

Politechnika Warszawska

W Y D Z I A Ł M A T E M A T Y K I
I N A U K I N F O R M A C Y J N Y C H



Praca dyplomowa magisterska

na kierunku Matematyka

w specjalności Matematyka w Naukach Technicznych

Teoretyczna i numeryczna analiza wybranych zagadnień brzegowych
dla równań mechaniki płynów

Kamil Wołos

Numer albumu 252001

promotorzy

prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński

dr hab. inż. Jacek Szumbariski, prof. PW

WARSZAWA 2019

.....

podpis promotora

.....

podpis autora

Streszczenie

Teoretyczna i numeryczna analiza wybranych zagadnień brzegowych dla równań mechaniki płynów.

Naszym celem jest analiza specjalnego rodzaju warunków brzegowych stworzonych w celu symulacji fragmentów przepływów np. w układzie krwionośnym i oddechowym. Skupimy się przede wszystkim na matematycznej poprawności proponowanych warunków. Następnie opiszemy metodę dyskretyzacji niestacjonarnego układu Stokesa wyposażonego we wspomniane warunki. Na koniec pokażemy wyniki symulacji i podkreślimy efekty wynikające z założonych warunków brzegowych.

Słowa kluczowe: Stokes, niestacjonarny, dziedzina X , przepływ, analiza numeryczna, istnienie, jednoznaczność, regularność.

Klasyfikacja AMS: 34M40, 35Q35, 35Q68, 35Q92, 65M60, 76D03, 76Z05

Abstract

Theoretical and numerical analysis of selected boundary conditions for fluid mechanics equations.

Our aim is to analyse special type of boundary conditions created to simulate flows in cardiovascular and respiratory systems. Firstly, we will focus of mathematical correctness of proposed conditions. Next, we will describe method of discretisation of a Stokes system equipped with mentioned conditions. Finally we will show results of simulations and highlight effects following from assumed boundary conditions.

Keywords: Stokes, unsteady, X-junction, flow, numeric analysis, existence, uniqueness, regularity.

AMS Classification: 34M40, 35Q35, 35Q68, 35Q92, 65M60, 76D03, 76Z05

Warszawa, dnia

Oświadczenie

Oświadczam, że pracę magisterską pod tytułem „Teoretyczna i numeryczna analiza wybranych zagadnień brzegowych dla równań mechaniki płynów.”, której promotorami są prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński, dr hab. Jacek Szumbariski, prof. PW, wykonałem samodzielnie, co poświadczam własnoręcznym podpisem.

.....

Podziękowania

Praca ta nie mogłaby powstać, gdyby nie osoby, które chciałbym wymienić z imienia i nazwiska. Bardzo dziękuję Dziekanowi Konstantemu Junosza-Szaniawskiemu za umożliwienie pisania tej pracy u dwóch promotorów, w tym jednego spoza Wydziału. Dziękuję profesorowi Krzysztofowi Chełmińskiemu i profesorowi Jackowi Szumbarskiemu za bezcenne wsparcie i cierpliwość podczas tworzenia tej pracy. Podziękowania kieruję również na ręce kolegi Przemka Kosewskiego za nieocenioną pomoc, zwłaszcza przy rozdziale czwartym.

Kamil Wołos

Spis treści

Wstęp	11
1. Podstawy matematyczne	13
1.1. Pojęcia wstępne	13
1.2. Oznaczenia i konwencje zapisu	17
1.3. Pojęcie miary – miara Lebesgue’a, funkcje mierzalne	18
1.4. Całka Lebesgue’a	20
1.5. Przestrzeń funkcyjna	21
1.6. Podstawowe nierówności	25
1.7. Twierdzenia o przejściach granicznych	26
1.8. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych.	26
2. Metody Analizy Funkcjonalnej	27
2.1. Dalsze własności przestrzeni Banacha i Hilberta	27
2.2. Operatory liniowe oraz funkcjonały. Słaba zbieżność	28
2.3. Własności słabych zbieżności	29
2.4. Twierdzenie o włożeniu	30
2.5. Ślady	31
2.6. Przestrzeń Bochnera	32
3. Podstawy mechaniki płynów. Wyprowadzenie zagadnienia.	35
3.1. Elementy mechaniki płynów	35
3.2. Wprowadzenie do rozpatrywanego zagadnienia na podstawie przepływu powietrza w płucach	40
3.3. Zagadnienie stacjonarne	41
3.4. Zagadnienie niestacjonarne	44
3.5. Interpretacja fizyczna postawionego zagadnienia niestacjonarnego	45
4. Istnienie i regularność rozwiązania zagadnienia	46
4.1. Zagadnienie Stokesa z niestacjonarnym warunkiem brzegowym	46

4.2.	Przestrzeń rozwiązań	48
4.3.	Pozostałe założenia i definicja słabego rozwiązania	50
4.4.	Rezultat	51
5.	Metody numeryczne dla postawionego problemu	62
5.1.	Algorytm	62
5.2.	Założenia symulacji	66
5.3.	Przegląd kodu realizującego algorytm	70
5.4.	Wyniki i testy	79
6.	Podsumowanie	85

Wstęp

„*Panta rhei*”

Heraklit z Efezu

Modelowanie matematyczne złożonych układów dla równań mechaniki płynów odgrywa bardzo ważną rolę we współczesnym świecie. Umożliwia przede wszystkim bezinwazyjne symulowanie zachowania się przepływu, zmniejsza istotnie koszty badań oraz jest o wiele szybsze pod względem otrzymywania wyników niż konwencjonalne metody (tzn. budowa fizycznego układu).

Na początku musimy zaproponować model, który osiągamy na drodze empirycznych, dostępnych już przez nas danych, czy też na podstawie znanych nam praw zachowawczych i fizycznych. Kolejnym etapem jest sprawdzenie poprawności pod względem matematycznym: czy posiada on (słabe) rozwiązanie i czy jest ono wyznaczone w sposób jednoznaczny. Po sprawdzeniu, czy model jest dobrze zdefiniowany możemy przejść do symulacji. Istnienie rozwiązania daje nam pewność, że metody numeryczne, których używamy aproksymują nam rozwiązanie.

Częstą praktyką jest pomijanie drugiego kroku z poprzedniego akapitu, to znaczy szczegółowej analizy matematycznej modelu. Rozbieżność pomiędzy światem teoretycznej i praktycznej mechaniki płynów zauważył noblista Cyryl Hinshelwood, który powiedział: *Mechanika płynów została zdominowana przez inżynierów od samego początku, co spowodowało niefortunny podział - między dziedziną hydrauliki, gdzie obserwujemy zjawiska, których nie można (matematycznie) wyjaśnić, a teoretyczną mechaniką płynów wyjaśniającą zjawiska, których nie można zaobserwować*¹.

Częstym problemem, z jakim borykają się inżynierzy w zagadnieniach modelowania jest wielkość dziedziny. Niekiedy możliwości obliczeniowe przekraczają zakres rozpatrywanego układu. Dzieje się tak na przykład, gdybyśmy chcieli rozważać sieć respiracyjną. Z drugiej strony interesować nas może jedynie jej mały fragment.

Remedium na to może być rozważanie układu z odpowiednio postawionymi warunkami brzegowymi tak, żeby płyn płynął jak w całej dziedzinie. Warunki te znane w literaturze jako *open/*

¹M.J. Lighthill (1956), "Physics of gas flow at very high speeds", Nature, 178 (4529): 343, Bibcode:1956Natur.178..343., doi:10.1038/178343a0 Report on a conference

dissipative zostały przedstawione i opisane np. w podręczniku Maury’ego [7].

Celem niniejszej pracy magisterskiej jest połączenie dwóch tych światów – od długiego i wyczerpującego wstępu teoretycznego, po wyprowadzenie zagadnienia aż po analizę matematyczną i numeryczną.

Skupimy się na modelu przepływowym niestacjonarnego układu równań Stokesa ze zmodyfikowanymi przez prof. Jacka Szumbarskiego warunkami brzegowymi typu *open/ dissipative*, z którym możemy się zapoznać szczegółowo w preprincie [10].

Pierwszy rozdział stanowi uporządkowanie pojęć znanych w większości zarówno inżynierom jak i matematykom. Wiedzę tę poszerzamy do istotnych dla nas definicji powiązanych z teorią miary czy algebrą liniową. Wprowadzamy przestrzenie funkcyjne i ich podstawowe własności oraz krótko objaśniamy sens definicji z praktycznego punktu widzenia.

Drugi rozdział poświęcony jest zaawansowanym zagadnieniom metod analizy funkcjonalnej w równaniach różniczkowych cząstkowych. W rozdziale tym przytaczamy niezbędne twierdzenia i definicje, których będziemy używać w rozdziale czwartym.

W trzecim rozdziale wyprowadzamy rozważane zagadnienie, zaczynając od podstaw mechaniki płynów oraz uzasadniając, dlaczego zagadnienie ma taką postać.

Czwarty rozdział poświęcony jest dowodowi istnienia i jednoznaczności rozwiązania wyprowadzonego zagadnienia w przypadku, gdy znane są wszystkie ciśnienia w dalekim polu.

W piątym rozdziale, na podstawie [10] przedstawiamy metody numeryczne dla układu. Przedstawiamy implementację zagadnienia w pakiecie FEniCS, a także przeprowadzamy wstępne symulacje i analizę związaną z zależnością kroku czasowego a nieściśliwością cieczy czy zależnością od parametrów.

Rozdział 1

Podstawy matematyczne

1.1 Pojęcia wstępne

Terminologia używana przez matematyków i inżynierów jest w zasadzie podobna, z dokładnością do drobnych różnic w nomenklaturze niektórych pojęć. Jeżeli takowe będą się pojawiać, wyraźnie to zaznaczymy.

Podstawowym językiem, jakiego używamy do opisu jest język analizy funkcjonalnej. Rozważmy podstawowe pojęcia, których będziemy używać w matematycznych dowodach istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnień.

Przez X będziemy rozumieli przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych, zaś jej elementy będziemy nazywać *wektorami*.

Definicja 1.1. Przestrzeń liniowa X jest nazywana *przestrzenią unormowaną*, jeżeli istnieje odwzorowanie $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$, takie, że:

- (i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ dla wszystkich $x, y \in X$ (nierówność trójkąta/ podaddytywności).
- (ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ dla wszystkich $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ (warunek dodatniej jednorodności).
- (iii) $\|u\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$ (warunek niezdegenerowania).

Odtąd przez X rozumiemy unormowaną przestrzeń liniową. Sama norma jest pewnego rodzaju uogólnieniem pojęcia *długości wektora*, znanego z rzeczywistych przestrzeni euklidesowych.

Każda przestrzeń unormowana jest również *metryzowalna*. Oznacza to, że pomiędzy dwoma elementami danej przestrzeni możemy określić *odległość*. Metryka ta jest indukowana przez normę i wyraża się następującym wzorem:

$$\text{dla każdego } f, g \in X : \quad d(f, g) = \|f - g\|.$$

W zagadnieniach aproksymacyjnych bardzo często mówimy o *zbieżności* danego ciągu (należącego do pewnej szczególnej przestrzeni liniowej) do rozwiązania zagadnienia.

Definicja 1.2. Ciąg $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ jest *zbieżny* do $u \in X$, jeżeli:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0.$$

Piszemy wtedy:

$$u_k \rightarrow u.$$

Następne dwa pojęcia pozwolą nam na wprowadzenie definicji *przestrzeni Banacha*. Przestrzenie te umożliwią wyodrębnienie pewnych klas przestrzeni, które będą nam towarzyszyły przy rozdziale poświęconym *istnieniu* i *regularności* rozwiązań.

Definicja 1.3. Ciąg $\{u_k\} \subset X$ jest nazywany *ciągiem Cauchy'ego* jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon > 0$ taki, że:

$$\|u_k - u_l\| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } k, l > N_\varepsilon.$$

Definicja 1.4. Mówimy, że przestrzeń X jest *przestrzenią zupełną*, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny do pewnego elementu $u \in X$.

Ciągi Cauchy'ego dają nam użyteczne kryterium związane ze zbieżnością w przestrzeniach zupełnych. Jest ono niezależne od samej granicy ciągu, a jedynie zależy od jego wyrazów.

Definicja 1.5. Przestrzeń X jest *przestrzenią Banacha*, jeżeli jest liniowa, unormowana i zupełna.

W nieco dalszych rozdziałach pracy będziemy wykorzystywali metodę Galerkiną, służącą do przybliżania rozwiązań danego zagadnienia. Na potrzeby tej metody będziemy budować tzw. *bazy ortogonalne*. Musimy zwrócić uwagę na fakt, że wiele przestrzeni, które będziemy wykorzystywać, jest nieskończenie wielowymiarowych, więc zasadniczym pytaniem jest, jak wyglądają bazy takich przestrzeni?

Sama ortogonalność na tych przestrzeniach mówi nam o uogólnionym pojęciu prostopadłości pomiędzy wektorami, czyli o pewnym szczególnym związku związanym z ich położeniem. Żeby określić relacje pomiędzy wektorami, które nam pomogą w zdefiniowaniu tego związku, wprowadźmy definicję *iloczynu skalarnego*.

1.1. POJĘCIA WSTĘPNE

Niech H będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych.

Definicja 1.6. Odwzorowanie $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy nazywać *iloczynem skalarnym*, o ile:

- (i) $(u, v) = (v, u)$ dla każdego $u, v \in H$,
- (ii) odwzorowanie $u \mapsto (u, v)$ jest liniowe dla każdego $v \in H$
tzn. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$ oraz $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$ dla każdego $u, u_1, u_2, v \in H, \lambda \in \mathbb{R}$,
- (iii) $(u, u) \geq 0$ dla wszystkich $u \in H$,
- (iv) $(u, u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$.

Jeżeli dla pewnych wektorów $u, v \in H$ zachodzi $(u, v) = 0$, to mówimy, że wektory te są *ortogonalne* względem siebie.

Przestrzeń H , na której można określić iloczyn skalarny jest unormowana. Jest to spowodowane faktem istnienia tzw. *normy stowarzyszonej* z iloczynem skalarnym, która wyraża się wzorem:

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)}, \quad \text{gdzie } u \in H.$$

Zachodzi ponadto bardzo użyteczna dla nas *nierówność Cauchy'ego-Szwartza*:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad \text{gdzie } u, v \in H.$$

Nierówność tę jak i definicję normy stowarzyszonej będziemy bardzo często wykorzystywali przy przejściach w nierównościach, w których będziemy wykazywali, że odpowiednie czynniki równania są ograniczone w danej normie.

Widzimy zatem, że przestrzenie, na których określony jest iloczyn skalarny, mogą mieć wiele użytecznych dla nas własności. Dlatego wprowadzamy definicję *przestrzeni Hilberta*:

Definicja 1.7. *Przestrzenią Hilberta* będziemy nazywali każdą przestrzeń liniową zupełną z iloczynem skalarnym.

Z powyższego wynika, że każda przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha. Przestrzenie Hilberta będziemy oznaczali przez H .

Tak jak wspomnieliśmy wcześniej, pojęcie iloczynu skalarnego umożliwia nam mówienie o ortogonalności wektorów. Ścisłe związana z tym pojęciem jest *ortonormalność*.

Przypomnijmy, że:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq j \\ 1 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Definicja 1.8. Rodzinę wektorów $\{u_j\}_{j \in J} \subset H$, gdzie J jest zbiorem indeksów, nazywamy:

- (i) *układem ortogonalnym*, jeżeli $(u_j, u_i) = 0$ dla każdych $i, j \in J$ takich, że $i \neq j$.
- (ii) *układem ortonormalnym*, jeżeli $(u_j, u_i) = \delta_{i,j}$ dla $i, j \in J$.

Wprowadzimy teraz abstrakcyjne pojęcia *gęstości* i *liniowej gęstości* wektorów w przestrzeniach. Dzięki nim dotrzemy do definicji bazy ortogonalnej.

Definicja 1.9. Rodzina wektorów $\{u_j\}_{j \in J}$ jest *liniowo gęsta* w przestrzeni unormowanej X , jeżeli przestrzeń liniowa generowana przez te wektory jest *gęsta* w X (tzn. dla każdego punktu u należącego do tej przestrzeni istnieje ciąg punktów $u_n \in X$, taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$).

Dzięki temu pojęciu otrzymujemy:

Definicja 1.10. Rodzina wektorów $\{u_j\}_{j \in J} \subset H$ jest nazywana *bazą ortonormalną* (*bazą Hilberta* albo po prostu *bazą*, gdy użycie tej definicji w danym kontekście nie budzi wątpliwości), jeżeli spełnia następujące własności:

- (i) $\{u_j\}_{j \in J} \subset H$ jest układem ortonormalnym.
- (ii) przestrzeń liniowa generowana przez te wektory jest gęsta w H .

W odróżnieniu od bazy ortonormalnej dla przestrzeni skończone wymiarowych, nie dopuszczamy możliwości istnienia niezerowego wektora, który byłby ortogonalny do wszystkich wektorów z danej bazy. Analogicznie w obu przypadkach, dwie różne bazy dla danych przestrzeni (zarówno skończone jak i nieskończone wymiarowych), mają tę samą moc.

Jeżeli $u \in H$ i $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ jest bazą ortonormalną, to:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k,$$

gdzie szereg jest zbieżny w H . Szereg ten nazywamy *szeregiem Fouriera* u względem $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ponadto,

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k)^2.$$

Wprowadźmy jeszcze definicję *przestrzeni domkniętej*.

Definicja 1.11. Mówimy, że X jest domknięta, jeżeli dla dowolnego ciągu $\{x_n\} \in X$ takiego, że $x_n \rightarrow x$ w X , granica $x \in X$.

Budując rozwiązania dla postawionego problemu, będziemy musieli określić odpowiednią przestrzeń, na której będziemy te rozwiązania przybliżać. Z naszego punktu widzenia, istotne jest również zbudowanie bazy, zatem musi być to przestrzeń Hilberta. Z pomocą przychodzi nam następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1.12. Podprzestrznią przestrzeni Hilberta nazywamy jej każdą domkniętą podprzestrzeń liniową.

