chapter_3_class

coop711

2015년 9월 21일

특정한 형태의 행렬

기본적인 행렬

영행렬(null matrix)

- 모든 원소가 0인 행렬
    - $A = B$ 이면 $A - B = \phi$

```
(A1 <- matrix(c(2, 3, 6, 0, -4, 1), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    6   -4
## [2,]    3    0    1
```

```
(B1 <- matrix(c(2, 3, 6, 0, -4, 1), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    6   -4
## [2,]    3    0    1
```

```
(C1 <- matrix(c(2, 2, 6, 0, -4, 1), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    6   -4
## [2,]    2    0    1
```

```
A1 - B1
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    0    0
```

정방행렬(square matrix)

- 행렬의 차수(`dim`)가 $r \times c$일 때, $r = c$이면, 정방행렬

```
(A2 <- matrix(c(3, 1, -2, 4, 0, 6, 4, 2, 5, -3, 0, 10, -4, 5, 12, 6), 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    3    0    5   -4
## [2,]    1    6   -3    5
## [3,]   -2    4    0   12
## [4,]    4    2   10    6
```

```
diag(A2)
```

```
## [1] 3 6 0 6
```

```
dim(A2)
```

```
## [1] 4 4
```

대각행렬(diagonal matrix)

- 정방행렬에서 모든 비대각원소가 0일 때, 즉 $i \neq j$인 모든 $i,\ j$에 대하여, $a_{ij} = 0$.

```
(A3 <- diag(c(3, 5, -4, 7)))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    3    0    0    0
## [2,]    0    5    0    0
## [3,]    0    0   -4    0
## [4,]    0    0    0    7
```

상삼각행렬(upper triangular matrix)

- 대각원소의 아래에 있는 모든 원소가 0, 즉 $i > j$인 모든 $i,\ j$에 대하여, $a_{ij} = 0$.

```
(A4 <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 3, -1, 3, 0, 4, 2, 0, 5), 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    2    3    4
## [2,]    0    0   -1    2
## [3,]    0    0    3    0
## [4,]    0    0    0    5
```

```
Matrix::isTriangular(A4)
```

```
## [1] TRUE
## attr(,"kind")
## [1] "U"
```

하삼각행렬(lower triangular matrix)

- 대각원소의 dnl에 있는 모든 원소가 0, 즉 $i < j$인 모든 $i,\ j$에 대하여, $a_{ij} = 0$.

```
(A5 <- matrix(c(1, 3, 0, 2, 0, -2, 0, 3, 0, 0, 3, -1, 0, 0, 0, 5), 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0    0
## [2,]    3   -2    0    0
## [3,]    0    0    3    0
## [4,]    2    3   -1    5
```

```
Matrix::isTriangular(A5)
```

```
## [1] TRUE
## attr(,"kind")
## [1] "L"
```

항등행렬(identity matrix)

- 대각원소의 값이 모두 1인 대각행렬. R에서 n 차원의 항등행렬은 `diag(n)` 으로 표시함.
    - 임의의 행렬 A에 대하여 곱셈이 가능하면, $AI = IA = A$가 성립.

```
(I3 <- diag(3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
3*I3
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0    0
## [2,]    0    3    0
## [3,]    0    0    3
```

대칭행렬(symemtric matrix)

- $A = a_{ij}$에서 $i \neq j$인 모든 $i,\ j$에 대하여 $a_{ij} = a_{ji}$이면 대칭행렬.
    - $A = A^t$ 일 때, A는 대칭행렬.

```
(R <- matrix(c(3.5, 0.6, 2.1, 0.6, 4.5, 1.9, 2.1, 1.9, 6.8), 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  3.5  0.6  2.1
## [2,]  0.6  4.5  1.9
## [3,]  2.1  1.9  6.8
```

대칭행렬들의 곱

- $A = A^t$, $B = B^t$일 경우, $(AB)^t = B^tA^t = BA$, $AB = BA$일 때만 AB가 대칭행렬임.

```
(A6 <- matrix(c(1, 2, 2, 3), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    2
## [2,]    2    3
```

```
(B6 <- matrix(c(3, 7, 7, 6), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    3    7
## [2,]    7    6
```

```
A6 %*% B6
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   17   19
## [2,]   27   32
```

```
t(A6 %*% B6)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   17   27
## [2,]   19   32
```

```
B6 %*% A6
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   17   27
## [2,]   19   32
```

