Sint-Pieterscollege

Wiskunde Op Maat

Natuurkunde 6de jaar

Kinematica: Vectoren en Basisbegrippen

(Versie 2025/09/08.57)

Inhoudsopgave

0.1 Inleiding

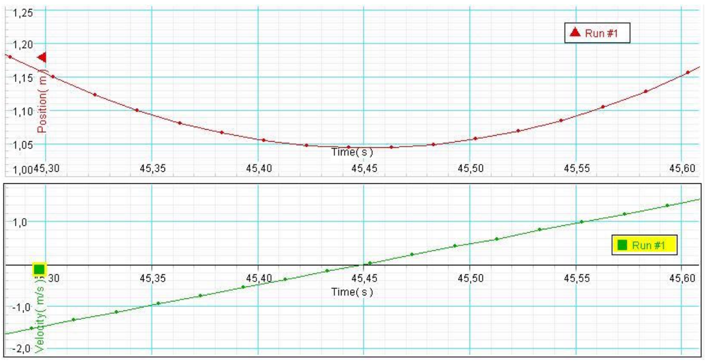
Als je met een keu tegen een biljartbal stoot, vliegt de bal vooruit. We kennen niet zomaar de ervaring waar de bal dat uit zichzelf doet; de stoot is nodig om de bal in beweging te brengen. De overgang van rust naar beweging is m.a.w. het *gevolg* van de stoot of de stoot is te zien als de *oorzaak* van de bewegingsverandering. De ontstane beweging is dan ook te *verklaren* vanuit de stoot.

Voor de moderne wetenschap is deze beschrijving en verklaring echter niet voldoende.[1]

Ze is enkel *kwalitatief*. Dat wil zeggen, ze beschrijft het verschijnsel slechts in algemene termen maar niet in meetbare grootheden. Voor de beschrijving willen we niet alleen weten dát de bal beweegt maar ook hóe ze dat doet. Voor de verklaring is een 'stoot geven' niet genoeg, we willen uit de grootte van de kracht en uit de hoek waaronder dit gebeurt, kunnen berekenen hoe de bal vooruit zal gaan. Willen we dus iets verklaren dan hebben we nood aan een *kwantitatieve* beschrijving en verklaring. De beweging moeten we met meetbare grootheden kunnen uitdrukken en de fysische wetmatigheid die de relatie tussen kracht en de daaruit volgende beweging geeft, moet in formulevorm uit te drukken zijn. [2]

Als de kracht de oorzaak is van de bewegingsverandering, hoe zit het dan precies met die relatie? Gegeven een kracht, wat is dan de beweging? Om deze vraag deels[3] te beantwoorden bekijken we drie voorbeelden.

Als je stopt met trappen op de fiets, bol je uit. Je zou dit kunnen verklaren door te stellen dat voorwerpen naar rust streven. Deze verklaring loopt echter al snel mank wanneer je ze wil toepassen op bijvoorbeeld de Voyager 1. Deze ruimtesonde bevindt zich bijna buiten ons zonnestelsel en vliegt met een duizelingwekkende snelheid van meer dan $61\,000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ de interstellaire ruimte tegemoet. Ze valt niet stil en heeft bovendien geen brandstof nodig om voort te blijven gaan. Het uitbollen met de fiets en het blijven voortgaan van de ruimtesonde verklaren we met de wet van de traagheid. Wanneer je stopt met trappen wil je de verkregen beweging aanhouden maar de wrijvingskracht houdt dit tegen. In de ruimte is er geen wrijving zodat objecten kunnen blijven bewegen, zonder dat daarvoor een kracht nodig is.



Figuur 1: Experimenteel bekomen grafieken van een verticale worp

Als we een appel laten vallen zal de zwaartekracht ervoor zorgen dat de appel naar de aarde valt. Wanneer we bovendien de snelheid meten, zien we dat deze snelheid toeneemt en wel op een constante manier. Dat wilt zeggen dat de *verandering in snelheid* steeds gelijk is. Er komt per tijdseenheid steeds evenveel snelheid bij. De appel valt sneller en sneller, maar de mate waarin dat gebeurt, is constant. Gooien we

[1] Voor Aristoteles (384-322 v.C.) waren vier oorzaken nodig om de werkelijkheid te kunnen verklaren. Ten eerste heeft de biljartbal een *materiële oorzaak*. Zonder materie is er geen bal. Ten tweede moet er een *formele* of *vormelijke oorzaak*. De bal is rond of het zou niet over een biljartbal kunnen gaan; de vorm is essentieel om over een bal te kunnen spreken. Bovendien kan materie niet zonder vorm bestaan. Ten derde moet er een *bewerkende oorzaak* zijn; de beweging van de bal is het gevolg van de stoot met de keu. Als laatste oorzaak moet er een *doeloorzaak* zijn. De beweging vindt maar plaats met een bepaald doel, nl. het willen potten van de bal. Het is maar omdat je de bal wilt potten dat de beweging plaatsvindt. Niemand zal met keus in het wilde weg beginnen stoten tegen ballen op biljarttafels. Daarvoor moet bovendien al het spel eerst gemaakt worden met het oog op ontspanning.

[2] Voor de moderne wetenschap is zeker de doeloorzaak niet meer van toepassing. We verklaren niet in termen van 'waarom' maar eerder met 'waardoor'. Een bijkomend en cruciaal element is ook de vraag naar een kwantitatieve beschrijving.

[3] Het volledige antwoord is terug te vinden in hoofdstuk **??**.

hem op, dan zien we dat zwaartekracht en snelheid een tegengestelde zin hebben. De zwaartekracht zorgt dus duidelijk niet voor de beweging omhoog (de appel blijft omhoog gaan) maar voor een vertraging van de beweging. De snelheid waarmee de appel omhoog beweegt, neemt af. Ook hier zien we – nadat we meten – dat de snelheid gelijkmatig afneemt. De snelheid waarmee de appel per tijdseenheid afneemt, is steeds gelijk. Of de appel nu snel gaat of traag, de mate van afname is steeds gelijk. We kunnen dus concluderen dat de zwaartekracht voor een verandering van bewegingstoestand zorgt; de snelheid blijft niet hetzelfde. We zien zelfs dat die verandering van de snelheid gelijkmatig is. De constante zwaartekracht zorgt blijkbaar voor een constante verandering van de snelheid.
Als je kijkt naar een koppel schoonschaatsers, dan zie je naast een fantastische prestatie en een mooi schouwspel, dat een kracht niet altijd voor een toename of afname in de grootte van de snelheid hoeft te zorgen.

Figuur 2: Een prachtig schouwspel...

De jongen in de figuur moet duidelijk een kracht uitoefenen om het meisje dat rond hem draait, bij te houden. De kracht die nu wordt uitgeoefend, dient niet zozeer voor het veranderen van de *grootte* van de snelheid dan wel voor het veranderen van de *richting* van de snelheid. Op elk moment verandert de richting van de snelheid, en dit naar de jongen toe – volgens de richting en zin van de kracht.
We kunnen concluderen dat een kracht niet zozeer invloed uitoefent op de snelheid dan wel op de *verandering* van de snelheid. Deze verandering houdt zowel een verandering van grootte en/of een verandering van richting in. Bovendien blijkt uit de laatste twee voorbeelden dat de verandering te associëren is met de kracht; de verandering is in de richting en zin van de kracht. Snelheid is te beschrijven als een vector en verandering van grootte en/of richting vallen beide onder het veranderen van de vector. Als we die verandering versnelling noemen, lijkt er een relatie te zijn tussen de kracht en de versnelling – tussen de oorzaak en het gevolg...
In hoofdstuk 1 bekijken we *vectoren* als voorkennis om fysische objecten te beschrijven. In hoofdstuk 2, 3 en 4 bekijken we het formalisme om bewegingen te *beschrijven*. Dit onderdeel noemen we **kinematica**. In hoofdstuk 5 en 6 behandelen we dan het *verklarende* principe achter de beweging. Dit noemen we **dynamica**. Het geheel – kinematica en dynamica – noemen we **mechanica**.

1.1 Het begrip vector

De natuurkunde beschrijft de niet levende natuur met grootheden die worden opsplitst in twee categorieën: scalaire grootheden (scalars) en vectoriële grootheden (vectoren). Grootheden die de vraag kunnen oproepen: “Naar waar gericht?” zijn vectoren, grootheden waarbij die vraag geen antwoord heeft, zijn scalars. Dit onderscheid en een correcte omgang met beiden zijn ontzettend belangrijk in fysica.

Stel dat *een helikopter vliegt met een snelheid van* $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Vraag: “Naar waar?” Antwoord: “Naar het zuiden, naar Brussel, naar omhoog, schuin naar onderen, . . . ” Er zijn vele betekenisvolle antwoorden mogelijk. Snelheid is een vector. Als *het zwembadwater een temperatuur van* $27\,°\mathrm{C}$ *heeft*, is er geen zinnig antwoord op de vraag *naar waar?*. Temperatuur is een scalar.

Een vectoriële grootheid heeft drie variabele kenmerken: grootte, richting en zin. Voorbeeld: de helikopter vliegt aan $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, horizontaal en naar het zuiden. Een scalaire grootheid heeft slechts één kenmerk: de grootte (waarin soms ook een teken vervat zit). Voorbeeld: een sneeuwbal heeft een temperatuur van -10°C.

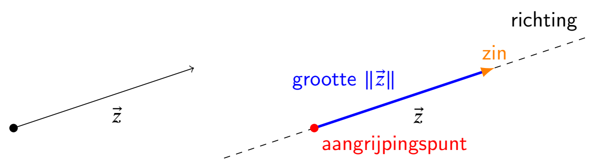
De plaats waarop de vector van toepassing is, noemt men het aangrijpingspunt van de vector.