Więcej podstawowych własności o przestrzeniach Banacha i Hilberta oraz szeregach Fouriera można znaleźć m. in. w podręcznikach Rudina [8] czy Brezisa [2].

1.2 Oznaczenia i konwencje zapisu

W niniejszym podrozdziale wprowadzimy główne oznaczenia, jakich będziemy używali w pracy. Przydadzą się nam już w następnym podrozdziale, gdzie wprowadzimy podstawowe przestrzenie funkcyjne. Zapis oparty jest w głównej mierze na konwencjach stosowanych w [5].

Oznaczenia geometryczne

Na ogół będziemy używać następujących oznaczeń. Gdyby pojawiały się one w innym kontekście, wyraźnie to zaznaczymy.

- (i) \mathbb{R}^n będzie oznaczać n -wymiarową rzeczywistą przestrzeń euklidesową.
- (ii) Ω – otwarty podzbiór przestrzeni \mathbb{R}^n .
- (iii) $\partial\Omega$ – brzeg zbioru Ω . Składowe brzegu $\partial\Omega$ będziemy oznaczać literą Γ .

Operatory różniczkowe

Niech $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Niech $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$. Rozważamy kartezjański układ odniesienia.

- (i) *Gradient* funkcji u definiujemy i oznaczamy następująco:

$$\nabla u = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right].$$

- (ii) *Dywergencję* dla pola wektorowego $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiujemy i oznaczamy:

$$\nabla \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

- (iii) Przez *laplasjan* funkcji u będziemy rozumieć:

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

(iv) na ogół pochodną czasową funkcji u będziemy oznaczali klasycznie $\frac{du}{dt}$. W dowodzie poświęconym istnieniu i jednoznaczności rozwiązania, w celu poprawienia czytelności pracy, będziemy używali również konwencji indeksu dolnego u_t .

Uwaga Operatory (i) – (iii) określamy w kartezjańskim układzie odniesienia. W przypadku innych układów (np. sferycznym, walcowym) postać operatorów zależy od wymiaru oraz użytego układu współrzędnych.

1.3 Pojęcie miary – miara Lebesgue’a, funkcje mierzalne

Postawione zagadnienie na danej dziedzinie często wymaga określenia jej wielkości, długości, objętości. Z pomocą przychodzi nam definicja *miary zbioru*, która taką wielkość określa w ścisłym, matematycznym sensie.

Na początku musimy zdefiniować zbiory, które można zmierzyć. Powodem tego stanu rzeczy jest fakt, że nie zawsze jest możliwe zmierzenie wszystkich podzbiorów danego zbioru względem naszej miary. Z inżynierskiej praktyki jest to raczej bez większego znaczenia, jednak dla poprawnego określenia klas przestrzeni, którymi będziemy się posługiwać jest to zabieg niezbędny. Dlatego na początku wprowadzamy pojęcie σ -ciała.

Definicja 1.13. Rodzinę \mathfrak{M} podzbiorów \mathbb{R}^n nazywamy σ -ciałem, jeżeli:

- (i) $\emptyset \in \mathfrak{M}$,
- (ii) Jeżeli $U \in \mathfrak{M}$ to i $\mathbb{R}^n - U \in \mathfrak{M}$,
- (iii) Jeżeli $U_1, U_2, \dots \in \mathfrak{M}$ to $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \in \mathfrak{M}$.

Poznaliśmy charakterystykę zbiorów, które będziemy chcieli mierzyć. Teraz zdefiniujemy *miarę Lebesgue’a*, analogicznie jak w podręczniku Evansa, [5].

Twierdzenie 1.14. Istnieje σ -ciało \mathfrak{M} podzbiorów \mathbb{R}^n oraz funkcja

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$$

taka, że:

- (i) Każdy podzbiór otwarty \mathbb{R}^n należy do \mathfrak{M} .
- (ii) Jeżeli B jest kulą w \mathbb{R}^n to $|B|$ jest równa n -wymiarowej objętości B .

(iii) Jeżeli $U_1, U_2, \dots \in \mathfrak{M}$ są zbiorami parami rozłącznymi, to

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|$$

(iv) Jeżeli $U \subset V$, gdzie $V \in \mathfrak{M}$ oraz $|V| = 0$, to $U \in \mathfrak{M}$ i $|U| = 0$.

Funkcję zdefiniowaną za pomocą powyższego twierdzenia nazywamy *miarą Lebesgue’a*, zaś zbiory należące do \mathfrak{M} będziemy nazywać *zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue’a*.

Z powyższego twierdzenia, można wywnioskować, że

$$|\emptyset| = 0.$$

Zerowa miara będzie nam umożliwiała charakteryzowanie obiektów, które będziemy ze sobą utożsamiać, np. jeżeli dwie funkcje będą się różniły jedynie na zbiorze zerowej miary, to będziemy je w szczególnych przypadkach traktować jako tą samą funkcję (więcej o tym w podrozdziale poświęconym przestrzeniom funkcyjnym).

Często mówimy też, że jeżeli dana własność zachodzi dla wszystkich punktów z danego zbioru, poza zbiorem zerowej miary Lebesgue’a, to zachodzi *prawie wszędzie*, co oznaczamy p.w..

Mierzalności nie ograniczamy tylko wobec samej dziedziny.

Definicja 1.15. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest *mierzalna*, jeżeli $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}_2$ dla każdego zbioru otwartego $U \in \mathfrak{M}_1$, gdzie \mathfrak{M}_1 – σ -ciało na \mathbb{R}^n natomiast \mathfrak{M}_2 – σ -ciało na \mathbb{R} .

Wprowadźmy teraz uogólnioną definicję *miary*.

Definicja 1.16. *Miarą* nazywamy funkcję $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ taką, że:

1. $\mu(U) \geq 0$ dla każdego $U \in \mathfrak{M}$,
2. $\mu(\emptyset) = 0$,
3. Z faktu, że $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots \in \mathfrak{M}$, oraz dla każdego $k \neq l$, $U_k \cap U_l = \emptyset$ wynika, że

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n).$$

Na potrzeby zdefiniowania rozkładu masy na pewnym obszarze wprowadźmy jeszcze następujące pojęcie:

Definicja 1.17. Mówimy, że miara μ jest *bezwzględnie ciągła* względem miary Lebesgue’a $|\cdot|$, jeżeli:

$$|U| = 0 \Rightarrow \mu(U) = 0.$$

1.4 Całka Lebesgue'a

Całka Lebesgue'a jest uogólnieniem całki Riemmana na klasę zbiorów mierzalnych, zdefiniowanych w poprzedniej sekcji. Wprowadzenie tego pojęcia będzie miało dwa cele:

- Zdefiniowanie przestrzeni funkcyjnych, w których główną rolę grają owe całki.
- Wyjaśnienie, co oznaczają poprawnie określone rozwiązania danego zagadnienia.

Na początku zdefiniujemy całkę Lebesgue'a z funkcji stałej $f(x) = c$ określonej na pewnym zbiorze mierzalnym A . Jest to miara zbioru pomnożona przez wartość funkcji. Wówczas:

$$\int_A f dx = \int_A c dx = c \int_A dx = c|A|.$$

Następnym krokiem będzie określenie całki dla szczególnych funkcji zdefiniowanych na zbiorze mierzalnym A i przyjmujących stałe wartości na jego niezerowych, mierzalnych podzbiorach. W tym celu wprowadźmy poniższe pojęcie.

Funkcją charakterystyczną zbioru A nazywamy funkcję $\chi_A : A \rightarrow \{0, 1\}$ taką, że:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x \in A \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}.$$

Ta szczególna klasa funkcji to *funkcje proste*, czyli funkcje, które można przedstawić za pomocą następującej kombinacji liniowej

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x).$$

dla pewnych współczynników rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n oraz zbiorów mierzalnych $A_1, A_2, \dots, A_n \subset A \in \mathfrak{M}$.

Interesować nas będą nieujemne kombinacje liniowe. Wówczas całka z nieujemnej funkcji prostej wyraża się przez

$$\int_A f dx = \sum_{i=1}^n a_i |A_i|.$$

Żeby wyprowadzić całkę dla dowolnej funkcji prostej, wprowadźmy pojęcia *części dodatniej*

$$f^+ = \max_{x \in A} \{f(x), 0\}$$

i części *ujemnej*

$$f^- = \max_{x \in A} \{-f(x), 0\}.$$

danej funkcji f . Wówczas dla dowolnej funkcji prostej $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, całka wyraża się następującym wzorem:

$$\int_A f \, dx = \int_A f^+ \, dx - \int_A f^- \, dx.$$

Teraz już możemy określić całkę Lebesgue'a dla funkcji mierzalnych. Konstrukcja będzie polegała na aproksymacji naszej funkcji za pomocą funkcji prostych. Podobnie, jak powyżej, określimy ją na początku dla funkcji nieujemnych następującą zależnością:

$$\int_A f \, dx = \sup \left\{ \int_A g \, dx, \text{ gdzie } g \text{ jest funkcją prostą, taką, że } g \leq f \right\}.$$

Całkę Lebesgue'a dla dowolnej funkcji mierzalnej f definiujemy następująco

$$\int_A f \, dx = \int_A f^+ \, dx - \int_A f^- \, dx.$$

Definicja 1.18. Będziemy mówili, że funkcja mierzalna f jest *całkowalna w sensie Lebesgue'a* o ile

$$\int_A |f| \, dx < \infty.$$

Więcej na temat konstrukcji całki Lebesgue'a jak również samej teorii miary można znaleźć podręczniku Birkholca [1], czy Rudina [9].

1.5 Przestrzenie funkcyjne

W poprzednich podrozdziałach zdefiniowaliśmy pojęcia przestrzeni Banacha i przestrzeni Hilberta. W tym zapoznamy się z przykładami owych przestrzeni. Podamy ich definicje oraz podstawowe własności, z których będziemy korzystać w dalszych rozdziałach. Podamy również podstawowe konwencje zapisu poszczególnych norm dla danych przestrzeni. Badanie zagadnień istnienia rozwiązania stawia często przed nami pytania o jego regularność, tzn. „jak rozwiązanie jest dobre, ile razy da się odpowiednio różniczkować/ całkować?”. Dlatego tak bardzo ważna jest dla nas znajomość, do jakiej przestrzeni należą rozwiązania. W poniższych rozważaniach przyjmujemy

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad - \text{zbiór otwarty.}$$

Wprowadźmy na początku pojęcia, które będą przydatne przy definiowaniu przestrzeni:

Definicja 1.19. Nośnikiem funkcji $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$\text{supp } u = \overline{\{x \in \Omega : |u(x)| \neq 0\}}.$$

Definicja 1.20. Będziemy mówili, że funkcja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ma *zwarty nośnik*, jeżeli $\text{supp } u$ jest *zbiorem zwartym* (tzn. jeżeli pokrylibyśmy Ω zbiorami otwartymi, być może nawet ich nieskończoną liczbą, to z każdego takiego pokrycia moglibyśmy wybrać skończoną liczbę zbiorów, żeby nadal pokrywały Ω).

Definicja 1.21. Będziemy mówili, że przestrzeń liniowa X jest *ośrodkowa*, jeżeli zawiera podzbiór przeliczalny, gęsty (nazywany *ośrodkiem*).

Przykłady przestrzeni funkcji ciągłych i różniczkowalnych w sposób ciągły

- (i) $C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ jest ciągła}\}.$

Jeżeli Ω jest zbiorem ograniczonym, to jest to przestrzeń Banacha, z normą:

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

- (ii) $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ jest } k\text{-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły}\}.$

Jest to również przestrzeń Banacha (o ile Ω jest ograniczony). Normę na tej przestrzeni będziemy definiowali tak samo, jak w (i).

- (iii) $C^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy}\}.$

Często przestrzeń tą nazywamy *przestrzenią funkcji gładkich*.

- (iv) $C_c^k(\Omega), C_c^{\infty}(\Omega)$ to przestrzenie funkcyjne zdefiniowane analogicznie jak w poprzednich punktach z dokładnością do tego, że ich elementami są funkcje o zwartym nośniku. Nazywane są często *funkcjami próbnymi*.

Przestrzenie L^p

- (i) Dla $p \in [1, \infty)$:

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a oraz } \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Jak widzimy, w definicji przestrzeni została użyta norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, która wyraża się przez

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jest to przestrzeń Banacha, określająca funkcje całkowalne w p -tej potęgze.

Jeżeli $p = 2$, to $L^p(\Omega)$ jest przestrzenią Hilberta, a iloczyn skalarny możemy określić w następujący sposób

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx.$$

Jeżeli będziemy definiowali iloczyn skalarny na brzegu zbioru Ω (bądź innego brzegu), to będziemy to rozróżniać w następujący sposób:

$$(u, v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} uv \, dx.$$

Przestrzeń $L^p(\Omega)$ dla tak określonych p jest również óśrodkowa. Często zamiast $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ będziemy pisali po prostu $\|\cdot\|_p$. Podobnie, jak w przypadku iloczynu skalarnego, jeżeli będziemy chcieli wyróżnić, że jakaś norma L^p jest określona na brzegu lub szczególnym zbiorze (np. Γ), to będziemy pisali $\|\cdot\|_{p,\Gamma}$.

(ii) $p = \infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a oraz } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty\},$$

gdzie

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \{|u(x)|\}.$$

Wyrażenie po prawej stronie nazywamy *supremum istotnym* i definiujemy je przez

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \{|u(x)|\} = \inf \{a \in \mathbb{R} \mid |x \in \Omega : f(x) > a| = 0\}.$$

(iii) $L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(V) \text{ dla każdego mierzalnego } V \subset \bar{V} \subset \Omega, \bar{V} \text{ zbiór zwarty}\}.$

Podaną przestrzeń nazywamy *przestrzenią funkcji lokalnie całkowalnych z p -tą potęgą*

Uwaga Utożsamiamy ze sobą funkcje należące do $L^p(\Omega)$, które są równe p.w. (tzn. jeżeli u oraz v należą do $L^p(\Omega)$, zaś różnią się tylko na zbiorze zerowej miary, to traktujemy je jako ten sam obiekt). Jest to konieczne do poprawnego zdefiniowania normy na tej przestrzeni.

W celu zdefiniowania *przestrzeni Sobolewa* będziemy potrzebowali definicji *słabej pochodnej*. Szczegółowo wprowadzenie tego obiektu wytłumaczymy w rozdziale poświęconym zdefiniowaniu tzw. *słabego sformułowania problemu* (w inżynierskiej praktyce popularną nazwą jest *zagadnienie wariacyjne*). W modelowaniu numerycznym wykorzystywane jest ono do osłabienia pewnych własności funkcji (np. liczby różniczkowań), dzięki czemu rozwiązanie będziemy mogli aproksymować wielomianami niższego rzędu i zmniejszyć koszt obliczeń numerycznych. Z matematycznego punktu widzenia uzyskamy dostęp do obszernej aparatury analizy funkcjonalnej badającej tego typu układy.

Definicja 1.22. Niech $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Mówimy, że v jest słabą pochodną funkcji u , co zapisujemy

$$D^\alpha u = v,$$

gdzie α jest wielowskaźnikiem, jeżeli dla każdej funkcji $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ zachodzi:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx.$$

Przestrzeń Sobolewa

- (i) Niech $p \in [1, \infty]$, k – nieujemna liczba całkowita. *Przestrzenią Sobolewa* nazywamy przestrzeń oznaczaną przez

$$W^{k,p}(\Omega),$$

złożoną z funkcji lokalnie całkowalnych, takich że dla każdego wielowskaźnika α , takiego, że $|\alpha| \leq k$ istnieje pochodna $D^\alpha u$ w słabym sensie i należy ona do przestrzeni $L^p(\Omega)$. Jest to przestrzeń Banacha z normą określoną w następujący sposób:

- gdy $p \in [1, \infty)$:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{dla każdego } |\alpha| \leq k,$$

- gdy $p = \infty$:

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \{|D^\alpha u(x)|\} \quad \text{dla każdego } |\alpha| \leq k.$$

- (ii) Jeżeli $p = 2$ to przyjęło się oznaczać

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega).$$

Jest to przestrzeń Hilberta z iloczynem skalarnym

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv + \nabla u \nabla v \, dx.$$

- (iii) Jeżeli $p < \infty$ to $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią ośrodkową.

- (iv) Przez $W_0^{k,p}(\Omega)$ rozumiemy domknięcie przestrzeni $C_c^\infty(\Omega)$ w $W^{k,p}(\Omega)$. Oznacza to, że $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, jeżeli istnieją funkcje $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ takie, że $u_m \rightarrow u$ w $W^{k,p}(\Omega)$.

Uwaga Podobnie jak w przypadku przestrzeni $L^p(\Omega)$, będziemy utożsamiać ze sobą funkcje należące do $W^{k,p}(\Omega)$, które są równe p.w..

Szczegółowe wprowadzenie do słabych pochodnych można znaleźć m.in. w podręczniku [5].

1.6 Podstawowe nierówności

Podczas badania zachowania rozwiązania (np. jego regularności) bardzo istotną częścią są szacowania. Z szacowaniami wiąże się wiele ważnych przejść granicznych (choćby twierdzenie Lebesgue'a o zmajorzowanym przejściu pod znakiem całki). Poniżej podamy podstawowe nierówności wykorzystywane w tej pracy.

Nierówność Younga z ε

Niech $1 < p, q < \infty$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q, \quad \text{gdzie } a, b > 0, \varepsilon > 0 \text{ oraz } C(\varepsilon) > 0. \quad (1.1)$$

Jeżeli $p = q = 2$ to powyższą nierówność nazywamy *nierównością Cauchy'ego z ε* .

Nierówność Höldera

Niech $1 \leq p, q \leq \infty$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Niech $u \in L^p(\Omega)$ i $v \in L^q(\Omega)$. Wówczas:

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.2)$$

Nierówność Poincaré

Założmy, że Ω jest zbiorem otwartym i ograniczonym. Niech $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ dla pewnego $1 \leq p < n$.