$A\,A^t$와 A^tA의 성질

- 어떤 행렬과 그 전치와의 곱은 항상 존재하며 대칭.
  - $(A\,A^t)^t = (A^t)^t A^t = A\,A^t$, $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$
  - A가 정방행렬인 경우에만 두 행렬 $A\,A^t$와 A^tA가 같은 차수를 가짐.

```
(A7 <- matrix(c(1, 3, 2, 0, -1, 1), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2   -1
## [2,]    3    0    1
```

```
A7 %*% t(A7)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    6    2
## [2,]    2   10
```

```
t(A7) %*% A7
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   10    2    2
## [2,]    2    4   -2
## [3,]    2   -2    2
```

- $A\,A^t$의 $\{i,\ j\}$원소들은 A의 i번째 행과 j번째 행의 내적.
    - 즉, A의 차수가 $r \times c$일 때, $\{A\,A^t\}_{ij} = \sum_{k=1}^{c} a_{ik}a_{jk}$.
    - $A\,A^t$의 i번째 대각원소들은 i번째 행의 원소들을 제곱하여 합한 것, $\{A\,A^t\}_{ii} = \sum_{k=1}^{c} a_{ik}^2$
- 임의의 실수행렬 A에 대하여 $A^tA = 0$이면 $A = 0$이다.
- 임의의 실수행렬 A에 대하여 $tr(A^tA) = 0$이면 $A = 0$이다.
- 실수행렬 P, Q, X에 대하여 곱셈이 가능하다면,
    - $P\,X\,X^t = Q\,X\,X^t$이면, $P\,X = Q\,X$이다.

벡터들의 곱

- 두 벡터의 외적은 반드시 대칭이 되는 것은 아님.
    - 차수가 같은 두 벡터의 외적은 정방행렬이나 대칭일 필요는 없으며, 차수가 다른 두 벡터의 외적은 정방행렬조차 아님.

```
(x1 <- matrix(c(1, 0, 2), 3))
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    0
## [3,]    2
```

```
(y1 <- matrix(c(2, 2, 1), 3))
```

```
##      [,1]
## [1,]    2
## [2,]    2
## [3,]    1
```

```
(z1 <- matrix(c(3, 2), 2))
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    2
```

```
x1 %*% t(y1)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    2    1
## [2,]    0    0    0
## [3,]    4    4    2
```

```
y1 %*% t(x1)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    0    4
## [2,]    2    0    4
## [3,]    1    0    2
```

```
t(y1 %*% t(x1))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    2    1
## [2,]    0    0    0
## [3,]    4    4    2
```

```
x1 %*% t(z1)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    3    2
## [2,]    0    0
## [3,]    6    4
```

```
z1 %*% t(x1)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0    6
## [2,]    2    0    4
```

외적의 합

- a_j가 A의 j번째 열, b_j^t가 B의 j번째 행,
  - $A\,B = \sum_{j=1}^{c} a_j b_j^t$.

```
(A8 <- matrix(1:6, 3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    4
## [2,]    2    5
## [3,]    3    6
```

```
(B8 <- matrix(7:10, 2, byrow = TRUE))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    7    8
## [2,]    9   10
```

```
A8 %*% B8
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   43   48
## [2,]   59   66
## [3,]   75   84
```

```
# A8[, 1] %*% B8[1, ]
# A8[, 2] %*% B8[2, ]
A8[, 1] %*% B8[1, , drop = FALSE]
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    7    8
## [2,]   14   16
## [3,]   21   24
```

```
A8[, 2] %*% B8[2, , drop = FALSE]
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   36   40
## [2,]   45   50
## [3,]   54   60
```

```
A8[, 1] %*% t(B8[1, ]) + A8[, 2] %*% t(B8[2, ])
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   43   48
## [2,]   59   66
## [3,]   75   84
```