➤ Een universiteitscollege over dit hoofdstuk

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=0na1JdPE_JY

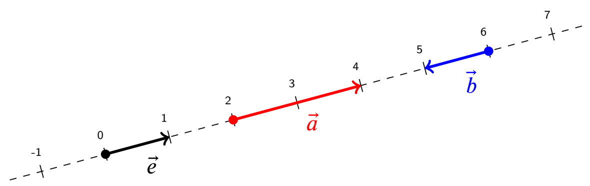
1.2 Voorstelling en notatie

Vectoren worden grafisch voorgesteld met een pijl. Een vectoriële grootheid wordt genoteerd met $\vec{z}, \vec{a}, \vec{x}, \ldots$ en wordt altijd bij de pijl gezet ter benoeming. Om duidelijk te maken dat het telkens om een vector gaat wordt een pijltje boven de letter geplaatst. Zonder de vector te benoemen stelt de pijl geen vector voor (en kan het dus evengoed een echte pijl afgeschoten door een boog zijn)! De pijl geeft alle kenmerken die een vector vastleggen weer.



Figuur 3: De vector $\vec{z}$ met al zijn componenten.

Aan de zin van een vector wordt wiskundig een teken gekoppeld dat afhangt van de gekozen referentie-as. Vectoren in de zin van de gekozen referentie-as worden als positief beschouwd, vectoren tegen de zin van de referentie-as als negatief.
De grootte van een vector $\vec{z}$ wordt aangeduid met de norm $\|\vec{z}\|$ of het absolutewaardeteken $|z|$ en is altijd positief. De grootte komt immers overeen met de lengte van de vector (en een lengte is altijd positief).
De richting van een vector wordt weergegeven met een eenheidsvector $\vec{e}$ waarvoor $\|\vec{e}\| = 1$. Het invoeren van een eenheidsvector blijkt erg nuttig in notaties. Hiermee kunnen alle kenmerken van een vector ook algebraïsch weergegeven worden.
Er geldt in onderstaande tekeningen dat $\vec{a} = \pm\|\vec{a}\| \cdot \vec{e} = +2 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 2. Voor de vector $\vec{b}$ geldt $\vec{b} = \pm\|\vec{b}\| \cdot \vec{e} = -1 \cdot \vec{e}$ met aangrijpingspunt 6.



1.2.1. Als de grootte van een vector $\vec{c}$ gelijk is aan nul, noemt men dit ook de **nulvector**. Men noteert dit als: $\vec{c} = \vec{0}$ of $\|\vec{c}\|$ of $c = 0$ Men mag niet noteren dat: $\vec{c} = 0$ Linkerlid en rechterlid moeten immers beiden een scalar of beiden een vector zijn!

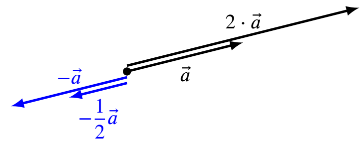
Vlugge Vraag

Waarom mag je **niet** noteren dat $\vec{c} = 0$?

1.3 Bewerkingen met vectoren

Scalaire vermenigvuldiging van een reëel getal met een vector

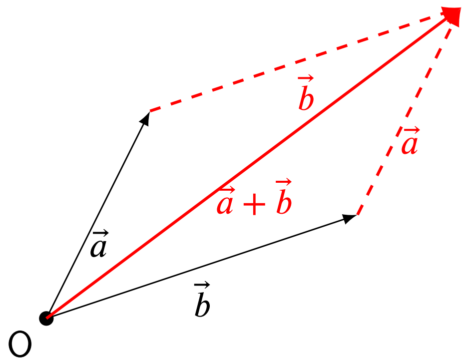
Een vector kan 'herschaald' worden door hem te vermenigvuldigen met een reëel getal (d.w.z. een scalar). De richting blijft op die manier behouden. De grootte en zin kunnen veranderen. De scalaire verminigvuldiging wordt genoteerd als $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ waarbij $k \in \mathbb{R}$.



Figuur 4: De scalaire vermenigvuldiging van een vector $\vec{a}$

De samenstelling of som van twee (of meer) vectoren

Twee vectoren van dezelfde grootheid met hetzelfde aangrijpingspunt kunnen opgeteld worden met als resultaat een nieuwe vector. Deze vector wordt **de resultante** genoemd. Grafisch (kwalitatief) bekomt men de resultante via de kopstaartmethode of parallellogrammethode.



Figuur 5: De optelling van twee vectoren

De **grootte van de resultante** (kwantitatief) kan op verschillende manieren bepaald worden. Erg belangrijk hierbij is om meetkundige samenstelling in het oog te houden en zeker niet blindelings de groottes van de gegeven vectoren op te tellen! In het algemeen wordt de grootte van de resultante berekend met de cosinusregel. In evenwijdige of loodrechte gevallen zijn er efficiënte manieren om de resultante te bepalen (som/verschil of stelling van Pythagoras), de meest algemene methode is echter met de (gewijzigde) cosinusregel:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$$

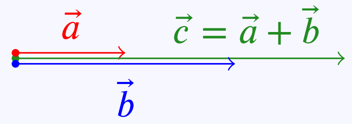
met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Vlugge Vraag

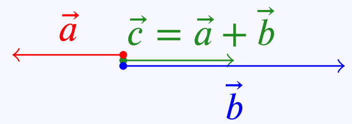
Hoe vereenvoudigt de formule als $\vec{a}$ en $\vec{b}$ loodrecht staan? Wat als ze dezelfde richting hebben?

Voorbeeld 1.3.1. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| = 8\,\mathrm{N}$.

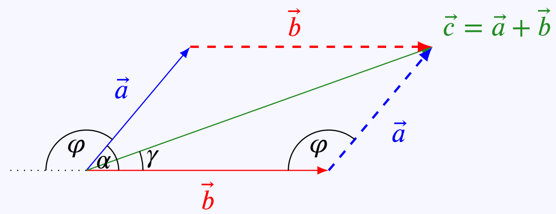
1.3 Bewerkingen met vectoren



Voorbeeld 1.3.2. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$ en $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$. Bijgevolg is $\|\vec{c}\| = \|\vec{a} + \vec{b}\| = 5\,\mathrm{N} - 3\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N}$.



Voorbeeld 1.3.3. In onderstaande figuur is $\|\vec{a}\| = 3\,\mathrm{N}$, $\|\vec{b}\| = 5\,\mathrm{N}$ en $\alpha = 50°$.



De grootte van de resultante $\vec{c}$ wordt bepaald met de cosinusregel:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\varphi \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos(180° - \alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|(-\cos\alpha) \\
&= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\,\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\cos\alpha \\
&= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 50°} \approx 7{,}3\,\mathrm{N}.
\end{aligned}$$

1.3.1. In het algemeen geldt dus **niet** dat $\|\vec{c}\| = \|a \vec{+} b\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. In welk(e) geval(len) geldt de eigenschap wel?

De **richting van de resultante** (d.w.z. de hoek γ) kan bepaald worden met de sinusregel:

$$\frac{\sin\gamma}{\|\vec{b}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{c}\|} \quad\Longrightarrow\quad \sin\gamma = \frac{\|\vec{b}\|\sin\alpha}{\|\vec{c}\|}$$

$$\gamma = \mathrm{bgsin}\left(\frac{5\cdot\sin 50°}{7.3}\right) \approx 18°$$

De optelling van vectoren is *associatief*, d.w.z. dat $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. Met deze eigenschap kan je de som bereken van meerderen vectoren. Indien er dus meer dan twee vectoren worden samengesteld, tel je eerst twee ervan met elkaar op en het resultaat daarvan tel je met de volgende op, enzovoort totdat alle vectoren in de som zitten (zoals ook met de optelling van getallen gebeurt)

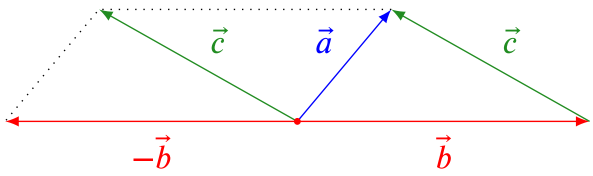
Verschil van twee vectoren

Net zoals bij getallen is het ook mogelijk voor vectoren om van een verschil een som te maken:

1.3 Bewerkingen met vectoren

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Om $\vec{c}$ te vinden moeten $\vec{a}$ en $-\vec{b}$ dus worden samengesteld. Het verschil van de getallen acht en vijf is gelijk aan drie. Drie is dus het getal dat je bij vijf moet optellen om acht te bekomen. Op dezelfde manier is het verschil van vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gelijk aan de vector $\vec{c}$ die je bij $\vec{b}$ moet optellen om $\vec{a}$ te bekomen. $\vec{c}$is dus inderdaad het verschil of 'onderscheid' tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.



Figuur 6: Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Grafisch blijkt dat indien $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in hetzelfde punt aangrijpen, $\vec{a} - \vec{b}$ gelijk is aan de vector met als aangrijpingspunt het eindpunt van $\vec{b}$ en als eindpunt het eindpunt van $\vec{b}$.

