Chapter 5 Class

coop711

2015-10-26

5. 역행렬

5.1 역행렬의 정의

(i) 두 행렬 $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

```
(A1 <- matrix(c(2, 3, 5, 8), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    5
## [2,]    3    8
```

```
(L1 <- matrix(c(8, -3, -5, 2), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    8   -5
## [2,]   -3    2
```

```
L1 %*% A1
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
A1 %*% L1
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

(ii) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, L_2^* = \begin{bmatrix} 4 & 15 & 4 \\ 7 & 25 & 6 \end{bmatrix}$.

```
(A2 <- matrix(c(1, -1, 3, 1, 0, -1), 3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    1
## [2,]   -1    0
## [3,]    3   -1
```

```
(L2 <- matrix(c(1, 2, 3, 5, 1, 1), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    3    1
## [2,]    2    5    1
```

```
(L2.2 <- matrix(c(4, 7, 15, 25, 4, 6), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    4   15    4
## [2,]    7   25    6
```

```
L2 %*% A2
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
L2.2 %*% A2
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

(iii) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $LA_3 = I$ 를 만족하는 L은 존재하지 않으나, $A_3R = I$ 를 만족하는 R은 존재.
$R = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

```
(A3 <- matrix(c(0, 0, 3, 2, 7, 5), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    3    7
## [2,]    0    2    5
```

```
R <- matrix(c(4, 5, -2, 8, -7, 3), 3)
A3 %*% R
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

역행렬의 정의

- $L\,A = A\,L = I$, L 은 주어진 A 에 대하여 유일할 때, L 을 A의 역행렬(inverse matrix)라 정의, A^{-1} 로 표시함.
  - A의 역행렬 A^{-1} 이 존재하면, $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$ 가 항상 성립.
  - $A^{-1}A$ 와 $A\,A^{-1}$ 이 가능하기 위해서는 두 행렬 A 와 A^{-1} 의 차수가 같아야만 함. 이는 A 와 A^{-1} 가 같은 차수의 정방행렬이어야 함을 의미.

5.2 역행렬의 계산

- $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$, 여기서 c_{ij} 는 원소 a_{ij} 의 여인자.
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$에 대하여 첫번째 열에 있는 원소들의 여인자를 계산하면,
  - 1의 여인자 : $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 5 \times 10 - 6 \times 8 = 2,$
  - 4의 여인자 : $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(2 \times 10 - 3 \times 8) = 4,$
  - 7의 여인자 : $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 5 = -3.$
- 위의 여인자들과 각 열에 있는 원소들과의 곱을 취하면,
  - $1 \times (2) + 4 \times (4) + 7 \times (-3) = -3 = |A|,$
  - $2 \times (2) + 5 \times (4) + 8 \times (-3) = 0,$
  - $3 \times (2) + 6 \times (4) + 10 \times (-3) = 0.$
- 두번째 열에 있는 원소들의 여인자는,
  - 2의 여인자 : $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(4 \times 10 - 6 \times 7) = 2,$
  - 5의 여인자 : $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 10 - 3 \times 7 = -11,$
  - 8의 여인자 : $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(1 \times 6 - 3 \times 4) = 6.$
- 이들과 각 열에 있는 원소들과의 곱을 취하면,
  - $1 \times (2) + 4 \times (-11) + 7 \times (6) = 0,$
  - $2 \times (2) + 5 \times (-11) + 8 \times (6) = -3 = |A|,$
  - $3 \times (2) + 6 \times (-11) + 10 \times (6) = 0.$

- 끝으로 세번째 열에 있는 원소들의 여인자는,
    - 3의 여인자 : $(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 8 - 5 \times 7 = -3,$
    - 6의 여인자 : $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-1)(1 \times 8 - 2 \times 7) = 6,$
    - 10의 여인자 : $(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 4 = -3.$
- 이들과 각 열에 있는 원소들과의 곱을 취하면,
    - $1 \times (-3) + 4 \times (6) + 7 \times (-3) = 0,$
    - $2 \times (-3) + 5 \times (6) + 8 \times (-3) = 0,$
    - $3 \times (-3) + 6 \times (6) + 10 \times (-3) = -3 = |A|.$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ 의 원소들을 그들의 여인자들로 대체하여 얻는 행렬은 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.
    - 이 행렬의 전치행렬에 $|A|^{-1} = -(1/3)$ 을 곱하면,
    - $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ 을 얻고, 이를 A 의 왼쪽에서 곱하면,
    - $-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 이 행렬은 $LA = I$ 뿐 아니라 $AL = I$ 또한 만족하여 A^{-1} 라고 할 수 있음.