Wówczas:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (1.3)$$

gdzie $q \in [1, q^*]$, $q^* = \frac{np}{n-p}$, a stała C zależy od p, q, n oraz Ω .

Nierówność Poincaré zachodzi również dla przypadku, gdy $u \in H^1(\Omega)$. Wówczas:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.4)$$

o ile $u = 0$ na Γ , gdzie $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Nierówność Bessela

Niech H będzie przestrzenią Hilberta, natomiast $e_1, e_2, \dots \in H$ układem ortonormalnym.

Wówczas dla każdego $u \in H$ zachodzi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2. \quad (1.5)$$

Wiele użytecznych nierówności wraz z ich dowodami można znaleźć w podręczniku Evansa [5].

1.7 Twierdzenia o przejściach granicznych

W tej sekcji podamy podstawowe dwa twierdzenia dotyczące przejścia z granicą pod znak całki. Na ogół nie jest to niestety możliwe. Często jednak zdarza się, że dany ciąg znajduje się pod znakiem całki, więc przejście (np. do dokładnego rozwiązania) jest wręcz niezbędne. Musimy zatem poznać warunki, kiedy można je wykonać.

Twierdzenie 1.23. (Leviego-Lebesgue’a o zbieżności monotonicznej) Jeżeli ciąg $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, gdzie $u_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ jest monotonicznie rosnącym ciągiem funkcji całkowalnych oraz nieujemnych, to wówczas:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n dx.$$

Twierdzenie 1.24. (Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej) Jeżeli ciąg funkcji mierzalnych u_n jest zbieżny prawie wszędzie (poza zbiorem zerowej miary) do funkcji u na pewnej przestrzeni X , oraz istnieje pewna funkcja całkowalna g taka, że nierówność $|u_n| \leq g$ jest spełniona p.w., to u też jest całkowalna, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n dx = \int_{\Omega} u dx.$$

Twierdzenia te są częścią kursu teorii miary. Ich dowody można znaleźć np. w podręczniku Rudina [9].

1.8 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Metoda Faedo-Galerkina, z której będziemy korzystać przy okazji dowodu istnienia i jednoznaczności rozwiązania wymagać od nas będzie rozwiązania pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych. Nam oczywiście wystarczać będzie, że układ przy podanych założeniach zawsze jest rozwiązywalny. Dlatego korzystać będziemy z następującego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Twierdzenie 1.25. Niech $K = \{t_0, t_0 + a\} \times \{\|y - y_0\| < b\}$. Jeżeli funkcja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to układ równań $y'(t) = f(t, y(t))$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie na przedziale $(t_0, t_0 + \delta)$, gdzie $\delta \leq a$.

Rozdział 2

Metody Analizy Funkcjonalnej

W rozdziale tym podamy bardziej zaawansowane twierdzenia i definicje Analizy Funkcjonalnej wykorzystywane przy badaniu równań różniczkowych cząstkowych. Twierdzenia zostaną podane bez dowodów, te będzie można znaleźć w literaturze, do której podamy referencje.

2.1 Dalsze własności przestrzeni Banacha i Hilberta

W poprzednim rozdziale, w podrozdziale poświęconym przestrzeniom Hilberta, zdefiniowaliśmy pojęcie bazy, nie precyzując dokładnie, jakie przestrzenie Hilberta ją posiadają. W podrozdziale poświęconym przestrzeniom funkcyjnym zdefiniowaliśmy pojęcie ośrodka. Okazuje się, że:

Twierdzenie 2.1. W każdej ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje baza.

Z naszego punktu widzenia interesujące będzie również następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.2. Każda podprzestrzeń ośrodkowej metryzowalnej przestrzeni Hilberta jest ośrodkowa.

Często musimy zdefiniować przestrzeń o interesujących nas własnościach, w celu badania naszego układu. Jeżeli pokażemy, że przestrzeń ta jest podzbiorem przestrzeni ośrodkowej Hilberta, to wiemy, że będzie istniała na niej baza.

Do metody Galerкина będziemy potrzebowali bazy ortonormalnej. Mając pewien układ ortonormalny, możemy go odpowiednio *zortonormalizować*, o czym mówi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.3. (*Ortonormalizacja Gramma-Shmitda*) Przypuśćmy, że zbiór $\{u_j\}_{j=1}^M$, gdzie $M \leq \infty$ jest liniowo niezależny. Wówczas istnieje zbiór ortonormalny $\{e_j\}_{j=1}^M$ taki, że dla każdego

N skończonego, $N \leq M$, zachodzi $\text{lin}\{u_1, u_2, \dots, u_N\} = \text{lin}\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$.

2.2 Operatory liniowe oraz funkcjonały. Słaba zbieżność

W analizie funkcjonalnej wprowadzamy *operatory* zwane *funkcjonałami*, których dziedziną są przestrzenie funkcyjne. Dzięki zdefiniowaniu odpowiednich operatorów dla naszych równań możemy korzystać z odpowiednich przejść granicznych w celu przejścia z przybliżonego rozwiązania do dokładnego.

Definicja 2.4. Niech X i Y będą rzeczywistymi przestrzeniami Banacha, niech $u, v \in X$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mówimy, że $T : X \rightarrow Y$ jest *operatorem ograniczonym i liniowym*, o ile:

$$T[\alpha u + \beta v] = \alpha Tu + \beta Tv, \quad (2.1)$$

$$\|T\| := \sup\{\|Tu\|_Y, \quad \text{gdzie} \quad \|u\|_X \leq 1\} < \infty. \quad (2.2)$$

Normę zdefiniowaną w (2.2) nazywamy *normą operatorową*.

Definicja 2.5. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią Banacha. Jeżeli

$$u^* : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3)$$

jest ograniczonym operatorem liniowym, to takie przekształcenie nazywamy *ograniczonym funkcjonałem liniowym na przestrzeni X* .

Definicja 2.6. Zbiór wszystkich ograniczonych funkcjonałów liniowych określonych na przestrzeni X nazywamy *przestrzenią sprzężoną do X* i oznaczamy przez X^* .

Oznaczenie Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Przestrzeń sprzężoną do przestrzeni $H_0^1(\Omega)$ będziemy oznaczać przez $H^{-1}(\Omega)$.

Oznaczenie Wartość funkcjonału $u^* \in X^*$ na elemencie $u \in X$ będziemy oznaczać przez

$$\langle u^*, u \rangle. \quad (2.4)$$

Powyższy zapis jest równoważny oznaczeniu $u^*(u)$.

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie zbieżności w przestrzeniach liniowych. Uogólnimy to pojęcie względem funkcjonałów. Przez X oznaczmy rzeczywistą przestrzeń Banacha.

2.3. WŁASNOŚCI SŁABYCH ZBIEŻNOŚCI

Definicja 2.7. Ciąg $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ nazywamy ciągiem *słabo zbieżnym* do $u \in X$, o ile dla każdego ograniczonego funkcjonału liniowego $u^* \in X^*$ zachodzi:

$$\langle u^*, u_k \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle, \quad (2.5)$$

co zapisujemy

$$u_k \rightharpoonup u. \quad (2.6)$$

Definicja 2.8. Ciąg $\{u_k^*\}_{k=1}^{\infty} \in X^*$ nazywamy ciągiem *słabo zbieżnym z gwiazdką* do $u^* \in X^*$, o ile dla każdego $u \in X$ zachodzi:

$$\langle u_k^*, u \rangle \rightarrow \langle u^*, u \rangle, \quad (2.7)$$

co zapisujemy

$$u_k^* \xrightarrow{*} u^* \quad (2.8)$$

Twierdzenie Riesz mówi nam o wzajemnej relacji pomiędzy iloczynem skalarnym na danej rzeczywistej przestrzeni Hilberta H oraz funkcjonalami określonymi na tej przestrzeni.

Twierdzenie 2.9. (Twierdzenie Riesz o reprezentacji) Dla każdego funkcjonału $u^* \in H^*$ istnieje dokładnie jeden element $u \in H$ taki, że:

$$\langle u^*, v \rangle = (u, v) \quad \text{dla każdego } v \in H. \quad (2.9)$$

Innymi słowy, przestrzeń H jest *izomorficzna* z H^* .

O słabych zbieżnościach traktuje wiele podręczników do analizy funkcjonalnej. Zapis opieramy głównie na konwencji z [5], natomiast sam dowód twierdzenia można znaleźć w [2].

2.3 Własności słabych zbieżności

Dość często w dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązań będziemy korzystali z własności słabych zbieżności.

Twierdzenie 2.10. Jeżeli ciąg $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony w refleksywnej przestrzeni Banacha – czyli takiej przestrzeni Banacha X , dla której $(X^*)^* = X$ (tzn. $(X^*)^*$ oraz X są izometryczne) – to posiada podciąg słabo zbieżny do pewnego elementu $u \in X$.

Dla nas będzie to istotne ze względu na twierdzenie mówiące, że:

Twierdzenie 2.11. Każda przestrzeń Hilberta jest refleksywna.

Bardzo ciekawą obserwacją jest również:

Twierdzenie 2.12. Każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony.

Z powyższych twierdzeń nasuwa się bardzo prosty wniosek: każdy ciąg słabo zbieżny jest ograniczony, ale twierdzenie odwrotne na ogół nie jest prawdziwe. Wiemy natomiast, że w przestrzeniach Hilberta ograniczone ciągi mają podciągi słabo zbieżne.

Więcej o operatorach jak i własnościach słabych zbieżności można znaleźć m. in. w podręczniku Brezisa [2] czy Rudina [8], gdzie znajdują się również dowody przytoczonych twierdzeń.

2.4 Twierdzenie o włożeniu

W podrozdziale 1.6 omawialiśmy podstawowe nierówności, które wykorzystujemy podczas szacowań ciągów. Szacowania dają nam możliwość wykazania, że ciągi te są ograniczone, a to już mówi nam coś o ich zachowaniu.

Często, żeby wykazać odpowiednie oszacowania wystarczy nam informacja o tym, że nasza norma jest ograniczona przez normę z innej przestrzeni, co do której mamy pewność, że oszacowanie zachodzi. Świetnie do takich celów nadają się twierdzenia o włożeniach.

Zdefiniujmy na początku *włożenie przestrzeni X w przestrzeń Y* .

Definicja 2.13. Mówimy, że przestrzeń liniowa X z normą $\|\cdot\|_X$ jest włożona w przestrzeń Y z normą $\|\cdot\|_Y$ (co można zapisać jako $X \hookrightarrow Y$, $X \rightarrow Y$ albo $X \subset Y$), jeżeli:

1. X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni Y ,
2. tożsamościowy operator $I : X \rightarrow Y$ taki, że $Ix = x$ dla każdego $x \in X$ jest ciągły.

Można pokazać, że warunek 2. powyżej definicji jest równoważny istnieniu pewnej stałej $C > 0$ takiej, że dla każdego $x \in X$ zachodzi:

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

Możemy zatem sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.14. Niech $1 < p < \infty$. Zachodzi następujące włożenie:

$$W^{1,p}((a, b)) \rightarrow C([a, b]).$$

Innymi słowy, każda funkcja $u \in W^{1,p}((a, b))$ po ewentualnej zmianie wartości na zbiorze zerowej miary jest funkcją ciągłą na $[a, b]$, gdzie $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$.

Ogólniejsze twierdzenie (nazywane twierdzeniem Rellicha-Kondraszowa) z dowodem można znaleźć w podręczniku Brezisa [2] w rozdziale dotyczącym nierówności Sobolewa (twierdzenie 9.16).

2.5 Ślady

Z definicji przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$ wynika, że funkcja należąca do tej przestrzeni jest określona prawie wszędzie. Rozważanie zatem jej wartości na brzegu (który ma przecież zerową miarę) nie ma sensu. Dlatego wprowadzamy nieco ogólniejsze pojęcie *śladu* takiej funkcji na zbiorze $\partial\Omega$. Nasze rozważania zaczniemy od definicji regularności brzegu:

Definicja 2.15. Mówimy, że brzeg $\partial\Omega$ jest klasy C^k jeżeli dla każdego punktu $x_0 \in \partial\Omega$ istnieje promień $r > 0$, lokalny układ współrzędnych (x_1, x_2, \dots, x_n) , oraz funkcja $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^k takie, że

$$\begin{aligned}\partial\Omega \cap B(x_0, r) &= \{x \in B(x_0, r) : x_n = \gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}, \\ \Omega \cap B(x_0, r) &= \{x \in B(x_0, r) : x_n > \gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\},\end{aligned}$$

gdzie $B(x_0, r)$ – kula o środku w x_0 i promieniu r .

Operator śladu będzie definiowało poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.16. Niech $1 \leq p < \infty$, oraz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – zbiór otwarty, ograniczony z brzegiem $\partial\Omega$ klasy C^1 . Wówczas istnieje operator liniowy i ciągły $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ taki, że:

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ dla $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$,
2. $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ dla każdego $u \in W^{1,p}(\Omega)$, gdzie stała C zależy tylko od p i Ω .

Stąd możemy wprowadzić następującą definicję:

Definicja 2.17. Śladem funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$ na brzegu $\partial\Omega$ będziemy nazywali wartość Tu zaś sam operator T nazywamy operatorem śladu.

W dalszych rozważaniach poświęconych istnieniu rozwiązania, nasze wysiłki skoncentrujemy na uzyskaniu ich w przestrzeni $W^{1,p}$. Dzięki temu nie będziemy mieli problemów z określeniem

zagadnienia na brzegu. Musimy jednak brać pod uwagę, że gdy będziemy mówić o wartościach brzegowych podczas rozważania dowodu matematycznego, mamy na myśli wartości w sensie operatora śladu. Więcej o operatorze śladu można znaleźć w [5].

2.6 Przestrzenie Bochnera

W zagadnieniach niestacjonarnych interesują nas przestrzenie funkcyjne, które będą powiązane z rozważanym przedziałem czasowym. Rozważmy zatem funkcje $u : A \rightarrow X$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$, natomiast X jest pewną liniową przestrzenią Banacha.

Funkcje proste definiujemy analogicznie jak w podrozdziale 1.4, z dokładnością do tego, że współczynniki a_1, a_2, \dots, a_n będą teraz należały do przestrzeni X .

Definicja 2.18. Funkcję $u : A \rightarrow X$ będziemy nazywali funkcją *silnie mierzalną*, jeżeli dla p.w. $t \in A$ istnieje ciąg funkcji prostych $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u(t)\|_X = 0. \quad (2.10)$$

Można wykazać, że jeżeli u jest funkcją silnie mierzalną, to $\|u\|_X : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a, [6].

Definicja 2.19. Funkcję $u : A \rightarrow X$ będziemy nazywali *całkowalną w sensie Bochnera*, o ile:

1. Jest silnie mierzalna,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0$.

Jeżeli u jest całkowalna w sensie Bochnera, to jej całkę wyrażamy wzorem:

$$\int_A u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A u_n(t) dt.$$

Poniższe twierdzenie daje nam użyteczne kryterium całkowalności funkcji w przestrzeniach Bochnera.

Twierdzenie 2.20. Funkcja $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Bochnera wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\int_A \|u(t)\|_X < \infty.$$

Podamy teraz przykłady przestrzeni, z których będziemy korzystać w niniejszej pracy.

Przestrzenie $L^p(A; X)$

Niech X będzie przestrzenią Banacha, natomiast $A \subset \mathbb{R}$ zbiorem otwartym. Przestrzenią $L^p(A; X)$ będziemy nazywać zbiór takich funkcji silnie mierzalnych $u : A \rightarrow X$, spełniających:

1. dla $p \in [1, \infty)$: $\int_X \|u(t)\|_X^p dt < \infty$,
2. dla $p = \infty$: $\text{ess sup}_A \|u(t)\|_X < \infty$.

Jest to przestrzeń Banacha z normą:

$$\|u\|_{L^p(A; X)} = \left(\int_A \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{dla } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^p(A; X)} = \text{ess sup}_A \|u(t)\|_X \quad \text{dla } p = \infty.$$

Poniższe twierdzenie mówi nam, które przestrzenie są ośrodkowe.

Twierdzenie 2.21. Niech $1 \leq p < \infty$ oraz X – ośrodkowa przestrzeń Banacha. Wówczas $L^p(A; X)$ też jest ośrodkową przestrzenią Banacha.

Przestrzenie $C^k(\bar{A}, X)$ – przykłady i własności

1. Przez $C(\bar{A}; X)$ oznaczać będziemy przestrzeń funkcji ciągłych $u : \bar{A} \rightarrow X$ z normą

$$\|u\|_{C(\bar{A}; X)} = \max_{t \in \bar{A}} \|u(t)\|_X.$$

2. Przez $C^k(\bar{A}; X)$ oznaczamy natomiast przestrzeń funkcji $u : \bar{A} \rightarrow X$, które posiadają ciągłe pochodne aż do k -tego rzędu (włącznie). Normę na tej przestrzeni wyrażamy:

$$\|u\|_{C^k(\bar{A}; X)} = \sum_{i=1}^k \left\| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|_{C(\bar{A}; X)}.$$

3. Mówimy, że funkcja $u \in C^\infty(\bar{A}; \mathbb{R})$ jeżeli $u \in C^k(\bar{A}; X)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.
4. Mówimy, że funkcja $u \in C_0^\infty(A; X)$ jeżeli u ma ciągłe pochodne dowolnego rzędu o nośniku zwartym w A .

Uwaga W tej pracy będziemy przyjmować, że $A = (0, T)$. Przestrzenie $L^p(A; X)$ oznaczamy przez $L^p(0, T; X)$.

Podobnie jak w podrozdziale 1.5, w celu zdefiniowania analogów przestrzeni Sobolewa, na początku zdefiniujemy pojęcie słabej pochodnej.