De loodrechte ontbinding of projectie van een vector in componenten

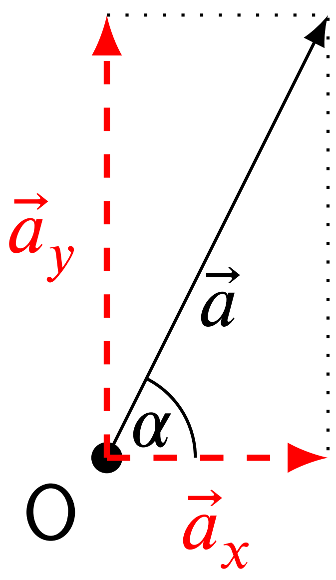
Een vector is opgebouwd als de samenstelling van zijn componten volgens de assen. In bepaalde contexten is het vaak erg nuttig om een vector (loodrecht) te ontbinden in zijn componenten. Noteer met $\vec{a}_x$ de component volgens de x-as en met $\vec{a}_y$ de component volgens de y-as. Voor elke vector geldt dan

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

De grootte van de componenten volgt rechtstreeks uit de goniometrische getallen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_x\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_x\| = \|\vec{a}\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a}_y\|}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \|\vec{a}_y\| = \|\vec{a}\| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 7: De loodrechte projectie van de vector $\vec{a}$

Indien de componenten worden geschreven met behulp van de basisvectoren geeft dit

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y$$

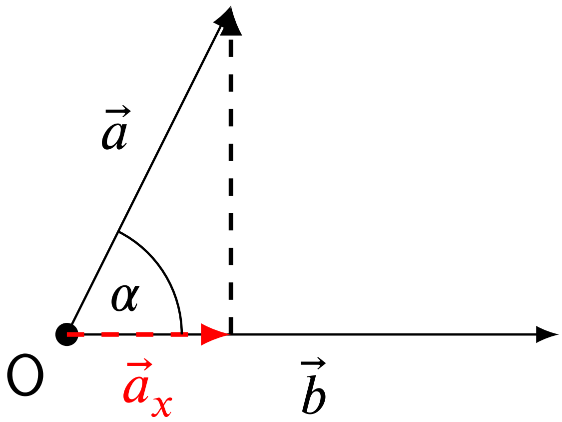
Het scalair product van twee vectoren (of inwendig product)

Twee vectoren kan men op twee verschillende manieren met elkaar vermenigvuldigen die een ander resultaat opleveren.
Het scalair product levert een **scalar** (= getal) als resultaat op die per definitie gelijk is aan de grootte van de projectie van de ene vector op de andere vermenigvuldigd met de grootte van diezelfde andere vector.
Het scalair product wordt alsvolgt gedefineerd:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}_x|| \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot \cos(\alpha) \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha)$$

Vlugge Vraag

Is de eerste bewerking '·' dezelfde als de tweede bewerking '·'? Verklaar.

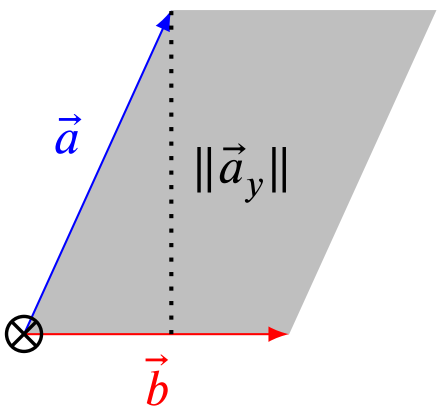


Figuur 8: De projectie van de vector $\vec{a}$ op $\vec{b}$

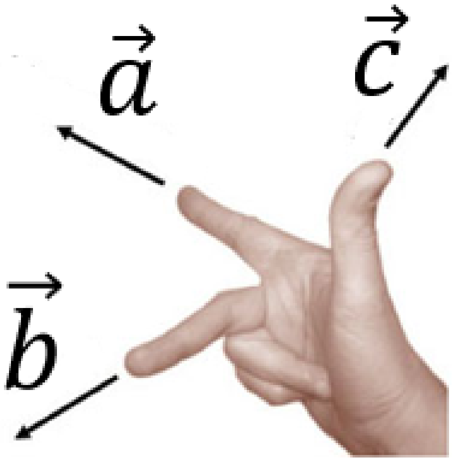
Het vectorieel product van twee vectoren (of kruisproduct)

Het vectorieel product levert een **vector** als resultaat op waarvan de grootte gelijk is aan de oppervlakte van de parallellogram ingesloten tussen de twee vectoren. De richting van het vectorproduct is loodrecht op het vlak gevormd door de twee gegeven vectoren en de zin is te bepalen met de rechterhandregel. Het vectorieel product wordt genoteerd als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}_y|| \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot \sin(\alpha) \cdot ||\vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin(\alpha)$$



Figuur 9: Het vectorieel product



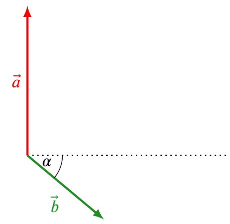
Figuur 10: De rechterhandregel

1.3.2. Een vector met zin in het blad wordt genoteerd met ⊗. Een vector met zin uit het blad wordt genoteerd met ⊙.

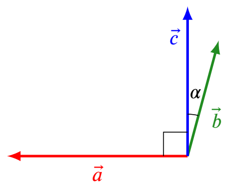
1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.1. Bepaal grafisch en kwantitatief de resultante van de gegeven vectoren.

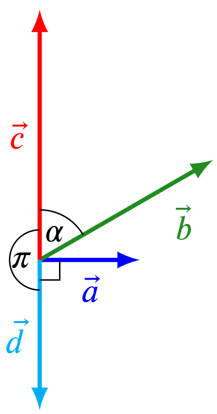
1. $\|\vec{a}\| = 5\,\text{N}$, $\|\vec{b}\| = 4\,\text{N}$, $\alpha = 40°$



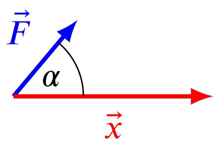
2. $\|\vec{a}\| = 4\,\text{N}$, $\|\vec{b}\| = 2{,}5\,\text{N}$ $\|\vec{c}\| = 3\,\text{N}$, $\alpha = 15°$



3. $\|\vec{a}\| = 5\,\text{N}$, $\|\vec{b}\| = 8\,\text{N}$ $\|\vec{c}\| = 15\,\text{N}$, $\|\vec{d}\| = 3\,\text{N}$, $\alpha = 60°$



Oefening 1.3.2. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 3\,\text{N}$, $\|\vec{x}\| = 4\,\text{m}$ en $\alpha = 50°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.

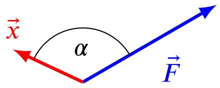
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.

3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$

4. $\vec{F} \times \vec{x}$

1.3.A Oefeningen vectoren reeks 1

Oefening 1.3.3. Gegeven zijn de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{x}$ waarvan geweten is dat $\|\vec{F}\| = 7\,\mathrm{N}$, $\|\vec{x}\| = 2\,\mathrm{m}$ en $\alpha = 125°$. Construeer indien mogelijk en bereken de grootte van:



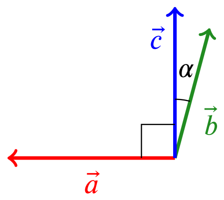
1. $\vec{F}_x$, zijnde de component van $\vec{F}$ evenwijdig met $\vec{x}$.
2. $\vec{F}_y$, zijnde de component van $\vec{F}$ loodrecht op $\vec{x}$.
3. $\vec{F} \cdot \vec{x}$
4. $\vec{F} \times \vec{x}$

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

Oefening 1.3.4.

Gegeven de drie waarvoor geldt $||\vec{a}|| = 4\,\text{N}$, $||\vec{b}|| = 2{,}5\,\text{N}$ $||\vec{c}|| = 3\,\text{N}$, $\alpha = 15°$

Construeer en bepaal de groottes van:



1. $\vec{a} - \vec{b}$
2. $\vec{b} - \vec{a}$
3. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
4. $3\vec{a} - 2\vec{b}$
5. $4\vec{b} + \vec{c}$
6. $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$
7. $3\vec{a} - 4\vec{c}$

Oefening 1.3.5. Als $\vec{F} \perp \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$
2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$
3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$
4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$
5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$
6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$
7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$
8. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = 0$

Oefening 1.3.6. Als $\vec{F} \parallel \vec{y}$, welk(e) van onderstaande uitspraken is dan juist? Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

1. $\vec{F} \cdot \vec{y} = \vec{0}$
2. $\vec{F} \times \vec{y} = \vec{0}$
3. $\vec{F} \cdot \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$
4. $||\vec{F} \times \vec{y}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$
5. $\vec{F} \times \vec{y} = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{y}||$

1.3.B Oefeningen vectoren reeks 2

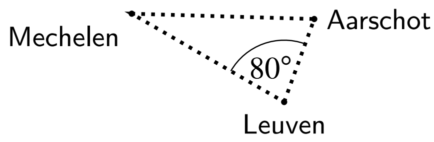
6. $\vec{F} \cdot \vec{y} = 0$
7. $\vec{F} \times \vec{y} = 0$
8. $\|\vec{F} \times \vec{y}\| = 0$

1.3.C Oefeningen vectoren reeks 3

Oefening 1.3.7. Bij de opzet van een aanval loopt een voetballer eerst $15\,\mathrm{m}$ evenwijdig met de zijlijn om vervolgens onder een hoek van $45°$ met de zijlijn $18\,\mathrm{m}$ naar binnen te snijden. Hoe ver van het vertrekpunt komt hij uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.8. Vanop dezelfde middenstip vertrekken twee spelers, één wandelt $9\,\mathrm{m}$ evenwijdig met de zijlijn naar het ene doel en de ander wandelt $17\,\mathrm{m}$ in een richting die een hoek van $35°$ maakt met de middellijn, naar het andere doel toe. Hoe ver komen de spelers van elkaar uit? Maak een schets met vectoren en voer ook hiermee je berekening uit.

Oefening 1.3.9. Twee treinen vertrekken gelijktijdig uit Leuven station met constante snelheden van $10\,\mathrm{m/s}$ en $20\,\mathrm{m/s}$. De trage trein rijdt recht naar Mechelen en de andere recht naar Aarschot.



1. Bepaal de snelheid van de trage trein ten op zichte van de snelle trein. Werk met vectoren!

2. Heeft de snelheid van de snelle t.o.v. de trage trein dezelfde grootte, richting en/of zin?

Oefening 1.3.10. Toon aan dat $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos(\alpha)$ met α de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Oefening 1.3.11. Geldt er algemeen dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$? Geldt er dat $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$? Verklaar kort.

