \end{aligned}$$

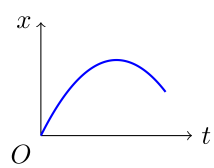
**Oefening 15** *Teken de overeenkomstige $x(t)$- en $a(t)$-grafiek bij de gegeven $v(t)$-grafiek. Ga ervan uit dat $x_0 = 0\,\mathrm{m}$.*

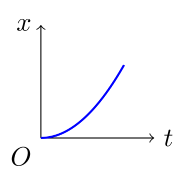


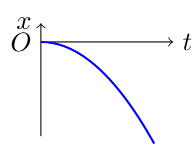

**Oefening 16** *De snelheid van een deeltje voldoet aan $v = at$ waarin $a$ constant en negatief is. De plaats van het deeltje wordt voorgesteld door $x$. Aangenomen wordt dat $x = 0\,\mathrm{m}$ op het ogenblik $t = 0\,\mathrm{s}$.*

*Welke grafiek geeft het juiste verloop van $x(t)$?*

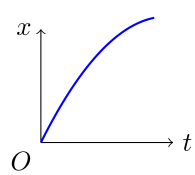
***Meerkeuze:***

(a) 


(b) 


(c) 

✓

(d) 


**Oefening 17** *Beargumenteer het gebruik van het model van een eenparig versnelde rechtlijnige beweging (EVRB) voor de vrije beweging van een wagentje op een helling. Denk daarbij aan een proefneming die we in de klas deden. De notie kracht moet je hier even buiten beschouwing laten. Het model beschrijft de meetgegevens accuraat.*

*M.a.w. zijn de meetgegevens van de positie van het wagentje op de helling in functie van de tijd, gemeten met een (ultrasone) positiesensor, accuraat te beschrijven met de plaatsfunctie van een eenparig versnelde beweging.*

*Toelichting. De vraag gaat over de relatie tussen de theorie en de realiteit. Het is maar door metingen te doen dat we kunnen nagaan of gevolgen van de theorie (in dit geval bijvoorbeeld dat de positie kwadratisch in de tijd verloopt voor een beweging met constante versnelling) overeenkomen met de realiteit. In het gegeven geval van een wagentje op een helling, is bijvoorbeeld een model van constante snelheid niet van toepassing. Het zou immers impliceren dat het wagentje niet van zin kan veranderen. Dat laatste wordt door metingen of waarnemingen weerlegd.*

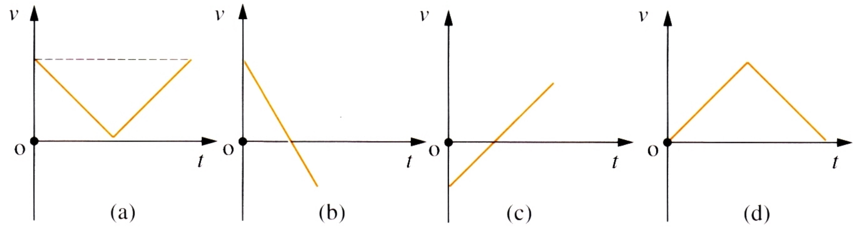
*We spreken over een* falsifieerbaar *model. Dat betekent dat zolang het niet weerlegd wordt, het geldig blijft. Je kan het alleen 'vals' maken door een situatie te tonen waarin het* niet *werkt.*

**Oefening 18** *Kan de bewegingsrichting van een voorwerp omkeren terwijl de versnelling gelijk blijft? Zo ja, geef dan een voorbeeld. Zo nee, leg uit waarom dat niet kan. Ja, dat kan. Als je een bal opwerpt zal op het hoogste punt de bewegingszin omdraaien terwijl de versnelling gelijk blijft. We kunnen immers een verticale worp modelleren als een EVRB. Kiezen we de referentieas om de beweging te beschrijven omhoog, dan is de snelheid van de bal positief bij het naar boven bewegen en negatief wanneer hij naar beneden komt, terwijl de verandering van de snelheid in de tijd (de versnelling) systematisch gelijk is aan de negatieve valversnelling.*

**Oefening 19** *Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook? Ja, dat kan. Neem bijvoorbeeld een voorwerp dat je verticaal omhoog gooit. Als je de referentieas waarmee je de beweging wil beschrijven verticaal naar benden kiest, zal de versnelling van de beweging positief zijn en de snelheid negatief. De snelheid is negatief omdat je tegengesteld aan de as beweegt en de versnelling is positief omdat de snelheid minder negatief wordt.*

*Het omgekeerde kan ook, draai gewoon de referentieas om.*

**Oefening 20** *Een lichaam wordt verticaal omhoog geworpen. De referentieas is omhoog gericht. Welke van de volgende $v(t)$-diagrammen geeft dan het juiste verloop van de snelheid weer?*



*Het juist antwoord is (b). De versnelling is constant waardoor de snelheid lineair moet verlopen in de tijd. Aangezien de referentieas naar boven is gekozen, moet de snelheid in het naar boven bewegen positief zijn. Dat is het geval bij (b).*

**Oefening 21** *Vanaf een klif laat men vanop dezelfde hoogte twee identieke bollen vallen. Men laat de tweede bol één seconde later vallen dan de eerste. De luchtwrijving is niet te verwaarlozen. Dan*

***Meerkeuze:***

(a) *zal de tweede bol iets later dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(b) *zal de tweede bol iets vroeger dan één seconde na de eerste neerkomen.*

