1 chapter:Voorwoord

Dit boekdeel is bestemd voor leerlingen van de tweede graad doorstroomfinaliteit van het secundair onderwijs met minstens vijf wekelijkse lestijden wiskunde. Het verwezenlijkt twee differentiële doelen, opgelegd door de Vlaamse Overheid voor de richtingen economische wetenschappen, Grieks-Latijn, Latijn, natuurwetenschappen, technologische wetenschappen:

DD1 De leerlingen bewijzen wiskundige uitspraken.
- *Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs uit het ongerijmde*

DD6 De leerlingen analyseren deelbaarheid bij veeltermen met reële coëfficiënten in één variabele.
- *Euclidische deling, reststelling*

Er werden enkele ingrepen gedaan om de haalbaarheid van de leerstof in 14 lesuren te garanderen. Paragrafen en oefeningen waarbij *Uitbreiding* in de marge staat, hoeven niet behandeld te worden. Van eigenschappen die overtuigend geduid kunnen worden aan de hand van een concreet voorbeeld, kan het formele bewijs achterwege gelaten worden. Bij een krappere timing komen de basisbegrippen dus niet in het gedrang.

De strakke vorm van deze cursus is voor leerlingen mogelijk ongewoon, maar een goede voorbereiding op cursussen in de derde graad doorstroomfinaliteit en in het hoger onderwijs. In deze tekst duiden onderlijnde woorden op een eerste omschrijving van dat begrip. De trefwoordenlijst achteraan laat toe dergelijke omschrijvingen snel terug te vinden. Na elk hoofdstuk zijn de oefeningen verdeeld in drie reeksen: eenvoudig, gemiddeld en verdiepend of verbredend. Achteraan het boek staan de eindantwoorden van de oefeningen.

De inhoud van dit werk is afgeleid uit onderdelen van de invulcursussen *Wiskunde Aan zet* en *Wiskunde In zicht*, zie [**?**, **?**] achteraan in de referentielijst. Enkele voorbeelden en oefeningen komen uit [**?**] en [**?**]. Er werden ook vragen uit voorbije toelatingsexamens arts opgenomen [**?**]. Voor de vormgeving van dit boek en enkele passages in dit voorwoord werd beroep gedaan op de cursus *Algebraïsche structuur: de vectorruimte* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +$ van Wiskundeplan [**?**]. De kaderstijl voor definities en eigenschappen werd ontleend aan [**?**].

Deze publicatie is digitaal beschikbaar op de website

https://www.koendenaeghel.be/opensource.htm

waar ook een link staat naar de broncode in Overleaf. Wie dat wenst, kan met het tekstzetprogramma LaTeX een afgeleid werk kan maken, mits het respecteren van de voorwaarden zoals vermeld op pagina **??**. Daarbij kan de gebruiker zelf enkele voorkeuren instellen voor het aanmaken van een PDF-bestand, zoals het (des)activeren van de indicatie *Uitbreiding* in de marge en de verwijzingen naar het pocketboekje *Wiskunde Samen gevat*[2], zie [**?**].

Dit werk heeft niet de pretentie origineel, foutloos, volledig of afgewerkt te zijn, of erger nog de intentie te hebben van: *zo moet het*. De auteur wil enkel laten zien: *misschien kan het zo ook*, en hoopt met deze vrije publicatie leerlingen en leerkrachten te inspireren en bij te dragen aan een haalbaar kwalitatief wiskundeonderwijs.

Koen De Naeghel
Brugge, december 2024

2 chapter:Basisbegrippen

In de voorbije jaren heb je leren rekenen met lettervormen, waaronder het optellen, vermenigvuldigen en vereenvoudigen van eentermen, tweetermen en drietermen. Dat zullen we in dit hoofdstuk uitbreiden tot viertermen, vijftermen enzovoort. Algemeen spreken we dan van *veeltermen*.

3 Eentermen

De bewerkingen

$$2 \cdot 3^5, \qquad 2 \cdot 8^5, \qquad 2 \cdot (-1)^5, \qquad 2 \cdot \left(\frac{19}{3}\right)^5, \qquad 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^5 \qquad \text{en} \qquad 2 \cdot \pi^5$$

hebben iets gemeen: ze zijn allemaal van de vorm $2 \cdot \square^5$ waarbij $\square$ een reëel getal voorstelt. Het is gebruikelijk om in plaats van het symbool $\square$ een Latijnse letter zoals x te schrijven, die we dan een *variabele* noemen. De bewerkingen hierboven zijn dan telkens van de vorm $2 \cdot x^5$ en die uitdrukking noemen we een *eenterm in* x. Daarbij wordt het symbool $\cdot$ voor de vermenigvuldiging meestal weggelaten.

Doorgaans noteren we een eenterm met een Latijnse hoofdletter zoals A of B. Om te beklemtonen dat de variabele van de eenterm gelijk is aan x, noteren we dan ook $A(x)$ of $B(x)$. Wat tussen de haakjes staat, noemen we dan het *argument*, wat in dit geval gewoon gelijk is aan de variabele x. De eenterm van hierboven kan nu geschreven worden als $A(x) = 2x^5$ en veralgemenen leidt tot de volgende definitie.

Definitie 1. Een (reële) eenterm in (de variabele) x is een uitdrukking $A(x) = ax^n$ waarbij $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$.

Spreken we in het vervolg van *een eenterm* $A(x) = ax^n$ of $B(x) = bx^m$ dan nemen we steeds aan dat $n, m \in \mathbb{N}$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 1. De volgende uitdrukkingen zijn eentermen in x:

$$A(x) = 2x^5, \quad B(x) = -\frac{3}{7}x^1, \quad C(x) = 541x^0 \quad \text{en} \quad D(x) = 0x^{2024}.$$

Ook $A(t) = 2t^5$ is een eenterm, maar dan in de variabele t. De volgende uitdrukkingen zijn geen eentermen in x:

$$2x^5 + 3x, \quad \frac{1}{x}, \quad 3x^{-5}, \quad \sqrt{x} \quad \text{en} \quad |x|.$$

De uitdrukking ax^n van een eenterm wordt opgevat als de *vermenigvuldiging* van een reëel getal a met x^n. Om die vermenigvuldiging te benadrukken, noteren we ax^n soms ook als $a \cdot x^n$. Verder vatten we de uitdrukking x^n op als macht met als grondtal de variabele x en als exponent n. Bij afspraak maken we dan ook gebruik van de volgende schrijfwijzen:

$$1 \cdot x^n = x^n, \qquad 0 \cdot x^n = 0, \qquad x^0 = 1, \qquad a \cdot x^0 = a \qquad \text{en} \qquad a \cdot x^1 = a \cdot x = ax.$$

Als ax^n een eenterm is, dan noemen we het getal a de coëfficiënt van de eenterm.

Voorbeeld 2. We vereenvoudigen de onderstaande eentermen, geven telkens de coëeficiënt en vermelden ook of de eenterm al dan niet behoort tot de verzameling van de reële getallen.

(a) $A(x) = \sqrt{2} \cdot x \cdot x \cdot x = \sqrt{2} \cdot x^3$ met coëfficiënt $\sqrt{2}$, en $A(x) \notin \mathbb{R}$

(b) $B(x) = 541x^0 = 541$ met coëfficiënt 541, en $B(x) \in \mathbb{R}$

(c) $C(x) = -\frac{4}{7}x^1 = -\frac{4}{7}x$ met coëfficiënt $-\frac{4}{7}$, en $C(x) \notin \mathbb{R}$

(d) $D(x) = 0x^{2024} = 0$ met coëfficiënt 0, en $D(x) \in \mathbb{R}$

Als ax^n een eenterm is waarbij $a \neq 0$, dan noemen we n de graad van de eenterm. Schrijven we de eenterm als $A(x)$, dan noteren we de graad als gr $A(x)$. De graad van de eenterm $0 \cdot x^n = 0$ wordt in het secundair onderwijs niet gedefiniëerd.

In hogere wiskunde stelt men $\operatorname{gr} 0 = -\infty$ omdat op deze manier rekenregels in verband met de graad van een eenterm geldig blijven, bijvoorbeeld *de graad van het product van twee reële eentermen is gelijk aan de som van de graden van die eentermen.* Daarvoor verwijzen we naar Oefening 20 op het einde van dit hoofdstuk.

Voorbeeld 3. Beschouw de volgende eentermen.

$$A(x) = -7x^3, \quad B(x) = -\frac{17}{89}\,x^5 \cdot x^3, \quad C(x) = 1, \quad D(x) = \sqrt{5}\,x, \quad P(x) = 0x^4, \quad Q(x) = 0x^7.$$

De graad van de eenterm $A(x)$ is gelijk aan 3, in symbolen: $\operatorname{gr} A(x) = 3$. Herschrijven we de andere eentermen als

$$B(x) = -\frac{17}{89}\,x^8, \qquad C(x) = 1 \cdot x^0, \qquad D(x) = \sqrt{5}\,x^1, \qquad P(x) = 0 = Q(x)$$

dan lezen we hieruit af dat

$$\operatorname{gr} B(x) = 8, \qquad \operatorname{gr} C(x) = 0, \qquad \operatorname{gr} D(x) = 1.$$

Omdat $P(x) = 0$ bestaat de graad van de eenterm $P(x)$ niet. We schrijven dan: $\operatorname{gr} P(x) = /$. Idem is $\operatorname{gr} Q(x) = /$.

Twee eentermen in x zijn gelijksoortig als ze ofwel dezelfde graad hebben, ofwel beide gelijk zijn aan nul.

Voorbeeld 4. Gegeven zijn de eentermen

$$A(x) = -\frac{1}{3}\,x^9, \quad B(x) = 5\,x^9, \quad C(x) = 0x^9, \quad D(x) = 2^9, \quad P(x) = \pi \quad \text{en} \quad Q(x) = 0x^7.$$

Dan zijn $A(x)$ en $B(x)$ gelijksoortig. Omdat $C(x) = 0 = Q(x)$ zijn ook $C(x)$ en $Q(x)$ gelijksoortig. Ten slotte is $D(x) = 2^9 \cdot x^0$ en $P(x) = \pi \cdot x^0$ zodat de eentermen $D(x)$ en $P(x)$ gelijksoortig zijn.

Twee eentermen in x zijn gelijk als ze ofwel dezelfde graad en dezelfde coëfficiënt hebben, ofwel beide gelijk zijn aan nul.

Voorbeeld 5. We hebben dat $0x^{2024} = 0x^{2025}$. En als je weet dat $\sqrt{2}\,x^n = bx^{35}$ dan is $n = 35$ en $b = \sqrt{2}$.

Vervangen we in een eenterm $A(x)$ de variabele x door een reëel getal r, dan verkrijgen we de getalwaarde van $A(x)$ in $x = r$. Die getalwaarde noteren we met $A(r)$. Samengevat: als $A(x) = ax^n$ dan is $A(r) = ar^n$. Met behulp van het symbool $\Rightarrow$ voor implicatie wordt dit in symbolen:

$$A(x) = ax^n \quad \Rightarrow \quad A(r) = ar^n.$$

Hierbij is $a, r \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$, waarbij we het geval $r = n = 0$ uitsluiten: aan de uitdrukking 0^0 geven we geen betekenis.

Voorbeeld 6. Als $A(x) = 5x^3$ dan is de getalwaarde van $A(x)$ in $x = -2$ gelijk aan

$$A(-2) = 5 \cdot (-2)^3 = 5 \cdot (-8) = -5 \cdot 8 = -40.$$

De som of het verschil van twee gelijksoortige eentermen in x is opnieuw een eenterm in x, met als rekenregels:

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n \qquad \text{en} \qquad ax^n - bx^n = (a - b)x^n$$

of kortweg: $ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$. Ook het product van twee eentermen in x is opnieuw een eenterm in

x, waarbij:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}.$$

Na het toepassen van die rekenregels kan een som $a+b$, een verschil $a-b$ of een product ab soms verder uitgewerkt en nadien vereenvoudigd worden. Zo moet je vlot kunnen rekenen met breuken.

Voorbeeld 7. Als $A(x) = \frac{3}{4}x^5$ en $B(x) = -\frac{7}{6}x^5$ dan is

$$A(x) + B(x) = \frac{3}{4}x^5 + \left(-\frac{7}{6}x^5\right) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{7}{6}x^5 = \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{6}\right)x^5 = \frac{3\cdot 3 - 7\cdot 2}{12}x^5 = -\frac{5}{12}x^5,$$
$$A(x) \cdot B(x) = \frac{3}{4}x^5 \cdot \left(-\frac{7}{6}x^5\right) = -\frac{3\cdot 7}{4\cdot 6}x^{5+5} = -\frac{1\cdot 7}{4\cdot 2}x^{10} = -\frac{7}{8}x^{10}.$$

4 Veeltermen

Als ax^n en bx^m eentermen zijn, dan kunnen we de uitdrukking $ax^n + bx^m$ bekijken, die we opvatten als de *som* van die twee eentermen. Het resultaat noemen we een *tweeterm*. Analoog kunnen we spreken over een *drieterm*, een *vierterm* enzovoort. Algemeen spreken we dan van een *veelterm*.

Definitie 2. Een (reële) veelterm in (de variabele) x is een eindige som van eentermen in x.

Voorbeeld 8. De volgende uitdrukkingen zijn veeltermen in x:

$$3x^2, \qquad \sqrt{5} - 8x, \qquad -1 + 3x - 2x^2 \qquad \text{en} \qquad -\frac{4}{3}x^5 - 2x^3 + \pi^2 x + 5.$$

We willen nu ook een willekeurige veelterm in symbolen kunnen schrijven. Als de graad van de eentermen die voorkomen niet te hoog is, kan dat als volgt:

$$\begin{cases} a & \text{waarbij } a \in \mathbb{R} \\ a + bx & \text{waarbij } a, b \in \mathbb{R} \\ a + bx + cx^2 & \text{waarbij } a, b, c \in \mathbb{R} \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & \text{waarbij } a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Van zodra er een eenterm van graad 26 voorkomt, hebben we onvoldoende letters in het Latijns alfabet. Dat probleem kunnen we omzeilen door gebruik te maken van een *onderindex*: in plaats van a, b, c etc. schrijven we a_0, a_1, a_2 etc. Op die manier kunnen we een willekeurige veelterm in symbolen uitdrukken.

Definitie 3. Een (reële) veelterm in (de variabele) x is een uitdrukking van de vorm $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ waarbij $n \in \mathbb{N}$ en $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Spreken we in het vervolg van *een veelterm* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ of $b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ dan nemen we steeds aan dat $n, m \in \mathbb{N}$ en $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ en $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 9. Kiezen we in de bovenstaande definitie $n = 4$ en $a_0 = -5$, $a_1 = 7$, $a_2 = -3$, $a_3 = 0$ en

$a_4 = 0$ dan verkrijgen we de veelterm

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \\ &= -5 + 7x - 3x^2 + 0x^3 + 0x^4 \\ &= -5 + 7x - 3x^2. \end{aligned}$$

We konden dus even goed $n = 2$ en $a_0 = -5$, $a_1 = 7$ en $a_2 = -3$ gekozen hebben.

Dankzij de afspraak $x^0 = 1$ kunnen we een veelterm herschrijven met het sommatieteken:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i.$$

Voorbeeld 10. Beschouw de veeltermen

$$A(x) = \sum_{i=0}^{3} (2i+1)x^i \qquad \text{en} \qquad P(t) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}\, t^i.$$

Dan kunnen we die veeltermen uitschrijven als

$$A(x) = (2 \cdot 0 + 1)x^0 + (2 \cdot 1 + 1)x^1 + (2 \cdot 2 + 1)x^2 + (2 \cdot 3 + 1)x^3 = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3$$

en

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{1^2}t^1 + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{3^2}t^3 + \frac{1}{4^2}t^4 + \frac{1}{5^2}t^5 \\ &= t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{16}t^4 + \frac{1}{5}t^5. \end{aligned}$$

Als $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ een veelterm is, dan noemen we de getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de coëfficiënten van de veelterm. De (een)termen $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ noemen we de (een)termen van de veelterm. De term a_0 wordt de constante term van de veelterm genoemd.

Voorbeeld 11. De constante term van de veelterm $A(x) = -5 + 7x - 3x^2$ is gelijk aan -5.

Als $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ een veelterm is waarbij $a_n \neq 0$, dan noemen we n de graad van de veelterm. Schrijven we de veelterm als $A(x)$, dan noteren we de graad als $\operatorname{gr} A(x)$. In dat geval is a_nx^n de hoogstegraadsterm en a_n de hoogstegraadscoëfficiënt van de veelterm. De graad van de veelterm $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0$ wordt in het secundair onderwijs niet gedefiniëerd.

Veeltermen van graad nul, één, twee of drie wordt respectievelijk constante, lineaire, kwadratische en kubische veeltermen genoemd. Ook veelterm $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n = 0$ wordt een constante veelterm genoemd.

Voorbeeld 12. We vereenvoudigen onderstaande veeltermen, en geven telkens de graad, de hoogstegraadscoëfficiënt en constante term.

(a) $A(x) = 1 - 4x + 5x^3 - 7x^3 = 1 - 4x - 2x^3$ heeft graad 3, hoogstegraadscoëfficiënt -2 en constante term 1.

(b) $B(x) = 0x^2 + 3x = 3x$ heeft graad 1, hoogstegraadscoëfficiënt 3 en constante term 0.

(c) $C(x) = \sqrt{7} - \sqrt{28} = \sqrt{7} - 2\sqrt{7} = -\sqrt{7}$ heeft graad 0, hoogstegraadscoëfficiënt $-\sqrt{7}$ en constante term $-\sqrt{7}$.

De verzameling van alle veeltermen in x wordt genoteerd met $\mathbb{R}[x]$. In symbolen:

$$\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Wegens een eerdere afspraak is $a = a \cdot x^0$, zodat elk reëel getal a kan geschreven worden als een veelterm. De verzameling van de reële getallen is dus een deelverzameling van de verzameling van alle veeltermen, in symbolen: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}[x]$.