Definicja 2.22. Będziemy mówili, że funkcja $v \in L^1_{\text{loc}}(0, T; X)$ jest słabą pochodną funkcji $u \in L^1_{\text{loc}}(0, T; X)$ jeżeli dla każdego $\phi \in C_0^\infty((0, T))$, (gdzie $\phi : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\int_0^T \phi(t)v(t) dt = - \int_0^T \phi'(t)u(t) dt.$$

Przestrzenie $W^{1,p}(0, T; X)$

Przestrzenią Sobolewa $W^{1,p}(0, T; X)$ będziemy nazywać przestrzeń funkcji, dla których $u \in L^p(0, T; X)$ oraz $\frac{du}{dt} \in L^p(0, T; X)$. Ponadto:

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \begin{cases} \left[\int_0^T \left(\|u(t)\|_X^p + \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_X^p \right) dt \right]^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in [0,T]} \left(\|u(t)\|_X + \left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_X \right) & p = \infty \end{cases}.$$

Więcej o przestrzeniach Bochnera możemy znaleźć w podręczniku Evansa w rozdziale poświęconym przestrzeniom funkcji zależnych od czasu [5].

Rozdział 3

Podstawy mechaniki płynów.

Wyprowadzenie zagadnienia.

W tym rozdziale zapoznamy się z podstawowymi terminami używanymi w mechanice płynów. Następnie, na przykładzie rzeczywistych zjawisk (jak np. przepływ przez kanały w układzie oddechowym), dokonując szeregu uproszczeń dotyczących dziedziny wyprowadzimy zagadnienie, które będzie przedmiotem dalszej analizy w pracy.

3.1 Elementy mechaniki płynów

Podane w tym podrozdziale definicje oraz twierdzenia oparte są na podręczniku Rogera Temama [11] poświęconemu mechanice ośrodków ciągłych jak również na podręczniku Alexandra Chorina [4], w którym zostało przedstawione matematyczne podejście do omawianych zagadnień. W wymienionych pozycjach znajdują się dowody przytoczonych twierdzeń jak również obszerniejszy i pełniejszy opis zjawisk związanych z mechaniką płynów.

Definicja 3.1. *Ośrodkiem ciągłym* będziemy nazywać fizyczną idealizację pewnego ciała, a w naszym przypadku płynu. Będziemy zakładać, że każdy punkt przestrzeni zajętej przez to ciało jest punktem materialnym. Założmy, że dany płyn zajmuje w czasie t_0 obszar $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Na rozważany ośrodek działają siły zewnętrzne lub naprężenia wewnętrzne powodujące jego deformację. Zakładamy, że po deformacji ośrodek ten wypełnia obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Matematycznie, deformacja to odwzorowanie:

$$\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega \tag{3.1}$$

różnowartościowe i „na”. Zakładać będziemy ponadto, że φ jest regularna i zachowuje orientację (tzn. $\det \nabla \varphi(\alpha, t_0) > 0, \alpha \in \Omega$).

Definicja 3.2. *Prędkością punktu materialnego zajmującego w chwili t położenie x nazywamy wektor:*

$$v = v(x, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\alpha, t). \quad (3.2)$$

zaś przyspieszeniem punktu materialnego:

$$a = a(x, t) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(\alpha, t), \quad (3.3)$$

gdzie $x = \varphi(\alpha, t)$ oraz $\alpha \in \Omega$.

Do rozważań ruchu płynu używamy tzw. *opisu Eulera*. Polega on na obserwacji ustalonego punktu x w przestrzeni i zapisywaniu wektora prędkości $v(x, t)$ cząstki, która w chwili t znajduje się w punkcie x .

Niech Ω_t – obszar, jaki zajmuje płyn w czasie t . Załóżmy, że istnieje miara μ_t zdefiniowana na σ -ciele zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a zbioru Ω_t , która zadaje rozkład masy ośrodka ciągłego na tym zbiorze. Załóżmy również, że miara ta jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue’a:

$$d\mu_t(x) = \rho(x, t)dx. \quad (3.4)$$

Definicja 3.3. Funkcja mierzalna $\rho \geq 0$, która spełnia (3.4) jest nazywana *gęstością masy ośrodka ciągłego*. Dla naszych potrzeb zakładamy, że jest ona gładka.

Samą masę całkowitą ośrodka możemy obliczyć ze wzoru:

$$m = \int_{\Omega_t} d\mu_t(x) = \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx. \quad (3.5)$$

Zasada zachowania masy mówi, że całkowita masa ośrodka nie zmienia się w czasie. Różniczkując zatem po czasie równość (3.5) możemy otrzymać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.4. (Równanie ciągłości) Załóżmy, że w chwili t ośrodek ciągły zajmuje obszar Ω_t . Wówczas dla każdego $t \in I$, dla każdego $x \in \Omega_t$ zachodzi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t)v(x, t)) = 0, \quad (3.6)$$

gdzie I jest pewnym przedziałem czasowym.

W przypadku ośrodków jednorodnych funkcja gęstości jest stała w czasie i w przestrzeni. Wtedy równanie przyjmuje postać:

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0 \quad (3.7)$$

i nazywane jest *warunkiem nieściśliwości*.

W definicji (3.1) nadmieniliśmy, że na ośrodek mogą działać siły wewnętrzne, zwane *naprężeniami*. Wynikają one z oddziaływań jednej części ośrodka na inne tego samego ośrodka. Niech $C = C_1 \cup C_2$ będzie podziałem ośrodka na dwie części oraz niech Ω będzie obszarem zajmowanym przez C , zaś odpowiednio Ω_1, Ω_2 obszarami zajmowanymi przez C_1 i C_2 w ustalonej chwili. Niech Σ będzie wspólnym brzegiem tych obszarów. Przedstawimy teraz podstawowe hipotezy odnoszące się do wzajemnych relacji pomiędzy tymi obszarami:

1. Siły wywierane przez C_1 na C_2 (i na odwrót) są siłami powierzchniowymi, których miara dS jest skupiona na Σ
2. Miara ta jest funkcją absolutnie ciągłą względem miary powierzchniowej Lebesgue'a, tzn. istnieje wektorowa funkcja gęstości tych sił T względem $d\Sigma$ oraz

$$dS = T d\Sigma. \quad (3.8)$$

3. Funkcja wektorowa gęstości T zależy od położenia punktu x na Σ oraz od wektora normalnego n w tym punkcie, tzn.:

$$T := T(x, n). \quad (3.9)$$

4. Odwzorowanie:

$$(x, n) \rightarrow T(x, n) \quad (3.10)$$

jest ciągłe.

Definicja 3.5. Wektor $T(x, n)$ zdefiniowany w powyższy sposób nazywamy *wektorem naprężenia* w punkcie x związanym z kierunkiem normalnym n .

Twierdzenie 3.6. (Cauchy) Funkcja $T(x, n)$ jest funkcją liniową względem kierunku normalnego.

Definicja 3.7. Funkcję $\Omega \ni x \mapsto \sigma(x) = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^3$ nazywamy *tensorem naprężenia*. Funkcja ta jest związana z wektorem naprężenia następującą równością:

$$\sigma_{ij}(x) = T(x, e_j) \cdot e_i \quad (3.11)$$

dla każdego $i, j = 1, 2, 3$, gdzie e_i – odpowiedni wektor bazy kanonicznej.

Podstawowe prawa dynamiki mówią nam, że *siły bezwładności (inercyjne)* działające na ośrodek w chwili t , zajmujący w tym czasie obszar Ω_t , wyrażają się wzorem:

$$\int_{\Omega_t} a(x, t) \rho(x, t) dx. \quad (3.12)$$

Dla dowolnego podobszaru $\Omega'_t \subset \Omega_t$ są one równe siłom zewnętrznym o gęstości $f(x, t)$, które są zadane całką $\int_{\Omega_t} f(x, t) dx$ oraz siłom, jakie wywiera $\Omega_t \setminus \Omega'_t$ na Ω'_t zadane całką $\int_{\Gamma_t} T(x, n) d\Gamma$, gdzie Γ_t jest brzegiem Ω'_t . Zachodzi zatem następująca równość:

$$\int_{\Omega'_t} a(x, t) \rho(x, t) dx = \int_{\Omega'_t} f(x, t) dx + \int_{\Gamma_t} T(x, n) d\Gamma. \quad (3.13)$$

Z powyższej równości otrzymać można następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.8. (Równanie ruchu ośrodka ciągłego) Jeżeli gęstość ośrodka $\rho(x, t)$ jest opisywana funkcją ciągłą oraz ośrodek ten jest poddany siłom zewnętrznym, których gęstość $f(x, t)$ jest funkcją ciągłą, to wówczas:

$$a(x, t)\rho(x, t) = f(x, t) + \nabla \cdot \sigma(x, t) \quad (3.14)$$

dla każdego $x \in \Omega_t, t \in I$, gdzie $\sigma(x, t)$ jest tensorem naprężeń, zaś $a(x, t)$ jest wektorem przyspieszenia.

Równanie (3.14) jest równaniem związanym z bieżącą konfiguracją ośrodka. Stąd:

$$a(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} v(\varphi(\alpha, t), t) = \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla) v(x, t). \quad (3.15)$$

Wstawiając (3.15) do (3.14) otrzymujemy:

$$\rho(x, t) \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla) v(x, t) \right) = \nabla \cdot \sigma(x, t) + f(x, t). \quad (3.16)$$

Bardzo często się zdarza, że po określeniu układu brakuje nam równań, żeby go domknąć – to znaczy mieć tyle samo równań co niewiadomych. Z pomocą przychodzą nam tzw. *związki konstytutywne*, czyli zależności, które nie wynikają bezpośrednio z podstawowych praw mechaniki. Opisują one związki pomiędzy odkształceniem a naprężeniem. Zależą również od rozważanego materiału. Muszą ponadto być:

- niezmiennicze ze względu na zmianę jednego układu inercjalnego na drugi;
- nie mogą zależeć od umiejscowienia punktu w przestrzeni;
- nie mogą zależeć od zmiany jednej bazy ortonormalnej na inną;
- muszą być deterministyczne (relacja naprężenie – odkształcenie w czasie t zależy tylko od historii odkształcenia do czasu t);
- muszą być zgodne z prawami termodynamiki.

Dzięki związkom konstytutywnym będziemy mogli domknąć układ opisujący przepływ (równanie ciągłości dla płynu). Wprowadzimy na początku formalną definicję, którą będziemy rozważać pod względem równań mechaniki płynów.

Definicja 3.9. Niech D będzie tensorem odkształcenia, takim że

$$D = \frac{1}{2} \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right),$$

natomiast f zadaną funkcją, która zależy od ośrodka. Mówimy, że dany ośrodek ciągły jest *płynem*, jeżeli związek konstytutywny naprężenie – odkształcenie jest postaci

$$\sigma = f(D). \quad (3.17)$$

W naszych rozważaniach będziemy skupiać się na *płynach newtonowskich*. Są to płyny, dla których funkcja f z wprowadzonej definicji jest funkcją afiniczną względem tensora D . Zachodzi wówczas następująca równość:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) + c\delta_{ij}, \quad (3.18)$$

gdzie v - prędkość płynu, μ - współczynnik lepkości.

Prawa termodynamiki dają nam następujące związki konstytutywne:

- $c = \lambda \nabla \cdot v - p$, gdzie p - funkcja ciśnienia,
- $\mu \geq 0$,
- $2\mu + 3\lambda \geq 0$.

Z powyższego otrzymujemy:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_i} \right) + \lambda \nabla \cdot v \delta_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (3.19)$$

Po wstawieniu powyższego tensora do równania ruchu (3.16) otrzymujemy:

$$\rho(x, t) \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla)v(x, t) \right) = f(x, t) + \mu \Delta v(x, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot v(x, t) - \nabla p(x, t). \quad (3.20)$$

Dla płynów jednorodnych gęstość jest stała. Wówczas z równania ciągłości mamy $\nabla \cdot v = 0$, zatem układ ma następującą postać:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + (v(x, t) \cdot \nabla)v(x, t) \right) = f(x, t) + \mu \Delta v(x, t) - \nabla p(x, t), \quad (3.21)$$

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (3.22)$$

Powyższy układ zawiera tyle samo niewiadomych co równań.

Niech V będzie prędkością charakterystyczną płynu (prędkością uśrednioną dla całego zagadnienia), L – skalą długości (wymiarem charakterystycznym dla dziedziny, który ma bezpośredni wpływ na stateczność płynu), oraz $T = L/V$ – skalą czasu. Wówczas możemy wprowadzić bezwymiarowe wielkości:

$$v^* = \frac{v}{V}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{T}.$$

Oznaczając przez ∇^* oraz Δ^* odpowiednio gradient i laplasjan w odniesieniu do bezwymiarowych zmiennych przestrzennych, otrzymujemy:

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + (v^* \cdot \nabla^*)v^* = f^* + \frac{\mu}{\rho V L} \Delta^* v^* - \nabla^* p^*, \quad (3.23)$$

gdzie $p^* = p/(\rho V^2)$ jest ciśnieniem bezwymiarowym natomiast $f^* = fL/(\rho U^2)$ – bezwymiarowym członem sił.

Wielkość $Re = \rho V L / \mu$ jest nazywana *liczbą Reynoldsa*. Liczba ta pozwala oszacować stosunek sił bezwładnościowych do efektów związanych z lepkością płynu.

3.2 Wprowadzenie do rozpatrywanego zagadnienia na podstawie przepływu powietrza w płucach

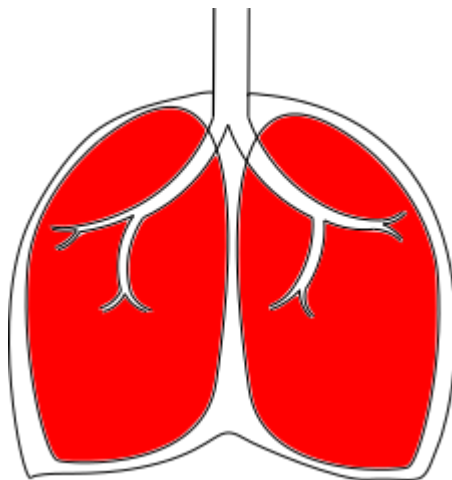
W pracy będziemy rozważać pewne zagadnienie przepływowe, którego wyprowadzenie zaczniemy od modelu fizycznego, związanego z układem oddechowym.

Jak wiemy, główną rolą układu oddechowego człowieka jest wymiana gazu pomiędzy krwią a powietrzem. Tlen jest transportowany z zewnątrz do krwi w kapilarach, natomiast dwutlenek węgla podąża w odwrotną stronę. Wymiana zachodzi przez cienką membranę, która oddziela oba płyny.

Obszar wymiany zachodzi na brzegach dużej liczby małych kulek, zwanych *pęcherzykami płucnymi*, łac. *alveoli*. Jest ich ok. 300 milionów, a średnica każdej z nich wynosi ok. 0.3 mm. Łączny obszar wymiany na membranach to ok. 100 m².

Każdy z pęcherzyków jest otoczony bardzo małymi naczyniami krwionośnymi (*kapilarami*), których średnice wahają się od 3 do 5 μ m. Wymiana zachodzi przez membranę pomiędzy naczyniami a pęcherzykami, która ma mniej niż jeden mikrometr grubości.

Pęcherzyki połączone są ze światem zewnętrznym przez układ, który jest zbiorem połączonych ze sobą rur o strukturze drzewa diadycznego. Drzewo to może być opisane w sposób następujący: tchawica (o średnicy ok. 2 cm), dzieli się na dwie gałęzie, z których każda dzieli się na kolejne dwie gałęzie i tak przez 23 poziomych bifurkacji. Pierwsze poziome służą jedynie dostarczaniu



Rysunek 3.1: Schematyczny rysunek płuc z zaznaczonym drzewem oskrzelowym.

tlenu, wymiana zachodzi dopiero od poziomu 16 – 17. Wyższe poziomy bifurkacji oznaczane są jako *acinus*, gdzie gałęzie zakończone są pęcherzykami płucnymi, w których zachodzi wymiana.

Więcej o samym układzie oddechowym, respiracji, jak również różnych podejściach matematycznego opisu tego skomplikowanego układu pisze Bertrand Maury w [7]. W podręczniku tym znajduje się opis zagadnienia, którego rozwinięciem będziemy się zajmować.

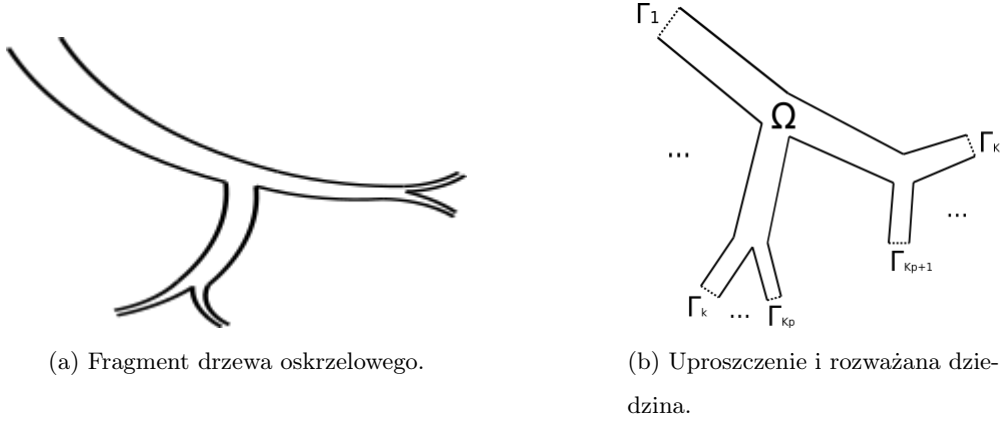
3.3 Zagadnienie stacjonarne

Chcielibyśmy stworzyć model opisujący na przykład przepływ powietrza w początkowej fazie (na poziomie bifurkacyjnym 1 - 16 opisanego wcześniej drzewa diadycznego). Rozważymy w tym celu stacjonarne równanie Stokesa na dziedzinie z wieloma wlotami i wylotami, jak na rysunku 3.1 oraz 3.2.

Założenia

- Dziedzinę, na której będziemy rozważać przepływ oznaczmy przez Ω .
- Brzeg dziedziny oznaczany przez $\partial\Omega$ będzie składał się ze sztywnej, nieprzepuszczalnej ściany Γ_0 oraz wlotów i wylotów Γ_k dla $k = 1, \dots, K$.
- Na Γ_0 narzucimy tzw. warunek *no-slip*, tzn. $v|_{\Gamma_0} = 0$.