(c) *zal de tweede bol exact één seconde na de eerste neerkomen.* ✓

(d) *kunnen we hieromtrent geen uitspraak doen bij gebrek aan gegevens.*

*Voor beide bollen is de omstandigheid waarin ze vallen gelijk.*

**Oefening 22** *Vanop een grote hoogte laat men achtereenvolgens twee stenen vallen met een tussentijd van 2 seconden. Op welke wijze verandert de afstand tussen beide stenen in de tijdsduur dat beide vallen?* *De afstand verandert lineair in functie van de tijd:* $\Delta x(t) = gt_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt_0^2$ *(*$= \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2$ *met* $t \geqslant t_0 = 2\,\mathrm{s}$*)*

**Oefening 23** *Aan de rand van een afgrond laat men een steen vallen. Op hetzelfde ogenblik werpt men een steen op. Zou het kunnen dat, als de afgrond diep genoeg is, beide stenen elkaar nog ontmoeten?*

*Aangezien de opgeworpen steen later (en zelfs hoger) begint met vallen en beide stenen eenzelfde versnelling hebben, kan op geen enkel moment de opgeworpen steen een grotere snelheid hebben dan de steen die wordt losgelaten. Dat laatste zou op het moment van inhalen nochtans op zijn minst het geval moeten zijn.*

*In formules moet gelden, met* $v_0$ *een negatieve beginsnelheid:*

$$\frac{1}{2}gt^2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$$

*Dat is enkel het geval wanneer* $t = 0$.

**Oefening 24** *Op de maan is de valversnelling slechts een zesde van die op de aarde. Als een voorwerp op de maan verticaal omhoog wordt gegooid, hoeveel maal hoger komt het dan dan een voorwerp dat met dezelfde beginsnelheid vanaf de aarde wordt opgeworpen?*

*De tijd die het voorwerp nodig heeft om tot zijn hoogste punt ($v = 0$) te geraken, is $t = -\dfrac{v_0}{a}$ waarbij $a$ de negatieve versnelling op aarde of op de maan is. Met deze tijd en de gemiddelde snelheid gedurende de opwaartse beweging, kunnen we de bereikte hoogte uitdrukken in functie van de beginsnelheid $v_0$:*

$$x = \bar{v}t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) = -\frac{v_0^2}{2a}$$

*Uit deze uitdrukking volgt dat de bereikte hoogte omgekeerd evenredig is met de versnelling. Op de maan zal het voorwerp dan ook zes keer zo hoog geraken.*

# Vraagstukken

**Oefening 25** *Een automobilist rijdt gedurende* 1,5 uur *tegen* 80 km/h *en daarna gedurende dezelfde tijdsduur tegen* 70 km/h.

(a) *Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

(b) *Met welke snelheid had hij moeten rijden om met een constante snelheid hetzelfde traject in dezelfde tijd af te leggen?*

**Oefening 25.1** *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de tijd houdt hij constant een snelheid $v_1$ aan, gedurende de tweede helft een snelheid $v_2$. Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

**Oefening 26** *Een automobilist legt* 120 km *af. De eerste helft van de weg legt hij af tegen* 90 km/h, *de tweede helft tegen* 120 km/h. *Wat is zijn gemiddelde snelheid?*

**Oefening 26.1** *Een fietser legt een bepaalde afstand af over een zekere tijd. Gedurende de eerste helft van de af te leggen afstand houdt hij constant een snelheid $v_1$ aan, gedurende de tweede helft een snelheid $v_2$. Wat is zijn gemiddelde snelheid over het totale tijdsinterval?* $\overline{v} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

**Oefening 27** *Als je met de fiets heen en terug naar school rijdt en in het heengaan tegenwind en in het terugkeren rugwind hebt, compenseert dat dan mekaar precies?*

*Stel om dit op te lossen dat de weg rechtlijnig is. Bereken je gemiddelde snelheid over het traject heen en terug en vergelijk die met de snelheid die je zonder wind zou halen. Neem aan dat je normaal* 10 km/h *zou fietsen, maar door de wind win of verlies je* 2 km/h.

***Meerkeuze:***

(a) *Nee, je hebt netto een nadeel vanwege de tegenwind.* ✓

(b) *Nee, je hebt netto een voordeel vanwege de rugwind.*

(c) *Ja, de afstand heen is de afstand terug, dus het is net alsof je helemaal geen wind had.*

---

Author(s): Bart Lambregs

**Oefening 28** *Een bowlingbal die met een constante snelheid voort rolt, raakt de kegels aan het einde van een kegelbaan van* 16,5 m *lengte. De werper hoorde het geluid waarmee de bal op de kegels botst* 2,5 s *nadat hij de bal losliet. Welke snelheid had de bal? De snelheid van het geluid is* 343 m/s. $v_1 = \frac{x_1}{t_2 - \frac{x_1}{v_2}} =$ 6,73 m/s

**Oefening 29** *Een vliegtuig moet minstens een snelheid van* 108 km/h *hebben om te kunnen opstijgen. Indien de schroeven aan het toestel een versnelling van* 1,50 m/s$^2$ *geven, hoe lang moet de startbaan dan minstens zijn? Doordat we de versnelling van het vliegtuig kennen en de snelheid die het moet bereiken, kunnen we de tijd die het vliegtuig hiervoor nodig heeft, gemakkelijke berekenen met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid van een EVRB:*

$$t = \frac{v}{a}$$

*De afstand die in deze tijd wordt afgelegd, kunnen we berekenen doordat we de gemiddelde snelheid kennen*[6]*:*

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot t \\ &= \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{a} \\ &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned}$$

*De startbaan moet dus minstens* 300 m *lang zijn.*

**Oefening 30** *Een trein rijdt tegen een snelheid van* 72 km/h *en remt met een versnelling waarvan de grootte* 1,0 m/s$^2$ *bedraagt. Na hoeveel tijd komt de trein tot stilstand en welke afstand wordt er tijdens dit afremmen afgelegd?*

*Aangezien er per seconde een snelheid van* 1,0 m/s *van de beginsnelheid afgaat, vinden we de tijd die nodig is voor het remmen, door de beginsnelheid te delen door de versnelling. Dat is namelijk de tijd die nodig is voor de trein om tot stilstand te komen:*

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 + at &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= -\frac{v_0}{a} \end{aligned}$$

[6]De benodigde afstand kunnen we evenzeer berekenen met de formule $x = x_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$ door de tijd in te vullen.