```
(A4 <- matrix(c(1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 10), 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
## [3,]    7    8   10
```

```
(L4 <- matrix((-1/3)*c(2, 2, -3, 4, -11, 6, -3, 6, -3), 3))
```

```
##            [,1]      [,2] [,3]
## [1,] -0.6666667 -1.333333    1
## [2,] -0.6666667  3.666667   -2
## [3,]  1.0000000 -2.000000    1
```

```
L4 %*% A4
```

```
##      [,1]         [,2] [,3]
## [1,]    1 8.881784e-16    0
## [2,]    0 1.000000e+00    0
## [3,]    0 0.000000e+00    1
```

```
round(L4 %*% A4, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
A4 %*% L4
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

Step 1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 에 대하여 c_{ij} 를 a_{ij} 의 여인자라 하면,

Step 2. $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ 는 여인자로 구성된 행렬

Step 3. $C^t = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$ 는 C의 전치 행렬로 A의 adjoint matrix라 함.

Step 4. C^t를 $|A|$ 로 나눠줌으로써 A 의 역행렬 A^{-1} 을 구하게 됨.

$$A^{-1} = |A|^{-1} C^t = |A|^{-1} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

R을 이용한 소행렬식과 여인자의 계산

```
minor <- function(A, i, j){
  det(A[-i, -j, drop=FALSE])
}
cofactor <- function(A, i, j){
  (-1)^(i+j)*minor(A, i, j)
}
adjoint <- function(A){
  n <- nrow(A)
  t(outer(1:n, 1:n, Vectorize(
    function(i, j) cofactor(A, i, j))))
}
minor(A4, 1, 1)
```

```
## [1] 2
```

```
minor(A4, 2, 1)
```

```
## [1] -4
```

```
minor(A4, 3, 1)
```

```
## [1] -3
```

```
minor(A4, 1, 2)
```

```
## [1] -2
```

```
minor(A4, 2, 2)
```

```
## [1] -11
```

```
minor(A4, 3, 2)
```

```
## [1] -6
```

```
minor(A4, 1, 3)
```

```
## [1] -3
```

```
minor(A4, 2, 3)
```

```
## [1] -6
```

```
minor(A4, 3, 3)
```

```
## [1] -3
```

```
cofactor(A4, 1, 1)
```

```
## [1] 2
```

```
cofactor(A4, 2, 1)
```

```
## [1] 4
```

```
cofactor(A4, 3, 1)
```

```
## [1] -3
```

```
cofactor(A4, 1, 2)
```

```
## [1] 2
```

```
cofactor(A4, 2, 2)
```

```
## [1] -11
```

```
cofactor(A4, 3, 2)
```

```
## [1] 6
```

```
cofactor(A4, 1, 3)
```

```
## [1] -3
```

```
cofactor(A4, 2, 3)
```

```
## [1] 6
```

```
cofactor(A4, 3, 3)
```

```
## [1] -3
```

```
adjoint(A4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    4   -3
## [2,]    2  -11    6
## [3,]   -3    6   -3
```

```
adjoint(A4)/det(A4)
```

```
##            [,1]      [,2] [,3]
## [1,] -0.6666667 -1.333333    1
## [2,] -0.6666667  3.666667   -2
## [3,]  1.0000000 -2.000000    1
```

```
(adjoint(A4)/det(A4)) %*% A4
```

```
##               [,1]          [,2]          [,3]
## [1,]  1.000000e+00 -3.552714e-15 -3.552714e-15
## [2,]  1.776357e-15  1.000000e+00 -3.552714e-15
## [3,] -8.881784e-16 -1.776357e-15  1.000000e+00
```

```
round((adjoint(A4)/det(A4)) %*% A4, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
solve(A4)
```

```
##            [,1]      [,2] [,3]
## [1,] -0.6666667 -1.333333    1
## [2,] -0.6666667  3.666667   -2
## [3,]  1.0000000 -2.000000    1
```

```
round(solve(A4) %*% A4, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

예제 5.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

```
(A5 <- matrix(c(2, 3, 5, 9), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    5
## [2,]    3    9
```