Voorbeeld 13. We hebben dat $1 - 4x + 2x^3 \in \mathbb{R}[x]$, $x^5 - \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$ en $-\frac{13}{7} \in \mathbb{R}[x]$.

Twee veeltermen in x zijn gelijk als ze ofwel dezelfde graad en dezelfde coëfficiënten hebben, ofwel beide gelijk zijn aan nul.

Soms komen er in wiskundige uitdrukkingen symbolen zoals a, b, p, q etc. voor die getallen voorstellen. Pas als die symbolen een waarde toegekend krijgen, wordt de uitdrukking volledig vastgelegd. Zo'n symbool noemen we dan een *parameter*.

Voorbeeld 14. Beschouw $A(x) = ax^5 - 4x^2 + bx + 2$ en $B(x) = 7x^m + 2ax - c^2x^2 - d$ waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en $m \in \mathbb{N}$. We bepalen de waarde(n) van de parameters a, b, c, d en m waarvoor de veelterm $A(x)$ gelijk is aan de veelterm $B(x)$. We hebben:

$$\begin{aligned}
A(x) = B(x) \quad &\Leftrightarrow \quad ax^5 - 4x^2 + bx + 2 = 7x^m + 2ax - c^2x^2 - d \\
&\Leftrightarrow \quad 5 = m \text{ en } a = 7 \text{ en } -4 = -c^2 \text{ en } b = 2a \text{ en } 2 = -d \\
&\Leftrightarrow \quad m = 5 \text{ en } a = 7 \text{ en } c^2 = 4 \text{ en } b = 14 \text{ en } d = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m = 5 \text{ en } a = 7 \text{ en } c = 2 \text{ en } b = 14 \text{ en } d = -2 \\ \text{of} \\ m = 5 \text{ en } a = 7 \text{ en } c = -2 \text{ en } b = 14 \text{ en } d = -2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vervangen we in een veelterm $A(x)$ de variabele x door een reëel getal r, dan verkrijgen we de getalwaarde van $A(x)$ in $x = r$. Die getalwaarde noteren we met $A(r)$. In symbolen:

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad \Rightarrow \quad A(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \cdots + a_nr^n$$

met $n \in \mathbb{N}$ en $r, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, waarbij we ook hier het geval $n = r = 0$ uitsluiten.

Voorbeeld 15. Als $A(x) = 2x^3 + 3x - 5$ dan is de getalwaarde van $A(x)$ in $x = 10$ gelijk aan $A(10) = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 - 5 = 2025$.

Is de getalwaarde van een veelterm in een reëel getal r gelijk aan nul, dan noemen we r een nulwaarde van die veelterm. De uitspraak *r is een nulwaarde van $A(x)$* is dus gelijkwaardig met de uitspraak $A(r) = 0$. Met behulp van het symbool $\Leftrightarrow$ voor equivalentie wordt dit in symbolen:

$$r \text{ is een nulwaarde van } A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(r) = 0.$$

Hierbij is $r \in \mathbb{R}$ en $A(x)$ een veelterm in x. In de literatuur wordt een nulwaarde soms ook een nulpunt genoemd. Onze voorkeur gaat uit naar de volgende afspraak: een nulpunt is een punt (dus een meetkundig object), een nulwaarde is een waarde (dus een getal).

Bepalen van de waarde(n) van parameters kan leiden tot een stelsel. In het derde jaar heb je geleerd hoe je een stelsel van twee vergelijkingen in twee onbekenden kan oplossen. Die technieken moet je nog steeds kunnen toepassen.

Voorbeeld 16. We bepalen de waarde(n) van de parameters a en b waarvoor

$$a(x-3)-b(x+1)=1-3x.$$

We hebben:

$$\begin{aligned} a(x-3)-b(x+1)=1-3x \quad &\Leftrightarrow \quad ax-3a-bx-b=1-3x \\ &\Leftrightarrow \quad (a-b)x+(-3a-b)=1-3x \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a-b=-3 & (1) \\ -3a-b=1. & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Uit $(1)-(2)$ volgt $4a=-4$ zodat $a=-1$. Invullen in (2) geeft $-1-b=-3$ waaruit $b=2$.

Bij een rekenoefening kan gevraagd worden om de berekening *algebraïsch* uit te voeren: met de hand, waarbij je jouw tussenstappen met berekeningen opschrijft. Als het resultaat een reëel getal is, dan kan gevraagd worden om een exacte waarde te geven. Je kan uiteraard wel de rekenmachine gebruiken om jouw oplossing te controleren.

Bij het algebraïsch rekenwerk is het ook de bedoeling om het resultaat te vereenvoudigen. Je moet dus vlot kunnen rekenen met vierkantswortels en derdemachtswortels. Indien gevraagd maak je ook de noemers (vierkants)wortelvrij.

Voorbeeld 17. Gegeven zijn de veeltermen

$$A(x)=\frac{1}{5}x^2-3x+\frac{2}{3},\quad B(x)=3(bx)^2-6x+1 \quad \text{en} \quad C(x)=x^3+\sqrt[3]{2}x^2+\sqrt[3]{4}x+5$$

waarbij $b\in\mathbb{R}$. Hieronder voeren we het rekenwerk algebraïsch uit, en geven telkens de exacte waarde van het eindresultaat.

(a) De getalwaarde van de veelterm $A(x)$ in $x=-2$ is gelijk aan

$$A(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+\frac{2}{3}=\frac{4}{5}+6+\frac{2}{3}=\frac{12+90+10}{15}=\frac{112}{15}.$$

(b) We bepalen de waarde (n) van de parameter b waarvoor $B(4)=6$. We hebben:

$$\begin{aligned} B(4)=6 \quad &\Leftrightarrow \quad 3(b\cdot 4)^2-6\cdot 4+1=6 \\ &\Leftrightarrow \quad 48b^2=29 \\ &\Leftrightarrow \quad b=\sqrt{\frac{29}{48}} \text{ of } b=-\sqrt{\frac{29}{48}} \\ &\Leftrightarrow \quad b=\frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{3}} \text{ of } b=-\frac{\sqrt{29}}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(c) De getalwaarde van de veelterm $C(x)$ in $x = \sqrt[3]{2}$ is gelijk aan

$$\begin{aligned} C(\sqrt[3]{2}) &= (\sqrt[3]{2})^3 + \sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \\ &= 2 + (\sqrt[3]{2})^3 + \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \\ &= 2 + 2 + (\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \\ &= 2 + 2 + 2 + 5 \\ &= 11. \end{aligned}$$

De som van twee veeltermen in x is opnieuw een veelterm in x. Ook het product van twee veeltermen in x is opnieuw een veelterm in x.

Voorbeeld 18. De som van $A(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4$ met $B(x) = 6x^3 - x^2 + 2$ is

$$A(x) + B(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4 + 6x^3 - x^2 + 2 = 9x^3 + x^2 - x + 6.$$

Voor $P(x) = 6x^2 - x + 2$ en $Q(x) = -3x^3 + 5x^2$ is het product gelijk aan

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (6x^2 - x + 2) \cdot (-3x^3 + 5x^2) \\ &= 6x^2 \cdot (-3x^3) + 6x^2 \cdot 5x^2 - x \cdot (-3x^3) - x \cdot 5x^2 + 2 \cdot (-3x^3) + 2 \cdot 5x^2 \\ &= -18x^5 + 30x^4 + 3x^4 - 5x^3 - 6x^3 + 10x^2 \\ &= -18x^5 + 33x^4 - 11x^3 + 10x^2. \end{aligned}$$

In het voorbeeld hierboven is de graad van het product $P(x) \cdot Q(x)$ bepaald wordt door de graad van de hoogstegraadsterm $6x^2 \cdot (-3x^3) = -18x^5$. We stellen dus vast dat de graad van het product gelijk is aan de som van de graden. Dat kenmerk geldt ook in het algemeen, in symbolen:

$$\mathrm{gr}\big(A(x) \cdot B(x)\big) \;=\; \mathrm{gr}\, A(x) + \mathrm{gr}\, B(x) \tag{1}$$

waarbij $A(x)$ en $B(x)$ veeltermen zijn, beide verschillend van de nulveelterm.

In sommmige gevallen is de graad van de som van twee veeltermen gelijk aan het maximum van de graden van die twee veeltermen. Dat is bijvoorbeeld het geval met $A(x) = x^3$ en $B(x) = x^5 + 2x^2$. Inderdaad, dan is $A(x) + B(x) = x^5 + x^3 + 2x^2$ zodat $\mathrm{gr}\,(A(x) + B(x)) = 5$ gelijk is aan het maximum van de getallen $\mathrm{gr}\, A(x) = 3$ en $\mathrm{gr}\, B(x) = 5$.

In andere gevallen kan het voorkomen dat de graad van de som van twee veeltermen kleiner is dan de graad van elk van die twee veeltermen. Dat is precies het geval wanneer de hoogstegraadstermen van die twee veeltermen elkaars tegengestelde zijn. Zo is voor $A(x) = x^3$ en $C(x) = -x^3 + 2x^2$ de som gelijk aan $A(x) + C(x) = 2x^2$, waarvan de graad kleiner is dan $\max\{3, 3\} = 3$. In het algemeen hebben we dat

$$\mathrm{gr}\big(A(x) \pm B(x)\big) \;\leq\; \max\big\{\, \mathrm{gr}\, A(x)\,,\, \mathrm{gr}\, B(x) \,\big\} \tag{2}$$

voor alle veeltermen $A(x)$ en $B(x)$ die beide verschillend zijn van de nulveelterm. In het geval dat $\mathrm{gr}\, A(x) \neq \mathrm{gr}\, B(x)$ dan geldt in de bovenstaande formule (2) steeds de gelijkheid.

Spreken we af dat $\mathrm{gr}\, 0 = -\infty$, dan zijn (1) en (2) ook geldig voor het geval dat $A(x) = 0$ of $B(x) = 0$, zie Oefening 20. Vermeldenswaardig is de gelijkaardige uitdrukking voor de graad van de substitutie van een veelterm in een veelterm, die eenvoudig wordt aangetoond:

$$\mathrm{gr}\Big(A\big(B(x)\big)\Big) = \mathrm{gr}\ A(x) \cdot \mathrm{gr}\ B(x).$$

Voorbeeld 19. Van drie veeltermen $A(x)$, $B(x)$ en $C(x)$ weten we dat

$$\mathrm{gr}\ A(x) = 6, \quad \mathrm{gr}\ B(x) = 4 \quad \text{en} \quad \mathrm{gr}\ C(x) = 1.$$

We bepalen de graad van de veelterm $D(x) = A(x) - \big(B(x) + 2C(x)\big)$ door de bovenstaande formules (1) en (2) toe te passen.

Vooreerst is $\mathrm{gr}\big(2C(x)\big) = \mathrm{gr}(2) + \mathrm{gr}\ C(x) = 0 + 1 = 1$. Nu is $\mathrm{gr}\ B(x) \neq \mathrm{gr}\big(2C(x)\big)$ zodat

$$\mathrm{gr}\big(B(x) + 2C(x)\big) = \max\big\{\mathrm{gr}\ B(x), \mathrm{gr}\big(2C(x)\big)\big\} = \max\{4, 1\} = 4.$$

Verder is $\mathrm{gr}\ A(x) \neq \mathrm{gr}\big(B(x) + 2C(x)\big)$ zodat

$$\mathrm{gr}\ D(x) = \max\big\{\mathrm{gr}\ A(x), \mathrm{gr}\big(B(x) + 2C(x)\big)\big\} = \max\{6, 4\} = 6.$$

Beschouw vervolgens een veelterm $Q(x)$ waarvan je weet dat $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + C(x)$. We gebruiken dit verband om de graad van $Q(x)$ te bepalen.

Omdat $B(x) \cdot Q(x) = A(x) - C(x)$ en $\mathrm{gr}\ A(x) \neq \mathrm{gr}\ C(x)$ is

$$\mathrm{gr}\big(B(x) \cdot Q(x)\big) = \mathrm{gr}\big(A(x) - C(x)\big) = \max\big\{\mathrm{gr}\ A(x), \mathrm{gr}\ C(x)\big\} = \max\{6, 1\} = 6.$$

Anderzijds is

$$\mathrm{gr}\big(B(x) \cdot Q(x)\big) = \mathrm{gr}\ B(x) + \mathrm{gr}\ Q(x) = 4 + \mathrm{gr}\ Q(x).$$

Hieruit volgt dat $\mathrm{gr}\ Q(x) = 6 - 4 = 2$.

Is het product van twee getallen gelijk aan nul, dan is minstens een van die getallen gelijk aan nul. Die eigenschap geldt ook voor veeltermen. Om dat aan te tonen, maken we gebruik van de techniek bewijs uit het ongerijmde.

Eigenschap 1. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen. Dan geldt:

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x) = 0 \ \text{ of } \ B(x) = 0.$$

Bewijs. Gegeven is dat $A(x) \cdot B(x) = 0$. We moeten aantonen dat $A(x) = 0$ of $B(x) = 0$. Veronderstel, uit het ongerijmde, dat deze uitspraak niet waar is. Met behulp van het symbool $\neg$ voor negatie weten we dan:

$$\neg\big(A(x) = 0 \ \text{ of } \ B(x) = 0\big).$$

Wegens een wet van de Morgan betekent dit:

$$A(x) \neq 0 \ \text{ en } \ B(x) \neq 0.$$

We schrijven de veeltermen $A(x)$ en $B(x)$ als

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^m$$

waarbij $n, m \in \mathbb{N}$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ en $b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. Omdat $A(x) \neq 0$ en $B(x) \neq 0$ mogen we aannemen dat $a_n \neq 0$ en $b_m \neq 0$. Nu is

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \cdot \left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^m\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + a_n b_m x^{n+m}. \end{aligned}$$

Omdat $a_n \neq 0$ en $b_m \neq 0$ weten we dat $a_n \cdot b_m \neq 0$. Hieruit volgt dat $A(x) \cdot B(x) = 0$. Dit is in strijd met het gegeven dat $A(x) \cdot B(x) = 0$. Kortom: de aanname dat $A(x) \neq 0$ en $B(x) \neq 0$ leidt tot een tegenstrijdigheid. Die aanname was dus fout. Op die manier hebben we aangetoond dat $A(x) = 0$ of $B(x) = 0$.

■

Spreken we af dat $\operatorname{gr} 0 = -\infty$, dan kunnen we ons bewijs heel wat korter opschrijven.

Alternatief bewijs van Eigenschap **??**. Gegeven is dat $A(x) \cdot B(x) = 0$. Nemen we van beide leden de graad, dan vinden we $\operatorname{gr}\big(A(x) \cdot B(x)\big) = \operatorname{gr} 0$ waaruit volgt: $\operatorname{gr} A(x) + \operatorname{gr} B(x) = -\infty$.

Mocht $A(x) \neq 0$ en $B(x) \neq 0$ dan zou een som van twee natuurlijk getallen gelijk zijn aan $-\infty$, een tegenstrijdigheid. We besluiten dat $A(x) = 0$ of $B(x) = 0$. ■

Oefeningen reeks 1

Oefening 1. Welke uitdrukkingen stellen na vereenvoudiging een eenterm in x voor?

(a) x^{17}

(b) $-\dfrac{17}{3} x^2$

(c) x^{-1}

(d) $x + 5 \cdot \dfrac{x}{3}$

(e) $x + x^2$

(f) $\dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{3}{8}$

(g) $(2x - 3)(2x + 3) + 9$

(h) $\sqrt{2}\, x^4 + \sqrt{3}\, x^4$

(i) $\sqrt{x}$

(j) $\sqrt{x^2}$

Oefening 2. Schrijf de volgende veeltermen uit.

(a) $A(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} i x^i$

(b) $B(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{x^{2n+1}}{n+1}$

(c) $C(x) = \displaystyle\sum_{i=2}^{4} (-x)^i$

Oefening 3. Welke uitdrukkingen stellen na vereenvoudiging een veelterm in x voor?

(a) $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$

(b) $\dfrac{1}{2} x^3 + 3x^2 - \pi x + 2$

(c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$

(d) x

(e) $\sqrt{2}\, x + \sqrt{3}$

(f) $\dfrac{1 - x^2}{2}$

(g) $1 - \dfrac{2}{x^2}$

(h) $(x - 4)(x^2 + 2x + 3)$

(i) $(-2x^2 + 5x - 1)^9$

(j) $\sqrt{9x^4 + 25}$

(k) $\sqrt{9 + 25}$

(l) $\sqrt{x^4}$

Oefening 4. Bepaal telkens de graad, de hoogstegraadscoëfficiënt en de constante term van de veelterm.

(a) $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$

(b) $\sqrt{5}\,x^3 - 2x$

(c) $x + \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$

(d) $5x + 2$

(e) 2

(f) $(2x^3 - 7)^2$

(g) $(-5x + 7)(3x^2 - 5x + 8)$

(h) $(x - 2)^5$

Oefeningen reeks 2

Oefening 5. Bepaal telkens de graad, de hoogstegraadscoëfficiënt en de constante term van de veelterm zonder deze veelterm uit te werken of te vereenvoudigen.

(a) $(x^2 - 3)(x^3 + 5)$

(b) $(2x + 3)(x^5 + x^2 + 1)$

(c) $\left(\dfrac{2}{9}x^3 + x^2 - 1\right)\left(3x^4 + 3x + \dfrac{3}{7}\right)$

(d) $(-x^3 + 5)(3x^2 - 7)(5x + 2)$

(e) $(5x - 3)^3 + 27$

(f) $(4x^2 + 5)^3 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x$

Oefening 6. Werk de volgende veeltermen uit, en vereenvoudig telkens zoveel mogelijk. Geef daarna telkens de graad, de constante term en de hoogstegraadscoëfficiënt.