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* 20 s. *De afgelegde afstand gedurende het remmen vinden we nu met de plaatsfunctie. We kennen de benodigde tijd, die we in de plaatsfunctie invullen.*

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ &= v_0 \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2} a \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v_0^2}{2a} \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegevens levert een remafstand van* 200 m.

*Een andere mogelijkheid om de remafstand te vinden is te werken met de gemiddelde snelheid,* $x = \overline{v}t$.

**Oefening 31** *Op een bevroren meer komt een glijdende hockeyschijf na* 200 m *tot stilstand. Als zijn initiële snelheid* 3,00 m/s *was, bepaal dan*

(a) *de versnelling in de veronderstelling dat deze constant is,*

(b) *de tijd die de schijf nodig heeft om tot stilstand te komen.*

$a = \dfrac{v_0^2}{2x} = 0,0225\,\mathrm{m/s^2}$; $t = \dfrac{2x}{v_0} = 133{,}33\,\mathrm{s}$

**Oefening 32** *Een bootje vaart met een snelheid van* 36,0 km/h *een eerste tijdopnemer voorbij en drijft daarna eenparig zijn snelheid op. Na* 20,0 s *komt het voorbij een tweede tijdopnemer met een snelheid van* 90,0 km/h. *Bereken de versnelling van het bootje en de afstand tussen beide tijdopnemers.* $a = \dfrac{v - v_0}{t - t_0} = 0,750\,\mathrm{m/s^2}$, $x - x_0 = \left(\dfrac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 350\,\mathrm{m}$

**Oefening 33** *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* 3,0 km *een snelheid van* 450 km/h *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken de versnelling en de tijd, nodig om die* 3,0 km *af te leggen.* *Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. *De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \overline{v} \Delta t \\ &\Downarrow \\ t &= \frac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{2x}{v} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* 48 s. *Met de formule* $v = v_0 + at$ *voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd erin te substitueren, en de beginsnelheid nul te nemen:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{v}{t} = \frac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ &= \frac{v^2}{2x} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van* $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

**Oefening 34** *Een auto begint te remmen als hij zich* 35 m *van een hindernis bevindt. Zijn snelheid op dat moment is* 54 km/h. *Na* 4,0 s *botst hij tegen de hindernis. Bereken de snelheid waarmee hij de hindernis raakt en zijn constante versnelling gedurende de remweg.* *Uit de plaatsfunctie* $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ *kunnen we de versnelling halen:*

$$a = \frac{2x - 2v_0 t}{t^2} = -3{,}125\,\mathrm{m/s^2}$$

*Substitutie van de versnelling in de snelheidsfunctie levert:*

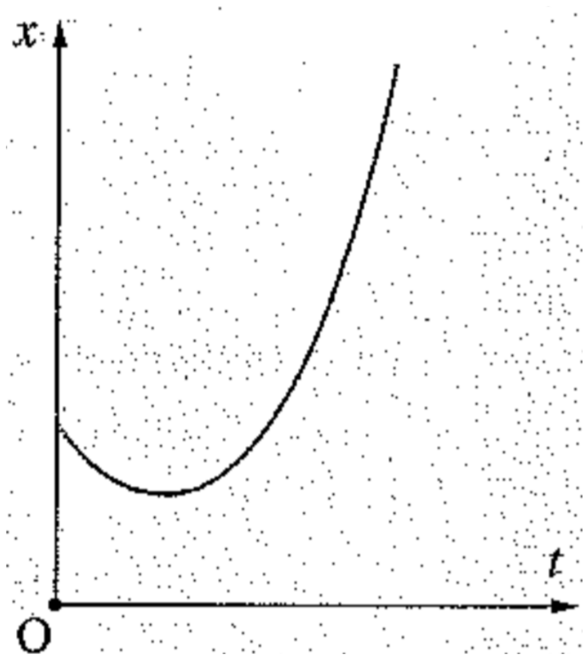
$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= v_0 + \left(\frac{2x - 2v_0 t}{t^2}\right)t \\ &= \frac{2x}{t} - v_0 \\ &= 2{,}5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

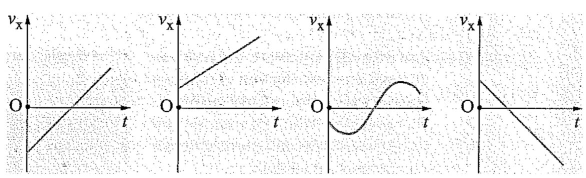
*Een andere (snellere) mogelijkheid om de snelheid te vinden is die te halen uit* $x = \frac{v_0 + v}{2}t$.

