Towards Enhanced Exploration Reasoning from Stream-of-Search & RLOO

GITA401 – Introduction to Reinforcement Learning

SOGANG UNIVERSITY
A70003 김경원
서강대학교 AISW 대학원

Project Objectives

Overview

Countdown numbers game

- https://en.wikipedia.org/wiki/Countdown_(game_show)
- 영국에서 방영한 Countdown Game Show 의 Numbers Round
- 제시된 숫자 집합을 산술 연산과 결합하여 목표 숫자에 도달하는 게임
- Katz et al.[1] 에 따르면 해당 과정은 NP-Complete Problem
- 이 문제를 풀기 위해서는 계획, 탐색, 백트래킹 과정을 종합적으로 고려해야 함

Example:

Contestant One requests two large numbers and four small numbers.

Selection is:

75	50	2	3	8	7

Randomly generated target is:

812

Contestant One declares 813, while Contestant Two declares 815.

Contestant One is closer and so reveals: 75 + 50 – 8 = 117, and 117 × 7 – (3 × 2) = 813, which scores 7 points for being 1 away. Contestant Two does not score.

Assistant notes: 50 + 8 = 58, and 7 × 2 × 58 = 812, which would have scored 10 points.

구현 전략

주요 가설

1. Stream of Search 형태의 추론과정을 서술하는 데이터셋을 활용한 SFT. 로 모델에게 생각하는 방법을 가르킨다!

2. RLHF 를 이용하여 수학 능력을 강화시켜 정확성을 상승 시킬수 있다.

[1] Katz, M., Kokel, H., and Sreedharan, S. (2025). “Seemingly Simple Planning Problems are Computationally Challenging: The Countdown Game”, LM4Plan @ ICAPS 2025

Dataset

DataSet Description

Countdown numbers 4 Dataset

[SFT Training Set]

- Stream of Search[2] Github[3] 의 코드를 이용하여 10만개의 데이터를 생성하였습니다.
- 랜덤으로 생성한 4개의 숫자와 연산자를 이용하여 문제와 Optimal Path 를 생성합니다.
- DFS, BFS 탐색을 이용하여 최대 4K token 길이의 Search Path 를 생성합니다.

[RLHF Training Set]

- HuggingFace, "Jiayi-Pan/Countdown-Tasks-3to4"[4] Dataset의 4개 숫자 데이터를 이용합니다.
- nums: [76, 82, 70, 51], target: 86 Format 의 데이터

[Evaluation Set]

- "Jiayi-Pan/Countdown-Tasks-3to4" 의 일부 데이터를 이용합니다.

[2] Gandhi, K., Lee, D., Grand, G., Liu, M., Cheng, W., Sharma, A., & Goodman, N. D. (2024). Stream of search (sos): Learning to search in language. arXiv preprint arXiv:2404.03683.
[3] https://github.com/kanishkg/stream-of-search
[4] https://huggingface.co/datasets/Jiayi-Pan/Countdown-Tasks-3to4

Preprocessing

Preprocessing

SFT Traning Data Prepocessing

- Optimal 경로를 이용하여 올바른 수식을 만듭니다.
- ((63-17)-(27-5)) 형태로 변환하여 최종 정답으로 사용

```
def _convert_solution_to_expression(self, solution_list):
    expressions = {}
    last_result = ""
    for step in solution_list:
        match = re.match(r"(\d+)([\+\-\*\/])(\d+)=(\d+)", step)
        if match:
            left, op, right, res = match.groups()
            left_expr = expressions.get(left, left)
            right_expr = expressions.get(right, right)
            current_expr = f"({left_expr}{op}{right_expr})"
            expressions[res] = current_expr
            last_result = res
    return expressions.get(last_result, "")
```

Chain-of-Thought Instruction Data

- user, assistant 형태 Instruction 쌍을 생성
- <think></think> Tag 를 사용하여 추론 과정을 강화합니다.

```
def _formatting_func(self, example):
    final_equation = self._convert_solution_to_expression(example['solution'])
    text = (
        f"<|im_start|>system\n당신은 숫자를 조합하여 목표값을 만드는 수학 전문가입니다.<|im_end|>\n"
        f"<|im_start|>user\nnums: {example['nums']}, target: {example['target']}<|im_end|>\n"
        f"<|im_start|>assistant\n<think>\n{example['search_path']}\n</think>\n\n"
        f"{final_equation}<|im_end|>"
    )
    return {"text": text}
```