(a) $x(x^3 - 3x + \sqrt{2})$
(b) $x + 2x^3 - 1 - 2(x^7 + 8x^8 + x^3)$
(c) $(x + 1)(x - 3)$
(d) $(2x - 3)(-6x - 1)$
(e) $(x^2 + 1)(x^3 - x + 3)$
(f) $(3x^2 - 6 + 2x)(x + 2)^2$
(g) $-(\sqrt{3} + 4x)(-\sqrt{3} + 4x) + 3x^2 - 1$
(h) $\left(-x^6 + \frac{1}{3}x\right)(2x - 1) - 3x^2\left(-x^5 - \frac{1}{9}\right)$

Oefening 7. Werk telkens uit, vereenvoudig en bepaal de graad.

(a) $2x - (x^3 - x^2 - x - 1)$
(b) $x(x^2 - 3x + 2) - 2x(x - 1)$
(c) $\left(\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\right)\sqrt{5}$
(d) $-3(3x^3 - x + 2)(x - 5)$
(e) $\dfrac{x^3 - (x^2 + 1)(x + 4)}{5}$
(f) $(x + 2)(x - 2) - (x - 2)^2$
(g) $17 - 4x^2 - (-2x + 3)(-2x - 3) - 8$
(h) $\left(\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}\right)(3x - 2)(3x + 2)$

Oefening 8. Bepaal telkens de getalwaarde van de veelterm in de gegeven x-waarde. Gebruik de correcte notatie. Geef aan of die x-waarde ook een nulwaarde is.

(a) $A(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ in $x = 2$
(b) $B(x) = x^4 - 7x^2 - 6x + 1$ in $x = -1$
(c) $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ in $x = 5$
(d) $S(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ in $x = 0$
(e) $C(x) = x^4 - 4$ in $x = \sqrt{2}$
(f) $D(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ in $x = -\frac{1}{2}$

Oefening 9. Bepaal telkens de waarde(n) van de reële parameters waarvoor de veeltermen $A(x)$ en $B(x)$ gelijk zijn.

(a) $A(x) = (ax + 7)x$ en $B(x) = 7x - 3x^2$
(b) $A(x) = (ax + b)(3x - 2)$ en $B(x) = 3x^2 + 6 - 11x$

Oefening 10. Bepaal telkens de exacte waarde(n) van de reële parameters waarvoor de veelterm voldoet aan de voorwaarde.

(a) $A(x) = -x^3 - 8ax - 3$ met $A(1) = 8$
(b) $G(x) = (c + 1)x^2 + 3x - \sqrt{2}\,c$ met nulwaarde -1

Oefening 11. Gegeven zijn de veeltermen

$$A(x) = -3x^4 + 2x^6 - 5x^6 + 6x^4 + 21x^4 - 5 + 12x^2 + 5 \quad \text{en} \quad B(x) = -5x^2 + 2x - 6 - 2x + 6.$$

(a) Vereenvoudig de veeltermen $A(x)$ en $B(x)$.
(b) Geef de graad van de veeltermen $A(x)$ en $B(x)$. Hanteer de correcte notatie.
(c) Bepaal $A(-2)$ en $B(\sqrt{3})$.
(d) Werk uit, vereenvoudig en bepaal de graad van de som en het product van de veeltermen $A(x)$

en $B(x)$.

Oefeningen reeks 3

Oefening 12. Gegeven zijn de veeltermen

$$A(x) = 2x^2 + 5x + 13, \quad B(x) = x^3 - 3x - 4 \quad \text{en} \quad C(x) = xA(x) + c\,B(x)$$

waarbij $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bepaal $A\big(B(3)\big)$.

(b) Bepaal de waarde(n) van de parameter c waarvoor $\operatorname{gr} C(x) = 2$.

Oefening 13. Bepaal een kwadratische veelterm $A(x)$ waarvoor $A(0) = 2$ en waarbij -2 en 1 nulwaarden zijn.

Oefening 14. Bepaal een kubische veelterm $A(x)$ zonder constante term waarvoor

$$A(x) = A(x-1) + x(x-1).$$

Oefening 15. Als je weet dat er precies één veelterm is waarvan de derde macht gelijk is aan

$$P(x) = 8x^6 + 36x^5 + 66x^4 + 63x^3 + 33x^2 + 9x + 1,$$

bepaal dan deze veelterm.

Oefening 16. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + 2x + b$$

waarbij $a, b \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameters a en b waarvoor $A(x)$ het kwadraat is van een veelterm.

Oefening 17. Beschouw de veelterm $P(x) = (3x-1)^{12}$. Bereken algebraïsch de som van de coëfficiënten.

Oefening 18. Als a, b, c, d reële getallen zijn waarvoor geldt dat

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 6x - 8)^{10} \cdot (4x+2)^5 - (x+1)^8 \cdot (x^2 + 5x + 4)^{27}$$

bepaal dan algebraïsch de waarde van $a - b + c - d$.

Oefening 19. Van een rechthoekig stuk karton met afmetingen 20 cm op 10 cm knippen we in elke hoek een vierkant met zijde x weg. Nadien plooien we het karton langs de stippellijnen, om zo een doos zonder deksel rechts te verkrijgen.

(a) Schrijf een veelterm $V(x)$ op dat het volume van de doos weergeeft.

(b) Geef de graad en de constante term van deze veelterm, en verklaar jouw antwoord zowel algebraïsch als met behulp van de context van deze oefening.

(c) Geef alle nulwaarden van deze veelterm, en verklaar jouw antwoord zowel algebraïsch als met behulp van de context van deze oefening.

Oefening 20. (min oneindig en de graad van de nulveelterm) Om aan de nulveelterm ook een graad te kunnen toekennen, breiden we de verzameling van de reële getallen uit met een element, voorgesteld door het symbool $-\infty$, lees als: min oneindig. Het element $-\infty$ is dus geen (reëel) getal. Men spreekt ook wel van het *oneigenlijk getal* $-\infty$. Ook de orde en de optelling in $\mathbb{R}$ worden uitgebreid door de volgende definities (waarbij $a \in \mathbb{R}$):

$$-\infty < a$$
$$(-\infty) + a = -\infty$$
$$a + (-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$$

De graad van de nulveelterm is nu per definitie gelijk aan het oneigenlijk getal $-\infty$. In symbolen: $\mathrm{gr}\,0 = -\infty$.

Bewijs de volgende eigenschappen, waarbij $A(x)$ staat voor een willekeurige veelterm verschillend van de nulveelterm.

(a) $\mathrm{gr}\big(A(x)\cdot 0\big) \;=\; \mathrm{gr}\,A(x) + \mathrm{gr}\,0$
(b) $\mathrm{gr}\big(0\cdot 0\big) \;=\; \mathrm{gr}\,0 + \mathrm{gr}\,0$
(c) $\mathrm{gr}\big(A(x)+0\big) \;\leq\; \max\big\{\,\mathrm{gr}\,A(x)\,,\,\mathrm{gr}\,0\,\big\}$
(d) $\mathrm{gr}\big(A(x)+(-A(x))\big) \;\leq\; \max\big\{\,\mathrm{gr}\,A(x)\,,\,\mathrm{gr}\,(-A(x))\,\big\}$

5 chapter:Deling van veelterm door veelterm

Net zoals je kan spreken over deling van gehele getallen, kun je ook spreken over *deling van veeltermen*. Die definitie, eigenschappen en werkwijzen staan in dit hoofdstuk centraal.

6 Deelbaarheid

Het geheel getal 2025 is deelbaar door het geheel getal 15 omdat er een geheel getal q bestaat waarvoor $2025 = 15\cdot q$, namelijk $q = 35$. Op een gelijkaardige manier kunnen we zeggen dat de veelterm x^2-1 deelbaar is door de veelterm $x+1$, omdat er een veelterm $Q(x)$ bestaat waarvoor $x^2-1=(x+1)\cdot Q(x)$, namelijk $Q(x) = x-1$. We veralgemenen dit als volgt.

Definitie 4. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen waarbij $B(x)\neq 0$. We noemen $B(x)$ een deler van $A(x)$ als er een veelterm $Q(x)$ bestaat zodat $A(x) = B(x)\cdot Q(x)$.

Voorbeeld 20. Beschouw de veeltermen $A(x) = 14x^2+17x+5$ en $B(x) = 2x+1$. Dan is $B(x)$ een deler van $A(x)$, want er bestaat een veelterm $Q(x)$ waarvoor $A(x) = B(x)\cdot Q(x)$, bijvoorbeeld $Q(x) = 7x+5$. Dat kunnen we controleren door het product uit te werken:

$$B(x)\cdot Q(x) = (2x+1)\cdot(7x+5) = 14x^2+10x+7x+5 = 14x^2+17x+5 = A(x).$$

Argumenteren dat een gegeven veelterm $A(x)$ niet deelbaar is door een gegeven veelterm $B(x)$ kan door aan te tonen dat er geen enkele veelterm $Q(x)$ bestaat waarvoor $A(x) = B(x)\cdot Q(x)$.

Voorbeeld 21. Zij $A(x) = 2x^3 + 15$ en $B(x) = x - 3$. Dan is $B(x)$ geen deler van $A(x)$. Inderdaad, mocht er toch een veelterm $Q(x)$ bestaan waarvoor $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$ dan zou $\operatorname{gr} Q(x) = 2$ zodat $Q(x) = ax^2 + bx + c$ voor zekere $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. In dat geval is

$$2x^3 + 15 = (x - 3) \cdot (ax^2 + bx + c)$$

en door de hoogstegraadsterm en constante term van beide leden te vergelijken, vinden we meteen dat $a = 2$ en $c = -5$. Invullen en uitwerken van het rechterlid geeft dan

$$\begin{aligned} 2x^3 + 15 &= (x - 3) \cdot (2x^2 + bx - 5) \\ &= 2x^3 + bx^2 - 5x - 6x^2 - 3bx + 15 \\ &= 2x^3 + (b - 6)x^2 + (-5 - 3b)x + 15. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $b - 6 = 0$ en $-5 - 3b = 0$, zodat $b = 6$ en $b = -\frac{5}{3}$, wat onmogelijk is. Er bestaat dus geen veelterm $Q(x)$ met $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$. Dus $x - 3$ is geen deler van $2x^3 + 15$.

Als een veelterm $B(x) \neq 0$ een deler is van een veelterm $A(x)$ dan noteren we $B(x) \mid A(x)$ en zeggen we dat de veelterm $A(x)$ deelbaar is door de veelterm $B(x)$. Is dat niet zo, dan schrijven we $B(x) \nmid A(x)$.

Voorbeeld 22. We hebben dat $x \mid x^2$ en $(x + 1) \mid (x^2 - 1)$ en $(x - 3) \nmid (2x^3 + 15)$.

Met behulp van de existentiële kwantor $\exists$, lees als *er bestaat*, kunnen we Definitie **??** als volgt aanvullen.

Definitie 5. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen met $B(x) \neq 0$. We noemen $B(x)$ een deler van $A(x)$ als er een veelterm $Q(x)$ bestaat waarvoor geldt dat $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$. In symbolen:

$$B(x) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, Q(x) \in \mathbb{R}[x] : A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

In dat geval noemen we de veelterm $A(x)$ het deeltal, veelterm $B(x)$ de deler en veelterm $Q(x)$ een quotiënt (van de opgaande deling).

Voorbeeld 23. Beschouw de veeltermen $A(x) = x^8$ en $B(x) = x^2$. Dan is $B(x) \mid A(x)$ en een quotiënt van de opgaande deling is gelijk aan x^6.

In de bovenstaande voorbeelden bestaat er telkens hoogstens één veelterm $Q(x)$ waarvoor $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$. Dat resultaat blijkt waar te zijn voor alle veeltermen $A(x)$ en $B(x)$ met $B(x) \neq 0$. Die eigenschap is erg belangrijk, die we daarom een *stelling* noemen. Hieronder zullen we die stelling ook bewijzen.

Stelling 1. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen waarbij $B(x) \neq 0$. Dan bestaat er hoogstens één veelterm $Q(x)$ zodat $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Bewijs. Stel dat er twee veeltermen $Q(x)$ en $Q'(x)$ bestaan waarvoor $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$ en $A(x) = B(x) \cdot Q'(x)$. Gelijkstellen levert nu:

$$\begin{aligned} A(x) = A(x) \quad &\Rightarrow \quad B(x) \cdot Q(x) = B(x) \cdot Q'(x) \\ &\Rightarrow \quad B(x) \cdot Q(x) - B(x) \cdot Q'(x) = 0 \\ &\Rightarrow \quad B(x) \cdot \big(Q(x) - Q'(x)\big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad B(x) = 0 \;\text{ of }\; Q(x) - Q'(x) = 0. \end{aligned}$$

Er is gegeven dat $B(x) \neq 0$. Dus moet noodzakelijk $Q(x) - Q'(x)$ zodat $Q(x) = Q'(x)$. Bijgevolg bestaat er hoogstens één veelterm $Q(x)$ zodat $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

■

Combineren we die stelling met de definitie van deelbaarheid, dan vinden we: een veelterm $B(x) \neq 0$ is een deler van een veelterm $A(x)$ als en slechts als er precies één veelterm $Q(x)$ bestaat waarvoor geldt dat $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$. Dit kunnen we in symbolen noteren door gebruik te maken van de kwantor $\exists!$ die we lezen als *er bestaat precies één*:

$$B(x) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exists!\, Q(x) \in \mathbb{R}[x] \,:\, A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

In dat geval mogen we $Q(x)$ voortaan *het* quotiënt (van de opgaande deling) noemen, en noteren we ook

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x).$$

Voorbeeld 24. We hebben dat $x^2 \mid x^8$ en het quotiënt van de deling is gelijk aan x^6. De volgende notatie komt dan overeen met een rekenregel voor machten:

$$\frac{x^8}{x^2} = x^6.$$

Een typische oefening is bepalen van het quotiënt van een opgaande deling. In de volgende paragraaf zien we de algemene werkwijze om dat te doen.

In het geval er in de veeltermen $A(x)$ en $B(x)$ parameters voorkomen, dan is de zogenaamde *methode van de onbepaalde coëfficiënten* vaak efficiënter. Hierbij bepalen we eerst de graad van het quotiënt $Q(x)$, daarna wordt het quotiënt $Q(x)$ uitgedrukt met coëfficiënten die nog onbepaald zijn (vandaar de naam), om daarna met het verband $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$ die coëfficiënten van $Q(x)$ te bepalen. Die methode kwam al eerder aan bod in Voorbeeld **??**.

Voorbeeld 25. We bepalen de waarde(n) van de parameters p en q waarvoor geldt dat de veelterm $6x^3 + px^2 + 32x + q$ deelbaar is door de veelterm $2x^2 - 7x - 1$. In dat geval heeft het quotiënt van de opgaande deling graad 1, zodat

$$6x^3 + px^2 + 32x + q = (2x^2 - 7x - 1) \cdot (ax + b)$$

voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. De veelterm in het rechterlid heeft hoogstegraadsterm $2x^2 \cdot ax = 2ax^3$, die gelijk moet zijn aan de hoogstegraadsterm van de veelterm in het linkerlid, zodat $6 = 2a$ dus $a = 3$. Een analoge redenering voor de constante term geeft dat $(-1) \cdot b = q$ zodat $b = -q$. Invullen en uitwerken van het rechterlid geeft nu:

$$\begin{aligned} 6x^3 + px^2 + 32x + q &= (2x^2 - 7x - 1) \cdot (3x - q) \\ &= 6x^3 - 2qx^2 - 21x^2 + 7qx - 3x + q \\ &= 6x^3 + (-2q - 21)x^2 + (7q - 3)x + q. \end{aligned}$$

Vergelijken van de coëfficiënten van x^2 en x in linker- en rechterlid leidt tot een stelsel:

$$\begin{cases} p = -2q - 21 \\ 32 = 7q - 3. \end{cases}$$

De tweede vergelijking geeft $q = 5$, en door die waarde in de eerste vergelijking te substitueren, vinden we ten slotte dat $p = -31$.

7 Schema van de staartdeling

In de lagere school heb je geleerd hoe je een deling van twee gehele getallen kan uitvoeren met behulp van het schema van de staartdeling. Zo geeft bijvoorbeeld de deling van 239 door 5 als quotiënt 47 en rest 4. Dat resultaat kun je schrijven als $239 = 5 \cdot 47 + 4$. Kenmerkend is dat de rest kleiner is dan (de absolute waarde van) de deler.

Hieronder leer je om een deling van veeltermen op een gelijkaardige manier uit te voeren.