**Oefening 35** *Twee fietsers vertrekken gelijktijdig om een afstand van* 200 m *af te leggen. De eerste rijdt met een constante snelheid van* 4,0 m/s, *terwijl de tweede vertrekt met een snelheid van* 1,00 m/s *en de afstand van* 200 m *met een EVRB met een versnelling van* $0{,}20\,\mathrm{m/s^2}$ *aflegt. Waar zal de tweede fietser de eerste inhalen en wanneer?* $t = \frac{2(v_a - v_{b,0})}{a} = 30\,\mathrm{s}$, $x = v_a t = \frac{2v_a(v_a - v_{b,0})}{a} = 120\,\mathrm{m}$

**Oefening 36** *Een trein verlaat het station a en rijdt naar het station b, op* 15 km *van a gelegen. De eerste* 1000 m *worden afgelegd met een EVRB en de verkregen snelheid is* 72, 0 km/h. *Die snelheid blijft constant tot op* 250 m *van b. Hier begint de trein te vertragen. Wanneer komt hij in station b toe? Maak de* $v(t)$*-grafiek.*

**Oefening 37** *Een deeltje beschrijft een eendimensionale beweging op de $x$-as. De positie als functie van de tijd is hiernaast weergegeven in een $x(t)$-diagram. Duid de onderstaande grafiek aan die het best het verloop weergeeft van de snelheidscomponent $v$ van dat deeltje als functie van de tijd.*

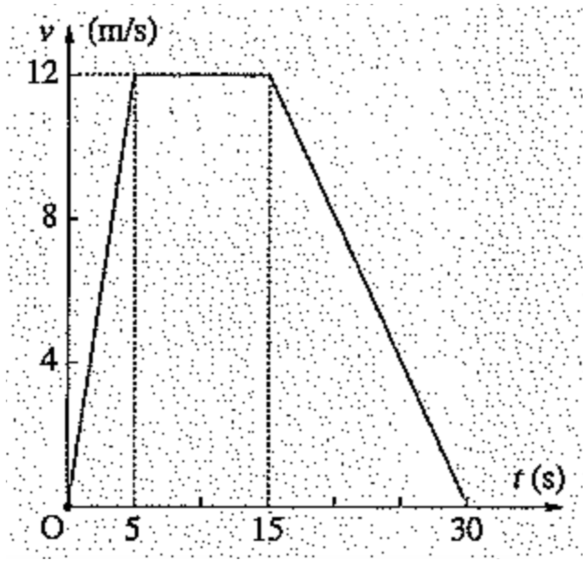


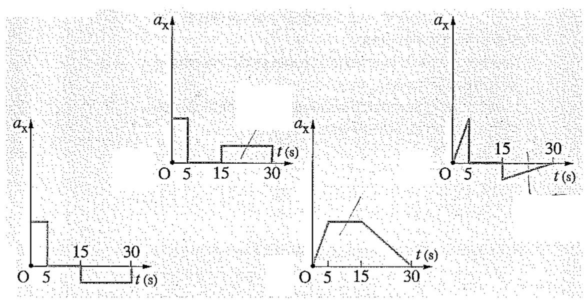
**Oefening 38** *Een deeltje beweegt in de zin van de $x$-as. De nevenstaande grafiek geeft aan hoe de grootte van de snelheid verandert als functie van de tijd.*

(a) *De afstand afgelegd na* 15 s *bedraagt:*

(b) *Na* 30 s *heeft het deeltje een welbepaalde afstand afgelegd. Hoe groot zou de constante snelheid van het deeltje moeten zijn om in* 30 s *dezelfde afstand af te leggen?*




(a) *Het verloop van de versnellingscomponent van het deeltje wordt kwalitatief voorgesteld op figuur:*




**Oefening 39** *(∗ ∗ ∗) Maggie en Jennifer lopen de* 100 m. *Beiden doen ze er exact 10,2 seconden over. Met een eenparige versnelling bereikt Maggie na* 2 s *haar maximale snelheid, Jennifer doet dat na* 3 s. *Hun maximale snelheden houden ze aan voor de rest van de wedstrijd.*

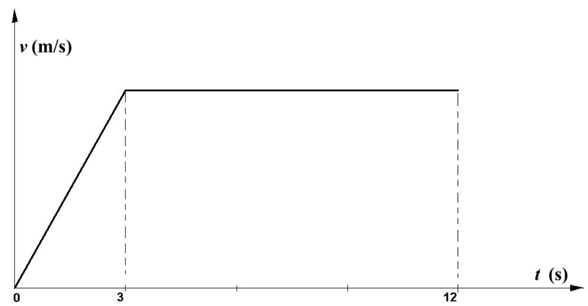
(a) *Wat zijn hun maximale snelheden?*

(b) *Wat is de versnelling van iedere sprinter?*

(c) *Wie heeft er voorsprong na* 6 s, *en hoeveel?*

$v_1 = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_1}$; $a = \dfrac{2x_2}{(2t_2 - t_1)t_1}$; $x_M - x_J = \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,M}}(t - \dfrac{t_{1,M}}{2}) - \dfrac{2x_2}{2t_2 - t_{1,J}}(t - \dfrac{t_{1,J}}{2})$

*Snelheidsgrafiek van Jennifer:*




**Oefening 40** *Welke afstand wordt er door een bungeejumper na een vrije val van* 2,5 s *afgelegd?* $x = \frac{1}{2}gt^2 = 31\,\mathrm{m}$

**Oefening 41** *Een auto die* 90 km/h *rijdt, ligt* 100 m *achter op een vrachtwagen die* 75 km/h *rijdt. Hoeveel tijd kost het de auto om de vrachtwagen in te halen?* $t = \frac{x_0}{v_a - v_v} = 24\,\mathrm{s}$

**Oefening 42** *De snelheid van een trein verandert eenparig in 2 minuten van* 20 km/h *tot* 30 km/h. *De trein rijdt gedurende die tijd over een rechte spoorlijn.*