Preprocessing

Preprocessing – Stream of Search

Stream of search

- 여러 상징적 검색 전략(예: Breadth First Search, Depth First Search)을 기반으로 100,000개의 검색 경로를 생성하여 훈련 데이터셋을 구축합니다
- 이로써 모델은 최적 경로만을 학습하는 대신에 다양한 경로에서의 탐색과 백트래킹을 경험하게 됩니다.

“nums": [64, 50, 12, 56],
"target": 70,
"search_path": "Current State: 70:[64, 50, 12, 56], Operations: []₩nExploring Operation: 50+12=62, Resulting Numbers: [64, 56, 62]₩nGenerated Node #0,0: 70:[64, 56, 62] Operation: 50+12=62₩nMoving to Node #0,0₩nCurrent State: 70:[64, 56, 62], Operations: ['50+12=62']₩nExploring Operation: 56+62=118, Resulting Numbers: [64, 118]₩nGenerated Node #0,0,0: 70:[64, 118] Operation: 56+62=118....생략₩nExploring Operation: 62+8=70, Resulting Numbers: [70]₩n70,70 equal: Goal Reached₩n",

Reinforcement algorithm

REINFORCE Leave-One-Out (RLOO)

PPO 의 문제점

- 계산 비용: PPO는 일반적으로 생성자, 참조 모델(KL 추정을 위한 모델), 비평 모델, 보상 모델 등 최대 4개의 모델을 동시에 학습해야 하며, 생성자와 비평 모델의 학습은 번갈아 가며 진행됩니다(Schulman et al., 2017)

- Optimization Challenge: 온라인 RL 최적화는 불안정하고 민감한 특성을 가지며, PPO 알고리즘은 상대적으로 복잡하기 때문에 이를 효과적으로 조정하려면 전문적인 지식이 필요합니다(Engstrom et al., 2020).[5]

Why RLOO?

- 가장 기본적인 정책 경사 알고리즘인 바닐라 정책 경사 REINFORCE(Sutton and Barto, 2020)는 모든 데이터셋과 기본 모델 조합에서 승률 기준으로 PPO보다 3.2%에서 20.3%까지 꾸준히 더 높은 성능을 보였습니다.

- modeling partial sequences 은 LLM 선호도 학습에 불필요한 작업임을 효과적으로 입증하였으며 대신 전체 세대를 모델링하면 RL 단계의 복잡성을 줄이면서 성능을 유지할 수 있고, 학습 속도도 크게 향상됩니다.

- RLOO는 노이즈와 KL 페널티에 대한 민감도가 상대적으로 낮습니다

[5] Ahmadian, Arash, et al. "Back to Basics: Revisiting REINFORCE-Style Optimization for Learning from Human Feedback in LLMs." ACL. 2024.

State, action, reward Design

State

RLHF 의 일반적인 State

- x=(x1,x2,⋯,xn) 는 토크나이즈된 prompt sequence

$$\text{State at step } t = s_t = x_t$$

→ State는 고정된 컨텍스트,
즉 Prompt 자체.

Action

정책 모델이 prompt x를 보고 생성하는 토큰 시퀀스 전체가 Action이다.

정책확률은 다음과 같다.

$$\pi_\theta(y \mid x) = \prod_{t=1}^{m} \pi_\theta(y_t \mid x, y_{<t})$$

토큰 레벨이 아니라 sample 단위 action을 사용한다는 것이 RLOO의 중요한 특징.

Reward

RLOO는 reward model 또는 rule-based function을 이용해 답변 전체에 대한 scalar reward를 부여한다.

여기서는 rule-base function 을 이용하여 리워드를 생성함.