Algoritme 1. We hernemen het voorbeeld $A(x) = 14x^2 + 17x + 5$ en $B(x) = 2x + 1$. Om na te gaan dat $B(x)$ een deler van $A(x)$ is en om tegelijk ook het quotiënt te vinden, kunnen we stapsgewijs *de veelterm $B(x)$ forceren in de veelterm $A(x)$*. Dat gaat als volgt:

$$\begin{aligned} 14x^2 + 17x + 5 &= 7x \cdot (2x+1) - 7x + 17x + 5 \\ &= 7x \cdot (2x+1) + 10x + 5 \\ &= 7x \cdot (2x+1) + 5 \cdot (2x+1) - 5 + 5 \\ &= 7x \cdot (2x+1) + 5 \cdot (2x+1) \\ &= (2x+1) \cdot (7x+5). \end{aligned}$$

Het vele schrijfwerk kan ingekort worden door het onderstaande *schema van de staartdeling*, ook wel *lange deling* genoemd. Hierin herken je de stappen die we hierboven uitgevoerd hebben.

$$\begin{array}{rr|l} & 14x^2 + 17x + 5 & 2x + 1 \\ \cline{3-3} - & 14x^2 + 7x \phantom{{}+5} & 7x + 5 \\ \cline{2-2} & 10x + 5 & \\ - & 10x + 5 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

Hieruit besluiten we dat $B(x) = 2x + 1$ een deler is van $A(x) = 14x^2 + 17x + 5$, want er bestaat een veelterm $Q(x)$ waarvoor $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, namelijk $Q(x) = 7x + 5$. In symbolen:

$$\underbrace{14x^2 + 17x + 5}_{A(x)} = \underbrace{(2x+1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(7x+5)}_{Q(x)}.$$

Ook in het geval een veelterm $A(x)$ niet deelbaar is door een veelterm $B(x)$, kunnen we te werk gaan zoals hierboven. Het *forceren van de veelterm $B(x)$ in de veelterm $A(x)$* verloopt nu als volgt:

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 1 &= 2x \cdot (x^2 + 3x) - 6x^2 + 3x^2 - 1 \\ &= 2x \cdot (x^2 + 3x) - 3x^2 - 1 \\ &= 2x \cdot (x^2 + 3x) - 3 \cdot (x^2 + 3x) + 9x - 1 \\ &= (x^2 + 3x) \cdot (2x - 3) + 9x - 1. \end{aligned}$$

Het bijbehorende schema van de staartdeling vergt opnieuw minder schrijfwerk.

$$\begin{array}{rr|l} & 2x^3 + 3x^2 - 1 & x^2 + 3x \\ \cline{3-3} - & 2x^3 + 6x^2 \phantom{{}-1} & 2x - 3 \\ \cline{2-2} & -3x^2 - 1 & \\ - & -3x^2 - 9x & \\ \cline{2-2} & 9x - 1 & \end{array}$$

In dit geval stopt de procedure bij een *restveelterm* (kortweg *rest*) $R(x)$ die verschillend is van nul. Kenmerkend is dat de graad van die rest kleiner is dan de graad van $B(x)$. Uit het bovenstaande schema van de staartdeling mogen we dus besluiten dat

$$\underbrace{2x^3+3x^2-1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2+3x)}_{B(x)}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{Q(x)} + \underbrace{9x-1}_{R(x)} \qquad \text{waarbij} \qquad \operatorname{gr} R(x) < \operatorname{gr} B(x).$$

In het vervolg zullen we meestal meteen het schema van de staartdeling opschrijven. Onthoud wel waar die staartdeling vandaan komt: het is een kortere schrijfwijze voor het *forceren van een veelterm $B(x)$ in een veelterm $A(x)$*, de lange werkwijze die we hierboven twee keer uitgeschreven hebben. Enerzijds komt die lange werkwijze later nog aan bod in bewijzen van eigenschappen. Anderzijds komt ze ook nog van pas bij het oplossen van sommige oefeningen, net zoals dat bij de methode van de onbepaalde coëfficiënten het geval is.

Voorbeeld 26. Beschouw de veeltermen $A(x) = 6x^3+19x^2+8x-5$ en $B(x) = 2x+5$. We gaan met behulp van het schema van de staartdeling na of $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 6x^3+19x^2+8x-5 & 2x+5 \\ \cline{3-3}
- & 6x^3+15x^2 & 3x^2+2x-1 \\ \cline{2-2}
 & 4x^2+8x-5 & \\
- & 4x^2+10x & \\ \cline{2-2}
 & -2x-5 & \\
- & -2x-5 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Uit dit schema volgt het verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest:

$$\underbrace{6x^3+19x^2+8x-5}_{A(x)} = \underbrace{(2x+5)}_{B(x)}\cdot\underbrace{(3x^2+2x-1)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)}$$

waaruit we besluiten dat $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

Voorbeeld 27. Gegeven is de veelterm $A(x) = x^3+ax^2-9x+b$ waarbij $a,b \in \mathbb{R}$. We bepalen de waarde(n) van de parameters a en b waarvoor $A(x)$ deelbaar is door $(x+1)^2$. Dat kunnen we doen met behulp van het schema van de staartdeling:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^3+ax^2-9x+b & x^2+2x+1 \\ \cline{3-3}
- & x^3+2x^2+x & x+a-2 \\ \cline{2-2}
 & (a-2)x^2-10x+b & \\
- & (a-2)x^2+(2a-4)x+a-2 & \\ \cline{2-2}
 & (-2a-6)x+b-a+2 &
\end{array}$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned}(x+1)^2 \mid A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad (-2a-6)x+b-a+2 = 0x+0\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -2a-6=0\\ b-a+2=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=-3\\ b=-5.\end{cases}\end{aligned}$$

Een andere manier om a en b te bepalen is door middel van de methode van de onbepaalde coëfficiënten. Dat blijkt efficiënter te zijn dan het schema van de staartdeling, omdat je heel wat minder rekenwerk moet uitvoeren: het quotiënt van de opgaande deling van $A(x)$ door $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ heeft graad 1 en vergelijken van hoogstegraadsterm en constante term in linker- en rechterlid geeft meteen:

$$\begin{aligned}x^3+ax^2-9x+b &= (x^2+2x+1)(x+b)\\ &= x^3+(b+2)x^2+(2b+1)x+b\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{cases} a=b+2\\ -9=2b+1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=-3\\ b=-5.\end{cases}$$

8 Stelling van de euclidische deling

Hernemen we het voorbeeld $A(x) = 2x^3+3x^2-1$ en $B(x) = x^2+3x$, dan vonden we hierboven:

$$\underbrace{2x^3+3x^2-1}_{A(x)} = \underbrace{(x^2+3x)}_{B(x)}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{Q(x)} + \underbrace{9x-1}_{R(x)} \quad \text{waarbij} \quad \underbrace{\text{gr}\, R(x)}_{1} < \underbrace{\text{gr}\, B(x)}_{2}.$$

Bij het voorbeeld met $A(x) = 14x^2+17x+5$ en $B(x) = 2x+1$ was de deling opgaand:

$$\underbrace{14x^2+17x+5}_{A(x)} = \underbrace{(2x+1)}_{B(x)}\cdot\underbrace{(7x+5)}_{Q(x)} + \underbrace{0}_{R(x)} \quad \text{waarbij} \quad R(x)=0.$$

Ook voor elke andere keuze van $A(x)$ en $B(x) \neq 0$ bestaan er zo'n veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$, die daarenboven steeds uniek zijn. Ons bewijs bestaat uit twee delen. Eerst bewijzen we dat de veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ bestaan. Daarna bewijzen we dat ze uniek zijn.

Stelling 2. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen met $B(x) \neq 0$. Dan bestaat er precies één veelterm $Q(x)$ en precies één veelterm $R(x)$ zodat

$$A(x) = B(x)\cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad \text{gr}\, R(x) < \text{gr}\, B(x) \ \text{ of } \ R(x) = 0. \tag{3}$$

Bewijs. [Bewijs dat $Q(x)$ en $R(x)$ bestaan]

Beschouw de verzameling

$$S = \{A(x) - B(x)\cdot C(x) \mid C(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Als $0 \in S$ dan is $0 = A(x) - B(x) \cdot Q(x)$ voor een zekere veelterm $Q(x)$, zodat

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad R(x) = 0.$$

Dus als $0 \in S$ dan bestaan er veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ zodat uitspraak (3) geldt.

Voor het vervolg van dit (deel)bewijs mogen we dus veronderstellen dat $0 \notin S$. Nemen we van elke veelterm in S de graad, dan zijn er veeltermen in S waarvoor de graad het kleinst is. Kies zo'n veelterm en noteer ze met $R(x)$. Omdat $R(x) \in S$ geldt dat $R(x) = A(x) - B(x) \cdot Q(x)$ voor een zekere veelterm $Q(x)$. Dus we hebben alvast dat

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad R(x) \neq 0.$$

We tonen aan dat $\text{gr}\, R(x) < \text{gr}\, B(x)$. Stel uit het ongerijmde dat $\text{gr}\, R(x) \geq \text{gr}\, B(x)$. Delen we de hoogstegraadsterm van $R(x)$ door de hoogstegraadsterm van $B(x)$, dan vinden we een eenterm ax^k waarvoor de graad van $R(x) - ax^k B(x)$ kleiner is dan de graad van $R(x)$. Nu is

$$R(x) - ax^k B(x) = A(x) - B(x) \cdot Q(x) - ax^k B(x) = A(x) - B(x) \cdot (Q(x) + ax^k)$$

zodat $R(x) - ax^k B(x) \in S$. Maar dan hebben we een veelterm in S gevonden waarvan de graad kleiner is dan de graad van $R(x)$. Dit is in strijd met onze veronderstelling dat $R(x)$ een veelterm in S is waarvoor de graad het kleinst is. Bijgevolg is noodzakelijk $\text{gr}\, R(x) < \text{gr}\, B(x)$. Dus ook als $0 \notin S$ bestaan er veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ zodat uitspraak (3) geldt.

■

Bewijs dat $Q(x)$ en $R(x)$ uniek zijn. Stel dat er nog een tweede veelterm $Q'(x)$ en een tweede veelterm $R'(x)$ zou bestaan zodat

$$A(x) = B(x) \cdot Q'(x) + R'(x) \quad \text{waarbij} \quad \text{gr}\, R'(x) < \text{gr}\, B(x) \;\text{ of }\; R'(x) = 0.$$

We moeten aantonen dat $Q'(x) = Q(x)$ en dat $R'(x) = R(x)$. Gelijkstellen levert nu:

$$\begin{aligned} & B(x) \cdot Q(x) + R(x) = B(x) \cdot Q'(x) + R'(x) \\ \Rightarrow\quad & B(x) \cdot Q(x) - B(x) \cdot Q'(x) = R'(x) - R(x) \\ \Rightarrow\quad & \underbrace{B(x) \cdot \big(Q(x) - Q'(x)\big)}_{\text{LL}} = \underbrace{R'(x) - R(x)}_{\text{RL}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Mocht $Q'(x) \neq Q(x)$ en $R'(x) \neq R(x)$ dan zou de graad van het linkerlid van (4) groter dan of gelijk aan de graad van $B(x)$ zijn, terwijl de graad van het rechterlid van (4) kleiner dan de graad van $B(x)$ zou zijn, wat onmogelijk is. Dus moet $Q'(x) = Q(x)$ of $R'(x) = R(x)$. We onderscheiden die twee gevallen.

Eerste geval: $Q'(x) = Q(x)$. Dan volgt uit de gelijkheid (4) dat ook $R'(x) = R(x)$.

Tweede geval: $R'(x) = R(x)$. Dan volgt uit de gelijkheid (4) dat

$$\begin{aligned} B(x) \cdot \big(Q(x) - Q'(x)\big) = 0 \quad & \Rightarrow \quad B(x) = 0 \;\text{ of }\; Q(x) - Q'(x) = 0 \\ & \Rightarrow \quad B(x) = 0 \;\text{ of }\; Q(x) = Q'(x). \end{aligned}$$

Omdat gegeven is dat $B(x) \neq 0$ volgt nu noodzakelijk $Q(x) = Q'(x)$.

We besluiten dat in elk geval $Q'(x) = Q(x)$ en $R'(x) = R(x)$. Hiermee is aangetoond dat $Q(x)$ en $R(x)$ uniek zijn.

■

De bovenstaande stelling lijkt heel erg op een kenmerk van getallen dat je in de lagere school hebt gezien. Zo kan de deling van 365 door 7 geschreven worden als

$$365 = 52 \cdot 7 + 1$$

waarbij je 365 het deeltal, 7 de deler, 52 het quotiënt en 1 de rest noemde. Ook in het geval van een deling van veeltermen zullen we die benamingen gebruiken: als

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad \text{gr}\, R(x) < \text{gr}\, B(x) \;\text{ of }\; R(x) = 0$$

dan noemen we $A(x)$ het deeltal, $B(x)$ de deler, $Q(x)$ het quotiënt en $R(x)$ de rest bij de deling van $A(x)$ door $B(x)$.

Voorbeeld 28. De veelterm $A(x) = x^3 + px^2 - 8x + q$ is deelbaar door $x - 1$ en de rest bij deling door $x^2 - 9$ is $x - 9$. Om de waarde(n) van de parameters p en q te vinden, gaan we als volgt te werk: we weten dat

$$A(x) = (x-1) \cdot Q(x) \quad \text{en} \quad A(x) = (x^2 - 9) \cdot Q'(x) + x - 9$$

voor zekere veeltermen $Q(x)$ en $Q'(x)$. Vervangen we x door respecievelijk 1, 3 en -3 dan verkrijgen we

$$\begin{cases} A(1) = 0 \\ A(3) = -6 \\ A(-3) = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + p - 8 + q = 0 \\ 27 + 9p - 24 + q = -6 \\ -27 + 9p + 24 + q = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 7 & (1) \\ 9p + q = -9 & (2) \\ 9p + q = -9. \end{cases}$$

Uit (2)−(1) volgt $8p = -16$ zodat $p = -2$. Invullen in (1) geeft dan $-2 + q = 7$ zodat $q = 9$.

Oefeningen reeks 1

Oefening 21. Ga telkens na of de eenterm deelbaar is door $6x^6$ en geef in dat geval het quotiënt van de deling.

(a) $36x^8$
(b) $-12x^6$
(c) $9x^{10}$
(d) 0
(e) $-24x^4$
(f) $-\frac{3}{5}x^7$
(g) $\sqrt{2}\,x^6$
(h) 42

Oefening 22. Ga telkens na of de veelterm deelbaar is door 6, door $3x$ en door $3x^2$; en geef in die gevallen telkens het quotiënt van de deling.

(a) $12x^3 - 18x^2 + 6x$
(b) $6x^2 - 3x$
(c) 0
(d) $2x^2 + \frac{3}{5}x^2$
(e) $\sqrt{3}\,x - 8$
(f) $x^8 - \pi\, x^5$

Oefening 23. Bepaal de veelterm waarbij de deling door $-3x^2 + 2x - 1$ als quotiënt $x - 3$ en als rest $2x - 1$ heeft. Werk de veelterm uit en vereenvoudig zoveel mogelijk.

Oefening 24. Gegeven is de veelterm $P(x) = 4x^3 - px^2 + qx - 4$ waarbij $p, q \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameters p en q waarvoor de deling van $P(x)$ door $2x^2 + 3$ als quotiënt $2x - 1$ en als rest $2x - 1$ heeft.

Oefening 25. Bepaal telkens het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$. Schrijf ook telkens het verband op tussen deeltal, deler, quotiënt en rest. Geef ook aan of $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

(a) $A(x) = 5x^2 + 3x$ en $B(x) = x^2$
(b) $A(x) = x^2$ en $B(x) = x$
(c) $A(x) = 5x^3 + 2$ en $B(x) = 2x^2$
(d) $A(x) = -3$ en $B(x) = 5$
(e) $A(x) = 7x^2 - 8x + 5$ en $B(x) = 3x^4 + 2x^2$
(f) $A(x) = 3x^2 - 5x + 3$ en $B(x) = x^2 - 5x + 25$
(g) $A(x) = 8 - 8x^2 - 8x^3$ en $B(x) = 3x^2 - 3x + 3$

Oefeningen reeks 2

Oefening 26. Als $x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ deelbaar is door $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, bepaal dan $p(q + r)$.

Oefening 27. Voer telkens het schema van de staartdeling uit: deling van $A(x)$ door $B(x)$. Noteer ook telkens jouw besluit of $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

(a) $A(x) = x^2 - x + 6$ en $B(x) = x + 2$
(b) $A(x) = x^3 + x^2 - 9x + 1$ en $B(x) = x^2 + 1$
(c) $A(x) = 2x^3 + 5x^2 + 9x + 9$ en $B(x) = x^2 + x + 3$
(d) $A(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ en $B(x) = x^2 + x + 1$
(e) $A(x) = 4x^4 + 7x^2 + 13x - 5$ en $B(x) = 2x^2 + x + 1$

Oefening 28. Toon telkens aan dat de veelterm $A(x)$ deelbaar is door de veelterm $B(x)$ en schrijf $A(x)$ als een product van twee veeltermen.

(a) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$ en $B(x) = x^2 + x + 1$
(b) $A(x) = x^5 - 1$ en $B(x) = x - 1$
(c) $A(x) = x^4 + 1$ en $B(x) = x^2 + \sqrt{2}\,x + 1$

Oefening 29. Gegeven zijn de volgende veeltermen waarbij de letters a, b en c reële getallen voorstellen. Bepaal, door middel van de methode van de onbepaalde coëfficiënten, telkens de waarde(n) van de parameters a, b en c opdat $A(x)$ deelbaar zou zijn door $B(x)$.

(a) $A(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ en $B(x) = x^2 + x + 1$
(b) $A(x) = 3x^3 - ax^2 - 4x + 8$ en $B(x) = x^2 + bx + 4$
(c) $A(x) = 4x^4 + ax^3 + 7x^2 + bx + 3$ en $B(x) = 2x^2 + x + 1$
(d) $A(x) = 3x^4 + ax^3 - ax - 35$ en $B(x) = x^3 + bx^2 + cx + 7$
(e) $A(x) = x^4 + 1$ en $B(x) = x^2 + ax + b$
(f) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$ en $B(x) = x^2 + ax + b$

Oefening 30. Bepaal telkens het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$. Schrijf ook telkens het verband op tussen deeltal, deler, quotiënt en rest. Geef ook aan of $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

(a) $A(x) = x^2 - 1$ en $B(x) = x + 1$
(b) $A(x) = 2x - 8$ en $B(x) = -6$
(c) $A(x) = x^3 + 125$ en $B(x) = x^2 - 5x + 25$
(d) $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ en $B(x) = x^2 + x + 1$
(e) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ en $B(x) = x^2 + 4x + 2$
(f) $A(x) = x^2 + x + 1$ en $B(x) = 3x - 2$
(g) $A(x) = 2x^3 + x^2 + 1$ en $B(x) = 4x^2 + 5$

Oefening 31. Bepaal telkens het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$. Schrijf ook telkens het verband op tussen deeltal, deler, quotiënt en rest. Geef ook aan of $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

(a) $A(x) = x^3 + 1$ en $B(x) = 2x + 2$
(b) $A(x) = 10x^4 + 27x^3 + 34x^2 + 63x$ en $B(x) = x^2 + 3x + 2$
(c) $A(x) = x^5 - 5x^4 - 14x^3 - 3x + 5$ en $B(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1$
(d) $A(x) = 3x^5 + 2x^4 + 13x^3 + 10x^2 + 4x + 8$ en $B(x) = x^2 + 4$
(e) $A(x) = x^5 - 5x + 1918$ en $B(x) = (x - 1)^2$
(f) $A(x) = x^4 + 3x^2 + \dfrac{8}{9}$ en $B(x) = 3x^2 + 1$
(g) $A(x) = 2x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 7$ en $B(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Oefening 32. Bepaal telkens het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$. Hierbij stellen de letters a en b reële getallen voor.