(a) *Bepaal de versnelling.*

(b) *Bepaal de afstand die de trein heeft afgelegd gedurende deze 2 minuten.*

**Oefening 43** *Een auto trekt in* 5,0 s *op van* 10 m/s *naar* 25 m/s. *Wat was de versnelling in de veronderstelling dat de auto een EVRB ondergaat? Welke afstand legde de auto in deze periode af?* $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = 3\,\mathrm{m/s}$, $x - x_0 = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)(t - t_0) = 87,5\,\mathrm{m}$

**Oefening 44** *Bij het katapulteren van vliegtuigen wordt een startbaan van* 25,0 m *gebruikt, die door het vliegtuig eenparig versneld in* 1,00 s *wordt doorlopen. Zoek zijn versnelling en de snelheid waarmee het de baan verlaat.*

**Oefening 45** *Een auto trekt op tot* 100 km/h *in* 6,0 s. *Als hij dat doet op een rechte baan met constante versnelling, welke afstand is er dan hiervoor nodig?* $a = \frac{v}{t} = 4,63\,\mathrm{m/s^2}$, $x = \frac{vt}{2} = 83,3\,\mathrm{m}$

**Oefening 46** *Een auto vertrekt vanuit rust en bereikt na* 3,0 km *een snelheid van* 450 km/h *We onderstellen de versnelling constant en de baan recht. Bereken* *de versnelling en de tijd, nodig om die* 3,0 km *af te leggen. Omdat voor een EVRB de gemiddelde snelheid gegeven wordt door* $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ *en we de afgelegde afstand kennen, kunnen we de benodigde tijd gemakkelijk vinden. We kiezen* $t_0 = 0$*,* $x_0 = 0$*. De beginsnelheid is nul zodat:*

$$\begin{aligned} \Delta x &= \overline{v}\Delta t \\ &\Downarrow \\ t &= \frac{x}{\left(\frac{v}{2}\right)} = \frac{2x}{v} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegevens levert een tijd van* 48 s*. Met het formuletje voor de snelheid vinden we de versnelling door de tijd te substitueren:*

$$\begin{aligned} v &= at \\ &\Updownarrow \\ a &= \frac{v}{t} = \frac{v}{\left(\frac{2x}{v}\right)} \\ &= \frac{v^2}{2x} \end{aligned}$$

*Invullen van de gegeven grootheden levert een versnelling van* $2{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

**Oefening 47** *Een vliegtuig landt met een snelheid van* 100 m/s*. Op de landingsbaan heeft het een vertraging van* $5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$*. Welke afstand heeft het vliegtuig nodig om tot stilstand te komen?*

**Oefening 48** *Een trein vertrekt uit een station en rijdt met een eenparig versnelde beweging waarvan de versnelling* $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$ *bedraagt. Hoe groot is de afstand die de trein heeft afgelegd als zijn snelheid* 72,0 km/h *bedraagt?*

**Oefening 49** *Twee personen A en B voeren op dezelfde rechte en vanuit dezelfde beginstand een eenparige beweging uit. A vertrekt* 100 s *eerder dan B. Met een snelheid die dubbel zo groot is als die van A haalt B, op* 400 m *van het vertrekpunt, A in. Bereken beide snelheden en stel ze grafisch voor.*

**Oefening 50** *Een vliegtuig start vanuit rust en versnelt met een constante versnelling langs de grond alvorens op te stijgen. Het legt* 600 m *af in* 12 s*. Bepaal de versnelling, de snelheid na* 12 s *en de afstand afgelegd gedurende de twaalfde seconde.*

$a = \dfrac{2x}{t^2} = 8{,}33\,\mathrm{m/s^2}$, $v = \dfrac{2x}{t} = 100\,\mathrm{m/s}$, $x(t=12) - x(t=11) = \dfrac{1}{2}a(t_{12}^2 - t_{11}^2) = 95{,}8\,\mathrm{m}$

# Vraagstukken vrije val

**Oefening 51** *Welke afstand wordt er door een bungeejumper na een vrije val van* 2,5 s *afgelegd?* $x = \frac{1}{2}gt^2 = 31\,\mathrm{m}$

**Oefening 52** *Uit een punt op* 28,0 m *boven de grond wordt een bal verticaal omhoog geworpen met een snelheid van* 12 m/s. *Bepaal*

(a) *de door het lichaam bereikte hoogte boven de grond;*

(b) *de tijd nodig om de grond te bereiken;*

(c) *de snelheid bij het bereiken van de grond.*

$v = 0 \Rightarrow x = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 35{,}34\,\mathrm{m}$

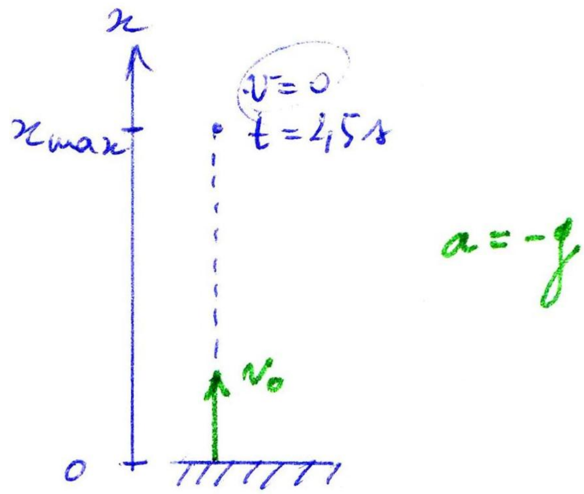
$x = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{g} = 3{,}91\,\mathrm{s}$

$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gx_0} = -26{,}33\,\mathrm{m/s}$

**Oefening 53** *Een pijl wordt verticaal van de grond omhooggeschoten en bereikt na* 2,8 s *het hoogste punt. Bepaal deze hoogte. Op het hoogste punt is de snelheid van de pijl nul. Aangezien we weten hoe lang hij onderweg is en de pijl per seconde* $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ *trager omhoog vliegt, kunnen we hieruit de beginsnelheid bepalen.*

*We kiezen de referentie-as met de oorsprong op de grond. De versnellingscomponent is dan het tegengestelde van de valversnelling,* $a = -g$.