```
det(A5)
```

```
## [1] 3
```

```
(C5 <- matrix(c(9, -3, -5, 2), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    9   -5
## [2,]   -3    2
```

```
C5/det(A5)
```

```
##      [,1]       [,2]
## [1,]    3 -1.6666667
## [2,]   -1  0.6666667
```

```
(C5/det(A5)) %*% A5
```

```
##               [,1] [,2]
## [1,]  1.000000e+00    0
## [2,] -2.220446e-16    1
```

```
round((C5/det(A5)) %*% A5, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
adjoint(A5)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    9   -5
## [2,]   -3    2
```

```
adjoint(A5)/det(A5)
```

```
##      [,1]       [,2]
## [1,]    3 -1.6666667
## [2,]   -1  0.6666667
```

```
(adjoint(A5)/det(A5)) %*% A5
```

```
##               [,1]         [,2]
## [1,]  1.000000e+00 5.329071e-15
## [2,] -4.440892e-16 1.000000e+00
```

```
round((adjoint(A5)/det(A5)) %*% A5, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
solve(A5)
```

```
##      [,1]       [,2]
## [1,]    3 -1.6666667
## [2,]   -1  0.6666667
```

```
solve(A5) %*% A5
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
round(solve(A5) %*% A5, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

예제 5.2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(A6 <- matrix(c(2, 1, -2, -1, 3, 4, 3, 4, 1), 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   -1    3
## [2,]    1    3    4
## [3,]   -2    4    1
```

```
det(A6)
```

```
## [1] 13
```

```
adjoint(A6)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  -13   13  -13
## [2,]   -9    8   -5
## [3,]   10   -6    7
```

```
adjoint(A6)/det(A6)
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -1.0000000  1.0000000 -1.0000000
## [2,] -0.6923077  0.6153846 -0.3846154
## [3,]  0.7692308 -0.4615385  0.5384615
```

```
(adjoint(A6)/det(A6)) %*% A6
```

```
##               [,1]         [,2]          [,3]
## [1,]  1.000000e+00 0.000000e+00  0.000000e+00
## [2,] -3.330669e-16 1.000000e+00 -1.276756e-15
## [3,] -4.440892e-16 4.440892e-16  1.000000e+00
```

```
round((adjoint(A6)/det(A6)) %*% A6, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
solve(A6)
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -1.0000000  1.0000000 -1.0000000
## [2,] -0.6923077  0.6153846 -0.3846154
## [3,]  0.7692308 -0.4615385  0.5384615
```

```
solve(A6) %*% A6
```

```
##                   [,1] [,2]          [,3]
## [1,]  1.000000e+00    0 -8.881784e-16
## [2,] -3.330669e-16    1 -4.440892e-16
## [3,]  2.220446e-16    0  1.000000e+00
```

```
round(solve(A6) %*% A6, digits = 4)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

5.3 역행렬의 존재조건과 성질

5.3.1 역행렬의 존재조건

(i) A^{-1} 은 A 가 정방행렬인 경우에 존재

(ii) A^{-1} 는 $|A| \neq 0$ 일 때만 존재. (nonsingular matrix)

5.3.2 역행렬의 성질

(i) $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$.

- $A\,P = I$를 만족하는 또다른 P가 있다고 하자. $A\,P = I$의 양변의 좌측에 A^{-1} 을 곱하면 $A^{-1}A\,P = A^{-1}I$. $A^{-1}A = I$ 이므로 $I\,P = A^{-1}$, 즉 $P = A^{-1}$ 가 되어 $A\,A^{-1} = I$ 가 성립.

(ii) A^{-1} 은 유일.

- $S\,A = I$ 라 가정. 양변 우측에 A^{-1} 을 곱하면, $S\,A\,A^{-1} = I\,A^{-1} = A^{-1}$. (i)로부터 $A\,A^{-1} = I$ 이므로, $S\,A\,A^{-1} = S\,I = S$. 따라서 $S = A^{-1}$.

(iii) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

- $1 = |I| = |A\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$

(iv) A^{-1} 은 정칙행렬(nonsingular)

- A^{-1} 는 A 가 정칙일 때 존재. 즉, $|A| \neq 0$. (iv)에 따라 $|A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$. 따라서 A^{-1} 은 정칙행렬.

