3.3 기본행렬 및 A^{-1}를 구하는 방법

Elementary Matrices; A Method for Finding A^{-1}

$$AB = BA = I_n$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I \mid A^{-1}]$$

RREF

기본 행렬 (Elementary Matrices)

- 기본 행 연산 (ERO; Elementary row operation)
  1. 두 행을 서로 바꾼다
  2. 한 행에 영이 아닌 상수를 곱한다
  3. 한 행의 스칼라 배수를 다른 행에 더한다

- 기본 행렬: 항등 행렬 (Identity matrix)에 한 번의 기본 행 연산을 수행하여 얻은 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 정리 3.3.1: A가 m×n 행렬이고, 기본행렬 E는 m×m 항등행렬에 어떤 행 연산을 실행하여 얻어졌다면, 곱 EA는 A에 같은 행연산을 수행하여 얻어지는 행렬이다.

ERO(A) = EA

- 예제 1: 행렬 곱셈으로 행 연산 수행

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad ERO: 4R_1 + R_3 \to R_3$$

  - 기본행렬 E를 구하라.
  - 풀이:

$$\text{ERO}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4R_1 + R_3 \to R_3$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 점검해 보면,

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 12 & 12 \end{bmatrix} = \text{ERO}(A)$$

기본행렬을 항등행렬로 복구

- 기본행렬은 가역행렬이다. E^{-1}=?
- 직접 행 연산의 역 연산(inverse operation)

E를 얻는 I에의 행연산	I를 얻는 E에의 행연산
i행에 $c \neq 0$를 곱하라.	i행에 $1/c$를 곱하라.
i행과 j행을 서로 바꾸라.	i행과 j행을 서로 바꾸라.
i행의 c배를 j행에 더하라.	i행의 $-c$배를 j행에 더하라.

- 예제 2. 기본행렬에서 항등행렬 복구

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

둘째 행에 7을 곱하라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

첫째 행과 둘째 행을 서로 바꾸라.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

둘째 행의 5배를 첫째 행에 더하라.

- 정리 3.3.2: 기본행렬은 가역행렬이며, 그 역행렬도 역시 기본행렬이다.
  - 증명:
    - E가 기본 행렬이면 I에 어떤 행 연산을 실행하여 얻어진 행렬이다.
    - E_0를 I에 역 행연산을 실행하여 얻어진 행렬이라 하자.
    - 정리 3.3.1, 행연산과 그 역 행연산은 상쇄 효과를 갖는다는 것을 이용하면 $EE_0=I$이고 $E_0E=I$이다.
    - 따라서 E_0는 E의 역행렬이다.

가역성의 특성화

- 가역성, 기약 행 사다리꼴, 기본 행렬 사이의 관계

- 정리 3.3.3: A가 n×n행렬일 때, 다음 명제는 동치이다. 즉 모두 참이거나 모두 거짓이다.
  (a) A의 기약 행 사다리꼴(RREF)은 I_n이다.
  (b) A는 기본행렬의 곱으로 쓸 수 있다.
  (c) A는 가역 행렬이다.
  - 증명: **행렬의 역원을 찾는 일반적인 방법....**

행 동치 (Row Equivalence)

- 행렬 A에 유한번의 기본행연산을 실행하여 행렬 B를 얻을 수 있다면,
  - 다음을 만족시키는 기본행렬 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 이 존재한다.

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = B$$

  - 기본행렬은 가역행렬이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$$

  - A에서 B를 얻은 연산의 역연산을 역순으로 실행하면, B로부터 A를 복구할 수 있다.

- 유한 번의 기본행연산을 실행하여 얻을 수 있는 행렬들은 서로 행 동치(row equivalence) 이다.

- 정리 3.3.4: A와 B가 같은 크기의 정방 행렬이면 다음은 동치이다.
  (a) A와 B는 행 동치이다.
  (b) B=EA를 만족시키는 가역 행렬 E가 존재한다.
  (c) A=FB를 만족시키는 가역 행렬 F가 존재한다.
  - 증명: k개의 기본행렬을 곱해서.. $E_k \cdots E_2 E_1 A = B$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} B$$

역 행렬로 바꾸는 반전 알고리즘(inverse algorithm)

- 역 행렬 구하는 알고리즘
  - 행렬 A로부터 I를 얻을 때 실행한 기본 행 연산에 대응하는 기본 행렬을 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 라 하자.

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

  - 역행렬을 구하면,

$$A^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1})^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$$

$$[A \mid I] \Longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

RREF

- **반전알고리즘:** 가역행렬 A의 역행렬을 찾으려면, A를 I로 변형시키는 기본행연산들의 수열을 찾고, I에 같은 행연산을 실행하여 A^{-1}을 얻는다.