Author(s): Bart Lambregs




*We krijgen:*

$$v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt$$

*Dat is in grootte gelijk aan* 27 m/s. *Nu dat we ook de beginsnelheid kennen, vinden we de afgelegde afstand, wat ook de maximale hoogte is:*

$$x = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = (gt)t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

*Vullen we de getalwaardes in, dan vinden we* 38 m

*Merk op dat deze afstand gelijk is aan de afstand die de pijl vanuit rust zou afleggen bij een vrije val die* 2,8 s *duurt. Dat is niet heel verwonderlijk; de vertraging naar boven toe is namelijk gelijk aan de versnelling bij het vallen naar beneden. Wiskundig loopt de symmetrieas van een parabool door de top.*

**Oefening 54** *Een parachutist in vrije val bereikt een uiteindelijke valsnelheid van* 50 m/s. *Neem aan dat een geopende parachute voor een constante vertraging van* 30 m/s$^2$ *zorgt.*[7] *Wil er bij het neerkomen geen kans op letsel bestaan, dan mag de landingssnelheid niet groter dan* 5,0 m/s *zijn.*

*Wat is de minimumhoogte voor het openen van de parachute? Aangezien we de versnelling en begin- en eindsnelheid kennen, kunnen we de tijd die nodig is om de eindsnelheid te bereiken, berekenen:*

$$v = v_0 + at \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

[7] Dit is een heel ruwe benadering. In feite hangt de vertraging door de parachute namelijk af van de snelheid en is die afhankelijkheid bovendien voor grote snelheden sterker dan voor kleine.

*De afgelegde afstand is dan met de gemiddelde snelheid te berekenen:*

$$\begin{aligned} x &= \overline{v}t \\ &= \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} \\ &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= 41{,}25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

**Oefening 55** *Iemand laat een meloen vallen vanop een hoogte van* 20 m*. Op hetzelfde moment schiet je een pijl verticaal omhoog vanop de grond. De pijl treft de meloen na* 1,0 s*.*

(a) *Geef in één assenstelsel een verzorgde schets van de grafiek van de plaats in functie van de tijd voor beide objecten.*

(b) *Met welke snelheid heb je de pijl afgeschoten?*

*De plaatsfunctie van de meloen gelijkstellen aan die van de afgeschoten pijl, geeft (we kiezen de $y$-as omhoog waardoor de versnelling de negatieve valversnelling is):*

$$y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

*Oplossen naar $v_0$ geeft:* $v_0 = \dfrac{y_0}{t} = 20\,\mathrm{m/s}$.

**Oefening 56** *(∗∗∗) Wanneer de pelikaan naar vis duikt, trekt hij zijn vleugels in om als een steen loodrecht naar beneden te vallen.*

*Stel een pelikaan duikt vanaf* 25 m *hoogte en verandert onderweg dus niet meer van koers. Als het een vis* 0,15 s *kost om te vluchten, wat is dan de hoogte waarop de vis de pelikaan minstens moet opmerken, wil de vis nog kans maken te ontsnappen?*

*Neem aan dat de vis zich aan het wateroppervlak bevindt.*

*We kiezen de referentie-as naar beneden, met de oorsprong op de positie waar de pelikaan begint aan zijn duik De versnelling is dan gelijk aan de valversnelling.*

*We kennen de afstand waarover de pelikaan valt zodat we de tijd die de pelikaan nodig heeft om het wateroppervlak te bereiken, de valtijd, kunnen berekenen uit* $x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2$*:*

$$t_2 = \sqrt{\frac{2x_2}{g}}$$

*De pelikaan heeft namelijk geen beginsnelheid.*

*Gedurende een tijd $t_1 = t_2 - \Delta t$ (15 honderdste van een seconde minder dan de valtijd) mag de pelikaan vallen zonder door de vis te worden opgemerkt. De afstand boven het wateroppervlak is dan:*

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= x_2 - \frac{1}{2}g t_1^2 \\ &= x_2 - \frac{1}{2}g\left(t_2 - \Delta t\right)^2 \\ &= 3{,}2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