(a) $A(x) = ax - 4x^4 - 2x^2 + b$ en $B(x) = 2 - x^2$
(b) $A(x) = 8x^3 + b + ax$ en $B(x) = 3 + 2x$

Oefening 33. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = 3x^3 + mx^2 + nx - 3$$

waarbij $m, n \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameters m en n waarvoor de deling van $A(x)$ door $x^2 - 1$ als als rest $2x - 3$ heeft.

Oefeningen reeks 3

Oefening 34. Beschouw $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ willekeurig met $a \neq 0$. Bewijs:

$$\exists k \in \mathbb{R} : (x^2 + k) \mid (ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

Oefening 35. Zij $A(x)$ en $B(x)$ twee veeltermen waarbij $A(x) \neq 0$ en $B(x) \neq 0$. Vul aan en bewijs de volgende eigenschap:

$$B(x) \mid A(x) \quad \Rightarrow \quad \text{gr}\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) = \ldots$$

Oefening 36. Zij $r \in \mathbb{R}_0$ en $A(x), B(x), C(x), D(x), E(x), K(x)$ en $L(x)$ veeltermen waarbij $D(x) \neq 0$ en $E(x) \neq 0$. Bewijs de volgende basiseigenschappen van deelbaarheid.

(a) $r \mid A(x)$

(b) Als $A(x) \neq 0$ dan is $A(x) \mid 0$ en $\big(rA(x)\big) \mid A(x)$.

(c) Als $D(x) \mid A(x)$ dan is $\big(rD(x)\big) \mid A(x)$.

(d) Als $D(x) \mid E(x)$ en $E(x) \mid A(x)$ dan is $D(x) \mid A(x)$.

(e) Als $D(x) \mid A(x)$ dan is $D(x) \mid \big(K(x)A(x)\big)$ en $\big(E(x)D(x)\big) \mid \big(E(x)A(x)\big)$.

(f) Als $D(x) \mid A(x)$ en $D(x) \mid B(x)$ dan is $D(x) \mid \big(K(x)A(x) + L(x)B(x)\big)$.

(g) Als $D(x) \mid A(x)$ dan is $\text{gr}\, D(x) \leq \text{gr}\, A(x)$ of $A(x) = 0$.

Oefening 37. Stel dat het deling van een veelterm $A(x)$ door een veelterm $B(x) \neq 0$ als quotiënt $Q(x)$ en als rest $R(x)$ heeft. Als $\text{gr}\, A(x) = 12$ en $\text{gr}\, R(x) = 2$, wat zijn dan de mogelijke waarden voor de graad van de veelterm $Q(x)$?

Oefening 38. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 13$$

waarbij $a \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameter a waarvoor de deling van $A(x)$ door $x^2 + 3x - 2$ als als rest een getal heeft.

Oefening 39. Bepaal de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$ waarbij

$$A(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x \quad \text{en} \quad B(x) = x^3 - x.$$

Oefening 40. Toon voor elk van onderstaande gevallen het bestaan van de veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ in de stelling van de euclidische deling aan. Doe dat telkens door expliciet de veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ te geven.

(a) $A(x) = 0$ en $B(x) \neq 0$ een willekeurige veelterm

(b) $A(x)$ een willekeurige veelterm en $B(x) = 1$

(c) $A(x)$ een willekeurige veelterm en $B(x) = -7$

(d) $A(x)$ een willekeurig reëel getal en $B(x) \neq 0$ een willekeurige veelterm met constante term gelijk aan nul.

(e) $A(x) \neq 0$ een willekeurige veelterm en $B(x) = A(x)$

(f) $A(x) \neq 0$ een willekeurige veelterm en $B(x) = \sqrt{2} \cdot A(x) + \pi$

9 chapter:Deling van veelterm door $x - a$

In het vorige hoofdstuk kwam de deling van een veelterm $A(x)$ door een veelterm $B(x) \neq 0$ aan bod. In dit hoofdstuk bestuderen we het specifiek geval dat $B(x) = x - a$ met $a \in \mathbb{R}$.

10 Reststelling

Om in het algemeen de rest bij deling van een veelterm $A(x)$ door een veelterm $B(x) \neq 0$ te vinden, voeren we het schema van de staartdeling uit. In het geval dat $B(x) = x - a$ voor een zekere $a \in \mathbb{R}$ kun je die rest op een meer efficiënte manier vinden.

Beschouw bijvoorbeeld de deling van de veelterm $A(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ door $B(x) = x - 2$. We bepalen quotiënt en rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$ met behulp van de staartdeling.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & x - 2 \\ \cline{3-3}
- & x^3 - 2x^2 & x^2 + 3 \\ \cline{2-2}
 & 3x - 1 & \\
- & 3x - 6 & \\ \cline{2-2}
 & 5 &
\end{array}
$$

Uit dit schema volgt het onderstaand verband tussen deeltal, deler, quotiënt en rest.

$$\underbrace{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}_{A(x)} = \underbrace{(x-2)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x^2+3)}_{Q(x)} + \underbrace{5}_{R(x)}$$

We laten zien dat je de rest $R(x)$ ook kan vinden zonder het schema van de staartdeling. Vooreerst tonen we aan dat die rest een getal is: uit de stelling van de euclidische deling volgt

$$\text{gr } R(x) < \underbrace{\text{gr } B(x)}_{1} \quad \text{of} \quad R(x) = 0$$

zodat gr $R(x) = 0$ of $R(x) = 0$, dus $R(x) = r$ voor een zekere $r \in \mathbb{R}$. Zo vinden we:

$$
\begin{aligned}
& A(x) = (x-2) \cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{r} \\
\Rightarrow \quad & A(2) = \underbrace{(2-2)}_{0} \cdot Q(2) + r = r.
\end{aligned}
$$

Op die manier kunnen we de rest berekenen: $R(x) = r = A(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

De vaststelling die we hierboven gemaakt hebben, geeft ons nu een manier om meteen de rest bij deling van een veelterm door $x - a$ te vinden, zonder dat we eerst het schema van de staartdeling moeten uitvoeren. Dat resultaat wordt de *reststelling* genoemd.

11 KENMERKEN VAN DEELBAARHEID

Stelling 3. Zij $A(x)$ een veelterm en $a \in \mathbb{R}$. Dan is de rest bij deling van $A(x)$ door $x - a$ gelijk aan $A(a)$.

Bewijs. Wegens de stelling van de euclidische deling bestaat er precies één veelterm $Q(x)$ en één veelterm $R(x)$ zodat

$$A(x) = (x-a)\cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad \text{gr } R(x) < \underbrace{\text{gr}(x-a)}_{1} \quad \text{of} \quad R(x) = 0.$$

Hieruit volgt dat gr $R(x) = 0$ of $R(x) = 0$. Dus is $R(x) = r$ voor een zekere $r \in \mathbb{R}$.
Zo vinden we:

$$\begin{aligned} & A(x) = (x-a)\cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{r} \\ \Rightarrow \quad & A(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}\cdot Q(a) + r = r. \end{aligned}$$

We besluiten dat de rest bij deling van $A(x)$ door $x - a$ gelijk is aan $R(x) = r = A(a)$.

■

Als we in het vervolg enkel de rest bij deling van een veelterm door $x - a$ willen weten, dan passen we de reststelling toe. Ze kan ook gebruikt worden om de rest bij deling door $bx - a$ te bepalen.

Voorbeeld 29. Beschouw de veelterm $A(x) = 5x^7 - 3x^2 + 2$. Dan is, wegens de reststelling, de rest bij deling van $A(x)$ door $x + 1$ gelijk aan

$$A(-1) = 5\cdot(-1)^7 - 3\cdot(-1)^2 + 2 = -5 - 3 + 2 = -6.$$

Om ook de rest bij deling van $A(x)$ door $2x-1$ te vinden, passen we eerst de stelling van de euclidische deling toe: er bestaan (unieke) veeltermen $Q(x)$ en $R(x)$ waarvoor

$$A(x) = (2x-1)\cdot Q(x) + R(x) \quad \text{waarbij} \quad \text{gr } R(x) < \underbrace{\text{gr}(2x-1)}_{1} \quad \text{of} \quad R(x) = 0$$

zodat $R(x) = r \in \mathbb{R}$. Zo vinden we:

$$\begin{aligned} & A(x) = (2x-1)\cdot Q(x) + \underbrace{R(x)}_{r} \\ \Rightarrow \quad & A\left(\frac{1}{2}\right) = \underbrace{\left(2\cdot\frac{1}{2} - 1\right)}_{0}\cdot Q\left(\frac{1}{2}\right) + r = r. \end{aligned}$$

We besluiten dat de rest bij deling van $A(x)$ door $2x - 1$ gelijk is aan

$$\begin{aligned} r = A\left(\frac{1}{2}\right) &= 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \\ &= \frac{5}{128} - \frac{3}{4} + 2 \\ &= \frac{5}{128} - \frac{96}{128} + \frac{256}{128} \\ &= \frac{165}{128}. \end{aligned}$$

11 Kenmerken van deelbaarheid

Om na te gaan of een geheel getal deelbaar is door 2, 3, 5, 7, 9, 10 of 11 kun je een kenmerk van deelbaarheid gebruiken. Voor grotere getallen gaat dat heel wat sneller dan het uitvoeren van de staartdeling. Zo kun je meteen inzien dat 2025 deelbaar is door 3 en door 5, en dus ook door 15.

Ook bij veeltermen kun je spreken over kenmerken van deelbaarheid. Om in het algemeen na te gaan of een veelterm $A(x)$ deelbaar is door een veelterm $B(x) \neq 0$, voeren we het schema van de staartdeling uit, en verkijgen:

$$B(x) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad \text{de rest bij deling van } A(x) \text{ door } B(x) \text{ is gelijk aan } 0.$$

In het geval dat $B(x) = x - a$ met $a \in \mathbb{R}$ leidt de reststelling tot een sluiproute.

Stelling 4. Zij $A(x)$ een veelterm en $a \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$(x - a) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) = 0.$$

Bewijs. Wegens de reststelling geldt:

$$\begin{aligned} (x - a) \mid A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \underbrace{\text{de rest bij deling van } A(x) \text{ door } x - a}_{A(a)} \text{ is gelijk aan } 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A(a) = 0. \end{aligned}$$

■

Bepalen van de waarde van een parameter kan leiden tot een vergelijking. Verwacht wordt dat je vlot eerstegraads-, tweedegraads- en bikwadratische vergelijkingen kan oplossen waarbij je jouw redenering correct kan opschrijven.

Voorbeeld 30. We bepalen de waarde(n) van de reële parameter p waarvoor de veelterm $A(x) =$

$5x^2 - 4x - 3$ deelbaar is door $x - 2p$. Het kenmerk van deelbaarheid door $x - a$ geeft:

$$\begin{aligned}
(x-2p) \mid A(x) \quad &\Leftrightarrow \quad A(2p) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5 \cdot (2p)^2 - 4 \cdot 2p - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 20p^2 - 8p - 3 = 0 \\
& \quad\quad \begin{array}{|l} D = b^2 - 4ac \\ \quad = (-8)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-3) \\ \quad = 304 > 0 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad p = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{304}}{2 \cdot 20} \\
& \quad\quad \begin{array}{|lr|ll} \text{schema:} & 304 & 2 & \\ & 152 & 2 & \\ & 76 & 2 & \\ & 38 & 2 & \\ & 19 & 19 & \\ & 1 & & \text{zodat } 304 = 2^4 \cdot 19 = 4^2 \cdot 19 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad p = \frac{8 \pm 4\sqrt{19}}{40} \\
&\Leftrightarrow \quad p = \frac{2 + \sqrt{19}}{10} \quad \text{of} \quad p = \frac{2 - \sqrt{19}}{10}.
\end{aligned}$$

Het kenmerk van deelbaarheid door $x - a$ kan gemakkelijk veralgemeend worden. De uitspraak die we hieronder moeten aantonen, is een equivalentie. Een bewijs van zo'n equivalentie $P \Leftrightarrow Q$ bestaat vaak uit twee deelbewijzen: een bewijs van de implicatie $P \Rightarrow Q$ en een bewijs van de implicatie $Q \Rightarrow P$. In beide gevallen zullen we de implicatie aantonen met een rechtstreeks bewijs.

Stelling 5. Zij $A(x)$ een veelterm en $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$. Dan geldt:

$$(x-a)(x-b) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) = 0 \text{ en } A(b) = 0.$$

Bewijs. We bewijzen de eigenschap in twee delen.

Veronderstel eerst dat $(x-a)(x-b) \mid A(x)$. We moeten aantonen dat $A(a) = 0$ en $A(b) = 0$.

Omdat $(x-a)(x-b) \mid A(x)$ bestaat er een veelterm $Q(x)$ zodat

$$A(x) = (x-a)(x-b)Q(x).$$

Vervangen we x door a dan vinden we

$$A(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}(a-b)Q(a) = 0$$

en analoog is

$$A(b) = (b-a)\underbrace{(b-b)}_{0}Q(a) = 0.$$

Omgekeerd, veronderstel dat $A(a) = 0$ en $A(b) = 0$. Te bewijzen is dat $(x-a)(x-b) \mid A(x)$.

Uit het kenmerk van deelbaarheid door $x - a$ volgt dat $(x - a) \mid A(x)$. Er bestaat dus een veelterm $Q'(x)$ zodat

$$A(x) = (x - a)Q'(x).$$

Als we hierin x vervangen door b, dan verkrijgen we

$$\underbrace{A(b)}_{0} = \underbrace{(b - a)}_{\neq 0} Q'(b)$$

zodat $Q'(b) = 0$. Dus $(x - b) \mid Q'(x)$ zodat $Q'(x) = (x - b)Q''(x)$ voor een zekere veelterm $Q''(x)$. Samengevat is dan

$$A(x) = (x - a)Q'(x) = (x - a)(x - b)Q''(x)$$

waaruit we mogen besluiten dat $(x - a)(x - b) \mid A(x)$.

■

Voorbeeld 31. We gaan na of de veelterm $A(x) = x^{2025} - x^{2009}$ deelbaar is door $x^2 - 1$. Omdat $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ kunnen we het kenmerk van deelbaarheid door $(x - a)(x - b)$ toepassen:

$$\begin{aligned}
(x^2 - 1) \mid (x^{2025} - x^{2009}) \quad &\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x + 1) \mid A(x) \\
&\Leftrightarrow \quad A(1) = 0 \;\text{ en }\; A(-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1^{2025} - 1^{2009} = 0 \;\text{ en }\; (-1)^{2025} - (-1)^{2009} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 1 = 0 \;\text{ en }\; (-1) - (-1) = 0.
\end{aligned}$$

Die laatste uitspraak $1 - 1 = 0$ en $(-1) - (-1) = 0$ is waar, en omdat ze gelijkwaardig is met de eerste uitspraak $(x^2 - 1) \mid (x^{2025} - x^{2009})$ besluiten we dat $A(x)$ deelbaar is door $x^2 - 1$.

12 Schema van Horner

Om in het algemeen het quotiënt en de rest bij deling van een veelterm $A(x)$ door een veelterm $B(x) \neq 0$ te vinden, voeren we het schema van de staartdeling uit. In het geval dat $B(x) = x - a$ voor een zekere $a \in \mathbb{R}$ kun je de rest veel sneller vinden door de reststelling toe te passen: de rest is gelijk aan $A(a)$. Hieronder leer je om ook het quotiënt op een meer efficiente manier te vinden.

Algoritme 2. Beschouw de veeltermen $A(x) = 3x^3 + 5x^2 + 8x + 13$ en $B(x) = x - 2$. Om quotiënt en rest te vinden, kunnen we de veelterm *de veelterm* $B(x)$ *forceren in de veelterm* $A(x)$, een manier die ook al in het vorige hoofdstuk aan bod kwam, zie Werkwijze **??**:

$$\begin{aligned}
3x^3 + 5x^2 + 8x + 13 &= 3x^2(x - 2) + 3 \cdot 2x^2 + 5x^2 + 8x + 13 \\
&= 3x^2(x - 2) + 11x^2 + 8x + 13 \\
&= 3x^2(x - 2) + 11x(x - 2) + 11 \cdot 2x + 8x + 13 \\
&= 3x^2(x - 2) + 11x(x - 2) + 30x + 13 \\
&= 3x^2(x - 2) + 11x(x - 2) + 30(x - 2) + 30 \cdot 2 + 13 \\
&= 3x^2(x - 2) + 11x(x - 2) + 30(x - 2) + 73
\end{aligned}$$

zodat $\underbrace{3x^3 + 5x^2 + 8x + 13}_{A(x)} = \underbrace{(x - 2)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(3x^2 + 11x + 30)}_{Q(x)} + \underbrace{73}_{R(x)}$ waarbij gr $R(x) <$ gr $B(x)$.

Dat schrijfwerk kan ingekort worden met het schema van de staartdeling uit Hoofdstuk 5. Omdat de deler $B(x)$ van de vorm $x-a$ is, kunnen we quotiënt en rest op een andere manier berekenen die nog minder schrijfwerk vergt: het zogenaamde *schema van Horner*.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 5 & 8 & 13 \\
2 & \downarrow & 2\cdot 3 & 2\cdot 11 & 2\cdot 30 \\
\hline
 & 3 & 11 & 30 & \multicolumn{1}{|c}{73}
\end{array}$$

Voorbeeld 32. Beschouw de veelterm $A(x) = 2x^3+5x^2-3$. We bepalen met behulp van het schema van Horner het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $x+3$.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 5 & 0 & -3 \\
-3 & \downarrow & -3\cdot 2 & -3\cdot(-1) & -3\cdot 3 \\
\hline
 & 2 & -1 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{-12}
\end{array}$$

Hieruit lezen we af dat het quotiënt $Q(x)$ gelijk is aan $2x^2-x+3$ en de rest $R(x)$ gelijk is aan -12. We controleren ons antwoord door de deler $x+3$ te vermenigvuldigen met $Q(x)$ en vervolgens $R(x)$ op te tellen:

$$\begin{aligned}
(x+3)\cdot(2x^2-x+3)-12 &= 2x^3-x^2+3x+6x^2-3x+9-12 \\
&= 2x^3+5x^2-3 = A(x).
\end{aligned}$$

Is een veelterm $A(x)$ deelbaar door $x-a$ en $x-b$, dan kan het schema van Horner twee keer na elkaar uitgevoerd worden om zo het quotiënt bij deling van $A(x)$ door $(x-a)(x-b)$ te bepalen.