Oefening 1.3.12. Kan er gelden dat $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$? Zoja, geef de nodige voorwaarden en zoniet, verklaar.

2.1 Inleiding

Kinematica [4] is het onderdeel van de fysica dat de **bewegingen van voorwerpen beschrijft**, zoals vallende appels, rollende knikkers of rijdende auto's, maar ook de beweging van de maan rond de aarde of de aarde rond de zon.

In dit hoofdstuk worden de **basisbegrippen** en **basisgrootheden** van de kinematica behandeld waarmee in een volgende fase enkele concrete basisbewegingen (rechtlijnige, cirkelvormige, snelle, trage, versnellende en vertragende, enzovoort) worden beschreven.

Kwantitatief behandelt kinematica steeds de vectoriële grootheden **positie**, **snelheid** en **versnelling**, hun verbanden onderling en hun afhankelijk met de scalaire grootheid **tijd**.

Voorbeeld 2.1.1. Als een appel van een boom valt, kan je allerlei vragen stellen over deze valbeweging:

- Hoe ver valt de appel van de boom?
- Hoe lang duurt het voor de appel de grond raakt?
- Hoe snel valt de appel? Is die snelheid altijd dezelfde, of valt een appel altijd maar sneller?
- Als de snelheid van de appel verandert, hoe groot is ze dan bij het begin van de val? En na 1 seconde? Wat op het moment dat de appel de grond raakt?

De kinematica vraagt zich niet af *waarom* een appel naar beneden valt, en bijvoorbeeld niet naar boven. In het latere onderdeel *dynamica* worden *krachten* bestudeerd die de bewegingen beïnvloeden. We zullen zien dat krachten eigenlijk alleen maar de *veranderingen van bewegingen* veroorzaken.

Voorbeeld 2.1.2. Als je een krijtje gooit naar het bord, kan je je daarover allerlei vragen stellen:

- Vliegt dat krijtje in een rechte lijn naar het bord? Of eerder in een cirkelbaan? Of misschien een ellips?
- Hoe snel vliegt het krijtje? Vertraagt het tijden zijn vlucht omdat het kracht verliest, of versnelt het eerder omdat het ook wat naar beneden valt?
- Als de leerkracht het laatste stukje van de baan van het krijtje nauwkeurig heeft geregistreerd, kan hij dan weten welke leerling gegooid heeft?
- Vliegen lange en korte krijtjes even snel? Vliegen witte en rode krijtjes even snel? Vliegen krijtjes met een scherpe punt sneller?
- Mag je eigenlijk wel met krijtjes gooien?
- Als je snel genoeg gooit, en opzettelijk het bord mist, is het dan theoretisch mogelijk om het krijtje in een baan om de aarde te krijgen? Hoe snel zou je moeten gooien?

Sommige van deze vragen worden behandeld in de kinematica, andere in de dynamica.

➤ Een universiteitscollege over deze leerstof

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=q9IWoQ199_o

[4] Het woord 'kinematica' is net zoals 'cinema' en 'kinesist' afgeleid van het Griekse $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ dat 'beweging' betekent.

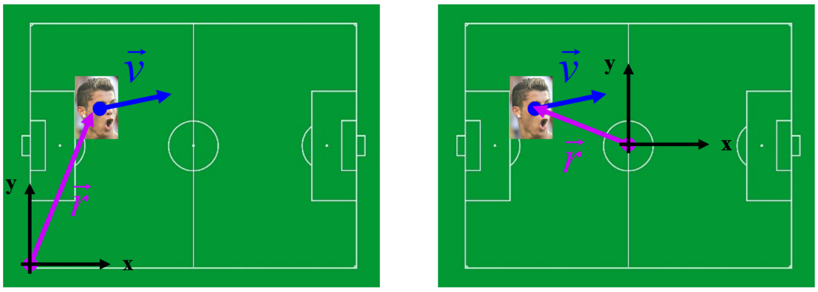
2.2 Het referentiestelsel

Elk bewegend systeem wordt beschreven ten opzichte van een **referentiestelsel**. Deze omvat een assenstelsel met een oorsprong (= het **referentiepunt**). Binnen dit referentiestelsel worden de vectoriële grootheden beschreven waaruit de kinematica is opgebouwd.

Als je een vogel ziet vliegen kan je deze beweging op verschillende manieren beschrijven: de vogel kan *stijgen* of een *duikvlucht* nemen. De vogel kan *omdraaien* of -indien het een kolibri is- misschien zelfs *blijven hangen*. Om deze bewegingen kwantitatief en nauwkeurig te bespreken kies je een referentiestelsel en coördinaatassen. Op die manier krijgt de vogel een positievector die de positie aangeeft, een snelheidsvector die de snelheid aangeeft, ...

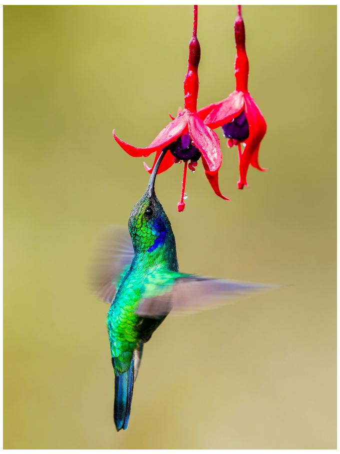
De keuze van het referentiestelsel is altijd relatief. Toch is het erg belangrijk om telkens duidelijk te maken van waaruit een beweging beschreven wordt. Stel je voor dat je op dit moment gedreven natuurkunde aan het studeren bent aan een bureau en je houdt je pen op *ooghoogte*, hoe 'hoog' bevindt je pen zich dan? Meet je dit vanaf je tafelblad, de vloer, het straatniveau, het aantal meters boven de zeespiegel, ...? In welke eenheid meet je dit? Wat is je eenheidsvector en in welke richting kies je de positieve as?

Meestal wordt geopteerd voor een referentiestelsel waarvoor de 'waarnemer' stilstaat. In onderstaand voorbeeld van het voetbalveld is de positie $\vec{r}$ van de voetballer duidelijk verschillend is naargelang het referentiepunt. Voor een toeschouwer in het publiek staan beide referentiestelsels stil, bijgevolg is de snelheid $\vec{v}$ voor beiden dezelfde.



Figuur 11: Twee verschillende referentiestelsels

Oefening 2.2.1. De kolibri in onderstaande foto blijft ter plekke in de lucht hangen onder de bloem. Geef twee referentiestelsels waarin deze vogel **niet** stilstaat.



Uitwerking:

2.2 Het referentiestelsel

- Een referentiestelsel met de kern van de aarde als oorsprong. (De kolibri draait nu rond de as van de aarde...)
- Een referentiestelsel met de zon als middelpunt (De kolibri draait nu ook rond de zon...)

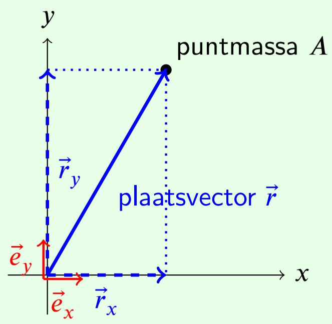
2.3 De positie

Positie en plaatsfunctie

Met behulp van een referentiestelsel kan elke plaats van een puntmassa in de ruimte worden beschreven met een **positie- of plaatsvector**, algemeen genoteerd door $\vec{r}$. Afhankelijk van het aantal dimensies waarin de beweging beschreven wordt heeft deze plaatsvector één, twee of drie componenten volgens de gekozen assen, doorgaans $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{z}$ genaamd. De (scalaire) getalcomponenten van deze vectoren zijn de plaatscoördinaten x,y en z.

Definitie 2.3.1. De **positie** van een puntmassa A wordt vectorieel beschreven met de **plaatsvector** $\vec{r}$. Een plaatsvector $\vec{r}$ kan ontbonden in de componenten volgens de assen. Op die manier krijgt de puntmassa A coördinaten $co(A) = (x, y)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$



Figuur 12: De plaatsvector $\vec{r}$

Als een puntmassa beweegt, verandert haar plaatsvector $\vec{r}$. De beweging van een puntmassa wordt beschreven door een *functie* die de **plaats** $\vec{r}$ weergeeft in functie van de **tijd**. De **plaatsfunctie** $\vec{r} = \vec{r}(\text{t})$ geeft voor elk tijdstip t de positie $\vec{r}$ waar de puntmassa zich bevindt. In het algemeen is een dergelijke vectorfuncties ingewikkeld om te hanteren, daarom wordt er gewerkt met de tijdsafhankelijke getalcomponenten $x(t)$,$y(t)$ en $z(t)$. Elke coordinaatsfunctie geeft voor elk moment t de coordinaat van de puntmassa volgens een welbepaalde-as. Al deze componentsfuncties samen beschrijven de volledige beweging van de puntmassa.

Bij een ééndimensionale bewegingen is er slechts één coordinaats-as nodig om de beweging te beschrijven. Dat is een scalaire grootheid, namelijk de positie op de enige coördinaatas en t is de variabele die symbool staat voor de tijd. [5]

De positie op een welbepaald tijdstip t_1 wordt genoteerd als [6] komt de positie x_1 op de coördinaatas overeen volgens de formule

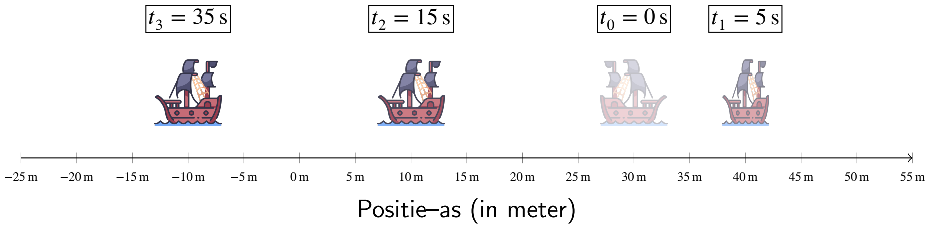
$$x_1 = x(t_1)$$

In onderstaande figuur zie je de tocht dat een zeilship aflegde. Op verschillende tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ wordt weergegeven waar het ship zich bevindt.