Przepływ, z którym chcemy mieć do czynienia jest określony na bardzo dużej dziedzinie. Utrudnia to istotnie symulacje komputerowe. Często interesuje nas jedynie mały kawałek przepływu, który chcemy interpretować. Dlatego wprowadza się pewnego rodzaju *sztuczne* ograniczenia dziedziny tak, by przepływ był interpretowany jakby zachodził na całym obszarze a nie tylko



Rysunek 3.2: Porównanie rzeczywistego układu z rozważanym schematem.

interesującym nas wycinku. Oczywiście musimy zmodyfikować warunki brzegowe. Takie warunki nazywamy „*typu open*”.

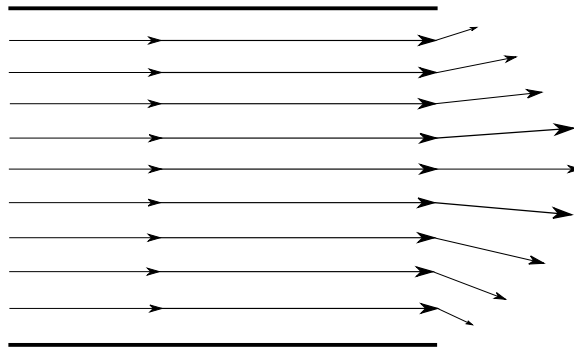
Najprostsze podejście do określenia warunków brzegowych polega na założeniu, że składowa normalna tensora naprężeń jest znana. Z (3.19) wiemy, że dla płynów nieściśliwych wynosi:

$$\sigma = \mu \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right) - p \text{Id}, \quad (3.24)$$

zatem warunki brzegowe na wlotach i wylotach można zapisać jako:

$$\mu \left(\nabla v + (\nabla v)^T \right) \cdot n - pn = Sn, \quad (3.25)$$

gdzie S jest pewną znaną funkcją. Powyższy warunek ma sens, jeżeli rozważamy sytuację, gdzie kończy się wraz z brzegiem Γ_k , a płyn wypływa do pustej przestrzeni bądź miesza się z płynem doskonałym. Wówczas pole prędkości na wylotach jest takie, jak na rysunku 3.3.


 Rysunek 3.3: Rozkład pola prędkości przy wylocie dla warunku brzegowego z symetrycznym tensorem naprężeń σ .

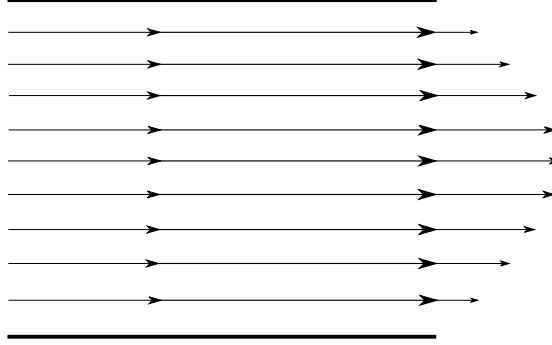
Nas interesowałaby bardziej sytuacja, gdy przepływ jest kontynuowany poza wylotami (profil

3.3. ZAGADNIENIE STACJONARNE

prędkości zostaje zachowany). W tym celu zakładamy następujące warunki wlotowo-wylotowe:

$$\mu \nabla v \cdot n - pn = Sn. \quad (3.26)$$

Z fizycznego punktu widzenia warunki te nie mają sensu (głównie ze względu na niesymetryczny tensor ∇v , który nie ma mechanicznego uzasadnienia). Pozwalają jednak odzyskać dokładne rozwiązanie w przypadku przepływu dwuwymiarowego w cylindrze, a także symulować sytuację, gdzie przepływ jest kontynuowany poza wlotami i wylotami – tak jak na rysunku 3.4.

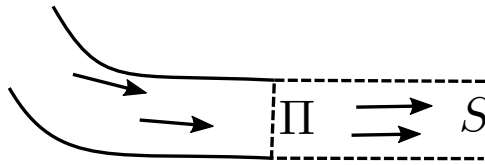


Rysunek 3.4: Rozkład pola prędkości przy wylocie dla warunku brzegowego z niesymetrycznym tensorem naprężeń σ .

Modyfikując powyższe rozumowanie, można zaproponować warunki, w których strumień wypływający jest proporcjonalny do różnicy pomiędzy ciśnieniem Π na wlocie/ wylocie a ciśnieniem w dalekim polu:

$$R \int_{\Gamma} v \cdot n d\Gamma = \Pi - S \quad \text{gdzie } \Pi n = \mu \nabla v - pn. \quad (3.27)$$

Sytuację tę obrazuje rysunek 3.5.



Rysunek 3.5: Płyn wpływa w *wirtualny* kanał.

Jeżeli liczba Reynoldsa jest mała (ok. 1), siły bezwładnościowe można zaniedbać. Równanie (3.21) dla przypadku stacjonarnego upraszcza się do postaci układu Stokesa:

$$\begin{cases} -\mu \Delta v & + \nabla p = f \\ \nabla \cdot v & = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Gdy do powyższego układu dodamy wprowadzone wcześniej warunki na Γ_k dla $k = 0, 1, \dots, K$, otrzymamy stacjonarny układ równań Stokesa, symulujący przepływ nieściśliwej cieczy bez uwzględniania sił bezwładności. Jest to jedno ze stacjonarnych podejść do uproszczonej

symulacji przepływu powietrza w kanałach. Model, tak jak już wspomnieliśmy, pochodzi z podręcznika [7], gdzie znajdują się bezpośrednie odnośniki do dowodu istnienia i jednoznaczności tak postawionego zagadnienia.

3.4 Zagadnienie niestacjonarne

Nasze rozważania oprzemy na układzie pochodzącym z preprintu [10]. Rozszerzymy nasz model, który opisaliśmy w poprzednim podrozdziale do przypadku niestacjonarnego. Wprowadzamy te same założenia dotyczące dziedziny. Rozważamy niestacjonarne zagadnienie Stokesa, następującej postaci:

$$\begin{cases} v_t - \nu \Delta v + \nabla p = f \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases} . \quad (3.29)$$

Na nieprzepuszczalnej, sztywnej ścianie Γ_0 podobnie jak poprzednio zakładamy warunek *no-slip*, tzn. $v|_{\Gamma_0} = 0$. Warunki wlotowo-wylotowe będziemy rozważać w następujących dwóch wariantach:

$$(A) \quad pn - \nu \nabla v \cdot n - n \left(\lambda_k + \gamma_k \frac{d}{dt} \right) \Phi_k(v) = S_k n \quad \text{na } \Gamma_k, k = 1, \dots, K, \quad (3.30)$$

$$(B) \quad pn - \nu \nabla v \cdot n - n \left(\hat{\lambda}_k + \hat{\gamma}_k \frac{d}{dt} \right) (v \cdot n) = S_k n \quad \text{na } \Gamma_k, k = 1, \dots, K, \quad (3.31)$$

gdzie Φ_k oznacza funkcję strumienia (w naszym przypadku $\Phi_k(v) = \int_{\Gamma_k} v \cdot n \, dS$).

Założenia

Niech K_p będzie liczbą z zakresu od 1 do K .

- wartości współczynników $\{\lambda_k, \gamma_k\}$ oraz $\{\hat{\lambda}_k, \hat{\gamma}_k\}$ są zadane dla $k = 1, \dots, K$,
- warunek początkowy dla pola prędkości wynosi $v(t = 0) = v_0$,
- funkcje $\{S_1(t), \dots, S_{K_p}(t)\}$ są zadane,
- funkcje $\{S_{K_p+1}, \dots, S_K(t)\}$ należy określić tak, aby na wlotach/ wylotach

$$\{\Gamma_k, k = K_p + 1, \dots, K\}$$

wydatek objętościowy (tzn. strumień przepływający przez dany brzeg) miał zadany przebieg w czasie, tzn.

$$Q_k = Q_k(t), \quad k = K_p + 1, \dots, K. \quad (3.32)$$

3.5 Interpretacja fizyczna postawionego zagadnienia niestacjonarnego

Zakładamy, że wlot/ wylot jest płaski. Oznacza to, że jednostkowy wektor normalny jest taki sam w każdym punkcie danego wlotu, który oznaczmy przez Γ_k . Rozważmy wlot leżący w płaszczyźnie xy (w przypadku trójwymiarowym). Z tw. Greena oraz bezdywergentności pola prędkości, otrzymujemy:

$$\int_{\Gamma_k} n \cdot (\nabla v \cdot n) dS = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dS = - \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dS = - \int_{\partial \Gamma_k} (v_2 \eta_2 + v_3 \eta_3) dS = 0, \quad (3.33)$$

gdzie $\partial \Gamma_k$ oznacza kontur wlotu/ wylotu oraz $\eta = [0, \eta_1, \eta_2]$ jest wektorem normalnym do danego konturu. Ostatnia całka jest równa 0, ponieważ kontur leży na ścianie Γ_0 .

Warunek brzegowy (3.30) można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{cases} p - \nu n \cdot (\nabla v \cdot n) - \left(\lambda_k + \gamma_k \frac{d}{dt} \right) \Phi_k(v) = S_k \\ n \times (\nabla v \cdot n) = 0 \end{cases}. \quad (3.34)$$

Całkowanie po Γ_k pierwszego warunku oraz podzielenie równania przez $|\Gamma_k|$ daje nam:

$$\overline{p_k} - S_k = \left(\lambda_k + \gamma_k \frac{d}{dt} \right) \Phi(v). \quad (3.35)$$

Zauważmy, że człon lepkościowy z powodu (3.33) znikł.

Wielkość $\overline{p_k} = \frac{1}{|\Gamma_k|} \int_{\Gamma_k} p dS$ jest średnim ciśnieniem na wlocie/wylocie Γ_k . Stąd, wielkości S_k możemy interpretować jako (na ogół zależne od czasu) funkcje ciśnienia w dalekim polu, które odpowiednio pochłaniają ciecz z wylotu Γ_k bądź dostarczają ciecz do wlotu Γ_k .

Różnica pomiędzy ciśnieniem na wlocie/wylocie a ciśnieniem w dalekim polu jest wyrażona jako suma dwóch składników: *statycznego*, który modeluje opór przepływowy i jest proporcjonalny do wydatku $\Phi_k(v)$ oraz *dynamicznego*, który jest proporcjonalny do tempa zmian wydatku.

Wariant (B) można wyrazić w sposób następujący:

$$\begin{cases} p - \nu n \cdot (\nabla v \cdot n) - \left(\hat{\lambda}_k + \hat{\gamma}_k \frac{d}{dt} \right) (v \cdot n) = S_k \\ n \times (\nabla v \cdot n) = 0 \end{cases}. \quad (3.36)$$

Całkowanie po Γ_k pierwszej równości i podzielenie przez $|\Gamma_k|$ daje:

$$\overline{p_k} - S_k = |\Gamma_k|^{-1} \left(\hat{\lambda}_k + \hat{\gamma}_k \frac{d}{dt} \right) \Phi_k(v). \quad (3.37)$$

Zauważmy, że dla $\lambda_k = |\Gamma_k|^{-1} \hat{\lambda}_k$ i $\gamma_k = |\Gamma_k|^{-1} \hat{\gamma}_k$ otrzymujemy równość, która jest równoważna tej z wariantu (A).

Rozdział 4

Istnienie i regularność rozwiązania zagadnienia

Rozdział ten zawiera matematyczną analizę wprowadzonych w poprzednim rozdziale równań dla warunku brzegowego typu (3.31). Na początku jeszcze raz wprowadzimy oznaczenia oraz odpowiednie równania. Następnie podamy pewne uproszczenia i założenia dla rozważanego układu. Potem przeprowadzimy pełny dowód istnienia, regularności i jednoznaczności rozwiązań naszego układu.

4.1 Zagadnienie Stokesa z niestacjonarnym warunkiem brzegowym

Rozważamy następujące zagadnienie Stokesa:

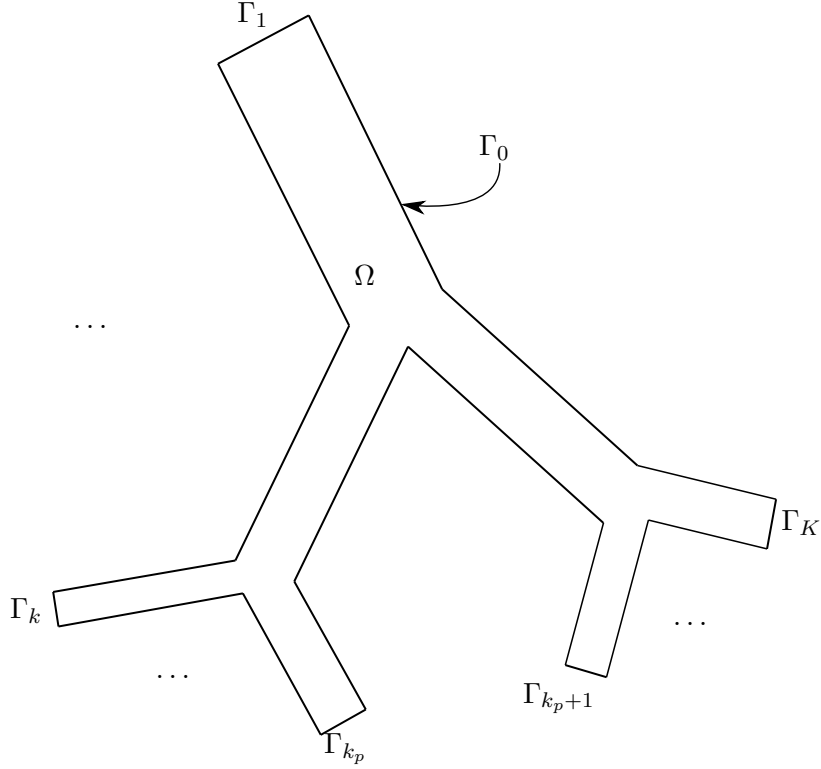
$$\begin{aligned}v_t - \nu \Delta v + \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot v &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

określone na dziedzinie Ω schematycznie przedstawionej na rysunku 4.1. Przez p rozumiemy funkcję ciśnienia, v jest prędkością płynu, n wektorem normalnym do punktu na odpowiednim brzegu, funkcja f oraz parametr lepkości $\nu > 0$ są zadane. Brzeg dziedziny, oznaczony przez $\partial\Omega$ składa się z następujących elementów:

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_K.$$

Przez Γ_0 oznaczamy sztywną, nieprzepuszczalną ścianę, na której:

$$v|_{\Gamma_0} = 0.\tag{4.2}$$



Rysunek 4.1: Schemat dziedziny dla rozważanego zagadnienia.

Przez $\Gamma_1, \dots, \Gamma_K$ rozumiemy wloty i wyloty, które opisane są za pomocą następującego warunku brzegowego:

$$pn - \nu \nabla v \cdot n - n \left(\lambda_k + \gamma_k \frac{d}{dt} \right) (v \cdot n) = S_k n \quad \text{na } \Gamma_k, k = 1, \dots, K. \quad (4.3)$$

Parametry λ_k oraz γ_k są stałe i będziemy o nich zakładać, że:

$$\lambda_k, \gamma_k > 0. \quad (4.4)$$

Uwaga 4.1. Dowód matematyczny istnienia rozwiązania zagadnienia będzie zakładał, że **znane są wszystkie funkcje** S_k . Różnica względem zaproponowanego modelu polega na tym, iż w przypadku tego modelu znamy S_k jedynie na części brzegów (zobacz założenia w podrozdziale 3.4), natomiast na pozostałych brzegach znamy wydatek opisany funkcją Q_k , gdzie k zależy od brzegu, na którym się znajdujemy.

Zakładamy zatem, że dla wszystkich $k = 1, \dots, K$

$$S_k \in H^1(0, T). \quad (4.5)$$

4.2 Przestrzeń rozwiązań

Metoda Faedo-Galerkina, która będzie stanowiła podstawę dowodu istnienia rozwiązania postawionego problemu wymaga od nas zdefiniowania bazy wektorów, którymi będziemy aproksymować rozwiązania dla przypadków skończone wymiarowych.

Przypomnijmy na początku nasze podstawowe założenia dotyczące brzegu i dziedziny:

- Na wlotach i wylotach składowe prędkości są niezerowe jedynie w kierunku normalnym.
- Pozostałą część brzegu stanowią nieprzepuszczalne ściany z warunkiem *no-slip*.
- Ze względu na specyfikę zagadnienia, będziemy musieli zdefiniować odpowiedni iloczyn skalarny jak również założyć, że funkcje bazowe pochodzą z przestrzeni $H^2(\Omega)$. Jest to konieczne z dwóch powodów:
 - Przy przejściu w dowodzie do układu równań różniczkowych zwyczajnych, musimy mieć pewność, że odpowiednia macierz jest odwracalna.
 - Podczas oszacowań *a priori*, które stanowią podstawę do przejścia granicznego ze skończonej bazy do rozwiązania układu, będziemy w pewnym momencie zmuszeni do szacowania pewnych danych za pomocą laplasjanu funkcji w czasie $t = 0$. Chwyt ten wyjaśnimy bezpośrednio w dowodzie twierdzenia.

Dlatego wprowadzamy definicję następującej przestrzeni:

Definicja 4.2. Przestrzeń

$$V = \left\{ \begin{array}{l} v \in H^2(\Omega) : \nabla \cdot v = 0 \text{ na } \Omega, v|_{\Gamma_0} = 0 \\ \text{oraz } v - (v \cdot n)n = 0 \text{ na } \Gamma_k, \text{ gdzie } k = 1, \dots, K \\ \text{(tzn. składowa styczna w kierunku wlotu/wylotu jest zerowa)} \end{array} \right\}$$

będziemy nazywać *przestrzenią rozwiązań*.

