Eenparige versnelde rechtlijnige beweging

Opmerking 1. Deze open-source cursus is in ontwikkeling. Leerkrachten en leerlingen die van dit materiaal gebruik maken kunnen eenvoudig fouten/verbetering/... melden:

- via de 'wijzig' knop kan je zelf kleine fouten en typo's aanpassen. (extra uitleg)
- een mail sturen naar info@wiksunde.opmaat.org

Dit materiaal wordt ontwikkeld als open-source project via zulip.

Een eendimensionale beweging waarvan de versnelling constant noemt *eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging* (EVRB). Eenparig betekent gelijkmatig; de snelheidsverandering is steeds gelijk. In symbolen: $a(t) = a$ waarbij a een reëel getal is. Ook voor deze beweging kan je de plaatsfunctie en snelheidsfunctie bepalen en zo het verloop van de plaats en snelheid in functie van de tijd kennen.

We now examine the situation when the magnitude of the acceleration is constant and the motion is in a straight line. In this case, the instantaneous and average accelerations are equal. We use the definitions of average velocity and acceleration to derive a set of valuable equations that relate x, v, a, and t when a is constant, allowing us to determine any one of these variables if we know the others.

To simplify our notation, let us take the initial time in any discussion to be zero, and we call it t_0: $t_1 = t_0 = 0$. (This is effectively starting a stopwatch at t_0.) We can then let $t_2 = t$ be the elapsed time. The initial position (x_1) and the initial velocity (v_1) of an object will now be represented by x_0 and v_0, since they represent x and v at $t = 0$. At time t, the position and velocity will be called x and v (rather than x_2 and v_2).

The average velocity during the time interval $t - t_0$ will be (Eq. 2–2)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$$

since we chose $t_0 = 0$. The acceleration, assumed constant in time, is (Eq. 2–5)

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

A common problem is to determine the velocity of an object after any elapsed time t, when we are given the object's constant acceleration. We can solve such problems by solving for v in the last equation to obtain:

$$v = v_0 + at \qquad \text{[constant acceleration] (2–7)}$$

If an object starts from rest ($v_0 = 0$) and accelerates at $4.0\,\mathrm{m/s^2}$, after an elapsed time $t = 6.0\,\mathrm{s}$ its velocity will be

$$v = at = (4.0\,\mathrm{m/s^2})(6.0\,\mathrm{s}) = 24\,\mathrm{m/s}.$$

Next, let us see how to calculate the position x of an object after a time t when it undergoes constant acceleration. The definition of average velocity (Eq. 2–2) is

$$\bar{v} = \frac{x - x_0}{t}$$

which we can rewrite as

$$x = x_0 + \bar{v}t \qquad (2\text{–}8)$$

Because the velocity increases at a uniform rate, the average velocity $\bar{v}$ will be midway between the initial and final velocities:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad \text{[constant acceleration] (2–9)}$$

(Careful: Equation 2–9 is not necessarily valid if the acceleration is not constant.)

We combine the last two Equations with Eq. 2–7 and find:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right) t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right) t \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{[constant acceleration] (2–10)}$$

Stelling 1. De plaatsfunctie $x(t)$ en de snelheidsfunctie $v(t)$ van een EVRB met versnelling a worden gegeven door:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \end{aligned}$$

Hierin is x_0 de *beginpositie* en v_0 de *beginsnelheid*. Ze worden bepaald door de *beginvoorwaarden* of *randvoorwaarden*.

Indien de beschrijving van de beweging niet op $t = 0$ start maar op een gegeven tijdstip t_0, dan wordt in de beschrijving t vervangen door $\Delta t = t - t_0$, de verstreken tijd vanaf het begintijdstip t_0. De plaatsfunctie en zijn afgeleide worden dan een klein beetje ingewikkelder:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \\ v(t) &= v_0 + a(t - t_0) \end{aligned}$$

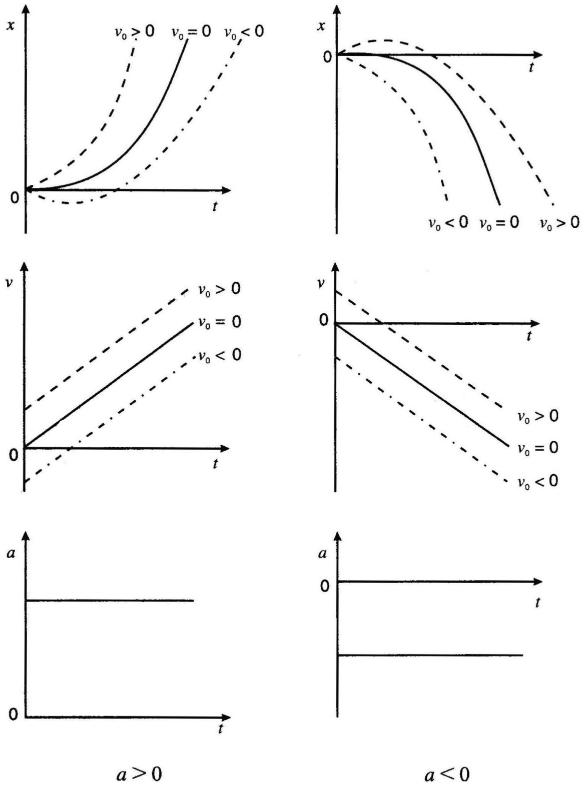
Met de functies kan je de volgende formule voor de gemiddelde snelheid van een EVRB aantonen:[1]

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Blijkbaar houdt het eenparig toenemen van de snelheid in dat we het rekenkundig gemiddelde kunnen gebruiken voor de gemiddelde snelheid.