- $A\,A^t$은 A의 각 열과 그 자신의 외적들의 합.

```
(A9 <- matrix(1:6, 2, byrow=TRUE))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
```

```
t(A9)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    4
## [2,]    2    5
## [3,]    3    6
```

```
A9 %*% t(A9)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   14   32
## [2,]   32   77
```

```
A9[, 1] %*% t(A9[, 1])
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    4
## [2,]    4   16
```

```
A9[, 2] %*% t(A9[, 2])
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    4   10
## [2,]   10   25
```

```
A9[, 3] %*% t(A9[, 3])
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    9   18
## [2,]   18   36
```

```
A9[, 1] %*% t(A9[, 1]) + A9[, 2] %*% t(A9[, 2]) + A9[, 3] %*% t(A9[, 3])
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   14   32
## [2,]   32   77
```

기초벡터(elementary vector)

- 차수가 n인 항등행렬 $I_n = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i^t$, e_i는 I_n의 i번째 열.
- $E_{ij} = e_i e_j^t$: $(i,\ j)$번째 원소만이 1이고 나머지는 0인 행렬
- $I_n = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}$
- $e_i^t A = a_i^t$는 A의 i번째 행. $A\ e_j = a_j$는 j번째 열.

```
(A10 <- matrix(c(2, 5, 3, 7), 2))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    3
## [2,]    5    7
```

```
(e2 <- matrix(0:1, 2))
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    1
```

```
t(e2) %*% A10
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    5    7
```

```
A10[2, ]
```

```
## [1] 5 7
```

```
A10 %*% e2
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    7
```

```
A10[, 2, drop = FALSE]
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    7
```

모든 원소가 같은 행렬

- 합벡터(summing vector) : 모든 원소가 1.

```
(one.4 <- matrix(rep(1, 4), 4))
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    1
## [3,]    1
## [4,]    1
```

```
(x11 <- matrix(c(3, 6, 8, -2), 4))
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    6
## [3,]    8
## [4,]   -2
```

```
t(one.4) %*% x11
```

```
##      [,1]
## [1,]   15
```

```
t(x11) %*% one.4
```

```
##      [,1]
## [1,]   15
```

```
(one.3 <- matrix(rep(1, 3), 3))
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
## [2,]    1
## [3,]    1
```

```
(X12 <- matrix(c(2, -5, 4, -1, -3, 5), 3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2   -1
## [2,]   -5   -3
## [3,]    4    5
```

```
t(one.3) %*% X12
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    1
```

- 합 벡터와 자신의 내적은 벡터의 차수
    - 합 벡터들의 외적은 모든 원소가 1인 행렬
    - $1_3\ 1_2^t = J_{3\times 2}$
    - $J_n = 1_n\ 1_n^t$ => $J_n^2 = n\ J_n$.
    - $\bar{J_n} = \frac{1}{n}\ J_n$ => $\bar{J_n}^2 = \bar{J_n}$.
    - $C_n = I_n - \bar{J_n} = I_n - \frac{1}{n} J_n$ => $C = C^t = C^2, C\ 1 = 0, C\ J = J\ C = 0$.
- $x^t = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$에 대하여 적용.
    - $\bar{x} = \frac{1}{n} 1^t x$
    - $x^t C = x^t - \bar{x}\ 1^t = \{x_i - \bar{x}\}$
    - $x^t C\ x = x^t x - n\ \bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

멱등행렬(idempotent matrix)

- 정방행렬 K에 대하여 $K^2 = K$를 만족하면 멱등행렬.
    - $I - K$도 멱등행렬, $K - I$는 아님.
    - $C_n = I_n - \frac{1}{n} J_n$은 멱등행렬.
    - $AGA = A$를 만족하는 G에 대해서 GA는 멱등행렬. (일반화역행렬)
- $A^2 = 0$이면 멱영행렬(nilpotent matrix)
- $A^2 = I$이면 멱항행렬(unipotent matrix)

```
(A13 <- matrix(c(1, 2, -1, 2, 4, -2, 5, 10, -5), 3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    5
## [2,]    2    4   10
## [3,]   -1   -2   -5
```

```
(B13 <- matrix(c(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 3, 2, -1, 0, 5, -4, 0, 1), 4))
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    3    5
## [2,]    0    1    2   -4
## [3,]    0    0   -1    0
## [4,]    0    0    0    1
```

```
A13 %*% A13
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    0    0
## [2,]    0    0    0
## [3,]    0    0    0
```

```
B13 %*% B13
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    1    0    0   10
## [2,]    0    1    0   -8
## [3,]    0    0    1    0
## [4,]    0    0    0    1
```