Voorbeeld 33. Gegeven is de veelterm $A(x) = x^4-3x^3-7x^2-9x-30$. Er is ook gegeven dat die veelterm deelbaar is door $(x-5)(x+2)$. Om het quotiënt van die deling te vinden, kunnen we als volgt te werk gaan.

Eerst zoeken we het quotiënt bij deling van $A(x)$ door $x-5$. Daartoe voeren we het schema van Horner uit.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -3 & -7 & -9 & -30 \\
5 & \downarrow & 5 & 10 & 15 & 30 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Hieruit lezen we af dat

$$A(x) = (x-5)\underbrace{(x^3+2x^2+3x+6)}_{Q(x)}.$$

Omdat $A(x)$ deelbaar is door $x+2$ (gegeven), is ook de veelterm $Q(x)$ deelbaar door $x+2$. Dat kunnen we inzien door in de bovenstaande gelijkheid elke x te vervangen door -2:

$$A(-2) = (-2-5)\cdot Q(-2)$$

en omdat $(x+2) \mid A(x)$ is $A(-2) = 0$ (kenmerk van deelbaarheid) zodat $Q(-2) = 0$ en dus ook $(x+2) \mid Q(x)$. We bepalen nu het quotiënt bij deling van $Q(x)$ door $x+2$ door middel van een tweede schema van Horner.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 6 \\
-2 & \downarrow & -2 & 0 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

Op die manier vinden we dat $Q(x) = (x+2)(x^2+3)$ zodat uiteindelijk

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-5)Q(x) \\ &= (x-5)(x+2)(x^2+3). \end{aligned}$$

Het quotiënt bij deling van $A(x)$ door $(x-5)(x+2)$ is dus gelijk aan x^2+3.

In het vervolg zullen een redenering zoals in het voorbeeld hierboven wat korter opschrijven: we voeren dan de twee schema's van Horner meteen na elkaar uit

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -3 & -7 & -9 & -30 \\ 5 & \downarrow & 5 & 10 & 15 & 30 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -2 & \downarrow & -2 & 0 & -6 & \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

en lezen dan af dat

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 9x - 30 &= (x-5)(x^3+2x^2+3x+6) \\ &= (x-5)(x+2)(x^2+3). \end{aligned}$$

Voorbeeld 34. Gegeven is de veelterm $A(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 5$. Er is ook gegeven dat die veelterm deelbaar is door $x^2 - 2x + 1$. Om het quotiënt van die deling te bepalen, merken we op dat de deler gelijk is aan $(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$. We kunnen het quotiënt dus vinden door het schema van Horner twee keer na elkaar kunnen uitvoeren:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -1 & -7 & 5 \\ 1 & \downarrow & 3 & 2 & -5 \\ \hline & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & \downarrow & 3 & 5 & \\ \hline & 3 & 5 & 0 & \end{array}$$

waaruit we dan aflezen dat

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^3 - x^2 - 7x + 5 \\ &= (x-1)(3x^2+2x-5) \\ &= (x-1)(x-1)(3x+5). \end{aligned}$$

Meer algemeen kunnen we het schema van Horner ook gebruiken om quotiënt en rest bij deling van een veelterm door $B(x) = bx - a$ te vinden, waarbij $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$.

Voorbeeld 35. Gegeven zijn de veeltermen $A(x) = 3x^3 - 8x^2 + 13x - 7$ en $B(x) = 3x - 2$. We beschouwen de deling van $A(x)$ door $B(x)$. Eerst herschrijven we het verband tussen deeltal, deler, quotiënt $Q(x)$ en rest $R(x)$ als volgt:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 8x^2 + 13x - 7 &= (3x-2) \cdot Q(x) + R(x) \\ &= \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 3Q(x) + R(x) \end{aligned}$$

waaruit we afleiden dat $3Q(x)$ en $R(x)$ het quotiënt en de rest zijn bij deling van $A(x)$ door $x - \frac{2}{3}$.

Die vinden we door het schema van Horner op te schrijven.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -8 & 13 & -7 \\ \frac{2}{3} & \downarrow & 2 & -4 & 6 \\ \hline & 3 & -6 & 9 & \multicolumn{1}{|c}{-1} \end{array}$$

Hieruit lezen we af dat $R(x) = -1$ en $3Q(x) = 3x^2 - 6x + 9$ zodat $Q(x) = x^2 - 2x + 3$.

We kunnen de controle uitvoeren door de deler met het quotiënt $Q(x)$ te vermenigvuldigen, en er daarna de rest $R(x)$ bij op te tellen:

$$\begin{aligned} B(x) \cdot Q(x) + R(x) &= (3x-2)(x^2 - 2x + 3) - 1 \\ &= 3x(x^2 - 2x + 3) - 2(x^2 - 2x + 3) - 1 \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 9x - 2x^2 + 4x - 6 - 1 \\ &= 3x^3 - 8x^2 + 13x - 7 \\ &= A(x). \end{aligned}$$

Oefeningen reeks 1

Oefening 41. Bepaal telkens de rest bij deling van $A(x) = x^3 - x + 6$ door de gegeven veelterm.

(a) $x - 3$
(b) $x + 2$
(c) $x + 2\sqrt{2}$
(d) x
(e) $3x - 5$
(f) -1

Oefening 42. (toelatingsexamen arts) Gegeven zijn de reële getallen a en b. Bij deling van de veelterm $P(x) = x^2 + bx + ab$ door $x + a$ is de rest gelijk aan

(A) a^2 (B) $b - a$ (C) $a - b$ (D) b

Oefening 43. Ga telkens na of de gegeven veelterm een deler is van $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

(a) $x - 2$
(b) $x - 3$
(c) $x + 1$
(d) x

Oefening 44. Bepaal telkens het quotiënt bij deling van $A(x)$ door $B(x)$.

(a) $A(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3$ en $B(x) = x - 3$.

(b) $A(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ en $B(x) = x + 1$

Oefeningen reeks 2

Oefening 45. Gegeven zijn de veeltermen

$$A(x) = -x^4 - kx^2 + \frac{3}{2} \quad \text{en} \quad B(x) = x + 2$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameter k zodat de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$ gelijk is aan $\frac{4}{5}$.

Oefening 46. (toelatingsexamen arts) De deling van de veelterm $P(x) = x^3 + mx^2 + mx + 4$ door $x - 2$ en $x + 2$ levert dezelfde rest op. Hoeveel is die rest?

(A) -16 (B) -12 (C) -8 (D) -4

Oefening 47. Bepaal telkens de exacte waarde(n) van de parameters zodat $A(x)$ deelbaar is door $B(x)$.

(a) $A(x) = 5x^2 + 2x - 7$ en $B(x) = x - 2a$

(b) $A(x) = (2 - a)x^2 + 5ax + a^2$ en $B(x) = x - 3$

(c) $A(x) = -2x^2 + a\sqrt{2}\,x + a - 5$ en $B(x) = x - \sqrt{2}$

(d) $A(x) = 2x^3 + ax^2 + (1 - 6a^2)x + 2a$ en $B(x) = x + 2a$

(e) $A(x) = ax^3 + 19x^2 + bx + 8$ en $B(x) = (x - 2)(x + 4)$

(f) $A(x) = x^4 + ax^3 - 9x^2 + 18x + b$ en $B(x) = x(x - 2)$

(g) $A(x) = -2x^3 + bx - 2ax^2 + 3a$ en $B(x) = x + a$

Oefening 48. (toelatingsexamen arts) De veelterm $P(x) = 8x^3 + 8$ is deelbaar door $x + a$, met $a \in \mathbb{R}$. Hoeveel is de rest van de deling van $P(x)$ door $x + 2a$?

(A) -60 (B) -56 (C) -52 (D) -50

Oefening 49. (toelatingsexamen arts) Als de veelterm $P(x) = x^2 + ax + a$ deelbaar is door $x + b$, met a en b reële getallen, dan geldt

(A) $b \neq 0$ en $a = -\dfrac{b}{b-1}$

(B) $b \neq 1$ en $a = -\dfrac{b^2}{b-1}$

(C) $b \neq 1$ en $a = \dfrac{b^2}{b-1}$

(D) $b \neq 1$ en $a = \dfrac{b}{b-1}$

Oefening 50. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = x^3 - ax^2 + bx - 12$$

waarbij $a, b \in \mathbb{R}$. Bepaal de waarde(n) van de parameters a en b waarvoor $A(x)$ deelbaar is door $(x - 1)(x - 3)$.

Oefening 51. (toelatingsexamen arts) We beschouwen de veelterm $A(x) = 2x^3 + px^2 + qx + r$. Deze veelterm is deelbaar door $x^2 - 1$ en de rest bij deling door $x - 3$ is 8. Geef de waarde van de uitdrukking $(p - r) \cdot q$.

(A) -20 (B) -10 (C) 10 (D) 20

Oefening 52. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = (b - c)x^2 + b^2(c - x) + c^2(x - b)$$

waarbij $b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq c$. Toon aan dat $A(x)$ deelbaar is door $(x - b)(x - c)$ en schrijf $A(x)$ als een product.

Oefening 53. (toelatingsexamen arts) We beschouwen de veelterm $F(x) = x^3 + px^2 - 8x + q$. Deze veelterm is deelbaar door $x - 1$ en de rest bij deling door $x^2 - 9$ is $x - 9$. Geef de waarde van q.

(A) -9 (B) -2 (C) 9 (D) 16

Oefening 54. Bepaal telkens het quotiënt en de rest bij deling van $A(x)$ door $B(x)$.

(a) $A(x) = 4x^3 - 6x + 2$ en $B(x) = 2x - 6$

(b) $A(x) = 18x^3 - 10$ en $B(x) = x + \sqrt{6}$

(c) $A(x) = 2x^4 + 17x^3 - 68x$ en $B(x) = x + \frac{1}{2}$

(d) $A(x) = \sqrt{2}\,x^2 + 3\sqrt{10}\,x - 20\sqrt{2}$ en $B(x) = x - \sqrt{5}$

Oefening 55. Jeroen deelt de veelterm $6x^4 - 7x^3 + 22x^2 - 24x - 13$ door $2x - 1$ en vindt als quotiënt $6x^3 - 4x^2 + 20x - 14$ en als rest -20.

(a) Hoe kan Jeroen snel inzien dat hij een fout gemaakt heeft zonder de deling opnieuw uit te voeren?

(b) Bepaal het juiste quotiënt en de juiste rest.

(c) Hoe kun je zeker weten dat jouw quotiënt en rest correct is? Voer dit uit.

Oefeningen reeks 3

Oefening 56. De rest bij deling van een veelterm door $x - 1$ is 6. Delen we de veelterm door $x - 2$ dan verkrijgen we als rest 18. Bepaal de rest bij deling van de veelterm door $x^2 - 3x + 2$.

Oefening 57. (veralgemeende reststelling) Zij $A(x)$ een veelterm en $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$. Toon aan dat de rest bij deling van $A(x)$ door $bx - a$ gelijk is aan $A\left(\frac{a}{b}\right)$.

Oefening 58. (kenmerk van deelbaarheid door $bx - a$) Zij $A(x)$ een veelterm en $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$. Bewijs:

$$(bx - a) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A\left(\frac{a}{b}\right) = 0$$

Oefening 59. (kenmerken van deelbaarheid door $x-1$ en $x+1$) Bewijs de volgende uitspraken.

(a) Een veelterm is deelbaar door $x-1$ als en slechts als de som van de coëfficiënten gelijk is aan nul.

(b) Een veelterm is deelbaar door $x+1$ als en slechts als de som van de coëfficiënten van de termen van even graad gelijk is aan de som van de coëfficiënten van de termen van oneven graad.

Oefening 60. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = 48x^6 + 491x^5 - 364x^4 + 456x^3 - 164x^2 + 272x + 309.$$

Bepaal algebraïsch en zonder gebruik van te maken van ICT of rekenmachine de getalwaarde van $A(x)$ in $x = -11$.

13 chapter:Toepassingen

In dit hoofdstuk richten we ons tot drie soorten vragen die we over een veelterm $A(x)$ kunnen stellen. Bij elk van deze drie vragen passen we de leerstof uit de vorige hoofdstukken toe.

(1) Een veelterm uitwerken: schrijven als een som van eentermen.

(2) Een veelterm ontbinden in factoren: schrijven als een product van veeltermen.

(3) Nulwaarden bepalen van een veelterm $A(x)$: alle $x \in \mathbb{R}$ bepalen waarvoor $A(x) = 0$.

14 Veeltermen uitwerken

Bij het uitwerken van een veelterm maak je gebruik van de rekenregels en tekenregels voor som, verschil en product. Het is de gewoonte om daarna de termen te herschikken naar toenemende of afnemende graad. Zo is bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} 7x^3 - 2(5x^3 - 5) - (x^3 - 8)x^2 &= 7x^3 - 10x^3 + 10 - x^5 + 8x^2 \\ &= -x^5 - 3x^3 + 8x^2 + 10. \end{aligned}$$

Soms kun je het rekenwerk verkorten door middel van merkwaardige producten waarvan de belangrijkste hieronder staan. Je kan elke gelijkheid aantonen door het linkerlid uit te werken en daarna te vereenvoudigen. We bewijzen één gelijkheid. De andere bewijzen laten we over als oefening voor de lezer.

Eigenschap 2. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dan geldt:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadraat van som van twee termen
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	kwadraat van verschil van twee termen
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	product van tweeterm met zijn toegevoegde
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	kwadraat van som van drie termen
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	derde macht van som van twee termen
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	derde macht van verschil van twee termen.

Bewijs van merkwaardig poduct voor kwadraat van som van drie termen.

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+b+c)(a+b+c)\\ &= a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2\\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\end{aligned}$$ ■

Voorbeeld 36. We werken telkens de veelterm uit door gebruik te maken van merkwaardige producten, en vereenvoudigen nadien zoveel als mogelijk.

(a) $(-3x+5)^2 = (5-3x)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 3x + (3x)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

(b) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(3+\frac{1}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x+3\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3^2 = \frac{1}{4}x^2 - 9$

(c) $$\begin{aligned}(4x^2-5x+3)^2 &= (4x^2)^2 + (-5x)^2 + 3^2 + 2\cdot 4x^2\cdot(-5x) + 2\cdot(-5x)\cdot 3 + 2\cdot 4x^2\cdot 3\\ &= 16x^4 + 25x^2 + 9 - 40x^3 - 30x + 24x^2\\ &= 16x^4 - 40x^3 + 49x^2 - 30x + 9\end{aligned}$$

15 Veeltermen ontbinden in factoren

Tot nu toe heb je al enkele strategieën gezien om te ontbinden in factoren: afzonderen, merkwaardige producten herkennen, groeperen en ontbinden van een kwadratische veelterm.

Voorbeeld 37. De volgende kwadratische veelterm kan ontbonden worden in lineaire factoren omdat de discriminant positief is. Het rekenwerk kan ingekort worden door eerst een gemeenschappelijke factor van de termen af te zonderen.

$$6x^2 + 21x - 45 = 3(2x^2 + 7x - 15)$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = 7^2 - 4\cdot 2\cdot(-15) = 169 > 0\\ x_1 &= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7+13}{4} = \frac{3}{2}\\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-7-13}{4} = -5\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &= 3\cdot a(x-x_1)(x-x_2)\\ &= 3\cdot 2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)\\ &= 3(2x-3)(x+5)\end{aligned}$$

In deze paragraaf leer je nog twee andere strategieën. Door al die werkwijzen doordacht in te zetten, kun je dan al heel wat eenvoudige veeltermen algebraïsch ontbinden in factoren. Vooreerst vermelden we een belangrijk resultaat, dat een gevolg is van de zogenaamde *hoofdstelling van de algebra*. Het bewijs laten we achterwege.

Stelling 6. Elke veelterm kan geschreven worden als een product van constante veeltermen, lineaire veeltermen en kwadratische veeltermen met strikt negatieve discriminant.

Voorbeeld 38. Gegeven is telkens een veelterm met bijbehorende ontbinding in factoren. Om aan te geven dat we een kwadratische veelterm niet verder kunnen ontbinden in lineaire factoren, duiden we aan dat de discriminant D strikt negatief is. Je kan elke gelijkheid controleren door het rechterlid uit te werken en te vereenvoudigen.

(a) $2x^3 + 5x^2 + 14x + 6 = (2x+1)\underbrace{(x^2+2x+6)}_{D<0}$

(b) $x^4 + x^2 + 1 = \underbrace{(x^2+x+1)}_{D<0}\underbrace{(x^2-x+1)}_{D<0}$

Sommige veeltermen kun je meteen ontbinden omdat je een merkwaardig product herkent. Zo volgt bijvoorbeeld uit $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ met $a \in \mathbb{R}$ meteen dat

$$x^2 - 7 = x^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right).$$

Om ook een veelterm $A(x)$ van de vorm $x^3 - a^3$ te ontbinden in factoren, kunnen we als volgt te werk gaan. We stellen vast dat $A(a) = 0$. Daarom is $A(x)$ deelbaar door $x - a$, zie Stelling **??** (kenmerk van deelbaarheid door $x - a$). We berekenen het quotiënt met het schema van Horner

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\
a & \downarrow & a & a^2 & a^3 \\
\hline
 & 1 & a & a^2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

waaruit we afleiden dat $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$. Zo kunnen we ook elk verschil van derde machten ontbinden in factoren, zoals

$$x^3 - 125 = x^3 - 5^3 = (x-5)(x^2+5x+25)$$

en ook

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)(4x^2+6x+9).$$

Op een gelijkaardige manier kun je ook een veelterm $A(x)$ van de vorm $x^3 + a^3$ ontbinden in factoren: deze keer is $A(-a) = 0$ zodat $A(x)$ is deelbaar door $x - (-a) = x + a$. Het bijbehorende schema van Horner is dan

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\
-a & \downarrow & -a & a^2 & -a^3 \\
\hline
 & 1 & -a & a^2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

waaruit volgt dat $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$. Zo is dan bijvoorbeeld

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2-2x+4).$$

Bij uitbreiding kun je ook producten herkennen voor $x^4 - a^4$ en $x^5 \pm a^5$. Die vatten we hieronder samen. Ook hier kun je elke gelijkheid aantonen door het rechterlid uit te werken en te vereenvoudigen. Je kan ook een gelijkheid terugvinden vanuit het linkerlid: pas het kenmerk van deelbaarheid door $x \pm a$ toe en voer het schema van Horner uit, zoals we hierboven voor $x^3 \pm a^3$ hebben laten zien.

