기말고사

학번______________ 이름________________

2016-12-01

1.(30점) 세 개의 벡터 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$a_1 \vec{u} + a_2 \vec{v} + a_3 \vec{w} = \vec{b}$ 를 만족하는 a_1, a_2, a_3 를 구하라.

(a) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

(c) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.(20점) 다음 벡터들 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{x_4}$에 대하여 물음에 답하라.

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} -13 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{x_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$ 는 선형종속임을 증명하라. 또한 이것들 사이의 선형관계를 구하라.

(b) $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_4}$ 는 선형독립임을 증명하라. 또한 이것들의 선형결합, $a_1\overrightarrow{x_1} + a_2\overrightarrow{x_2} + a_3\overrightarrow{x_4}$ 이 $\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 이 되도록 하는 계수를 찾아라.

3.(10점) 다음 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix}$ 가 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 로 나타나는 P 와 Q 가

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 임을 보이고, $A_{p\times q} = K_{p\times r}L_{r\times q}$ 의 형태로 나타내라.

단, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 임을 이용하라.

4.(10점) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ 의 고유값과 고유벡터를 계산하고 대각화하시오.

5.(10점) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$의 LU 분해가 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$로 계산됨을 보이시오.

6.(10점) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$의 일반화역행렬을 최대계수 정방 부분행렬을 이용하여 계산하라.

7.(10점) 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$를 삼각행렬의 곱으로 나타내시오.