[5] In de fysica gebruiken we de wiskunde als 'taal' om de wetmatigheden van de natuur in uit te drukken. Wiskundige variabelen en objecten zoals functies krijgen nu een fysische betekenis. $x(t)$ is dus niets anders dan een functie $f(x)$ of $y(x)$ zoals je die in wiskunde kent. Alleen nemen wij nu niet voor de onafhankelijke variabele het symbool x maar het symbool t omdat deze symbool moet staan voor de tijd. En voor het symbool f gebruiken wij nu het symbool x omdat de beeldwaarden van de functie nu als betekenis een positie op een coördinaatas hebben.

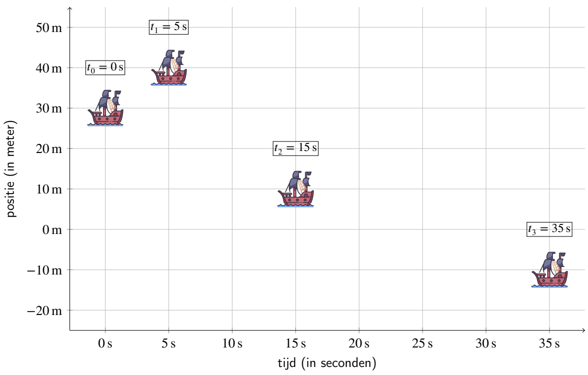
[6] Natuurlijk kan de index 1 ook vervangen worden door andere indices. Voorbeelden zijn $x_0 = x(t_0)$ en $x_2 = x(t_2)$.

2.3 De positie



Figuur 13: De positie van de zeilboot voor elke tijd t

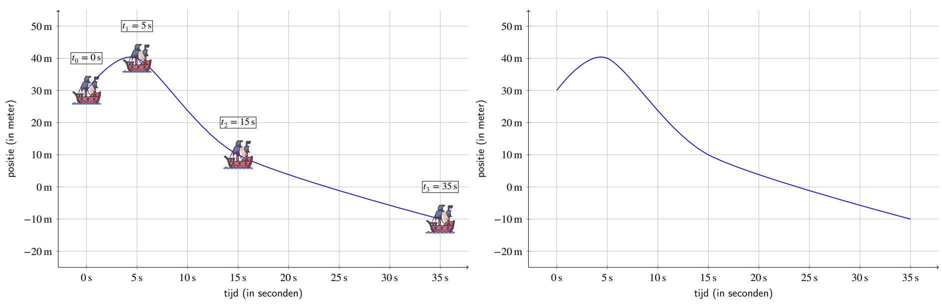
In de natuurkunde is **tijd een dimensie**.[7] In bovenstaande figuur wordt boven elke zeilboot aangegeven op welk tijdstip de boot daar werd waargenomen. Zo bevindt de boot zich op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ op de positie $40\,\mathrm{m}$. De startpositie van de zeilboot x_0 is gelijk aan $30\,\mathrm{m}$ want voor $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ geldt $x(0) = 30\,\mathrm{m}$. In plaats van de tijd boven elke zeilboot te noteren, is het ook mogelijk om de tocht op een tijd-as uit te zetten.



Figuur 14: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Er zit **geen** extra informatie in bovenstaande figuur! We hebben enkel de tijdsdimensie uitgezet op een horizontale-as en de positie op de verticale-as. Als je nu ijverig natuurkunde aan het studeren bent, kan je 'de positie' van dit blad papier onderzoeken. Dit blad ligt stil op je bureau en je probeert te begrijpen wat er uitgelegd wordt. Dan verandert de positie volgens de positie-as natuurlijk niet, maar het blad beweegt zich wel voort op de tijd-as. [8]

De positie van de zeilboot is enkel weergegeven voor een aantal specifieke momenten t_0, t_1, t_2, t_3 en t_4. De boot heeft natuurlijk ook op *elk moment hiertussen* een positie ...



[7] Einstaan gaf een beschrijving voor de zwaartekracht in de *4-dimensionale ruimte-tijd*.

[8] Want terwijl je dit aan het lezen bent staat de tijd natuurlijk niet stil...[9]

[9] Je blad beweegt zich -eerder saai- constant voort op de tijdsdimensie. Het is echter mogelijk -in de relativiteitstheorie- om ook op meer interessantere manieren op de tijd-as te bewegen.[10]

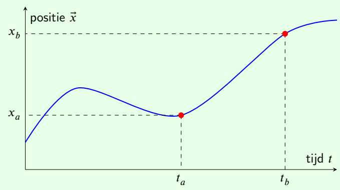
[10] Aangezien je enkel constant op de tijd-as kan voortbewegen, en dus niet terug kan, lijkt het aangewezen om je tijd goed te benutten. Bijvoorbeeld door wat natuurkunde te leren.

2.3 De positie

Figuur 15: De plaatsfunctie van de zeilboot voor elke $t \in [0, 35]$

Definitie 2.3.2. De **plaatsfunctie** $\vec{x}(t)$ geeft voor elke moment t de positievector $\vec{x}$.
In één dimensie is $\vec{x}$ een scalar en is de plaatsfuncie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de positie. De positie op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$x_a = x(t_a)$$

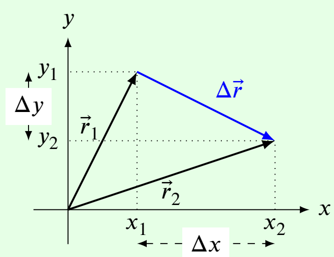


Figuur 16: De grafiek van een plaatsfunctie $x(t)$

De **verplaatsing** tussen t_1 en t_2 is het verschil in positie tussen de twee tijdstippen t_1 en t_2, genoteerd met een $\Delta\vec{r}$ (Delta, een Griekse hoofdletter D van het Engelse 'displacement' of het Franse 'déplacement').

Definitie 2.3.3. De **verplaatsing** $\Delta\vec{r}$ is het verschil tussen twee posities:

$$\Delta\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

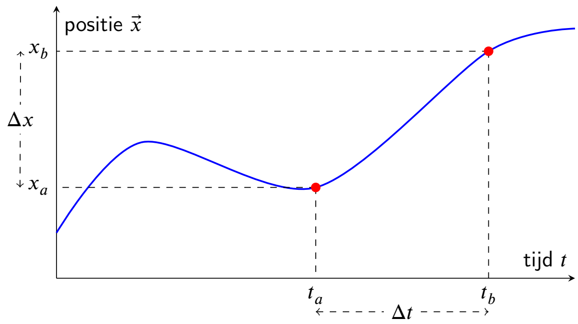


Zoals aangegeven in de figuur kan ook de verplaatsingsvector $\Delta\vec{r}$ ontbonden worden.

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y) - (x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y) \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \vec{e}_x + (y_2 - y_1) \cdot \vec{e}_y \\ &= \Delta x \cdot \vec{e}_x + \Delta y \cdot \vec{e}_y\end{aligned}$$

Voor ééndimensionale bewegingen is de verplaatsing eenvoudig scalair te berekenen met: $\Delta x = x_{eind} - x_{begin}$. De verplaatsing van de zeilboot tussen de tijdstippen t_0 en t_1 is gelijk aan $\Delta x = x_1 - x_0 = 40\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}$. Tussen t_2 en t_3 is de verplaatsing gelijk aan $\Delta x = x_3 - x_2 = -10\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m} = -20\,\mathrm{m}$. Deze laatste verplaatsing is negatief, wat aangeeft dat de zeilboot netto naar achteren is bewogen – tegengesteld aan de zin van de gekozen as. Op de plaatsfunctie kan de verplaatsing eenvoudig afgelezen worden:

2.3 De positie

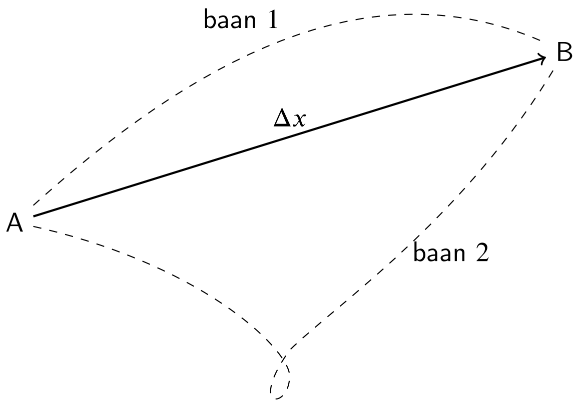


Figuur 17: De verplaatsing op de plaatsfunctie

Vlugge Vraag

Bereken de verplaatsing $\Delta x = x_4 - x_1$ van de zeilboot en duidt deze verplaatsing aan op de grafiek.

Let op, de verplaatsing hoeft niet noodzakelijk gelijk te zijn aan de *afgelegde weg* tussen de twee bijbehorende tijdstippen. Als je een rondje hebt gelopen op de atletiekpiste en terug aan start staat is je (netto) verplaatsing nul, maar heb je wel degelijk afstand afgelegd.
Wanneer een voorwerp beweegt, doorloopt het meerdere posities. De verbindingslijn van al deze gepasseerde posities, noemt men de **baan** van de beweging. Een ééndimensionale beweging heeft een rechte baan. Een tweedimensionale is doorgaans krom en kan meerdere vormen hebben (willekeurig, cirkelvormig, paraboolvormig, ellipsvormig,...). Soms is men geïnteresseerd in een **baanvergelijking** waarin men de afhankelijkheid tussen x en y wiskundig neerschrijft. Indien de functies $x(t)$ en $y(t)$ gekend zijn, kan soms een (expliciete) baanvergelijking bekomen worden door één voorschrift uit te werken naar t en dit vervolgens te substitueren in de andere vergelijking.