Eigenschap 3. Voor elke $a \in \mathbb{R}$ is:

$$\begin{aligned}
x^2 - a^2 &= (x-a)(x+a) && \text{verschil van twee kwadraten}\\
x^3 + a^3 &= (x+a)(x^2 - ax + a^2) && \text{som van twee derde machten}\\
x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + ax + a^2) && \text{verschil van twee derde machten}\\
x^4 - a^4 &= (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) && \text{verschil van twee vierde machten}\\
x^5 + a^5 &= (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) && \text{som van twee vijfde machten}\\
x^5 - a^5 &= (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) && \text{verschil van twee vijfde machten.}
\end{aligned}$$

Nu kunnen we sommige eenvoudige veeltermen zo ver mogelijk ontbinden in factoren door alle eerder geziene strategieën voor ontbinden in factoren te combineren (afzonderen, merkwaardige producten herkennen, groeperen en ontbinden van een kwadratische veelterm).

Voorbeeld 39. We ontbinden telkens de veelterm zo ver mogelijk in factoren.

(a) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)\underbrace{(x^2 - 2x + 4)}_{D=-12<0}$

(b) $-500x^3 + \dfrac{27}{2} = -\dfrac{1}{2}(1000x^3 - 27) = -\dfrac{1}{2}(10x-3)\underbrace{(100x^2 + 30x + 9)}_{D=-2700<0}$

(c) $x^4 - 25 = (x^2-5)(x^2+5) = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\underbrace{(x^2+5)}_{D=-20<0}$

(d) $9x^5 - 6x^4 - 16x^3 = x^3(9x^2 - 6x - 16)$

$$\boxed{\begin{aligned}
&D = (-6)^2 - 4\cdot 9\cdot(-16) = 612 = 2^2\cdot 3^2\cdot 17\\
&x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{6^2\cdot 17}}{2\cdot 9} = \frac{6 \pm 6\sqrt{17}}{18} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{3}
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&= x^3 \cdot 9 \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{3}\right)\\
&= x^3(3x - 1 - \sqrt{17})(3x - 1 + \sqrt{17})
\end{aligned}$$

Voor heel wat andere veeltermen volstaan die technieken niet, maar kan toch ontbonden worden door het kenmerk van deelbaarheid door $x - a$ toe te passen. Beschouw bijvoorbeeld

$$A(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 21.$$

Wegens het kenmerk van deelbaarheid (Stelling **??**) geldt voor elk reëel getal a:

$$(x-a) \mid A(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) = 0.$$

Dus als a een nulwaarde van de veelterm $A(x)$ is, dan kunnen we $A(x)$ ontbinden in factoren:

$$2x^3 + x^2 - 8x + 21 = (x-a)(bx^2 + cx + d) \qquad \text{voor zekere } b, c, d \in \mathbb{R}.$$

We merken op dat de coëfficiënten van de veelterm $A(x)$ gehele getallen zijn: 3, 1, -8 en 21. In dat opzicht is het niet ondenkbaar dat de veelterm $A(x)$ een nulwaarde a heeft dat zelf ook een geheel getal is. We spreken dan van een *gehele nulwaarde*.

Als die veelterm $A(x)$ een gehele nulwaarde a heeft, dan leert het uitwerken van het rechterlid ons dat de getallen b, c, d zelf ook gehele getallen zijn. Bovendien vinden we dat $21 = -ad$, zodat a een (gehele) deler is van 21. Besluit: als a een gehele nulwaarde van $A(x)$ is, dan is a een deler van de constante term.

Die redenering gaat ook op voor andere veeltermen met gehele coëfficiënten. Nulwaarden worden ook *wortels* genoemd, en omdat het over gehele nulwaarden gaat, noemt men het resultaat de *gehele wortelstelling*. Voor een bewijs verwijzen we naar Oefening **??**.

Stelling 7. Zij $A(x)$ een veelterm met gehele coëfficiënten. Als $a \neq 0$ een gehele nulwaarde van $A(x)$ is, dan is a een deler van de constante term.

De gehele wortelstelling leidt tot een techniek om elke veelterm met gehele coëficiënten te ontbinden in factoren, op voorwaarde dat die veelterm een gehele nulwaarde heeft. Die nulwaarde(n) kun je opsporen door eerst de delers van de constante term te berekenen en daarna voor elke deler na te gaan of ze een nulwaarde is van de veelterm. In de praktijk kun je het berekenen van de getalwaarden uitvoeren met ICT.

Voorbeeld 40. We ontbinden de volgende veelterm zo ver als mogelijk.

$$A(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 21$$

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term 21

ICT: $A(-3) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $x - (-3) = x + 3$

schema van Horner:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & -8 & 21 \\
-3 & \downarrow & -6 & 15 & -21 \\
\hline
 & 2 & -5 & 7 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

$$= (x+3)\underbrace{(2x^2 - 5x + 7)}_{D=-31<0}$$

Voorbeeld 41. We ontbinden de volgende veelterm zo ver als mogelijk.

$$A(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -18

ICT: $A(2) = 0$ en $A(-3) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $(x-2)(x+3)$

schema's van Horner:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 4 & -3 & -18 \\
2 & \downarrow & 2 & 12 & 18 \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
-3 & \downarrow & -3 & -9 & \\
\cline{1-4}
 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$$= (x-2)(x^2 + 6x + 9)$$

$$= (x-2)(x+3)(x+3) = (x-2)(x+3)^2$$

Voorbeeld 42. We ontbinden de volgende veelterm zo ver als mogelijk.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x^2 - 3x - \frac{3}{2} \\
={}& \frac{1}{2}\underbrace{\left(x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3\right)}_{A(x)}
\end{aligned}$$

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -3
ICT: $A(-1) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $x+1$
schema van Horner:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 2 & -2 & -6 & -3 \\
-1 & \downarrow & -1 & -1 & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & -3 & 0
\end{array}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\underbrace{(x^3 + x^2 - 3x - 3)}_{Q(x)}$$

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -3
ICT: $Q(-1) = 0$ dus $Q(x)$ is deelbaar door $x+1$
schema van Horner:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 1 & -3 & -3 \\
-1 & \downarrow & -1 & 0 & 3 \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(x+1)(x+1)(x^2-3) \\
&= \frac{1}{2}(x+1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Vinden we slechts één gehele nulwaarde a, dan kun je overwegen om het schema van Horner meteen twee keer na elkaar uit te voeren. Is ook bij het tweede schema de rest gelijk aan nul, dan is de veelterm deelbaar door $(x-a)^2$. Bij het voorbeeld hierboven gaat dat als volgt.

$$A(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 3$$

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -3
ICT: $A(-1) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $x + 1$
schema's van Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & -2 & -6 & -3 \\
-1 & \downarrow & -1 & -1 & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 1 & -3 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
-1 & \downarrow & -1 & 0 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 0 & -3 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$$= (x+1)(x+1)(x^2-3)$$

16 Algebraïsch bepalen van nulwaarden

Om de nulwaarden van een veelterm $A(x)$ te bepalen, moeten we een vergelijking oplossen, namelijk $A(x) = 0$. Ontbinden in factoren is een strategie om zo'n vergelijking algebraïsch op te lossen, want uit Eigenschap **??** volgt voor elke twee veeltermen $A(x)$ en $B(x)$:

$$A(x) \cdot B(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 0 \ \text{ of } \ B(x) = 0.$$

Voorbeeld 43. We bepalen telkens algebraïsch de nulwaarden van de veelterm.

(a) $x^4 - 34x^2 - 2x^3 - 2x - 35 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^4 - 2x^3 - 34x^2 - 2x - 35}_{A(x)} = 0$ termen herschikken

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -35
ICT: $A(7) = 0$ en $A(-5) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $(x-7)(x+5)$
schema's van Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & -34 & -2 & -35 \\
7 & \downarrow & 7 & 35 & 7 & 35 \\
\hline
 & 1 & 5 & 1 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
-5 & \downarrow & -5 & 0 & -5 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+5)(x^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 7 = 0$ of $x + 5 = 0$ of $x^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 7$ of $x = -5$ of $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0}$ oplossingsverzameling $V = \{7, -5\}$

(b) $\frac{1}{25}x^4 - \frac{9}{25}x^3 + \frac{14}{25}x^2 + \frac{7}{5}x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^4 - 9x^3 + 14x^2 + 35x - 25}_{A(x)} = 0$ beide leden maal 25

kanshebbers gehele nulwaarden: delers van de constante term -25

ICT: $A(5) = 0$ dus $A(x)$ is deelbaar door $x - 5$

schema's van Horner:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -9 & 14 & 35 & -25 \\
5 & \downarrow & 5 & -20 & -30 & 25 \\
\hline
 & 1 & -4 & -6 & 5 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
5 & \downarrow & 5 & 5 & -5 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -1 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2(x^2 + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 = 0$ of $x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5$ of $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ oplossingsverzameling $V = \left\{ 5, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Elke veelterm $A(x)$ kan opgevat worden als het voorschrift van een functie, waarvan we de grafiek kunnen plotten. De snijpunten van die grafiek met de x-as komen dan overeen met de oplossingen van de vergelijking $A(x) = 0$, en dus met de nulwaarden van de veelterm. De ontbinding in factoren geeft de ligging van de grafiek ten opzichte van de x-as aan, en in welke punten de grafiek raakt aan de x-as.

Voorbeeld 44. Gegeven is de functie f met als voorschrift $f(x) = x^4 + x^3 - 13x^2 - x$ waarvan de grafiek hieronder staat afgebeeld. Er worden ook drie snijpunten van de grafiek met de x-as aangeduid: de oorsprong O en de punten P en Q.

Het lijkt het erop dat de punten O, P en Q de enige snijpunten van de grafiek met de x-as zijn. Meer bepaald, we hebben de indruk dat de grafiek van f de x-as raakt in de oorsprong. Schrijven we $\text{co}(P) = (a, 0)$ en $\text{co}(Q) = (b, 0)$ met $a, b \in \mathbb{R}$ dan vermoeden we dat de tekentabel van f gegeven wordt door

x		a		0		b	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Om dat met zekerheid te weten, redeneren we als volgt. Alvast is

$$f(x) = x(x^3 + x^2 - 13x - 1)$$

zodat $f(0) = 0$, en de grafiek van f de x-as snijdt in de oorsprong. Omdat $f(a) = 0$ weten we dat $f(x)$ deelbaar is door $x - a$. Analoog is $f(x)$ ook deelbaar door $x - b$. Hieruit volgt dat

$$f(x) = x(x - a)(x - b)(x - c)$$

voor een zeker reëel getal c, en omdat $abc = 1$ en $a < 0$ en $b > 0$ weten we dat $c < 0$. Naast de drie snijpunten $O(0, 0)$, $P(a, 0)$ en $Q(b, 0)$ is er dus nog een vierde snijpunt $R(c, 0)$ van de grafiek van f met de x-as, die zich net links van de y-as situeert. De correcte tekentabel van de functie f wordt dus gegeven door

x		a		c		0		b	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ter controle gebruiken we ICT om de veelterm $x^4 + x^3 - 13x^2 - x$ te ontbinden in factoren:

$$f(x) = x(x + 4,1064\ldots)(x - 3,1829\ldots)(x + 0,0765\ldots).$$

De reden waarom de grafiek van f de x-as snijdt in de oosprong maar niet raakt in de oorsprong, is omdat $f(x)$ deelbaar is door $x - 0$, maar niet door $(x - 0)^2$.

Oefeningen reeks 1

Oefening 61. Werk telkens de veelterm uit. Vereenvoudig zoveel mogelijk.

(a) $-3x^7\left(-7x^3\right)$

(b) $\frac{3}{10}x^5\left(-\frac{3}{5}x^2\right)$

(c) $-\frac{1}{2}x^2\left(x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 2x - 1\right)$

(d) $(x - 1)^3(x - 1)^2$

Oefening 62. Werk telkens de veelterm uit met behulp van merkwaardige producten. Vereenvoudig zoveel mogelijk.

(a) $(\sqrt{3}\,x - 2)(\sqrt{3}\,x + 2)$

(b) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

(c) $(-x^3 - 3)(-x^3 + 3)$

(d) $\left(-2x^3 - \frac{1}{3}\right)^2$

(e) $(1 + x + x^2)(1 + x - x^2)$

(f) $(x^6 - x^3 + 1)(x^6 + x^3 - 1)$

(g) $(x^2 - 2x + 5)^2$

(h) $\left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)^2$

Oefening 63. Ontbind telkens de veelterm zo ver mogelijk in factoren. Ga algebraïsch te werk en schrijf jouw redenering uit.

(a) $1000x^3 + 1$
(b) $8x^3 - 216$
(c) $-81x^2 + 72x - 16$
(d) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$
(e) $-17x + 38$
(f) $(x - 3)(5x^2 + 50x + 110)$

Oefening 64. Ontbind telkens de veelterm zo ver mogelijk in factoren. Ga algebraïsch te werk en schrijf jouw redenering uit.

(a) $x^3 + 2x^2 - 2x - 3$
(b) $x^5 + 7x^4 + 10x^3 - 18x^2 - 27x + 27$
(c) $x^4 - 544x^3 + 1626x^2 - 1624x + 541$
(d) $6x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 16x + 8$
(e) $21 - 40x^2 - 21x^4$
(f) $\frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + x^3 - 3x - 1$

Oefeningen reeks 2

Oefening 65. Ontbind telkens de veelterm zo ver mogelijk in factoren. Ga algebraïsch te werk en schrijf jouw redenering uit.

(a) $6x^2 + x - 15$
(b) $\frac{1}{27} - \frac{x^3}{8}$
(c) $2x^5 - 7x^4 - 38x^3$
(d) $2x^2 - 6073x + 4\,098\,600$
(e) $1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4$
(f) $2x^3 - 15x^2 + 19x - 6$

Oefening 66. Bepaal telkens algebraïsch alle nulwaarden van de veelterm. Schrijf jouw redenering uit.

(a) $3x^2 - 11\sqrt{3}\,x + 30$
(b) $12x^4 - 5x^3 - 28x^2$
(c) $x^3 - 5x + 4$
(d) $2x^3 - 5x^2 - 39x - 18$
(e) $x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 6x - 36$
(f) $2x^3 + x^2 - 17x - 12$
(g) $3x^5 - 30x^4 + 120x^3 - 240x^2 + 240x - 96$
(h) $x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$

Oefening 67. Gegeven is de veelterm

$$A(x) = 3x^4 - 21x^2 - 7x^3 + 35x + 30.$$

Er is ook gegeven dat de getalwaarde van $A(x)$ in $x = -\frac{2}{3}$ gelijk is aan nul. Bepaal algebraïsch alle nulwaarden van de veelterm $A(x)$.

Oefening 68. Beschouw de veelterm

$$P(x) = 3x^3 - 20x^2 + kx + 12$$

waarbij $k \in \mathbb{R}$. Er gegeven dat $P(x)$ deelbaar is door $x - 3$. Bepaal algebraïsch alle nulwaarden van de veelterm $P(x)$.

Oefeningen reeks 3

Oefening 69. Bepaal alle kubische veeltermen $A(x)$ waarvan de constante term gelijk is aan nul en waarvoor geldt dat

$$A(x) - A(x-1) = x^2.$$

Oefening 70. In wiskunde staat een bewijs zonder woorden voor een figuur die aangeeft dat een bepaalde wiskundige uitspraak vanzelfsprekend is, zonder dat daarbij begeleidende uitleg vermeld wordt. Daarbij gaat het vaak om identiteiten in de algebra of stellingen in de meetkunde. Zo werden al bewijzen zonder woorden gevonden van de stelling van Pythagoras, de cosinusregel en formules voor sommen van getallen die aan een bepaalde regelmaat voldoen, zoals de eindige som

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

met $n \in \mathbb{N}_0$ willekeurig, en de niet-eindigende sommen

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + \ldots \quad \text{en} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Een bewijs zonder woorden geldt niet als een volledig bewijs zoals we dat in wiskunde kennen, omdat de logische argumenten ontbreken om de uitspraak formeel aan te tonen. Het kan wel waardevolle intuïtieve ideeën aanreiken. Op die manier kan er voor elk bewijs zonder woorden een redenering worden opgeschreven die gebaseerd is op de figuur en die kan gelden als een volledig bewijs van de uitspraak.

Hieronder staat een bewijs zonder woorden van een merkwaardig product. Formuleer de bijbehorende uitspraak en schrijf op basis van de figuur een volledig bewijs op.

Oefening 71. Ontbind telkens de veelterm zo ver mogelijk in factoren. Ga algebraïsch te werk en schrijf jouw redenering uit.

(a) $x^4 + 1$

(b) $x^4 + x^2 + 1$

(c) $x^5 - 1$

(d) $x^5 + 1$

Oefening 72. Zij $A(x)$ een willekeurige veelterm met gehele coëfficiënten en met hoogstegraadscoëfficiënt gelijk aan 1. Toon aan: als $A(x)$ een rationale nulwaarde heeft, dan heeft $A(x)$ ook een gehele nulwaarde.