Definicja 4.3. Na V zadajemy następujący iloczyn skalarny:

$$(u, v)_V = (\Delta u, \Delta v) + (\nabla u, \nabla v) + (u, v) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (u \cdot n, v \cdot n)_{\Gamma_k}. \quad (4.6)$$

Lemat 4.4. Iloczyn skalarny (4.6) jest dobrze zdefiniowany.

Dowód. Punkty (i) - (iv) definicji 1.6 wynikają bezpośrednio z własności iloczynów skalarnych zdefiniowanych dla poszczególnych składowych naszego iloczynu. \square

Lemat 4.5. V jest przestrzenią Hilberta z normą przestrzeni $H^2(\Omega)$.

Dowód. Pokażemy, że V jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $H^2(\Omega)$. Istotnie, dla dowolnych $w_1, w_2 \in V$ oraz $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mamy

$$\nabla \cdot (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \nabla \cdot w_1 + \alpha_2 \nabla \cdot w_2 = 0,$$

oraz z ciągłości i z liniowości operatora śladu:

$$(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)|_{\Gamma_0} = 0$$

$$(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) - ((\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) \cdot n)n = 0 \quad \text{na } \Gamma_k \text{ dla } k = 1, \dots, K,$$

więc V jest podprzestrzenią $H^2(\Omega)$.

Wykażemy teraz, że ta podprzestrzeń jest domknięta. W tym celu weźmy ciąg $\{v^m\} \subset V$ taki, że:

$$v^m \rightarrow v \text{ przy } m \rightarrow \infty \text{ w } H^2(\Omega). \quad (4.7)$$

Z ciągłości operatora śladu zachodzą zbieżności:

$$v_m|_{\Gamma_0} \rightarrow v|_{\Gamma_0}$$

$$v_m \cdot n|_{\Gamma_k} \rightarrow v \cdot n|_{\Gamma_k},$$

$$v_m - (v_m \cdot n)n \rightarrow v - (v \cdot n)n \text{ na } \Gamma_k.$$

Ze zbieżności (4.7) oraz tego, że $v \in H^2(\Omega)$ wynika, że zachodzi również:

$$\int_{\Omega} v^m \phi \, dx \rightarrow \int_{\Omega} v \phi \, dx \quad \text{dla każdego } \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.8)$$

Otrzymujemy zatem:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot v^m \phi \, dx = - \int_{\Omega} v^m \cdot \nabla \phi \, dx \xrightarrow{(4.8)} - \int_{\Omega} v \cdot \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot v \phi \, dx.$$

Ponieważ powyższa równość zachodzi dla każdego $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, to musi być $\nabla \cdot v = 0$. Tym samym dowiedliśmy, że $v \in V$, co oznacza, że jest ona domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta a zatem jest przestrzenią Hilberta. \square

Przestrzeń Hilberta jest oczywiście metryzowalna. Ponadto $H^2(\Omega)$ jest przestrzenią ośrodkową. Korzystając z twierdzeń 2.1 oraz 2.2 wiemy, że posiada bazę ortogonalną $\{w_j\}_{j=1}^\infty$. Na mocy twierdzenia 2.3 układ ten można zortonormalizować tak, żeby:

$$(w_i, w_j) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (w_i \cdot n, w_j \cdot n)_{\Gamma_k} = \delta_{ij}. \quad (4.9)$$

Dzięki tak zdefiniowanej przestrzeni, iloczynowi skalarnemu i bazie, jesteśmy gotowi do udowodnienia istnienia i jednoznaczności postawionego zagadnienia.

4.3 Pozostałe założenia i definicja słabego rozwiązania

Zakładamy ponadto, że:

$$f \in H^1(0, T, L^2(\Omega)), \quad (4.10)$$

gdzie $T < \infty$ – czas trwania przepływu.

Ponadto warunek początkowy dla pola prędkości wynosi:

$$v(t=0) = v_0 \in H^2(\Omega). \quad (4.11)$$

Przez V_Γ oznaczmy następującą przestrzeń funkcji próbnych:

$$V_\Gamma = \{w \in H^1(\Omega) : \nabla \cdot w = 0, w|_{\Gamma_0} = 0\}. \quad (4.12)$$

Pomóżmy układ (4.1) przez funkcję $w \in V_\Gamma$. Stąd:

$$v_t w - \nu \Delta v w + \nabla p w = f w.$$

Powyższe równanie całkujemy po obszarze Ω :

$$\int_\Omega v_t w - \nu \int_\Omega \Delta v w + \int_\Omega \nabla p w = \int_\Omega f w.$$

Całkujemy teraz przez części i zapisujemy za pomocą iloczynów skalarnych:

$$(v_t, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) - \nu(\nabla v \cdot n, w)_{\partial\Omega} - (p, \nabla \cdot w) + (p \cdot n, w)_{\partial\Omega} = (f, w).$$

Z bezdywergentności funkcji w oraz z faktu, że $w|_{\Gamma_0} = 0$, mamy:

$$(v_t, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + \sum_{k=1}^K (pn - \nu \nabla v \cdot n, w)_{\Gamma_K} = (f, w).$$

Korzystając z warunków brzegowych (4.3), mamy:

$$(v_t, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + \sum_{k=1}^K (S_k + \lambda_k v \cdot n + \gamma_k v_t \cdot n, w \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, w),$$

co można rozpisać w następujący sposób:

$$(v_t, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t \cdot n, w \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v \cdot n, w \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, w) - \sum_{k=1}^K (S_k, w \cdot n)_{\Gamma_k}.$$

Definicja słabego rozwiązania

Będziemy mówili, że funkcja $v \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (4.1) z warunkami brzegowymi (4.3), (4.2) oraz przy założeniach (4.4) i (4.5), jeżeli dla każdego $w \in V_\Gamma$ spełniona jest równość:

$$(v_t, w) + \nu(\nabla v, \nabla w) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t \cdot n, w \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v \cdot n, w \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, w) - \sum_{k=1}^K (S_k, w \cdot n)_{\Gamma_k}. \quad (4.13)$$

4.4 Rezultat

Twierdzenie 4.6. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym z gładkim brzegiem. Rozważamy układ równań Stokesa (4.1) z warunkiem początkowym (4.11) oraz warunkami brzegowymi (4.3) oraz (4.2) przy założeniach (4.5) oraz (4.10). Wówczas istnieje v taka, że:

$$v \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$v_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

która jest słabym rozwiązaniem w sensie (4.13).

Dowód. W naszym dowodzie będziemy stosować metodę aproksymacyjną Feado-Galerkina.

Budowa przybliżonych rozwiązań

Jak już wcześniej pokazaliśmy, na V istnieje rodzina funkcji $w_1, w_2, \dots, w_m, \dots$, które są liniowo niezależne oraz których wszystkie skończone kombinacje liniowe są gęste w V . Dla każdego m definiujemy rozwiązania przybliżone:

$$v^m(t, x) = \sum_{i=1}^m g_i^m(t) w_i(x),$$

które mają spełniać:

$$\begin{aligned} (v_t^m, w_l) + \nu(\nabla v^m, \nabla w_l) + \sum_{k=1}^K \gamma_k(v_t^m \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k(v^m \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f, w_l) - \sum_{k=1}^K (S_k, w_l \cdot n)_{\Gamma_k}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

dla $l = 1, \dots, m$, oraz

$$v^m(0, x) = v_{0m}(x), \quad (4.15)$$

gdzie v_{0m} jest rzutem ortogonalnym v_0 na podprzestrzeń przestrzeni V rozpiętą przez w_1, w_2, \dots, w_m :

$$v_{0m} = \sum_{k=1}^m (v_0, w_k) w_k, \quad (4.16)$$

przy czym $v_{0m} \rightarrow v_0$ w $H^2(\Omega)$ przy $m \rightarrow \infty$.

Funkcje $g_i^m(t)$ są funkcjami skalarnymi określonymi na $[0, T]$. Otrzymujemy, że (4.14) jest układem równań różniczkowych zwyczajnych o niewiadomych funkcjach $g_i^m(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (w_i, w_l) \frac{d}{dt} g_i^m(t) + \nu \sum_{i=1}^m (\nabla w_i, \nabla w_l) g_i^m(t) + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m \lambda_k (w_i \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} g_i^m(t) \\ + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^m \gamma_k (w_i \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \frac{d}{dt} g_i^m(t) = (f, w_l) - \sum_{k=1}^K (S_k, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \end{aligned}, \quad (4.17)$$

dla $l = 1, \dots, m$, oraz:

$$g_i^m(0) = i\text{-ta współrzędna wektora } v_{0m}. \quad (4.18)$$

Z (4.9), macierz $\left[(w_i, w_l) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (w_i \cdot n, w_l \cdot n) |_{\Gamma_k} \right]_{i,l=1}^m$ jest nieosobliwa, zatem odwracalna. Odwracając tę macierz w (4.17) otrzymujemy układ równań ze stałymi współczynnikami:

$$\frac{d}{dt} g_i^m + \sum_{l=1}^m \alpha_{il} g_l^m(t) = \sum_{l=1}^m \beta_{il} \left((f, w_l) - \sum_{k=1}^K (S_k, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \right), \quad (4.19)$$

$$g_{im}(0) = i\text{-ta składowa wektora } u_{0m}, \quad (4.20)$$

gdzie $i = 1, \dots, m$ oraz $\alpha_{il}, \beta_{il} \in \mathbb{R}$.

Liniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych (4.19) z warunkami początkowymi (4.20) definiuje jednoznacznie ciągłe funkcje g_i^m (z teorii równań różniczkowych zwyczajnych i przedłużania lokalnych rozwiązań). Zatem dla każdego m istnieją funkcje g_i^m definiujące v^m i spełniające (4.14).

Zauważmy ponadto, że

$$\sum_{l=1}^m \beta_{il} \left((f, w_l) - \sum_{k=1}^K (S_k, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \right) \in H^1(0, T) \quad \text{dla każdego } l = 1, \dots, m. \quad (4.21)$$

Wynika to z faktu, iż $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $S_k \in H^1(0, T)$ dla każdego $k = 1, \dots, K$.

Istotnie:

$$\int_0^T |(f, w_l)|^2 dt \leq \int_0^T \|f\|_2^2 \|w_l\|_2^2 dt = \|f\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \|w_l\|_2^2 < \infty. \quad (4.22)$$

oraz:

$$\int_0^T |(f_t, w_l)|^2 dt \leq \int_0^T \|f_t\|_2^2 \|w_l\|_2^2 dt = \|f_t\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 \|w_l\|_2^2 < \infty. \quad (4.23)$$

Analogicznie szacujemy każdy wyraz $(S_k, w_l \cdot n)$. Stąd $\frac{d}{dt} g_i^m \in H^1(0, T)$. Zatem widzimy, że:

$$v^m \in H^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad v_t^m \in H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.24)$$

Pokażemy teraz oszacowania *a priori* dla ciągu $\{v_m\}$, niezależne od m , aby następnie przejść do granicy z $m \rightarrow \infty$.

Oszacowania

Na początku zajmijmy się oszacowaniem v^m . W tym celu rozważmy (4.14) z funkcją próbną v^m , tzn. przemnożmy (4.14) kolejno przez funkcje $g_l^m(t)$ dla $l = 1, 2, \dots, m$ a potem zsumujemy otrzymane układy. Stąd:

$$(v_t^m, v^m) + \nu (\nabla v^m, \nabla v^m) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, v^m \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, v^m \cdot n)_{\Gamma_k}$$

4.4. REZULTAT

$$= (f, v^m) - \sum_{k=1}^K (S_k, v^m \cdot n)_{\Gamma_k}.$$

Korzystając z nierówności Cauchy'ego-Schwarza dla wyrazu z f i S_k oraz zapisując odpowiednie iloczyny skalarne za pomocą norm, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, v^m \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \|f\|_2 \|v^m\|_2 + \sum_{k=1}^K \|S_k\|_{2,\Gamma_k} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Wyciągamy pochodną $\frac{d}{dt}$ w wyrażeniu z γ_k , oraz korzystamy z nierówności Poincaré i Younga z $\varepsilon = \frac{\lambda_k}{2}$ dla wyrażen po prawej stronie nierówności:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(p) \|f\|_2 \|\nabla v^m\|_2 + \sum_{k=1}^K \left(C(\lambda_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2 + \frac{\lambda_k}{2} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Stała $C(p)$ to stała z nierówności Poincaré. Przenosimy ostatni człon prawej strony na lewą, zaś pierwszy iloczyn prawej strony rozdzielamy za pomocą nierówności Cauchy'ego z $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{2} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(\nu, p) \|f\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K C(\lambda_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

Ten zabieg pozwala nam przenieść człon z ν z prawej na lewą stronę.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^m\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{2} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(\nu, p) \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^K C(\lambda_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

Szacujemy lewą stronę:

$$\frac{d}{dt} \|v^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \leq C(\nu, p) \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^K C(\lambda_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2.$$

Całkując powyższe wyrażenie po czasie od 0 do T , dostajemy:

$$\begin{aligned} \|v^m(T)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla v^m\|_2^2 dt + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v^m(T) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(\nu, p) \int_0^T \|f\|_2^2 dt + \sum_{k=1}^K C(\lambda_k) \int_0^T \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2 dt + \|v^m(0)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v^m(0) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

Wyrazy początkowe możemy oszacować przez $\|v_0\|_{H^2}$. Wynika stąd, że wszystkie wyrazy po prawej stronie powyższego wyrażenia są skończone w danych normach na mocy założeń. Zatem dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzi też:

$$\|v^m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v^m\|_2^2 dt + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v^m(t) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \leq C.$$

Przejdźmy teraz do oszacowania ∇v^m . Rozważmy (4.14) z funkcją próbną v_t^m . Analogicznie, jak w poprzednim przypadku możemy tak zrobić, ponieważ wystarczy pomnożyć równanie (4.14) kolejno przez funkcje $\frac{d}{dt}g_l^m(t)$ a następnie zsumować równania. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (v_t^m, v_t^m) + \nu (\nabla v^m, \nabla v_t^m) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f, v_t^m) - \sum_{k=1}^K (S_k, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Szacujemy z prawej strony z nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Lewą stronę zapisujemy przy pomocy odpowiednich norm.

$$\begin{aligned} \|v_t^m\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \|f\|_2 \|v_t^m\|_2 + \sum_{k=1}^K \|S_k\|_{2,\Gamma_k} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Ostatni iloczyn po prawej stronie rozbijamy, używając nierówności Cauchy'ego z $\varepsilon = \frac{\gamma_k}{2}$.

$$\begin{aligned} \|v_t^m\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \|f\|_2 \|v_t^m\|_2 + \sum_{k=1}^K \left(C(\gamma_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2 + \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Podobnie rozbijamy pierwsze wyrażenie po prawej stronie, używając klasycznej nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Przenosimy również człon z γ_k oraz normę z v_t^m z prawej na lewą stronę.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v_t^m\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{d}{dt} \|v^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^K C(\gamma_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

Całkujemy powyższe wyrażenie po czasie od 0 do T :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \|v_t^m\|_2^2 dt + \frac{\nu}{2} \|\nabla v^m(T)\|_2^2 + \int_0^T \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 dt + \sum_{k=1}^K \lambda_k \|v^m(T) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|f\|_2^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^K C(\gamma_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2 dt + \frac{\nu}{2} \|\nabla v^m(0)\|_2^2 - \sum_{k=1}^K \lambda_k \|v^m(0) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

4.4. REZULTAT

Wszystkie człony po prawej stronie na mocy założeń twierdzenia są skończone w danych normach.