RLOO 는 한 프롬프트에 K 개의 리워드를 생성해 평균을 내 사용.

$$b_i = \frac{1}{K-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} r_j$$

Reward design

Rule-based Reward

- 수학 문제 등의 정답이 정해져 있는 문제에서는 리워드 모델을 굳이 사용할 필요 없이 Rule-Based Fucntion 이 잘 동작함
- 포매팅 Reward, 계산과정 Reward, 최종 정답여부 Reward 를 주는 형식으로 함수를 디자인.

1. Fomatting Reward

프롬프트에서 Target 파싱이 정확한지?

```
re.search(r"nums:\s*\[([\d,\s]+)\],\s*target:\s*(\d+)", prompt)
```

Completions 에서 <Think>...</think>수식 포맷이 정확한지?

```
pattern = r"^<think>([\s\S]*?)</think>\s*([\s\S]*?)$"
completion_content = completion[0]["content"]

has_think = re.match(pattern, completion_content)
```

정확하면 +10, 틀리면 -5

2. Accuracy Reward

계산 결과가 Target 과 일치하는지?

```
try:
    final_val = eval(clean)
    if abs(final_val - target_val) < 1e-5:
        reward += 20.0  # 정답 맞히면 큰 점수
    else:
        reward -= 0.5  # 틀리면 감점
 except:
        # 수식 파싱 에러 (괄호 짝 안맞음 등)
        reward -= 3.0
```

Experiments Setup

실험환경

Hardware 요구사항

CPU: Intel 12th Gen i5 12 core
RAM: 32GB
GPU: NVIDIA RTX 5090 32GB
cuda driver: 12.8

Software 요구사항

OS: Ubuntu 24.04
cuda-toolkit: 12.8
python 3.12
torch: 2.8.0
flash-attention2: 2.8.3

Base Model

Qwen3-0.6B-Base[6] 모델을 베이스 모델로 사용한다.

Inference Engine

vllm 을 이용하여 Test 진행

Metric

Pass@1 Accuracy

- 최종 답변의 계산결과가 실제로 Target 과 일치하는 비율

Format Compliance

- “<Think>추론과정</Think>/₩수식“ 형식과 생성된 형식이 일치하는 비율

Process Validity

- 탐색 중 중간 계산 과정이 수학적으로 오류가 발생하는 비율

[6] https://huggingface.co/Qwen/Qwen3-0.6B-Base, Qwen3, Alibaba Qwen Team

Experiments Setup

Hyperparameter Setting

RLOO 하이퍼파라미터

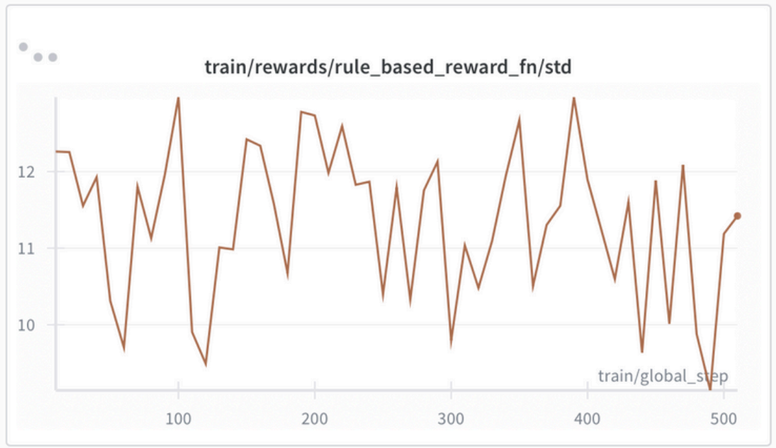
num_train_epochs=1
learning_rate=1e-6,
num_generations=4, # RLOO 리워드 계산을 위한 Sample K 개수
KL Coefficient: 0.05 # Default
per_device_train_batch_size=1,
gradient_accumulation_steps=8, # 스탭 당 8개 배치로 학습
gradient_checkpointing=True,