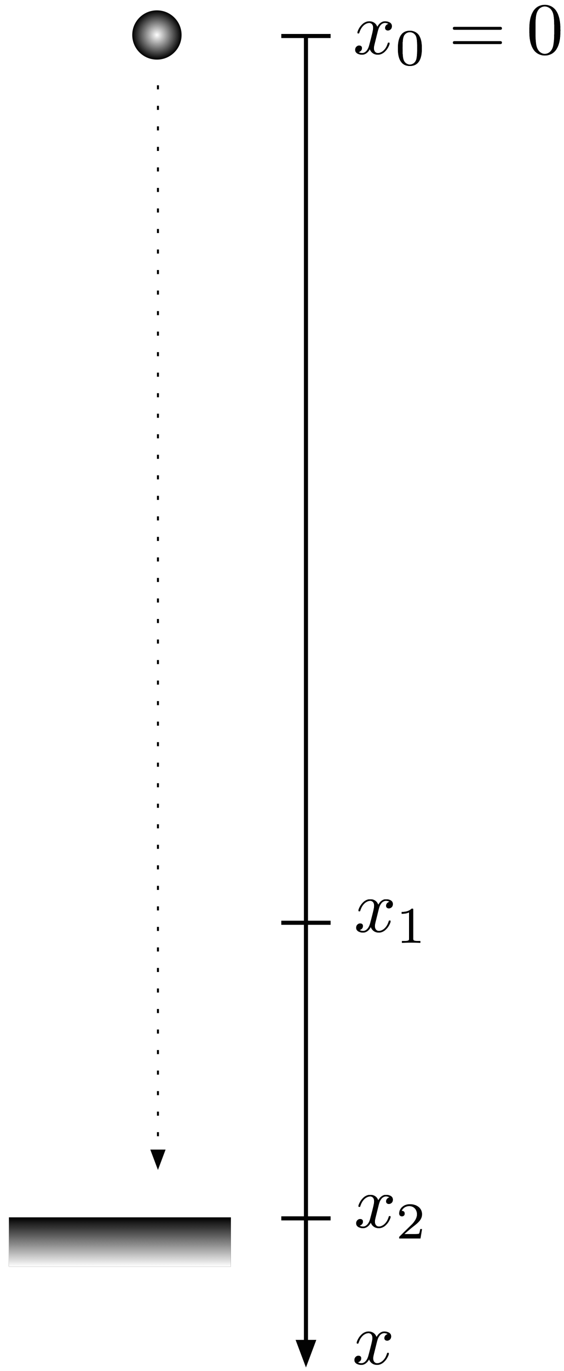
**Oefening 57** *($* * *$) Een verticaal vallende steen legt in de laatste seconde, voor hij de grond bereikt, $100\,\mathrm{m}$ af. Men veronderstelt dat hij vanuit rust vertrok.*

(a) *Bepaal de snelheid op het ogenblik dat hij de grond bereikt.*

(b) *Bepaal de hoogte vanwaar de steen viel en de tijd die hij daarvoor nodig had.*

*We kiezen de $x$-as naar beneden zodat de versnelling de valversnelling is, $a = g$. Als we $x_1$ beschouwen als de beginpositie van de beweging die de steen uitvoert in de laatste honderd meter, kunnen we de snelheid vinden waarmee de steen hieraan 'begint'.*

$$\begin{aligned} & \Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_1 = \frac{\Delta x - \frac{1}{2} g \Delta t^2}{\Delta t} \end{aligned}$$


$x_0 = 0$
$x_1$
$x_2$
$x$

*Met de formule voor de snelheid van een EVRB, vinden we de snelheid op het einde van het interval.*

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 + g\Delta t \\ &= \frac{\Delta x - \frac{1}{2}g\Delta t^2}{\Delta t} + g\Delta t \\ &= \cdots \\ &= \overline{v} + g\frac{\Delta t}{2} \\ &= 105\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

*Je kan dit ook afleiden door gebruik te maken van de formule voor gemiddelde snelheid,* $\overline{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

*Omdat we de snelheid kennen, kunnen we de tijd vinden die de steen nodig heeft gehad om aan deze snelheid te komen. Vervolgens vinden we dan ook de afstand.*

$$t_2 = \frac{v_2}{g} = \frac{\overline{v}}{g} + \frac{\Delta t}{2} = 10{,}7\,\mathrm{s}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 561\,\mathrm{m}$$

**Oefening 58** *($* * *$) Van de Empire Stage Building in New York komt op* $250\,\mathrm{m}$ *een ijskegel los en valt naar beneden.*

(a) *Na hoeveel tijd en met welke snelheid bereikt het ijskegeltje uiteindelijk de grond?*

(b) *Hoelang en over welke afstand moet de ijskegel al gevallen zijn om in de daaropvolgende* $2\,\mathrm{s}$ *een afstand te kunnen afleggen van* $100\,\mathrm{m}$*?*

*Gegeven* $x_3 = 250\,\mathrm{m}$
$\Delta t = t_2 - t_1 = 2{,}0\,\mathrm{s}$
$\Delta x = x_2 - x_1 = 100\,\mathrm{m}$

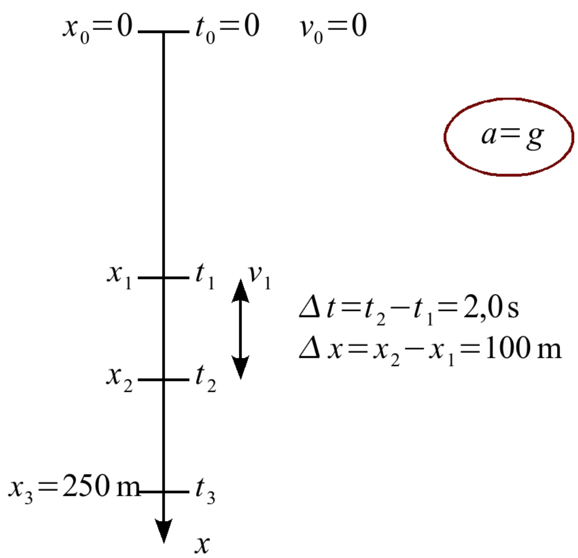
*Gevraagd* $t_3, v_3, t_1$ en $x_1$

*Omdat de beweging enkel naar beneden is, is de beschrijving gemakkelijk met een* $x$*-as naar beneden gericht. De versnellingscomponent* $a$ *is dan gelijk aan de valversnelling* $g$*. Omdat de kegel vanuit rust vertrekt, vinden we de valtijd uit* $x = \frac{1}{2}gt^2$*:*

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

*De valtijd bepaalt de eindsnelheid:*

$$v = gt = g\sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{2gx}$$




*Invullen van de gegevens geeft* $t_3 = 7{,}1\,\mathrm{s}$ *en* $v_3 = 70\,\mathrm{m/s} = 252\,\mathrm{km/h}$.