(v) A^{-1} 의 역행렬은 A. 즉, $(A^{-1})^{-1} = A$.

- $A\,A^{-1} = I$ 의 양변 우측에 $(A^{-1})^{-1}$ 을 곱하면 $A\,A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I\,(A^{-1})^{-1}$. 여기서 좌변은 $\left(A\,A^{-1}\right)(A^{-1})^{-1} = A\,\left(A^{-1}(A^{-1})^{-1}\right) = A$. 따라서, $A = I\,(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

(vi) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

- $A\,A^{-1} = I$ 의 양변을 전치시키면 $(A\,A^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t = I$. 따라서 $(A^{-1})^t$ 는 A^t 의 역행렬.

(vii) $A^t = A$ 이면 $(A^{-1})^t = A^{-1}$

- 바로 앞의 (vi) 에서 $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ 이므로 A^{-1} 도 대칭.

(viii) A^{-1} 과 B^{-1} 이 존재하면 $(A\ B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- $(B^{-1}A^{-1})(A\ B) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I\ B = B^{-1}B = I$. 양변 우측에 $(A\ B)^{-1}$ 을 곱하면 $(A\ B)(A\ B)^{-1} = I$ 이므로 $B^{-1}A^{-1} = (A\ B)^{-1}$.
- $(A_1A_2 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

5.4 간단하고 특별한 경우의 역행렬

(a) 차수가 2인 정방행렬의 역행렬

- $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix}$ 에 대하여 $|A| = ab - xy$, $C = \begin{bmatrix} b & -y \\ -x & a \end{bmatrix}$. 따라서 $A^{-1} = \frac{1}{ab-xy}\begin{bmatrix} b & -x \\ -y & a \end{bmatrix}$. (단, $ab - xy \neq 0$ 일 때)

(b) 대각행렬

- $(D\{x_i\})^{-1} = D\{1/x_i\}$

예제 5.3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
(diag(c(2, 4, 3)))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    0
## [2,]    0    4    0
## [3,]    0    0    3
```

```
solve(diag(c(2, 4, 3)))
```

```
##      [,1] [,2]      [,3]
## [1,]  0.5 0.00 0.0000000
## [2,]  0.0 0.25 0.0000000
## [3,]  0.0 0.00 0.3333333
```

```
(solve(diag(c(2, 4, 3)))) %*% diag(c(2, 4, 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

(c) I 와 J 행렬

$$(a\ I_n + b\ J_n)^{-1} = \frac{1}{a}(I_n - \frac{b}{a+n\ b}J_n)$$

(d) 직교행렬

$PP^t = I$. 양변 좌측에 P^{-1} 을 곱하면 $P^{-1} = P^t$. 이 식의 양변 우측에 P 를 곱하면 $P^{-1}P = P^tP = I$. 즉, 직교행렬의 열들은 정직교.

(i) 직교행렬 P 는 정방행렬

(ii) $|P| = \pm 1$

(iii) $PP^t = I$ 라는 의미에서 P 의 행들은 정직교

(iv) $P^tP = I$ 라는 의미에서 P 의 열들도 정직교.

예제 5.3

$$P = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix}$$

```
(P <- (1/15)*matrix(c(5, -10, 10, -14, -5, 2, 2, -10, -11), 3))
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,]  0.3333333 -0.9333333  0.1333333
## [2,] -0.6666667 -0.3333333 -0.6666667
## [3,]  0.6666667  0.1333333 -0.7333333
```

```
t(P)
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,]  0.3333333 -0.6666667  0.6666667
## [2,] -0.9333333 -0.3333333  0.1333333
## [3,]  0.1333333 -0.6666667 -0.7333333
```

```
det(P)
```

```
## [1] 1
```

```
P %*% t(P)
```

```
##              [,1]          [,2]          [,3]
## [1,] 1.000000e+00  2.775558e-17  0.000000e+00
## [2,] 2.775558e-17  1.000000e+00 -5.551115e-17
## [3,] 0.000000e+00 -5.551115e-17  1.000000e+00
```

```
round(P %*% t(P), digits = 2)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
solve(P)
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,]  0.3333333 -0.6666667  0.6666667
## [2,] -0.9333333 -0.3333333  0.1333333
## [3,]  0.1333333 -0.6666667 -0.7333333
```

자료 저장

```
save.image("chapter_5_class.rda")
```