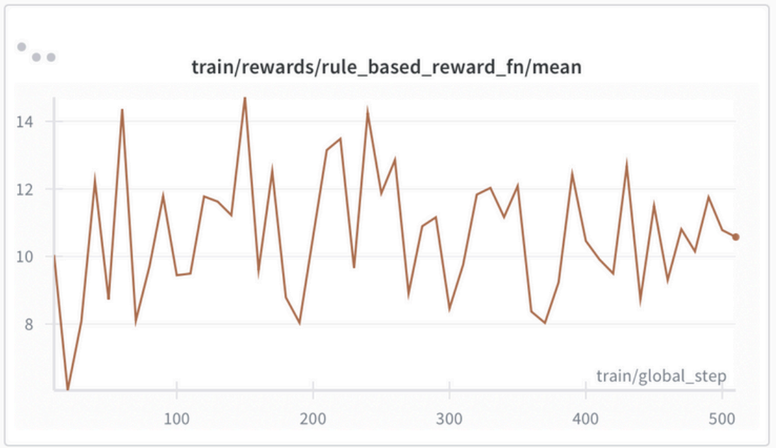
max_prompt_length=512, # 입력(질문) 길이 제한
max_completion_length=4096, # 생성(답변) 길이 제한

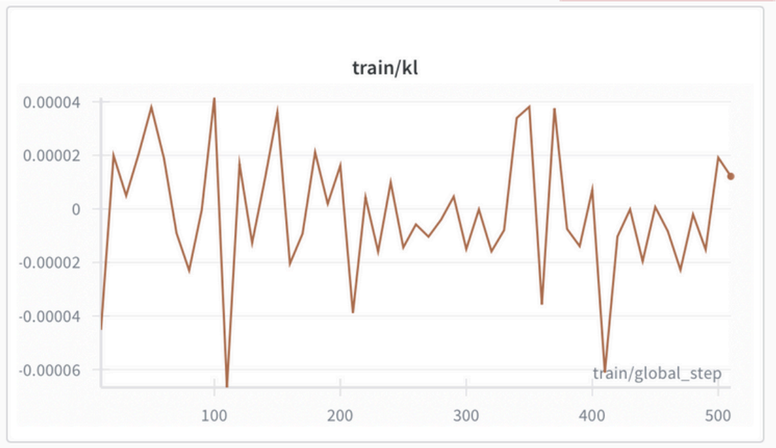
use_vllm=True,
vllm_mode="colocate", # vllm 추론과 학습을 하나의 GPU 에서 수행

Experiments Result

훈련과정







- 리워드의 Mean 이 조금씩 올라가는 것으로 볼 수 있지만 std 표준편차는 크게 좁혀지지 않음.
- 샘플간의 리워드 차이가 매우 큰걸로 보임
- KL 은 크게 변화 없이 기존 SFT 모델에서 크게 변화하지는 않고 안정적임