Figuur 18: Verplaatsing en afgelegde weg

2.4 De snelheid

Een voorwerp in beweging heeft een snelheid. De ervaring leert dat hoe groter de snelheid (in de auto, op je fiets, ...) hoe groter de verplaatsing in een bepaald tijdsinterval. Als je fietst aan $30\,\mathrm{km/h}$, leg je op één uur tijd $30\,\mathrm{km}$ af. Als je wandelt aan $5\,\mathrm{km/h}$ leg je op één uur tijd slechts $5\,\mathrm{km}$. Met behulp van de plaatsfunctie kan de snelheid van een voorwerp volledig worden bepaald.

Snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De tijd nodig voor een bepaalde verplaatsing geeft aanleiding tot de *gemiddelde snelheid*.

Definitie 2.4.1. De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ van een voorwerp tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van snelheid is meter per seconde $[v] = \mathrm{m/s}$.

In het traject van de zeilboot is de gemiddelde snelheid van de boot tussen de tijdstippen t_1 en t_2 gelijk aan $\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$. Deze gemiddelde snelheid is negatief, wat betekent dat de zeilboot tegen de positieve richting-as bewogen is.

Vlugge Vraag

Kan je op de plaatsgrafiek van de zeilboot de gemiddelde snelheid tussen t_2 en t_0 aanduiden?

Ogenblikkelijke snelheid bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde snelheid $\overline{v}$ is enkel gedefinieerd *tussen* twee posities x_1 en x_2. De plaatsfunctie $x(t)$ kent voor elk tijdstip t aan een puntmassa een positie x toe. Op dezelfde manier zou je op elk tijdstip de snelheid willen kennen.

De eenheid van snelheid is $\mathrm{m/s}$, het gaat dus over het aantal meter dat in een bepaald tijdsinterval wordt afgelegd. Op één bepaald moment t, één ogenblik, is er helemaal geen tijdsverloop en bijgevolg kan er ook geen verplaatsing zijn ...! Er is immers geen tijd verstreken om afstand te kunnen afleggen.

Om even over na te denken ...

Als een raket opstijgt vanuit stilstand is de snelheid duidelijk groter dan nul. **Wat is volgens jou de snelheid op het eerste moment dat een opstijgende raket de grond niet meer raakt?**

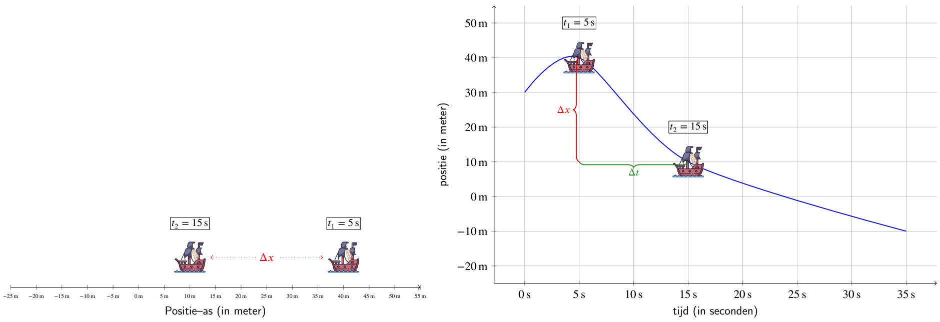
'Ja, maar', ga je zeggen, 'de snelheidsmeter van mijn fiets zegt toch hoe hard ik ga?!' Dat *lijkt* inderdaad een ogenblikkelijke snelheid te zijn maar in werkelijkheid is dat steeds de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval dat het sensortje op je wiel nodig heeft om één omwenteling te maken. Je snelheidsmeter berekent dus de gemiddelde snelheid door je wielomtrek[11] te delen door de tijd van één omwenteling. Als je plots remt gaat je snelheid afnemen maar je metertje gaat dit niet ogenblikkelijk kunnen aangeven. Het moet wachten totdat het sensortje weer rond is geweest om de tijd te kennen en zo de snelheidsverandering te kunnen registreren.

Hoe kan dit probleem opgelost worden? Om de ogenblikkelijke snelheid op $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ te kennen, lijk het eerste (en misschien wel enige...) idee om te vertrekken van de gemiddelde snelheid tussen t_1 en t_2 die hierboven werd berekend. Deze gemiddelde snelheid kan je beschouwen als een erg ruwe schatting van de snelheid op $t_1 = 5$.

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\,\mathrm{m} - 40\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s} - 5\,\mathrm{s}} = \frac{-30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = -3\,\mathrm{m/s}$$

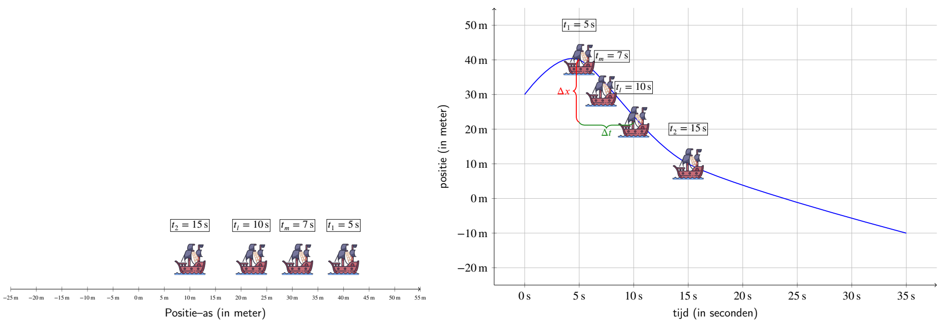
[11] Die je hebt moeten ingeven...

2.4 De snelheid



Figuur 19: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Indien niet met $t_2 = 15$ de gemiddelde snelheid wordt berekent, maar bijvoorbeeld met $t_l = 10$ s, zal deze gemiddelde snelheid beter de ogenblikkelijke snelheid op t_1 benaderen.
De gemiddelde snelheid is kleiner geworden en op de plaatsgrafiek schuift de zeilboot in de richting van t_1.
De gemiddelde snelheid $\bar{v} = \dfrac{x_l - x_1}{t_l - t_1}$ is een *betere* benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_a. Maar het is nog steeds een gemiddelde snelheid! De lezer raadde het waarschijnlijk al...
Door de gemiddelde snelheid te berekenen voor $t_m = 7$ wordt de benadering voor de ogenblikkelijke snelheid op t_1 nog beter... Op de grafiek komen de twee schepen nu wel erg dicht bij elkaar...



Figuur 20: De positie van de zeilboot met een tijd-as

De ogenblikkelijke snelheid wordt dus beter en beter benaderd door het tijdsinterval kleiner en kleiner en kleiner en kleiner. . . te nemen. Echter, hoe kort het tijdsinterval ook is, de snelheid zal veranderen gedurende dat hele kleine tijdsinterval. Daarom, je raadde het misschien al, wordt de ogenblikkelijke snelheid gedefinieerd als de **limiet van de gemiddelde snelheid** over een tijdsinterval waarbij we dat interval naar nul laten gaan.

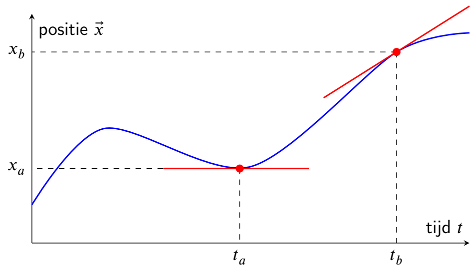
Definitie 2.4.2. De **ogenblikkelijke snelheid** is de afgeleide van de plaatsfunctie:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{dx}{dt}$$

De notatie met een accent $v(t) = x'(t)$ of $v = x'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. De functie $v(t)$ geeft op elk moment t de snelheid $v(t)$.

Grafisch kan je de afgeleide terugvinden als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn. In een $x - t$ grafiek (de grafiek van de functie $x(t)$, x in functie van t) vind je de snelheid als de richtingscoöefficiënt van de raaklijn in het beschouwde punt.

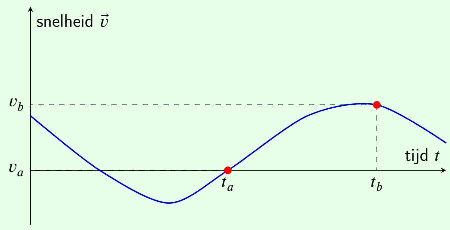
2.4 De snelheid



Figuur 21: De snelheid als rico aan de raaklijn

Definitie 2.4.3. De **snelheidsfunctie** $\vec{v}(t)$ geeft voor elke moment t de snelheidsvector $\vec{v}$.
In één dimensie is $\vec{v}$ een scalar en is de plaatsfunctie een grafiek waarop horizontaal de tijd wordt weergegeven en verticaal de grootte van de snelheid. De snelheid op een welbepaald tijdstip t_a wordt genoteerd als

$$v_a = v(t_a)$$



Figuur 22: Een snelheidsfunctie voor een ééndimensionale beweging.

Gemiddelde snelheid op tijdsinterval $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\text{Vectoriële notatie:} \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \vec{e}_x$$

Scalaire notatie: $\langle v \rangle = \bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van de x-as)

Ogenblikkelijke snelheid op willekeurig tijdstip t:

$$\text{Vectoriële notatie:} \quad \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(x \cdot \vec{e}_x)}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + x \cdot \frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x = v \cdot \vec{e}_x$$

Scalaire notatie: $v(t) = v = \dfrac{dx}{dt}$ (kan negatief zijn bij verplaatsing tegen de zin van de x-as)

2.4.1. Het woord 'ogenblikkelijk' mag je weglaten. Wanneer we het over snelheid hebben, bedoelen we vanaf nu steeds ogenblikkelijke snelheid.