- 예제 3. 반전알고리즘 적용

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

  - 역행렬을 구하라.
  - 풀이 :
    - 행 연산을 이용하여 A를 I로 변환하고, 같은 연산을 I에 실행하여 A^{-1}를 얻으려 한다.
    - 동시에 수행하는 방법 : A와 I를 붙여 새로운 행렬 [A | I]를 만들고, 행 연산을 이용하여 새로운 행렬의 A부분을 I로 변환시키면 I부분은 A^{-1}가 된다.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

첫 행에 −2를 곱하여 둘째 행에 더하고 첫 행에 −1을 곱하여 셋째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

둘째 행에 2를 곱하여 셋째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

셋째 행에 −1을 곱한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

셋째 행에 3을 곱하여 둘째 행에 더하고 셋째 행에 −3을 곱하여 첫째 행에 더한다.

RREF

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

비가역 행렬에 반전알고리즘을 적용하면..

- 예제 4. 반전 알고리즘은 특이 행렬인 경우 계산 과정에서 나타난다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

  - 풀이 :

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

첫 행에 −2를 곱하여 둘째 행에 더하고 첫 행을 셋째 행에 더한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

둘째 행을 셋째 행에 더한다.

왼쪽에서 영인 행이 나왔기 때문에 *A*는 가역행렬이 아니다.

- 비가역 행렬에 반전 알고리즘을 적용하면 도중에 **성분이 모두 0인 행이 왼쪽에 나타난다**

행렬 반전에 의한 선형계 풀기

- 선형계의 행렬 방정식 표현

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \iff \boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

계수행렬, $n \times n$ 　 미지수 n개 　 상수 n개

- 방정식의 개수와 미지수의 개수가 같은 경우만 다룬다. (A가 정방행렬)
  - A가 가역 행렬이면, 다음과 같이 유일 해가 구해진다.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

- 정리 3.3.5: Ax=b가 n개의 미지수에 관한 n개의 방정식으로 이루어진 선형계이고, 계수행렬 A가 가역행렬이면 선형계는 유일한 해 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 를 갖는다.

- 예제 5. 행렬 반전에 의한 선형계 풀기

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

- 풀이:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- 반전알고리즘을 이용한 역행렬 (예제 3)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

- 선형계의 해는

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$$

- 정리 3.3.9: A가 $n \times n$ 행렬일 때 다음 명제는 동치이다.
  - (a) A의 RREF는 I_n이다.
  - (b) A는 기본행렬의 곱으로 쓸 수 있다.
  - (c) A는 가역행렬이다.
  - (d) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$은 오직 자명한 해(trivial solution)만을 갖는다.
  - (e) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 해를 갖는다.
  - (f) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 오직 한 개의 해만을 갖는다.

- 증명:

공통 계수행렬을 갖는 다선형계 풀기

- 여러 개의 선형계

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k \qquad [A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_k]$$

- $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_k$를 A에 붙여 만든 붙인행렬을 만들고, 기약행사다리꼴로 전환시켜, 가우스-조단(Gauss-Jordan)소거로 푼다.

- 예제 7. 가역 계수 행렬을 갖는 동차계

선형계(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

선형계(b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 \qquad + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

- 선형계의 해는?
- 풀이:

$$[A : \mathbf{b}_1 : \mathbf{b}_2] = \left[\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{GJ}} \text{RREF} = \left[\begin{array}{ccc:c:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

- 선형계 (a)의 해: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$
- 선형계 (b)의 해: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$

선형계 해가 항상 존재할까?

3.3.10 해의 존재성 문제: 행렬 A가 주어졌을 때 선형계 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$가 해를 갖게 되는 모든 벡터 $\mathbf{b}$를 구하라.

- A가 $n \times n$ 가역행렬이면 선형계 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 해를 갖는다.
- A가 정사각행렬이 아니거나, 정사각행렬이지만 가역행렬이 아니면, 선형계는 대체로 어느 벡터에 대해서는 해를 갖지만 다른 벡터에 대해서는 해를 갖지 않게 된다.

- 참고: 선형계 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$는 적어도 한 개의 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 항상 해를 갖는다. 왜?

예제 8. Gauss 소거에 의한 해 존재성 문제 풀기

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 \quad\;\; + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- 위의 선형계가 해를 갖기 위한 b_1, b_2, b_3의 조건은 ?
- 풀이:
  - 붙인 행렬 $[A:\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{array}\right]$
  - 기약행사다리꼴로 변환

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

첫 행의 −1배를 둘째 행에 더하고 첫 행의 −2를 셋째 행에 더한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$$

둘째 행에 −1을 곱한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

둘째 행을 셋째 행에 더한다.

- 셋째행으로부터

$\boxed{b_3 - b_2 - b_1 = 0}$ 또는 $b_3 = b_1 + b_2$ 이다

- 따라서, Ax=b가 해를 가질 필요충분조건은...

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ax=b가 해를 갖게 되는 R^3에서 벡터들의 집합은 두벡터 (1,0,1)과 (0,1,1)의 일차결합으로 구성된 부분공간이다.
- 이 공간은 원점과 점 (1,0,1), (0,1,1)을 지나는 평면이다.