Experiments Result

Model Evaluation

Metric 평가

550 개의 Countdown 4 문제를 이용해서 평가를 진행

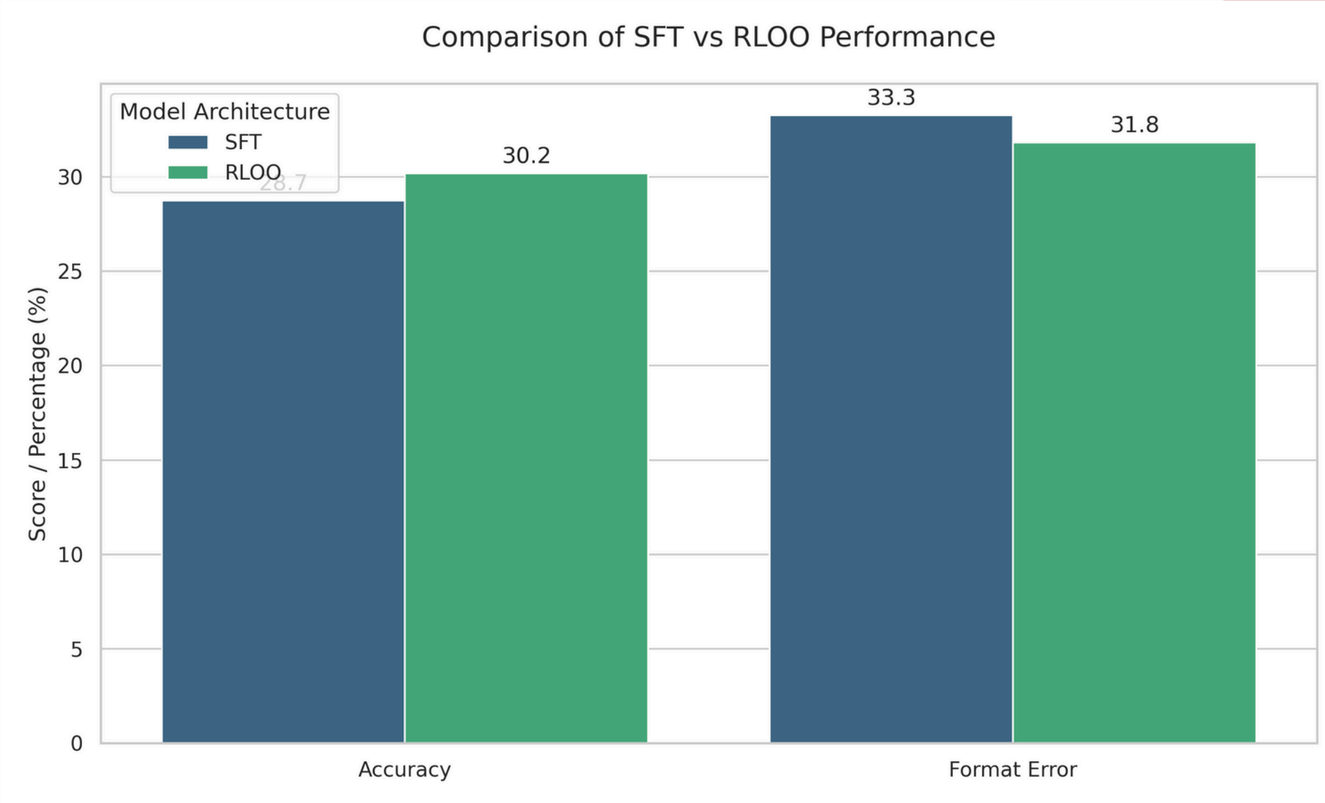
포맷 에러 개수
- SFT: 183
- RLOO: 175

으로 8건이 감소하였다

정답을 맞춘 개수
- SFT: 158
- RLOO: 166

으로 역시 8건이 증가하다.

약 5000건 정도의 RLOO Alignment 로 정답률을
약 5.2% 의 상승률을 달성하였으며, 포맷팅 에러는 4.7%
의 감소율을 보여주었다.



Experiments Result

Generate Example: Base vs SFT vs RLOO

Base 와는 크게 차이나지만 SFT-RLOO 차이가 크게 나지는 않는 것을 볼 수 있다.
대부분의 경우는 동일한 답변을 생성

Base

45 + 53 + 40 + 27 = 165 ⚙️

토의 및 결과

Discussion

01

RLOO 의 장점

PPO, GRPO 등의 actor-critic 기반 알고리즘에 비해 저렴한 비용과 훈련 세팅이 간편하고, 리워드 모델 대신 간단한 함수로만으로도 훈련이 된다는 점

해당 장점은 수학, 과학 등의 태스크에서 유리함

02

실험의 한계점

초기 SFT 부터 정확하지 않은 지시문으로 학습이 진행되어서 실제 Think 과정과 정답이 다른 경우가 발생

Base 모델인 Qwen3-0.6B 모델의 한계

시간과 자원의 한계로 RLHF 를 더 오랜 시간을 들여 훈련하였으면 효과가 있었을 것 같고, 다양한 하이퍼 파라미터를 세팅하여 비교하지 못하여 알고리즘의 효과성을 충분히 입증하지 못함

03

후속 연구

CoT, 추론과 관련된 다른 연구를 찾아보면 더 효율적인 Alignment 알고리즘도 존재함(APA, STAR 등)

또한 에이전틱 전략을 사용하는 Tool Calling, Multi Agent 시스템 등이 높은 성능을 보여 해당 전략들의 혼합 필요