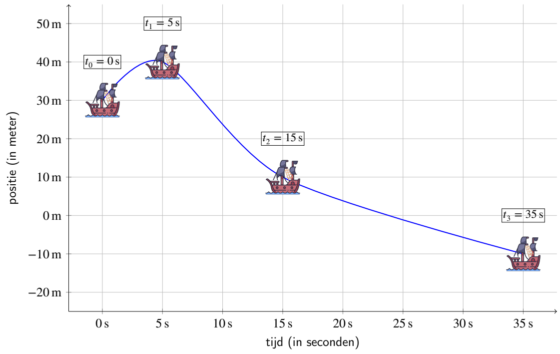
Oefening 2.4.1. Hieronder staat opnieuw de plaatsfunctie $x(t)$ van de zeilboot. Bepaal enkel met de grafiek en zonder te rekenen:

1. Waar ligt de zeilboot stil?

2. Waar heeft de zeilboot een positieve snelheid?

3. waar is de snelheid negatief?

4. Op welk moment bewoog de zeilboot het snelst?



Figuur 23: De positie van de zeilboot met een tijd-as

Snelheid bij tweedimensionale bewegingen

Bij voorwerpen die in twee dimensies bewegen, splitst men de beweging doorgaans op in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.

Definitie 2.4.4. De **snelheidsvector** $\vec{v}$ van een bewegend punt wordt gedefinieerd als de afgeleide van de plaatsvector naar de tijd:

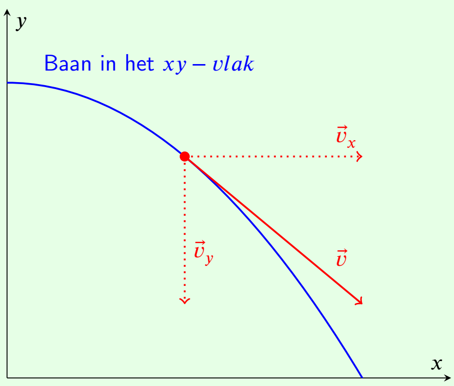
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},$$

en kan worden opgesplits in snelheidscomponenten v_x en v_y:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{e}_y = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

De grootte van de totale snelheid wordt genoteerd met het symbool v en is gelijk aan

$$v = \sqrt{(\vec{v}_x)^2 + (\vec{v}_y)^2}$$



Stelling 2.4.1. De snelheidsvector is altijd rakend aan de baan.

Bewijs We kunnen dit bewijzen met de kettingregel, toegepast op de functie $y(t) = y(x(t))$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{v_y}{v_x}$$

Inderdaad, $\frac{dy}{dx}$ is de helling van de baan en deze valt samen met de helling die de snelheidsvector maakt $\frac{v_y}{v_x}$. ■

2.5 De versnelling

Wanneer de snelheid van een voorwerpt verandert in de tijd, heeft het een *versnelling*. Een synoniem voor het woord versnelling is *acceleratie*, dat het symbool $\vec{a}$ van deze grootheid verklaart. Acceleratie is soms handiger om te gebruiken, dat vermijdt verwarring met het begrip snelheid, wat helemaal niet hetzelfde is!

$\vec{v}$ = velocity = vitesse = snelheid

$\vec{a}$ = acceleration = acceleratie = versnelling = snelheids**verandering**

De vector $\vec{a}$ grijpt aan op het versnellend voorwerp en wijst in de zin van de ogenblikkelijke bewegings**verandering**.

Definitie 2.5.1. De gemiddelde versnelling $\vec{a}$ tussen twee tijdstippen wordt gedefiniëerd als

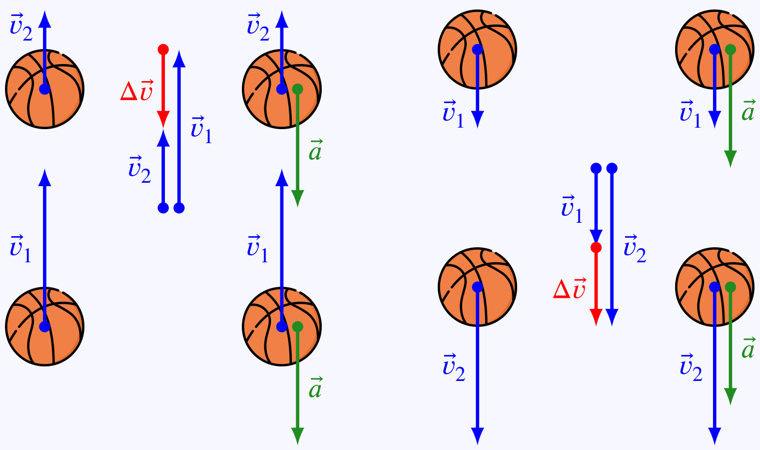
$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

De eenheid van versnelling is meter per seconde, per seconde – wat meter per seconde in het kwadraat geeft $[a] = \mathrm{m/s^2}$.

Als de snelheid van een voorwerp wijzigt, dan wijzigt uiteraard ook de snelheidsvector. Afhankelijk van welk kenmerk van de snelheidsvector (en dus ook van de beweging) verandert, maakt men een onderscheid tussen twee verschillende soorten versnellingen:

Definitie 2.5.2. Als enkel de *grootte* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **tangentiële versnelling** $\vec{a}_t$. In dit geval is de versnellingsvector tangentieel of evenwijdig met de snelheidsvector. Dit komt voor bij ééndimensionale bewegingen. Hierbij blijft de richting van de beweging onveranderd.

Voorbeeld 2.5.1. Een verticaal omhoog geworpen basketbal versnelt tangentieel, de bal gaat eerst trager en trager en na het hoogste punt sneller en sneller. Enkel de grootte van de snelheid verandert. De richting niet, want de bal blijft verticaal bewegen.

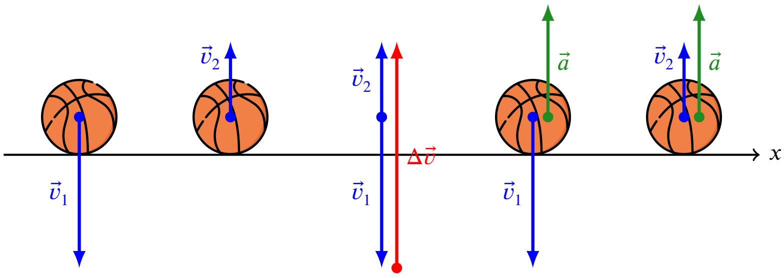


Figuur 24: Snelheid en versnelling bij een verticale worp

Voorbeeld 2.5.2. Een auto trekt op een rechte weg op met een versnelling van $3\,\mathrm{m/s^2}$. Dit wil zeggen dat per seconde de grootte van zijn snelheid met $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verandert (of in dit geval toeneemt).

Oefening 2.5.1.

1. Als een basketbal botst op de grond verandert de snelheidsvector ook van *zin*. Maar een tekening met vectoren net voor en na de bots.



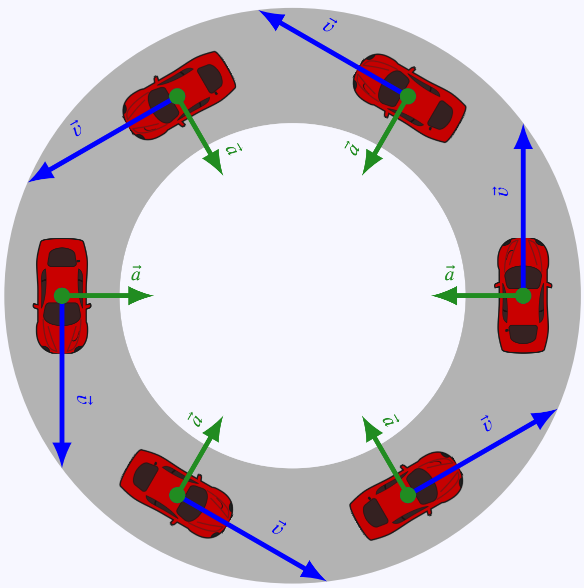
Uitwerking:

2. Waarom is dit een tangentiële versnelling?

Uitwerking: De snelheidsvector is enkel in de grootte en zin gewijzigd.

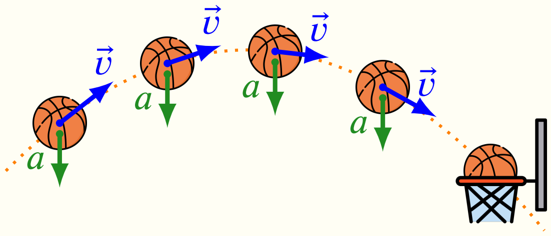
Definitie 2.5.3. Als enkel de *richting* van de snelheidsvector verandert, spreekt men over een **normale versnelling** $\vec{a}_n$. In dit geval staat de versnellingsvector normaal of loodrecht op de snelheidsvector. Dit komt voor bij tweedimensionale cirkelbewegingen waarbij de grootte van de snelheid onveranderd blijft.

Voorbeeld 2.5.3. De auto in onderstaande afbeeldingen rijdt op een rotonde. De grootte van de snelheid is constant, maar de richting van de snelheid wijzigt. De auto ondergaat een normale versnelling.



2.5.1. Combinatie van de twee types versnelling is ook mogelijk, bijvoorbeeld bij een schuin geworpen basketbal.

2.5 De versnelling



2.5.2. De zin van de snelheidsvector kan nooit plots veranderen omdat snelheid een grootheid is die enkel continu in de tijd kan veranderen. De zin van de snelheidsvector kan enkel wijzigen als de grootte van de snelheidsvector vermindert tot nul om dan nadien de tegengestelde zin uit te wijzen. In dit geval gaat het hier dus eveneens over de tangentiële versnelling.

In al deze voorbeelden lijkt het alsof de versnellingsvector aan de snelheidsvector "trekt".