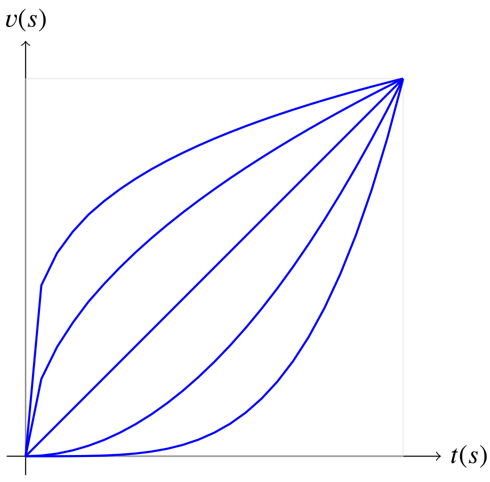
[1] De afleiding van de gemiddelde snelheid is als volgt:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2}{(t - t_0)} = \frac{2v_0 + a(t - t_0)}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

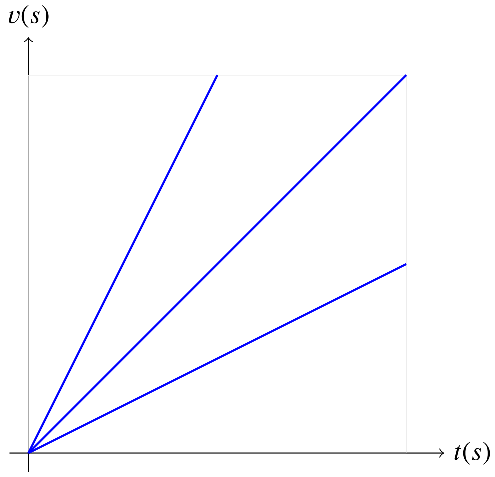


Figuur 1: Grafieken van een EVRB

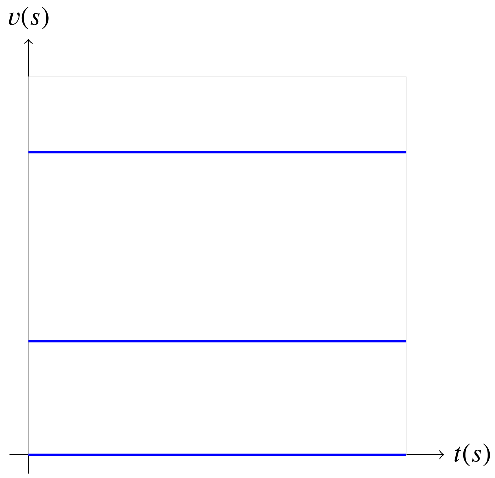
Oefening 1.



Oefening 2.



Oefening 3.



Oefening 4. Een auto die $60\,\mathrm{km/h}$ rijdt, raakt een boom; de voorkant van de auto wordt in elkaar gedrukt en de bestuurder komt na $70\,\mathrm{cm}$ tot stilstand. Welke gemiddelde vertraging onderging de bestuurder tijdens de botsing? Druk je antwoord uit in g, waarbij $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Uitwerking: Om de (constante) vertraging te vinden, hebben we de snelheidsverandering en de benodigde tijd nodig. De verandering in snelheid kennen we; de eindsnelheid van de auto moet nul worden maar de duur is niet onmiddellijk gegeven. Omdat de eindsnelheid nul is, kunnen we wel uit de snelheidsvergelijking van een eenparig veranderlijke beweging een *uitdrukking* vinden voor die tijd die we vervolgens kunnen substitueren in de plaatsvergelijking. De enige onbekende is dan de gezochte versnelling.[a] Uit $v(t) = 0$ of $0 = v_0 + at$ halen we een uitdrukking voor de tijd die nodig is om tot stilstand te komen:

$$t = -\frac{v_0}{a}$$

Substitutie van deze tijd in de plaatsfunctie levert:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= v_0\left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 \\ &= -\frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

De versnelling is dan gelijk aan:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x}$$

Invullen van de gegevens levert $a = -198\,\mathrm{m/s^2}$, wat gelijk is aan $20g$.

[a] M.b.v. de formule $\overline{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$ voor de gemiddelde snelheid en de definitie voor de gemiddelde snelheid $\overline{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ is het antwoord sneller te vinden. Ga maar na ...