직교행렬(orthogonal matrix)

정직교벡터

- x의 norm : $\parallel x \parallel = \sqrt{x^t x}$
  - 정규벡터 : norm이 1인 벡터. $u = \frac{x}{\parallel x \parallel}$ 는 항상 정규벡터

```
x14 <- c(2, 4, 3, 1)
# norm(x14, "F")
norm(matrix(x14, 4), "F")
```

```
## [1] 5.477226
```

```
x14^2
```

```
## [1]  4 16  9  1
```

```
sum(x14^2)
```

```
## [1] 30
```

```
sqrt(sum(x14^2))
```

```
## [1] 5.477226
```

- 같은 차수의 벡터 x, y에 대하여 $x^t y = 0$일 때, x, y는 서로 직교.

```
(x15 <- c(1, 2, 2, 4))
```

```
## [1] 1 2 2 4
```

```
(y15 <- c(6, 3, -2, -2))
```

```
## [1]  6  3 -2 -2
```

```
x15 %*% y15
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
```

- 두 정규벡터가 직교할 때 그 두 벡터를 정직교벡터라 함. $u^u = 1, v^t v = 1, u^v = 0$.

```
(u16 <- 1/6*c(1, 1, 3, 3, 4))
```

```
## [1] 0.1666667 0.1666667 0.5000000 0.5000000 0.6666667
```

```
(v16 <- c(-0.1, -0.9, -0.1, -0.1, 0.4))
```

```
## [1] -0.1 -0.9 -0.1 -0.1  0.4
```

```
u16 %*% u16
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
```

```
v16 %*% v16
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
```

```
u16 %*% v16
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
```

- 정직교집합 : 집합에 있는 모든 벡터들이 정규벡터이고, 서로 다른 벡터끼리 직교.
    - 행렬 $P_{r \times c}$의 행들이 정직교집합을 이룰 때, 정직교행들을 가진다고 함. 이 때 $P\,P^t = I_r$ 성립. 역이 항상 성립하지는 않음.

```
(P17 <- matrix(c(1, 0, 0, 1, 0, 0), 2))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
```

```
P17 %*% t(P17)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1    0
## [2,]    0    1
```

```
t(P17) %*% P17
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    0
```

- 직교행렬 : 행렬 P가 정방행렬이며, 정직교 행과 정직교 열을 가짐. P는 정방행렬이고, $P\,P^t = I$, $P^t P = I$.
    - 두 직교행렬 A와 B의 곱 $A\,B$도 직교행렬

```
(P18 <- 1/sqrt(6)*matrix(c(sqrt(2), sqrt(3), 1, sqrt(2), -sqrt(3), 1, sqrt(2), 0,
-2), 3))
```

```
##           [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.5773503  0.5773503  0.5773503
## [2,] 0.7071068 -0.7071068  0.0000000
## [3,] 0.4082483  0.4082483 -0.8164966
```

```
round(t(P18) %*% P18, digits=5)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

```
P18 %*% t(P18)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    0    0    1
```

2차 형식(quadratic forms)

- 2차 형식 : $x^t A x$

양(반)정치 행렬(positive (semi)definite matrix)

- $x \neq 0$인 모든 벡터 x에 대하여 $x^t A\ x > 0$일 때 행렬 A는 양정치 행렬.
- $x \neq 0$인 모든 벡터 x에 대하여 $x^t A\ x >= 0$이고, 어떤 $x \neq 0$에 대하여 $x^t A\ x = 0$일 때 행렬 A는 양반정치 행렬. $C = I - \frac{1}{n} J$: 양반정치 행렬
    - 같은 값을 갖는 항상 대칭인 행렬 A를 찾을 수 있음. $\frac{1}{2}(A + A^t)$.

자료 저장

```
save.image("chapter_3_class.rda")
```