Gemiddelde (tangentiële) versnelling bij ééndimensionale bewegingen

Definitie 2.5.4. Bij ééndimensionale bewegingen wordt de gemiddelde versnelling $\overline{a}$ scalair gedefinieerd als

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Ogenblikkelijke versnelling bij ééndimensionale bewegingen

De gemiddelde versnelling $\overline{a}$ geeft de verandering in snelheid *tussen* twee tijdstippen t_1 en t_2. Om de ogenblikkelijke versnelling a op één tijdstip t te bepalen wordt -net zoals bij de ogenblikkelijke snelheid- gebruik gemaakt van de afgeleide.

Definitie 2.5.5. De ogenblikkelijke snelheid wordt gedefinieerd als de afgeleide van de snelheidsfunctie $v(t)$:

$$a = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

De notatie met een accent $a(t) = v'(t)$ of $a = v'$ wordt op dezelfde manier als in de wiskunde gebruikt. $a(t)$ is een functie die op elk moment de snelheid geeft.

Ogenblikkelijke versnelling bij ééndimensionale bewegingen

In twee dimensies, kan men de versnelling opsplitsen in loodrechte x- en y-componenten. Daarmee kan men analoge redeneringen en gelijkaardige formules maken zoals in het 1D geval.

Versnelling wordt vectorieel beschreven met de versnellingsvector $\vec{a}$. Scalair rekent men met de versnellingscomponenten a_x en a_y. De totale versnelling heeft het symbool a. Bij 2D bewegingen is er altijd normale versnelling (mogelijk in combinatie met tangentiële versnelling).

Vectoriële notatie en definitie:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y) = \frac{dv_x}{dt} \cdot \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \cdot \vec{e}_y = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Scalaire notatie ens definitie:

$$a_x(t) = a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y(t) = a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

2.5.3. Het begrip versnelling in de fysica heeft niet dezelfde betekenis als hoe het begrip in de volksmond wordt gebruikt.

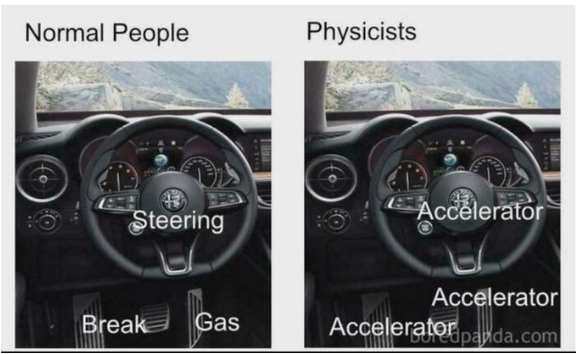
in de volksmond versnelling = vergroten van snelheid
vertraging = verkleinen van de snelheid
bocht maken = richtingsverandering van de snelheid

in de fysica versnelling = verandering van snelheid in eender welk opzicht

Fysisch zal men dus nooit spreken over een vertraging. Het vergroten of verkleinen van de snelheid moet bij ééndimensionale bewegingen tot uiting komen in de zin van de versnellingsvector ten op zichte van de zin van de snelheidsvector. Men kan dit ook zien aan het teken van de getalcomponent van de versnelling tegenover die van de snelheid. Voor ééndimensionale bewegingen geldt dat als $\vec{v}$ en $\vec{a}$ dezelfde zin hebben (of hun getalcomponenten eenzelfde teken hebben) dat de snelheid (in absolute waarde) vergroot. Bij tegengestelde zin (of teken) is er in absolute waarde een verkleining van de snelheid.

2.5.4. Wagens en fietsen hebben ook versnellingen. Weet dat deze versnellingen nauwelijks iets te maken hebben met het fysisch begrip versnelling. Een auto die in derde versnelling met een constante snelheid van 50 km/h rechtdoor rijdt, versnelt bijvoorbeeld helemaal niet. Zijn versnelling is 0 m/s². Een juistere naam om de standen van de versnellingspook of de ketting weer te geven had eigenlijk "snelheid" geweest omdat de versnelling waarin je rijdt veel meer zegt over welke snelheid je hebt. Kleine versnellingen gebruik je voor kleine snelheden en grote versnellingen voor grote snelheden. Onze Franstalige zuiderburen hebben daar een logischere naam voor, namelijk: "vitesse" (= snelheid). Probeer dus de begrippen snelheid en versnelling niet door elkaar te gooien, want ze hebben een heel andere betekenis! Het is alsof je zou zeggen dat positie en snelheid hetzelfde is!

Oefening 2.5.2. Verklaar onderstaande meme.



2.6 Oefeningen kinematica

Oefening 2.6.1. Kan de snelheid van een voorwerp gelijk zijn aan nul, terwijl de versnelling verschillend is van nul? Motiveer je antwoord.

Oefening 2.6.2. Kan een voorwerp dat een positieve versnelling heeft een negatieve snelheid hebben? Kan het omgekeerde ook? Licht je antwoord toe.

Uitwerking: Ja, dat kan. Neem bijvoorbeeld een voorwerp dat je verticaal omhoog gooit. Als je de referentieas waarmee je de beweging wil beschrijven verticaal naar benden kiest, zal de versnelling van de beweging positief zijn en de snelheid negatief. De snelheid is negatief omdat je tegengesteld aan de as beweegt en de versnelling is positief omdat de snelheid minder negatief wordt.

Het omgekeerde kan ook, draai gewoon de referentieas om.

Oefening 2.6.3. Een puntmassa beweegt volgens de plaatsfunctie

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 10t$$

Bereken haar snelheidscomponent telkens als ze het vertrekpunt passeert. Hoe groot is dan de versnellingscomponent?

Uitwerking: $x = t(t-5)(t+2)$

Oefening 2.6.4. Een veerman tracht een stromende rivier loodrecht over te roeien. Hij slaagt erin ten opzicht van het water een snelheid van $2,00\,\mathrm{m/s}$ te ontwikkelen – de stroomsnelheid is $1{,}25\,\mathrm{m/s}$. De rivier is $150\,\mathrm{m}$ breed.

1. Onder welke hoek ten opzichte van de loodlijn op de oever moet hij steeds blijven roeien?

Uitwerking: Er is gegeven dat

- $v_1 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $v_2 = 1{,}25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $d = 150\,\mathrm{m}$

We berekenen de hoek α.

De component, tegengesteld aan de stroomrichting, van de snelheid waarmee de veerman roeit ten opzichte van het water, moet even groot zijn als de stroomsnelheid zodat hij in de richting van de rivier resulterend geen snelheid zal hebben.

De hoek vinden we dan als volgt (zie figuur):

$$\sin\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha = \mathrm{bgsin}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 38,7^\circ$$

2. Hoeveel tijd heeft de veerman nodig om de overzijde te bereiken?

2.6 Oefeningen kinematica

Uitwerking: De tijd nodig om de overzijde te bereiken vinden we door zijn snelheid loodrecht op de oever – zijn resulterende snelheid v – te bekijken:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} = 96,1\,\mathrm{s}$$

Oefening 2.6.5. De coördinaten van een deeltje zijn als functie van de tijd wordt gegeven door

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Meerkeuze:

(a) Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de x-as.

(b) Dan is de versnelling steeds evenwijdig aan de y-as.

(c) Dan maakt de versnelling steeds een hoek van 45° met de x-as. ✓

(d) Dan wordt het deeltje niet versneld

Oefening 2.6.6. De positie van een deeltje als functie van de tijd wordt beschreven door

$$\vec{r} = bt\vec{e}_x + (c - dt^2)\vec{e}_y$$

met $b = 2,00\,\mathrm{m/s}$, $c = 5,00\,\mathrm{m}$ en $d = 1,00\,\mathrm{m/s^2}$.

1. Druk y uit in functie van x. Hoe ziet de baan eruit?

Uitwerking: We moeten dus de baanvergelijking geven. Dit doen we door de tijd uit te drukken i.f.v. de positie x en dit te substitueren in de coördinaatvergelijking $y(t)$.

$$x = bt \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{x}{b}$$
$$\Downarrow$$
$$y = c - dt^2 = c - \frac{d}{b^2}x^2$$

Dit is een bergparabool met top $(0, c) = (0, 5,00\,\mathrm{m})$.

2. Bepaal de snelheidsvector.

Uitwerking: De componenten van de snelheid zijn:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -2dt$$

zodat de snelheid(svector) wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y \\ &= b\vec{e}_x - 2dt\vec{e}_y \end{aligned}$$

3. Op welk tijdstip ($t > 0$) staat de snelheid loodrecht op de plaatsvector?

2.6 Oefeningen kinematica

Uitwerking: De rechte die de richting van de snelheid weergeeft, staat loodrecht op de rechte die de richting van de positievector weergeeft wanneer het product van de richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1:

$$\begin{aligned} rc_r \cdot rc_v &= -1 \\ &\Updownarrow \\ \frac{y}{x} \cdot \frac{v_y}{v_x} &= -1 \\ &\Downarrow \\ \frac{c - dt^2}{bt} \cdot \frac{-2dt}{b} &= -1 \\ &\Downarrow \quad (t > 0) \\ t &= \sqrt{\frac{2cd - b^2}{2d^2}} \\ &= 1,73\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Oefening 2.6.7. Een voorwerp maakt een beweging met volgende plaatscoördinaten:

$$x = 8t^3, \qquad y = t^6 - 2,$$

met x, y in m en t in s.

1. Bepaal de verplaatsing tussen $t = 0\,\mathrm{s}$ en $t = 1\,\mathrm{s}$.

2. Bepaal de snelheidsvector en de versnellingsvector op tijdstip $t = 1\,\mathrm{s}$.

3. Is er op $t = 1\,\mathrm{s}$ een tangentiële versnelling, een normale versnelling, of beide? Licht kort toe welke componenten aanwezig zijn.

4. Bepaal de baanvergelijking (weg van t) van het projectiel: schrijf y uit in functie van x.