*Uit de plaatsfunctie kunnen we de beginsnelheid*[8] *halen. De beginsnelheid* $v_1$ *is immers de enige onbekende in de vergelijking:*[9]

$$\Delta x = v_1 \Delta t + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

*Dus:* $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t}$.[10]

*Omdat de kegel vanuit rust begint te vallen en per seconde* $9{,}81\,\mathrm{m/s}$ *sneller valt, vinden we de valtijd als* $t_1 = \dfrac{v_1}{g}$*:*

$$t_1 = \frac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2g\Delta t} \quad = \quad \frac{2 \cdot 100\,\mathrm{m} - 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot (2,0\,\mathrm{s})^2}{2 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2,0\,\mathrm{s}} = 4{,}1\,\mathrm{s}$$

[8] Voor de honderd meter is de beginsnelheid $v_1$.

[9] Hoe komen we aan deze uitdrukking? De plaatsfunctie toegepast op de honderd meter geeft: $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{1}{2} g t^2$ waarin de variabele $t$ de verstreken tijd tussen tussen de posities $x_1$ en $x_2$ weergeeft. In dit geval stellen we die echter voor door $\Delta t$. Ook is $\Delta x = x_2 - x_1$.

[10] Als we de uitdrukking uitwerken: $v_1 = \dfrac{2\Delta x - g\Delta t^2}{2\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} - g\dfrac{\Delta t}{2} = \bar{v} - g\dfrac{\Delta t}{2}$, is te zien dat $v_1$ één seconde eerder dan de gemiddelde snelheid bereikt wordt. De gemiddelde snelheid is immers $\bar{v} = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$ en wordt dus halverwege de valtijd van de honderd meter bereikt. Bovendien toont deze uitwerking dat we het vraagstuk ook anders hadden kunnen oplossen. Uit $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{v_1 + v_2}{2} = \dfrac{v_1 + (v_1 + g\Delta t)}{2}$ is immers $v_1$ te bepalen.

*De bijbehorende afgelegde weg is dan* $x_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = 82\,\mathrm{m}$.

**Oefening 59** *(∗∗∗) Een ziek man zit voor een raam dat* $1{,}20\,\mathrm{m}$ *hoog is. Een steen wordt vanop de grond opgeworpen en passeert het raam een keer opwaarts en een keer neerwaarts. De man ziet de steen in totaal voor één seconde.*

(a) *Bepaal de snelheid waarmee de steen de onderkant van het raam bereikt.*

(b) *Toon aan dat het met deze gegevens niet mogelijk is te berekenen hoe hoog het raam boven de grond is gelegen.*

*(a)* $\Delta x = v_1 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$ *zodat* $v_1 = \bar{v} + g\frac{\Delta t}{2} = 4{,}85\,\mathrm{m/s}$ *(*$\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{s}$*)*

*(b) Naast de hoogte van het raam boven de grond, zijn ook de benodigde tijd en de beginsnelheid onbekende grootheden. Met maar twee vergelijkingen die een EVRB beschrijven (*$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ *en* $v = v_0 + at$*), zijn deze onbekenden niet vast te leggen.*

*In een meer fysische uitleg kan je je realiseren dat eenzelfde snelheid aan de onderkant van het raam voor een grotere hoogte boven de grond te realiseren is met een grotere snelheid waarmee de steen opgeworpen wordt.*

**Oefening 60** *(∗∗∗) Een student gooit een sleutelbos verticaal omhoog naar een medebewoonster in een raam* $4{,}00\,\mathrm{m}$ *hoger. De sleutels worden* $1{,}50\,\mathrm{s}$ *later opgevangen.*

(a) *Wat was de snelheid waarmee de sleutels omhoog werden gegooid?*

(b) *Welke snelheid had de sleutelbos vlak voordat hij werd opgevangen?*

$v_0 = \frac{x + \frac{1}{2} g t^2}{t} = 10,02\,\mathrm{m/s}$

$v = v_0 - gt = \frac{x}{t} - \frac{1}{2} g t = -4{,}69\,\mathrm{m/s}$

*Merk op dat de sleutelbos wordt opgevangen bij het terug naar beneden komen. De snelheidscomponent is immers negatief.*

**Oefening 61** *(∗∗∗) Een voorwerp wordt verticaal omhoog geworpen en bereikt na een tijd* $t$ *een hoogte* $h$*. Toon aan dat de maximale hoogte* $h_{max}$ *die het voorwerp bereikt, wordt gegeven door:*

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{(gt^2 + 2h)^2}{8gt^2}.$$

*We zoeken eerst een uitdrukking voor de maximale hoogte. Op het hoogste punt is de snelheid nul zodat:*

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ &\Updownarrow \\ v_0 - gt &= 0 \\ &\Updownarrow \\ t &= \frac{v_0}{g} \end{aligned}$$

*Deze tijd is dus de tijd die het voorwerp nodig heeft om het hoogste punt te bereiken. Als we de oorsprong van de $y$-as op de grond kiezen en naar boven gericht, dan vinden we de maximale hoogte door dit tijdstip in de plaatsfunctie in te vullen:*

$$\begin{aligned} y_{max} &= y(t_{max}) \\ &= v_0 \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \end{aligned}$$

*Doordat we weten hoe hoog het voorwerp zich bevindt na een tijd $t_1$, kunnen we de beginsnelheid $v_0$ bepalen:*

$$\begin{aligned} y_1 &= v_0 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \\ &\Updownarrow \\ v_0 &= \frac{2y_1 + g t_1^2}{2t_1} \end{aligned}$$

*Substitutie hiervan in de uitdrukking voor de maximale hoogte geeft de te bewijzen uitdrukking.*