Oefening 73. Toon telkens de veeltermgelijkheid aan. Hierbij is a een willekeurig reëel getal en $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) $x^{n+1} - a^{n+1} = (x-a)(x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x + a^n)$

(b) $x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x+a)(x^{2n} - ax^{2n-1} + a^2x^{2n-2} - a^3x^{2n-3} + \cdots - a^{2n-1}x + a^{2n})$

Oefening 74. Toon voor elke $a \in \mathbb{R}_0$ aan dat het zo ver mogelijk ontbinden in factoren van de veeltermen $x^2 \pm a^2$, $x^3 \pm a^3$, $x^4 \pm a^4$ en $x^5 \pm a^5$ wordt gegeven door onderstaande uitdrukkingen.

Hierbij staat φ voor de gulden snede.

$x^2 + a^2 = x^2 + a^2$	som van twee kwadraten
$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$	verschil van twee kwadraten
$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$	som van twee derde machten
$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$	verschil van twee derde machten
$x^4 + a^4 = (x^2 + \sqrt{2}\,ax + a^2)(x^2 - \sqrt{2}\,ax + a^2)$	som van twee vierde machten
$x^4 - a^4 = (x-a)(x+a)(x^2 + a^2)$	verschil van twee vierde machten

Oefening 75. (gehele wortelstelling) In deze oefening bewijzen we de Stelling **??**:

> Zij $A(x)$ een veelterm met gehele coëfficiënten. Als $a \neq 0$ een gehele nulwaarde van $A(x)$ is, dan is a een deler van de constante term.

Beschouw een willekeurige veelterm met gehele coëfficiënten:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Stel nu dat $a \neq 0$ een gehele nulwaarde van deze veelterm is, dus

$$a \in \mathbb{Z}_0 \quad \text{en} \quad A(a) = 0.$$

Toon aan dat $A(a) = 0$ leidt tot $a_0 = a \cdot q$ voor een zeker geheel getal q, en dus dat $a \mid a_0$.

Oefening 76. (rationale wortelstelling) In deze oefening bewijzen we de rationale wortelstelling:

> Zij $A(x)$ een veelterm met gehele coëfficiënten. Als $\frac{p}{q} \neq 0$ een rationale nulwaarde van $A(x)$ is (met p, q gehele getallen en $\frac{p}{q}$ onvereenvoudigbaar), dan is p een deler van de constante term en q een deler van de hoogstegraadscoëfficiënt

Beschouw een willekeurige veelterm met gehele coëfficiënten: Beschouw een willekeurige veelterm met gehele coëfficiënten:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

waarbij $n \in \mathbb{N}$ en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Beschouw nu een rationaal getal $\frac{p}{q} \neq 0$, en stel dat dit getal een nulwaarde van deze veelterm is waarbij p, q gehele getallen en $\frac{p}{q}$ onvereenvoudigbaar, dus

$$p, q \in \mathbb{Z}_0 \quad \text{en} \quad \text{ggd}(p,q) = 1 \quad \text{en} \quad A\left(\frac{p}{q}\right) = 0.$$

Toon aan dat $A\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ leidt tot $p \mid a_0 q^n$ en $q \mid a_n p^n$, en dus tot $p \mid a_0$ en $q \mid a_n$.

Oefening 77. Bepaal algebraïsch alle reële getallen x waarvoor geldt dat

$$x^3 - 288x^2 - 282x = 2023.$$

Schrijf alle tussenstappen op.

Oefening 78. Bepaal algebraïsch alle nulwaarden van de veelterm

$$A(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1.$$

Schrijf alle tussenstappen op.

Oefening 79. Bepaal een veelterm met gehele coëfficiënten waarvan $\sqrt{3+\sqrt{17}}$ een nulwaarde is.

Oefening 80. In deze oefening laten we zien dat de rationale wortelstelling (zie Oefening **??**) gebruikt kan worden om aan te tonen dat sommige reëele getallen irrationaal zijn.

(a) Bepaal een veelterm $A(x)$ met gehele coëfficiënten waarvan $\sqrt{2}$ een nulwaarde is.
(b) Toon met behulp van de rationale wortelstelling aan dat die veelterm $A(x)$ geen rationale nulwaarden heeft.
(c) Argumenteer nu hoe uit (a) en (b) volgt dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is.
(d) Toon op een gelijkaardige manier aan dat de volgende reële getallen irrationaal zijn:

$$\sqrt{17}, \qquad \sqrt[3]{2}, \qquad \sqrt[7]{13} \qquad \sqrt{3+\sqrt{17}}, \qquad \text{en} \qquad \sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

17 Eindantwoorden van oefeningen

Hoofdstuk 1

Uitwerking: (a) eenterm
(b) eenterm
(c) geen eenterm
(d) eenterm
(e) geen eenterm
(f) eenterm
(g) eenterm
(h) eenterm
(i) geen eenterm
(j) geen eenterm

Uitwerking: (a) $x + 2x^2 + 3x^3$
(b) $x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{4}x^7$
(c) $x^2 - x^3 + x^4$

Uitwerking: (a) veelterm
(b) veelterm
(c) veelterm
(d) veelterm
(e) veelterm
(f) veelterm
(g) geen veelterm
(h) veelterm
(i) veelterm
(j) geen veelterm
(k) veelterm
(l) veelterm

Uitwerking: (a) graad 5, hoogstegraadscoëfficiënt 1, constante term -15
(b) graad 6, hoogstegraadscoëfficiënt 2, constante term 3
(c) graad 7, hoogstegraadscoëfficiënt $\frac{2}{3}$, constante term $-\frac{3}{7}$
(d) graad 6, hoogstegraadscoëfficiënt -15, constante term -70
(e) graad 3, hoogstegraadscoëfficiënt 125, constante term 0
(f) graad 6, hoogstegraadscoëfficiënt 64, constante term 125

Uitwerking: (a) $-x^3 + x^2 + 3x + 1$, graad 3
(b) $x^3 - 5x^2 + 4x$, graad 3
(c) $\sqrt{10}\,x + \sqrt{15}$, graad 1
(d) $-9x^4 + 45x^3 + 3x^2 - 21x + 30$, graad 4
(e) $-\frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$, graad 2
(f) $4x - 8$, graad 1
(g) $-8x^2 + 18$, graad 2
(h) $\frac{15}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{4}{3}$, graad 3

Uitwerking: (a) $A(2) = 0$, nulwaarde
(b) $B(-1) = 1$, geen nulwaarde
(c) $P(5) = 0$, nulwaarde
(d) $S(0) = -1$, geen nulwaarde
(e) $C(\sqrt{2}) = 0$, nulwaarde
(f) $D\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, nulwaarde

Uitwerking: (a) $a = -3$
(b) $a = 1$ en $b = -3$

Uitwerking: (a) $a = -\frac{3}{2}$
(b) $c = \dfrac{2}{1 - \sqrt{2}}$

Uitwerking: (a) $A(x) = -3x^6 + 24x^4 + 12x^2$ en $B(x) = -5x^2$
(b) gr $A(x) = 6$ en gr $B(x) = 2$
(c) $A(-2) = 240$ en $B(\sqrt{3}) = -15$

Uitwerking: (a) 475
(b) $c = -2$

Uitwerking: $A(x) = -x^2 - x + 2$

Uitwerking: $A(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x$

Uitwerking: $2x^2 + 3x + 1$

Uitwerking: $a = 3$ en $b = \frac{1}{4}$

Uitwerking: 4096

Uitwerking: 32

Hoofdstuk 2

Uitwerking: (a) deelbaar, quotiënt $6x^2$
(b) deelbaar, quotiënt -2
(c) deelbaar, quotiënt $\frac{3}{2}x^4$
(d) deelbaar, quotiënt 0
(e) niet deelbaar
(f) deelbaar, quotiënt $-\frac{1}{10}x$

(g) deelbaar, quotiënt $\frac{\sqrt{2}}{6}$
(h) niet deelbaar

Uitwerking: (a) deelbaar door 6, quotiënt $2x^3 - 3x^2 + x$
deelbaar door $3x$, quotiënt $4x^2 - 6x + 2$
niet deelbaar door $3x^2$
(b) deelbaar door 6, quotiënt $x^2 - \frac{1}{2}x$
deelbaar door $3x$, quotiënt $2x - 1$
niet deelbaar door $3x^2$
(c) deelbaar door 6, quotiënt 0
deelbaar door $3x$, quotiënt 0
niet deelbaar door 0
(d) deelbaar door 6, quotiënt $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^2$
deelbaar door $3x$, quotiënt $\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{5}x$
deelbaar door $3x^2$, quotiënt $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}$
(e) deelbaar door 6, quotiënt $\frac{\sqrt{3}}{6}x - \frac{4}{3}$
niet deelbaar door $3x$
niet deelbaar door $3x^2$
(f) deelbaar door 6, quotiënt $\frac{1}{6}x^8 - \frac{\pi}{6}x^5$
deelbaar door $3x$, quotiënt $\frac{1}{3}x^7 - \frac{\pi}{3}x^4$
deelbaar door $3x^2$, quotiënt $\frac{1}{3}x^6 - \frac{\pi}{3}x^3$

Uitwerking: $-3x^3 + 11x^2 - 5x + 2$

Uitwerking: $p = 2$ en $q = 8$

Uitwerking: (a) quotiënt 5, rest $3x$, niet deelbaar, verband $A(x) = 5B(x) + 3x$
(b) quotiënt x, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = xB(x) + 0$
(c) quotiënt $\frac{5}{2}x$, rest 2, niet deelbaar, verband $A(x) = \frac{5}{2}xB(x) + 2$
(d) quotiënt $-\frac{3}{5}$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = -\frac{3}{5}B(x) + 0$
(e) quotiënt 0, rest $7x^2 - 8x + 5$, niet deelbaar, verband $A(x) = 0B(x) + 7x^2 - 8x + 5$
(f) quotiënt 3, rest $10x - 72$, niet deelbaar, verband $A(x) = 3B(x) + 10x - 72$
(g) quotiënt $-\frac{8}{3}x$, rest 16, niet deelbaar, verband $A(x) = -\frac{8}{3}xB(x) + 16$

Uitwerking: 12

Uitwerking: (a) niet deelbaar
(b) niet deelbaar
(c) deelbaar
(d) deelbaar
(e) niet deelbaar

Uitwerking: (a) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
(b) $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
(c) $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$

Uitwerking: (a) $a = 2$ en $b = 2$
(b) $a = 22$ en $b = -8$
(c) $a = 0$ en $b = 2$
(d) $a = 4$, $b = 3$ en $c = 5$
(e) $a \in \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$ en $b = 1$
(f) $a \in \{1, -1\}$ en $b = 1$

Uitwerking: (a) quotiënt $x - 1$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = (x - 1)B(x) + 0$

(b) quotiënt $-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)B(x) + 0$
(c) quotiënt $x + 5$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = (x + 5)B(x) + 0$
(d) quotiënt $3x + 2$, rest $2x + 7$, niet deelbaar, verband $A(x) = (3x + 2)B(x) + 2x + 7$
(e) quotiënt $x - 1$, rest $7x + 3$, niet deelbaar, verband $A(x) = (x - 1)B(x) + 7x + 3$
(f) quotiënt $\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}$, rest $\frac{19}{9}$, niet deelbaar, verband $A(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right)B(x) + \frac{19}{9}$
(g) quotiënt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, rest $-\frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$, niet deelbaar, verband $A(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)B(x) - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$

Uitwerking: (a) quotiënt $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)B(x) + 0$
(b) quotiënt $10x^2 - 3x + 23$, rest -46, niet deelbaar,
verband $A(x) = \left(10x^2 - 3x + 23\right)B(x) - 46$
(c) quotiënt $x^2 - 20$, rest $99x^2 + 117x - 15$, niet deelbaar,
verband $A(x) = (x^2 - 20)B(x) + 99x^2 + 117x - 15$
(d) quotiënt $3x^3 + 2x^2 + x + 2$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = (3x^3 + 2x^2 + x + 2)B(x) + 0$
(e) quotiënt $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, rest 1914, niet deelbaar,
verband $A(x) = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)B(x) + 1914$
(f) quotiënt $\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}$, rest 0, deelbaar, verband $A(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}\right)B(x) + 0$
(g) quotiënt $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{17}{4}$, rest $-\frac{33}{4}x + \frac{113}{4}$, niet deelbaar,
verband $A(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{17}{4}\right)B(x) - \frac{33}{4}x + \frac{113}{4}$

Uitwerking: (a) quotiënt $4x^2 + 10$ en rest $ax + b - 20$
(b) quotiënt $4x^2 - 6x + \frac{1}{2}a + 9$ en rest $-\frac{3}{2}a + b - 27$

Uitwerking: $m = 0$ en $n = -1$

Uitwerking: $\text{gr}\, Q(x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Uitwerking: $a = -2$

Uitwerking: x

Uitwerking: (a) $Q(x) = 0$ en $R(x) = 0$
(b) $Q(x) = A(x)$ en $R(x) = 0$
(c) $Q(x) = -\frac{1}{7}$ en $R(x) = 0$
(d) $Q(x) = 0$ en $R(x) = A(x)$
(e) $Q(x) = 1$ en $R(x) = 0$
(f) $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $R(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Hoofdstuk 3

Uitwerking: (a) 30
(b) 0
(c) $6 - 14\sqrt{2}$
(d) 6
(e) $\frac{242}{27}$
(f) 0

Uitwerking: (A)

Uitwerking: (a) geen deler
(b) deler
(c) deler
(d) geen deler

Uitwerking: (a) quotiënt $2x^2 + 11x + 33$ en rest 96
(b) quotiënt $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ en rest -6

Uitwerking: $k = -\frac{153}{40}$

Uitwerking: (B)

Uitwerking: (a) $a \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{7}{10}\right\}$
(b) geen enkel reëel getal a voldoet
(c) $a = \frac{5+2\sqrt{2}}{3}$
(d) $a \in \mathbb{R}$
(e) $a = 10$ en $b = -82$
(f) $a = -2$ en $b = 0$
(g) $a = 0$ of $b = 3$

Uitwerking: (B)

Uitwerking: (C)

Uitwerking: $a = 8$ en $b = 19$

Uitwerking: (D)

Uitwerking: $A(x) = (b-c)(x-b)(x-c)$

Uitwerking: (C)

Uitwerking: (a) quotiënt $2x^2 + 6x + 15$ en rest 92
(b) quotiënt $18x^2 - 18\sqrt{6}\,x + 108$ en rest $-10 - 108\sqrt{6}$
(c) quotiënt $2x^3 + 16x^2 - 8x - 64$ en rest 32
(d) quotiënt $\sqrt{2}\,x + 4\sqrt{10}$ en rest 0

Uitwerking: (b) quotiënt $3x^3 - 2x^2 + 10x - 7$ en rest -20

Uitwerking: $12x - 6$

Uitwerking: 100

Hoofdstuk 4

Uitwerking: (a) $21x^{10}$
(b) $-\frac{9}{50}x^7$
(c) $-\frac{1}{2}x^6 + 3x^5 + 4x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2$
(d) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

Uitwerking: (a) $3x^2 - 4$
(b) $x^4 - 1$
(c) $x^6 - 9$
(d) $4x^6 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{9}$
(e) $1 + 2x + x^2 - x^4$
(f) $x^{12} - x^6 + 2x^3 - 1$
(g) $x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25$
(h) $\frac{1}{4}x^6 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \frac{8}{15}x^2 + \frac{4}{25}$

Uitwerking: (a) $(10x+1)(100x^2 - 10x + 1)$
(b) $8(x-3)(x^2+3x+9)$
(c) $-(9x-4)^2$
(d) $x^2(x-2)^2$
(e) $-17x + 38$
(f) $5(x-3)(x+5-\sqrt{3})(x+5+\sqrt{3})$

Uitwerking: (a) $\frac{1}{4}(x+1)(2x+1-\sqrt{13})(2x+1+\sqrt{13})$

(b) $(x-1)^2(x+3)^3$
(c) $(x-541)(x-1)^3$
(d) $2(x+1)(x+2)(x-2)(3x-1)$
(e) $-(3x^2+7)(\sqrt{7}\,x-\sqrt{3})(\sqrt{7}\,x+\sqrt{3})$
(f) $\frac{1}{3}(x+1)(2x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Uitwerking: (a) $(6x+40)(x-3)$
(b) $\frac{1}{216}(2-3x)(4+6x+9x^2)$
(c) $\frac{1}{8}x^3(4x-7-\sqrt{353})(4x-7+\sqrt{353})$
(d) $(x-2024)(2x-2025)$
(e) $\frac{1}{4}(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$
(f) $(x-1)(x-6)(2x-1)$

Uitwerking: (a) $V=\left\{2\sqrt{3},\frac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$
(b) $V=\left\{0,\frac{7}{4},-\frac{4}{3}\right\}$
(c) $V=\left\{1,\frac{\sqrt{17}-1}{2},-\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right\}$
(d) $V=\left\{-3,6,-\frac{1}{2}\right\}$
(e) $V=\left\{-3,-1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5}\right\}$
(f) $V=\left\{3,\frac{\sqrt{17}-7}{4},-\frac{\sqrt{17}+7}{4}\right\}$
(g) $V=\{2\}$
(h) $V=\{\sqrt{2}\}$

17 EINDANTWOORDEN VAN OEFENINGEN

Uitwerking: $V = \left\{3, -\frac{2}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$

Uitwerking: $V = \left\{3, 4, -\frac{1}{3}\right\}$

Uitwerking: $A(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x + d$ met $d \in \mathbb{R}$

Uitwerking: Voor elke $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ is $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Uitwerking: (a) $(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$

(b) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

(c) $(x-1)\left(x^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)\left(x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)$

(d) $(x-1)\left(x^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)\left(x^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,x + 1\right)$

Uitwerking: $x = 289$

Uitwerking: geen reële oplossingen

Uitwerking: $A(x) = x^4 - 6x^2 - 8$