Stąd dla każdego $t \in [0, T]$ zachodzi:

$$\frac{1}{2} \int_0^t \|v_t^m\|_2^2 dt + \frac{\nu}{2} \|\nabla v^m(t)\|_2^2 + \int_0^t \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 dt \leq C.$$

Zatem:

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\nabla v^m(t)\|_2^2 \leq C.$$

Zajmijmy się teraz szacowaniem v_t^m . W tym celu rozważmy słabą postać zagadnienia dla $z \in V_\Gamma$:

$$\begin{aligned} (v_t^m, z) + \nu (\nabla v^m, \nabla z) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f, z) - \sum_{k=1}^K (S_k, z \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Powyższe wyrażenie różniczkujemy względem czasu t :

$$\begin{aligned} (v_{tt}^m, z) + \nu (\nabla v_t^m, \nabla z) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_{tt}^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v_t^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f_t, z) - \sum_{k=1}^K \left(\frac{d}{dt} S_k, z \cdot n \right)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Jako funkcję z dla otrzymanej postaci weźmy v_t^m :

$$\begin{aligned} (v_{tt}^m, v_t^m) + \nu (\nabla v_t^m, \nabla v_t^m) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_{tt}^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v_t^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f_t, v_t^m) - \sum_{k=1}^K \left(\frac{d}{dt} S_k, v_t^m \cdot n \right)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Lewą stronę zapiszmy za pomocą odpowiednich norm, natomiast po prawej stronie równości użyjmy nierówności Poincaré, Cauchy'ego-Schwarza, Cauchy'ego z $\varepsilon = \frac{\nu}{2}$ oraz Cauchy'ego z $\varepsilon = \frac{\lambda_k}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \lambda_k \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(p, \nu) \|f_t\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \left(C(\lambda_k) \left\| \frac{d}{dt} S_k \right\|_{2,\Gamma_k}^2 + \frac{\lambda_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Przenosimy odpowiednie wyrażenia na lewą stronę:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^m\|_2^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq C(p, \nu) \|f_t\|_2^2 + \sum_{k=1}^K C(\lambda_k) \left\| \frac{d}{dt} S_k \right\|_2^2 \leq C(\lambda_k, p, \nu). \end{aligned}$$

Zatem:

$$\frac{d}{dt} \|v_t^m\|_2^2 + \nu \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \frac{d}{dt} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \leq C(\lambda_k, p, \nu).$$

Analogicznie jak wcześniej, całkując po przedziale od 0 do T zauważamy, że dla każdego $t \in (0, T)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \|v_t^m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla v_t^m\|_2^2 dt + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(t) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \int_0^T C(\lambda_k, p, \nu) dt + \|v_t^m(0)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(0) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2. \end{aligned}$$

Prawa strona powyższej nierówności szacuje się, o ile istnieje stała C_1 taka, że:

$$\|v_t^m(0)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(0) \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \leq C_1.$$

Powyższe szacowania mają sens, o ile możemy oszacować pochodne czasowe prędkości dla $t = 0$. Żeby tego dokonać, zapiszmy postać rozważanego układu w formie, w której znajduje się laplasjan prędkości dla funkcji z naszej bazy, całkując przez części (4.25).

$$\begin{aligned} (v_t^m, z) - \nu (\Delta v^m, z) + \nu (\nabla v^m \cdot n, z)_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, z \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f, z) - \sum_{k=1}^K (S_k, z \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Układ ten testujemy funkcją $z = v_t^m$:

$$\begin{aligned} (v_t^m, v_t^m) - \nu (\Delta v^m, v_t^m) + \nu (\nabla v^m \cdot n, v_t^m)_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} \\ = (f, v_t^m) - \sum_{k=1}^K (S_k, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k} - \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Korzystając z szacowań za pomocą nierówności Cauchy'ego-Schwarza, klasycznego Cauchy'ego, oraz Cauchy'ego z $\varepsilon = \frac{\gamma_k}{2}$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \|v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|f\|_2^2 + \frac{1}{2} \|v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \left(C(\gamma_k) \|S_k\|_{2,\Gamma_k}^2 + \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2 \right) + \nu (\Delta v^m, v_t^m) \\ - \nu (\nabla v^m \cdot n, v_t^m)_{\partial\Omega} - \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Normy z f i S_k są skończone, więc możemy je oszacować przez pewną stałą od nich zależną $C(f, S_k, \gamma_k)$. Ostatni człon rozbijamy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza a następnie z Cauchy'ego z odpowiednio małym $\varepsilon = \varepsilon_1$.

$$\frac{1}{2} \|v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2,\Gamma_k}^2$$

$$\leq C(f, S_k, \gamma_k) + \nu (\Delta v^m, v_t^m) - \nu (\nabla v^m \cdot n, v_t^m)_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^K \left(\lambda_k C(\varepsilon_1) \|v^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 + \lambda_k \varepsilon_1 \|v_t^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \right).$$

Iloczyn z laplasjanem rozbijamy za pomocą nierówności Cauchy'ego-Schwarza z odpowiednio dobranym ε tak, by przy normie z v_t^m został współczynnik $\frac{1}{4}$. Korzystamy teraz z istotnego dla nas faktu, iż prędkość występuje jedynie w składowej normalnej do kierunku wylotu. Wówczas zachodzi: $(\nabla v^m \cdot n, v_t^m) = ((\nabla v^m \cdot n) \cdot n, v_t^m \cdot n)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \\ & \leq C(\varepsilon, \gamma_k) + C(\nu) \|\Delta v^m\|_2^2 + \frac{1}{4} \|v_t^m\|_2^2 \\ & - \nu ((\nabla v^m \cdot n) \cdot n, v_t^m \cdot n)_{\partial\Omega} + \sum_{k=1}^K \left(\lambda_k C(\varepsilon_1) \|v^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 + \lambda_k \varepsilon_1 \|v_t^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Teraz wykorzystujemy istotność założenia dla przestrzeni V , która składa się z funkcji $H^2(\Omega)$. Dzięki nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz Cauchy'ego z odpowiednio małym $\varepsilon = \varepsilon_2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \|v_t^m\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \frac{\gamma_k}{2} \|v_t^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \\ & \leq C(\varepsilon, \gamma_k) + C(\nu) \|\Delta v^m\|_2^2 + C(\nu, \varepsilon_2) \|(\nabla v^m \cdot n) \cdot n\|_{2, \partial\Omega}^2 + \varepsilon_2 \|v_t^m \cdot n\|_{2, \partial\Omega}^2 \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\lambda_k C(\varepsilon_1) \|v^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 + \lambda_k \varepsilon_1 \|v_t^m \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Po przeniesieniu odpowiednich wyrazów na lewą stronę, rozważamy jedynie przypadek $t = 0$. Wiemy, że ciąg v_{0m} jest zbieżny do v_0 w $H^2(\Omega)$, zatem jest ograniczony w normie $H^2(\Omega)$. Stąd ograniczone są Δv_{0m} jak i ∇v_{0m} , gdzie $v_{0m} \equiv v^m(0)$. Zatem:

$$\|v_t^m(0)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(0) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq C_1.$$

Stąd:

$$\|v_t^m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla v_t^m\|_2^2 dt + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(t) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq C.$$

Podsumowanie oszacowań

W wyniku przeprowadzonych przez nas obliczeń, otrzymaliśmy następujące oszacowania:

$$\sup_{t \in (0, T)} \|v^m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla v^m\|_2^2 dt + \sup_{t \in (0, T)} \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v^m(t) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq C_1, \quad (4.26)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \|\nabla v^m(t)\|_2^2 \leq C_2, \quad (4.27)$$

$$\sup_{t \in (0, T)} \|v_t^m(t)\|_2^2 + \nu \int_0^T \|\nabla v_t^m\|_2^2 dt + \sup_{t \in (0, T)} \sum_{k=1}^K \gamma_k \|v_t^m(t) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq C_3. \quad (4.28)$$

Przejście do granicy

Oszacowania *a priori* dla v^m oraz ∇v^m , które uzyskaliśmy powyżej dają nam istnienie $v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ oraz podciągu $m' \rightarrow \infty$ takiego, że:

$$v^{m'} \xrightarrow{*} v \quad \text{w } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \quad (4.29)$$

Oznacza to, że dla każdego $u \in L^1(0, T; H^1(\Omega))$ zachodzi:

$$\int_0^T (v^{m'}(t) - v(t), u(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{dla } m' \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Podciąg $v^{m'}$ jest ograniczony w normie $H^1(0, T; H^1(\Omega))$, zatem kolejne przejście do podciągu daje nam istnienie v_* w $H^1(0, T; H^1(\Omega))$ i jakiegoś podciągu (który nadal będziemy oznaczać przez $v^{m'}$), takiego, że:

$$v^{m'} \rightharpoonup v_* \quad \text{w } H^1(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.31)$$

Powyższa zbieżność oznacza, że:

$$\int_0^T (v^{m'}(t) - v_*(t), u(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{dla każdego } u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.32)$$

Porównując z (4.30), otrzymujemy:

$$\int_0^T (v(t) - v_*(t), u(t)) dt \rightarrow 0 \quad \text{dla każdego } u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.33)$$

Zatem:

$$v = v_* \in H^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (4.34)$$

Rozważmy teraz funkcję skalarną $\psi \in C^1([0, T])$, taką, że:

$$\psi(T) = 0 \quad (4.35)$$

Mnożymy równanie (4.14) przez $\psi(t)$ oraz całkujemy przez części na przedziale od 0 do T :

$$\int_0^T (v_t^m(t), w_j) \psi(t) dt = - \int_0^T \left(v^m(t), \frac{d}{dt} \psi(t) w_l \right) dt - (v^m(0), w_l) \psi(0). \quad (4.36)$$

Całkujemy również:

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma_k (v_t^m(t) \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt &= - \int_0^T \gamma_k \left(v^m(t) \cdot n, \frac{d}{dt} \psi(t) w_l \cdot n \right)_{\Gamma_k} dt \\ &\quad - \gamma_k (v^m(0) \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.4. REZULTAT

dla każdego $k = 1, \dots, K$.

Otrzymujemy stąd:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \left(v^m(t), \frac{d}{dt} \psi(t) w_l \right) dt + \nu \int_0^T (\nabla v^m(t), \psi(t) \nabla w_l) dt \\
& - \int_0^T \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t^m(t) \cdot n, \psi(t) w_l \cdot n)_{\Gamma_k} dt + \int_0^T \sum_{k=1}^K \lambda_k (v^m(t) \cdot n, \psi(t) w_l \cdot n)_{\Gamma_k} dt \\
& = (v_{0m}, w_l) \psi(0) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v^m(0) \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) + \int_0^T (f(t), w_l) \psi(t) dt \\
& - \int_0^T \sum_{k=1}^K (S_k, w_l)_{\Gamma_k} \psi(t) dt.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Wiemy, że $v^m, v_t^m, \nabla v^m, v^m \cdot n$ są ograniczone w odpowiednich normach. Korzystając z tw. Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki oraz z tego, że (por. 4.15):

$$v_{0m} \rightarrow v_0 \text{ w } H^2(\Omega),$$

przechodzimy w (4.38) z $m = m'$ do ∞ i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \left(v(t), \frac{d}{dt} \psi(t) w_l \right) dt + \nu \int_0^T (\nabla v(t), \psi(t) \nabla w_l) dt \\
& - \int_0^T \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t(t) \cdot n, \psi(t) w_l \cdot n)_{\Gamma_k} dt + \int_0^T \sum_{k=1}^K \lambda_k (v(t) \cdot n, \psi(t) w_l \cdot n)_{\Gamma_k} dt \\
& = (v_0, w_l) \psi(0) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_0 \cdot n, w_l \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) \\
& + \int_0^T (f(t), w_l) \psi(t) dt - \int_0^T \sum_{k=1}^K (S_k, w_l)_{\Gamma_k} \psi(t) dt.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Powyższa równość zachodzi dla każdego l , dlatego z liniowości powyższego wyrażenia możemy zapisać:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (v(t), u) \frac{d}{dt} \psi(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla v(t), \nabla u) \psi(t) dt \\
& - \int_0^T \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t(t) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt + \int_0^T \sum_{k=1}^K \lambda_k (v(t) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt \\
& = (v_0, u) \psi(0) + \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_0 \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) \\
& + \int_0^T (f(t), u) \psi(t) dt - \int_0^T \sum_{k=1}^K (S_k, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

gdzie u jest skończoną, liniową kombinacją wektorów w_l . Z faktu, że (4.40) zależy w sposób liniowy i ciągły od u (z normą z V), równość ta pozostaje prawdziwa (z ciągłości) dla każdego $u \in V$ (możemy używać ciągów przybliżeń zbiegających do v).

Jeżeli równość (4.40) rozważymy z $\psi = \phi \in C_c^\infty(0, T)$, to otrzymamy równość, która jest zgodna z poniższą w tzw. *sensie dystrybucyjnym* na $(0, T)$:

$$\frac{d}{dt}(v, u) + \nu(\nabla v, \nabla u) + \sum_{k=1}^K \gamma_k \frac{d}{dt}(v \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (v \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, w) - \sum_{k=1}^K (S_k, u \cdot n)_{\Gamma_k}. \quad (4.41)$$

Wyrażenie (4.41) oraz (4.34) i wcześniejsze szacowania pochodnej czasowej (4.28) implikują, że:

$$v_t \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Pozostało nam wykazać, że $v(0) = v_0$. W tym celu mnożymy (4.41) przez $\psi(t)$ (zdefiniowane tak samo, jak poprzednio) i całkujemy po czasie t na przedziale od 0 do T przez części.

Otrzymujemy kolejno:

$$\int_0^T (v_t(t), u) \psi(t) dt = - \int_0^T \left(v(t), \frac{d}{dt} \psi(t) u \right) dt - (v(0), u) \psi(0), \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma_k (v(t) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt &= - \int_0^T \gamma_k \left(v(t) \cdot n, \frac{d}{dt} \psi(t) u \cdot n \right)_{\Gamma_k} dt \\ &\quad - \gamma_k (v(0) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0). \end{aligned} \quad (4.43)$$

dla każdego $k = 1, \dots, K$.

Stąd:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v(t), u) \frac{d}{dt} \psi(t) dt + \nu \int_0^T (\nabla v(t), u) \psi(t) dt \\ & - \int_0^T \sum_{k=1}^K \gamma_k (v_t(t) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt + \int_0^T \sum_{k=1}^K \lambda_k (v(t) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(t) dt \\ & = (v(0), u) \psi(0) + \gamma_k (v(0) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) + \int_0^T (f(t), u) \psi(t) dt - \int_0^T \sum_{k=1}^K (S_k, u \cdot n) \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Powyższą równość odejmujemy stronami z (4.40) i otrzymujemy, że:

$$(v_0 - v(0), u) \psi(0) + (v_0 \cdot n - v(0) \cdot n, u \cdot n)_{\Gamma_k} \psi(0) = 0 \quad \text{dla każdego } u \in V.$$

To implikuje, że:

$$v(0) = v_0 \quad (4.45)$$

i kończy dowód istnienia rozwiązania. \square

4.4. REZULTAT

Twierdzenie 4.7. Rozwiązania układu rozważanego w twierdzeniu (4.6) są wyznaczone w sposób jednoznaczny.

Dowód. Załóżmy, że układ ma dwa różne rozwiązania (w zdefiniowanym przez nas słabym sensie) u_1 i u_2 , tzn.:

$$\begin{aligned} ((u_1)_t, v) + \nu(\nabla u_1, \nabla v) + \sum_{k=1}^K \gamma_k ((u_1)_t \cdot n, v \cdot n)_{\Gamma_k} \\ + \sum_{k=1}^K \lambda_k (u_1 \cdot n, v \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, v) - \sum_{k=1}^K (S_k, v \cdot n)_{\Gamma_k}, \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} ((u_2)_t, v) + \nu(\nabla u_2, \nabla v) + \sum_{k=1}^K \gamma_k ((u_2)_t \cdot n, v \cdot n)_{\Gamma_k} \\ + \sum_{k=1}^K \lambda_k (u_2 \cdot n, v \cdot n)_{\Gamma_k} = (f, v) - \sum_{k=1}^K (S_k, v \cdot n)_{\Gamma_k}. \end{aligned}$$

Odejmijmy drugie równanie od pierwszego. Przyjmijmy $w = u_1 - u_2$. Zauważmy, że jest to też dobra funkcja testująca. Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} (w_t(t), w(t)) + \nu \|\nabla w(t)\|_2^2 + \\ \sum_{k=1}^K \gamma_k (w_t(t) \cdot n, w(t) \cdot n)_{\Gamma_k} + \sum_{k=1}^K \lambda_k (w(t) \cdot n, w(t) \cdot n)_{\Gamma_k} = 0 \quad \text{dla p.w. } t. \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_2^2 = 2(w_t(t), w(t)).$$

Wówczas, uwzględniając nieujemne wyrazy:

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \frac{d}{dt} \|w(t) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq 0.$$

Całkujemy powyższą nierówność od 0 do t :

$$\|w(t)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|w(t) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 \leq \|w(0)\|_2^2 + \sum_{k=1}^K \gamma_k \|w(0) \cdot n\|_{2, \Gamma_k}^2 = 0 \quad \text{dla } t \in [0, T] \quad (4.46)$$

i stąd $w(t) = 0$ czyli $u_1(t) = u_2(t)$ dla każdego t . □

Rozdział 5

Metody numeryczne dla postawionego problemu

Rozdział ten poświęcimy analizie numerycznej postawionego zagadnienia. Skupimy się przede wszystkim na dyskretyzacji układu a także na metodzie rozwiązania.

5.1 Algorytm

Rozważmy przestrzeń fukcyjną V_Γ zdefiniowaną jak w poprzednim rozdziale, tzn.:

$$V_\Gamma = \{w : w \in H^1(\Omega), w|_{\Gamma_0} = 0\}.$$

Wprowadźmy również następującą formę dwuliniową, celem uproszczenia zapisu:

$$b_k(v, w) = \begin{cases} \left(\lambda_k + \gamma_k \frac{d}{dt} \right) \Phi_k(v) \Phi_k(w) & \text{dla wariantu (A)} \\ \left(\hat{\lambda}_k + \hat{\gamma}_k \frac{d}{dt} \right) \int_{\Gamma_k} (v \cdot n) (w \cdot n) dS & \text{dla wariantu (B)} \end{cases}. \quad (5.1)$$

Wówczas interesujące nas zagadnienie wariacyjne dla rozważanego równania Stokesa (3.29) wraz z warunkami brzegowymi (3.30) – (3.31) oraz założeniami z podrozdziału 3.4 ma następującą postać:

Znajdź $v \in V$ oraz $p \in L^2(\Omega)$ oraz $\{S_{K_p+1}, \dots, S_K\}$, które spełniają następujący układ równań:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} v \cdot w dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot w dx + \sum_{k=1}^K [b_k(v, w) + S_k \phi_k(w)] = \int_{\Omega} f \cdot w dx \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot v dx = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

dla każdego $w \in V_\Gamma$, $q \in L^2(\Omega)$ oraz $\Phi_k(w) = \int_{\Gamma_k} w \cdot n d\Gamma \equiv Q_k(t)$ dla $k = K_p + 1, \dots, K$.

Podstawowym naszym celem będzie odpowiednia dyskretyzacja naszego zagadnienia.

5.1. ALGORYTM

Pochodną czasową pola prędkości w (5.4) będziemy aproksymować za pomocą schematu BDF (*backward differentiation formula*) rzędu J :

$$\frac{d}{dt}v|_{t=t_{n+1}} \approx \frac{\alpha_0}{\Delta t}v^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \alpha_j v^{n+1-j}, \quad (5.3)$$

gdzie odpowiednie współczynniki $\alpha_0, \dots, \alpha_J$ przedstawia tabela 5.1.

	α_0	α_1	α_2	α_3
$J = 1$	1	1	-	-
$J = 2$	3/2	2	-1/2	-
$J = 3$	11/6	3	-3/2	1/3

Tablica 5.1: Współczynniki α dla schematu BDF dla różnych rzędów J

Jest to tzw. *schemat niejawnny*. Oznacza to, że do aproksymacji kroku czasowego używamy zarówno obecnego stanu układu jak i kroków późniejszych.

Uwaga W pracy będziemy się zajmować jedynie przypadkiem, gdy $J = 1$, algorytm nakreślimy natomiast w przypadku ogólnym.

Po wstawieniu (5.3) do (5.4) otrzymujemy następującą *semi-dyskretyzowaną* postać:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_{\Omega} v^{n+1} \cdot w \, dx + \nu \int_{\Omega} \nabla v^{n+1} : \nabla w \, dx \\ - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot w \, dx + \sum_{k=1}^K \left[B_k(v^{n+1}, w) + S_k^{n+1} \Phi_k(w) \right] = G^{n+1} & \text{dla każdego } w \in V_{\Gamma} \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx = 0 & \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (5.4)$$

gdzie:

$$B_k(v^{n+1}, w) = \begin{cases} (\lambda_k + \gamma_k \frac{\alpha_0}{\Delta t}) \Phi(v^{n+1}) \Phi(w) & \text{dla wariantu (3.30)} \\ \left(\widehat{\lambda}_k + \widehat{\gamma}_k \frac{\alpha_0}{\Delta t} \right) \int_{\Gamma_k} (v^{n+1} \cdot n) (w \cdot n) \, d\Gamma & \text{dla wariantu (3.31)} \end{cases}, \quad (5.5)$$

$$G^{n+1} = \begin{cases} \int_{\Omega} f^{n+1} \cdot w \, dx + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \alpha_j \int_{\Omega} v^{n+1-j} \cdot w \, d\Omega + \\ \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \alpha_j \sum_{k=1}^K \gamma_k \Phi_k(v^{n+1-j}) \Phi_k(w) & \text{dla wariantu (3.30)} \\ \int_{\Omega} f^{n+1} \cdot w \, dx + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \alpha_j \int_{\Omega} v^{n+1-j} \cdot w \, d\Omega + \\ \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^J \alpha_j \sum_{k=1}^K \widehat{\gamma}_k \int_{\Gamma_k} (v^{n+1-j} \cdot n) (w \cdot n) \, d\Gamma & \text{dla wariantu (3.31)} \end{cases}, \quad (5.6)$$

oraz:

$$S_k^{n+1} = S_k(t_{n+1}). \quad (5.7)$$

Dodatkowe warunki narzucone na pole prędkości, związane z wydatkiem objętościowym, mają postać:

$$\Phi(v^{n+1}) = Q_k(t_{n+1}) \equiv Q_k^{n+1}, \quad \text{dla } K_p + 1, \dots, K. \quad (5.8)$$

Teraz pokażemy, że rozwiązanie zagadnienia (5.4) – (5.8) może sprowadzać się do rozwiązania liniowych zagadnień pomocniczych Stokesa. Procedura różni się w małym stopniu w zależności od rozważanego przypadku warunku brzegowego.

Wariant (3.30) warunku brzegowego

Niech $u_j \in V_\Gamma$, $\zeta_j \in L^2(\Omega)$ dla $j = 1, \dots, K$ będą rozwiązaniami następującego zagadnienia Stokesa:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_\Omega u_j \cdot w \, d\Omega + \nu \int_\Omega \nabla u_j : \nabla w \, d\Omega - \int_\Omega \zeta_j \nabla \cdot v \, d\Omega + \Phi_j(w) = 0 & \text{dla każdego } v \in V_\Gamma \\ \int_\Omega q \nabla \cdot u_j \, d\Omega = 0 & \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{cases}. \quad (5.9)$$

Zdefiniujmy również wartości $F_{jk} = \Phi_k(u_j)$. Dla każdej pary indeksów (j, k) , $j, k = 1, \dots, K$, liczba F_{jk} oznacza wartość wydatku pola wektorowego u_j przez wlot/wylot Γ_k . Z faktu, że rozważamy płyn nieściśliwy, dla każdego $j = 1, \dots, K$ zachodzić musi:

$$\sum_{k=1}^K F_{jk} = 0. \quad (5.10)$$

Niech teraz $u_0 \in V_\Gamma$ oraz $\zeta_0 \in L^2(\Omega)$ będą rozwiązaniami następującego zagadnienia Stokesa:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_\Omega u_0 \cdot v \, d\Omega + \nu \int_\Omega \nabla u_0 : \nabla v \, d\Omega - \int_\Omega \zeta_0 \nabla \cdot u_0 \, d\Omega = G^{n+1} & \text{dla każdego } v \in V_\Gamma \\ \int_\Omega q \nabla \cdot u_0 \, d\Omega = 0 & \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{cases}. \quad (5.11)$$

gdzie G^{n+1} jest zdefiniowane przez (5.6) dla wariantu (3.30). Analogicznie jak w poprzednim przypadku definiujemy również wielkości $F_{0k} = \Phi(w_0)$, $k = 1, \dots, K$, które są równe wydatkowi wektorowego pola prędkości w_0 przez wloty i wyloty Γ_k . Podobnie, z nieściśliwości otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^K F_{0k} = 0. \quad (5.12)$$

Rozwiązanie zagadnienia (5.4) – (5.6) z warunkami brzegowymi typu (3.30) można wyrazić za pomocą liniowych kombinacji rozwiązań zagadnień pomocniczych (5.9) i (5.11), mianowicie:

$$v^{n+1} = u_0 + \sum_{k=1}^K \beta_j u_j, \quad p^{n+1} = \zeta_0 + \sum_{k=1}^K \beta_j \zeta_j. \quad (5.13)$$

Po wstawieniu kombinacji (5.13) do (5.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_{\Omega} u_0 \cdot w \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla u_0 : \nabla w \, d\Omega - \int_{\Omega} \zeta_0 \nabla \cdot w \, d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^K \beta_j \left[\frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_{\Omega} u_j \cdot w \, d\Omega + \nu \int_{\Omega} \nabla u_j : \nabla w \, d\Omega - \int_{\Omega} \zeta_j \nabla \cdot w \, d\Omega \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \left(\lambda_k + \frac{\alpha_0}{\Delta t} \gamma_k \right) \left[\Phi(u_0) + \sum_{k=1}^K \beta_j \Phi_k(u_j) \right] \Phi_k(w) + \sum_{k=1}^K S_k \Phi_k(w) = G^{n+1}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Po uwzględnieniu (5.9) i (5.11) w (5.14), układ redukuje się do:

$$\sum_{k=1}^K \left[-\beta_k + \eta_k \Phi_k(w_0) + \sum_{j=1}^K \beta_j \eta_k \Phi_k(w_j) + S_k \right] \Phi_k(v) = 0, \quad \text{dla każdego } v \in V_{\Gamma}, \quad (5.15)$$

gdzie $\eta_k = \lambda_k + \frac{\alpha_0}{\Delta t} \gamma_k$. Z faktu, że powyższa równość jest spełniona dla każdej funkcji próbnej, wynika:

$$-\beta_k + \eta_k F_{0k} + \sum_{j=1}^K \beta_j \eta_k \Phi_k(w_j) + S_k = 0, \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.16)$$

Dodatkowo, z warunków postawionych na wydatek (3.4) mamy:

$$\sum_{j=1}^K F_{jk} \beta_j + F_{0k} = Q_k, \quad k = K_p + 1, \dots, K. \quad (5.17)$$

Uwzględniając (5.17), ostatnie $K - K_p$ układu równań (5.16) ma postać:

$$-\beta_k + \eta_k Q_k + S_k = 0, \quad k = K_p + 1, \dots, K. \quad (5.18)$$

Stąd:

$$S_k = \beta_k - \eta_k Q_k, \quad k = K_p + 1, \dots, K. \quad (5.19)$$

Zatem ostateczna forma układu liniowego dla nieznanych współczynników $\{\beta_j, j = 1, \dots, K\}$ ma postać:

$$\begin{cases} \beta_k - \sum_{j=1}^K \beta_j \eta_k F_{jk} = S_k + F_{0k} \eta_k, & k = 1, \dots, K_p \\ \sum_{j=1}^K F_{jk} \beta_j = Q_k - F_{0k}, & k = K_p + 1, \dots, K \end{cases}. \quad (5.20)$$

Po rozwiązaniu układu (5.20) nieznane wartości $S_k, k = K_p + 1, \dots, K$ wynikają bezpośrednio (5.19).

Wariant (3.31) warunku brzegowego

Sformułowanie wariacyjne problemu Stokesa z warunkiem brzegowym postaci (3.31) można przedstawić w sposób następujący:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_{\Omega} v^{n+1} \cdot w \, d\Omega + \sum_{k=1}^K \hat{\eta}_k \int_{\Gamma} (v^{n+1} \cdot n)(w \cdot n) \, d\Gamma \\ + \nu \int_{\Omega} \nabla v^{n+1} : \nabla w \, d\Omega - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot w \, d\Omega + \sum_{k=1}^K S_k^{n+1} \Phi_k(v) = G^{n+1} & \text{dla każdego } v \in V_{\Gamma} \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, d\Omega = 0 & \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{cases} \quad (5.21)$$

gdzie $\hat{\eta}_k = \hat{\lambda}_k + \frac{\alpha_0}{\Delta t} \hat{\gamma}_k$ a wektor G^{n+1} jest zdefiniowany jak w wariancie (3.31) w równaniu (5.6).

Podobnie jak w poprzednim wariancie rozwiązanie problemu będziemy definiować za pomocą kombinacji liniowej rozwiązań szczególnych zagadnień Stokesa.

Niech $u_j \in V_\Gamma$, $\zeta_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, \dots, K$ będą rozwiązaniami zagadnień wariacyjnych:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_\Omega u_j \cdot w \, d\Omega + \sum_{k=1}^K \hat{\eta}_k \int_{\Gamma_k} (u_j \cdot n)(w \cdot n) \, d\Gamma + \nu \int_\Omega \nabla u_j : \nabla w \, d\Omega \\ - \int_\Omega \zeta_j \nabla \cdot w \, d\Omega + \Phi_j(w) = 0 \\ \int_\Omega q \nabla \cdot u_j \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } v \in V_\Gamma \\ \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{array} \quad (5.22)$$

Dodatkowo niech $u_0 \in V_\Gamma$, $\zeta_0 \in L^2(\Omega)$ będą rozwiązaniami następującego zagadnienia:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_0}{\Delta t} \int_\Omega u_0 \cdot w \, d\Omega + \sum_{k=1}^K \hat{\eta}_k \int_{\Gamma_k} (u_0 \cdot n)(w \cdot n) \, d\Gamma + \\ \nu \int_\Omega \nabla u_0 : \nabla w \, d\Omega - \int_\Omega \zeta_0 \nabla \cdot w \, d\Omega = G^{n+1} \\ \int_\Omega q \nabla \cdot u_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dla każdego } v \in V_\Gamma \\ \text{dla każdego } q \in L^2(\Omega) \end{array} \quad (5.23)$$

Po podstawieniu (5.13) do wariacyjnej formy zagadnienia (5.4) i uwzględnieniu (5.22) oraz (5.23), analogicznie jak w poprzednim przypadku, otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^K (S_k - \beta_k) \Phi_k(v) = 0.$$

Z faktu, że powyższa równość musi być spełniona dla każdego pola testowego, zachodzić musi:

$$-\beta_k + S_k = 0, \quad \text{dla } k = 1, \dots, K.$$

Wykorzystując (5.17) otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \beta_k = S_k & \text{dla } k = 1, \dots, K_p \\ \sum_{j=K_p+1}^K F_{jk} \beta_j = Q_k - F_{0k} - \sum_{j=1}^{K_p} F_{jk} S_j & \text{dla } k = K_p + 1, \dots, K \end{cases} \quad (5.24)$$

Współczynniki β_k , $k = 1, \dots, K$ dla liniowej kombinacji złożonej z rozwiązań szczególnych zagadnień (5.22) oraz (5.23) wyznaczone są z powyższego układu.

Ciśnienia w dalekim polu S_k , $k = K_p + 1, \dots, K$ oraz średnie ciśnienia na przekrojach wlotowych i wylotowych są określone analogicznie jak dla wariantu z warunkiem brzegowym typu (3.31).

5.2 Założenia symulacji

Symulacje oprzemy na *open-source*’owej platformie umożliwiającej rozwiązywanie układów równań różniczkowych cząstkowych – FEniCS. FEniCS pozwala użytkownikom przenosić modele na wydajny kod oparty na *metodzie elementu skończonego* (w skrócie *MES*).

Metoda elementu skończonego polega na dyskretyzacji naszej dziedziny na skończoną liczbę poddziedzin. Zdyskretyzowane rozwiązanie jest liczone jedynie w pewnych szczególnych punktach tego podziału, zwanych węzłami. Jest ono wówczas skończoną kombinacją liniową funkcji bazowych (z wybranej przez nas bazy) pomnożonych przez odpowiednie współczynniki. Poszukiwanie przybliżonego rozwiązania polega na znalezieniu odpowiednich współczynników.

Szczegóły i podstawy MES-u można znaleźć np. w pracy Zohdiego [12], gdzie opis metody jest bardzo szczegółowy. Z naszego punktu widzenia interesujące dla nas będzie wyłącznie rozwiązanie otrzymane przez solver oparty na rozwiązaniach MES-owych, w które nie będziemy wnikać.

FEniCS-a można używać z poziomu języków Python (jak uczyniono w tej pracy) jak również C++. Za pomocą Pythonowej składni implementujemy algorytm, którego założenia opisaliśmy w poprzednim podrozdziale.

Do przetestowania naszego układu użyjemy geometrii zwaną dalej *geometrią X*, ze względu na kształt dziedziny podobny do tej litery. Nie jest to co prawda drzewo bifurkacyjne jednak dla naszych potrzeb nie będzie to stanowiło większego problemu. Geometria X jest prostsza do wygenerowania, daje nam więcej wlotów i wylotów oraz łatwiej będzie nam na niej dostrzec wyniki symulacji.

Geometrię stworzymy za pomocą generatora siatek *Gmsh* opartego na licencji *GNU (General Public License)*.

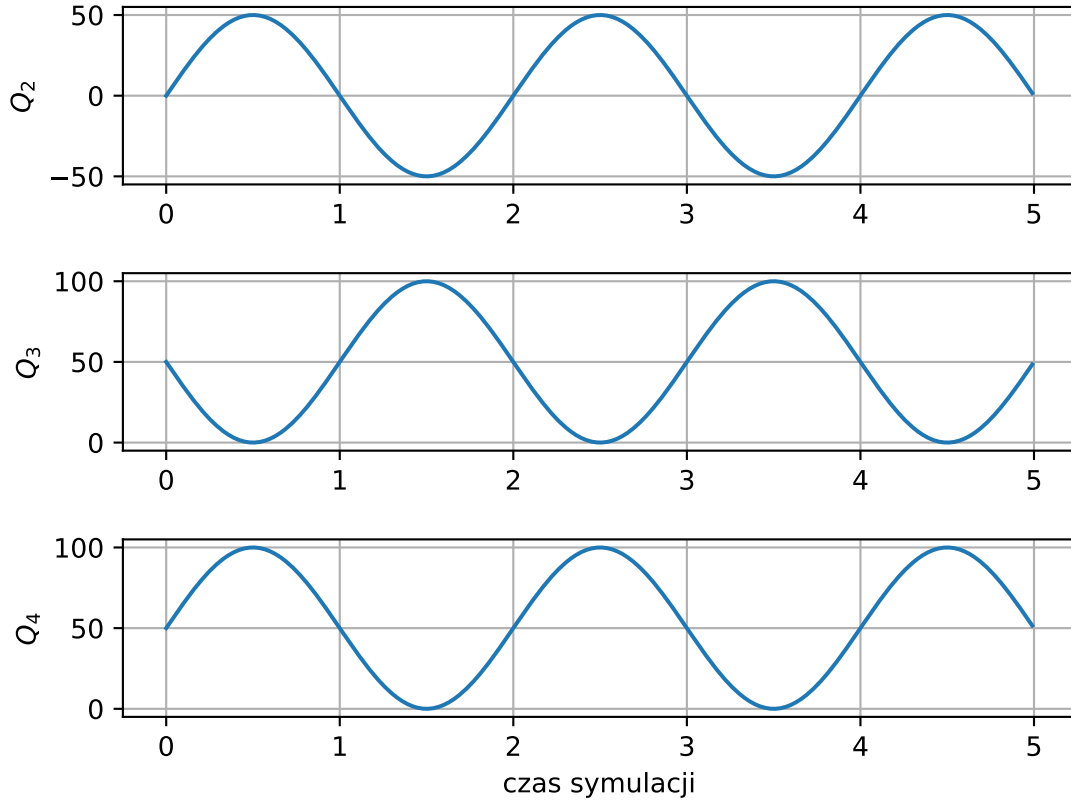
Opis geometrii X

Geometria X została opisana na kwadracie 2×2 , co przedstawia schematycznie rysunek 5.2. Szerokość kanałów jest równa 0.4. Numeracja ścian oraz wlotów i wylotów jest następująca: (1) – wlot/wylot ze znaną funkcją pola ciśnienia S_1 , (2) (3) (4) – wloty i wyloty ze znanymi wydatkami Q_2, Q_3, Q_4 odpowiednio, (5) – sztywna, nieprzepuszczalna ściana.

Dla każdego rodzaju symulacji (chyba, że napiszemy iż jest inaczej) będziemy przyjmować następujące wartości funkcji dalekiego pola ciśnienia i wydatków:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= 100, \\ Q_2(t) &= 50 \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{l}\right), \\ Q_3(t) &= 50 - Q_2(t), \\ Q_4(t) &= 50 + Q_2(t), \end{aligned}$$

gdzie przez n rozumiemy numer kroku czasowego (tzn. jeżeli przedział dzielimy np. na $N > 0$ kroków czasowych, to $n = 0, 1, 2, \dots, N$) a przez l liczbę zależną od liczby kroków czasowych w danej dziedzinie, tak, by $N/l = 5$.



Rysunek 5.1: Zadane wydatki na brzegach (2), (3) i (4) odpowiednio

Parametry związane z modelem

Przez K oznaczmy liczbę wlotów i wylotów. Dla geometrii X jest ona równa 4. Do symulacji numerycznych, przyjęto następujące parametry:

$$\lambda_k = 1 \quad \text{dla } k = 1, \dots, K$$

$$\gamma_k = 1 \quad \text{dla } k = 1, \dots, K$$

dla warunku brzegowego (3.30), oraz:

$$\hat{\lambda}_k = 0.001 \quad \text{dla } k = 1, \dots, K$$

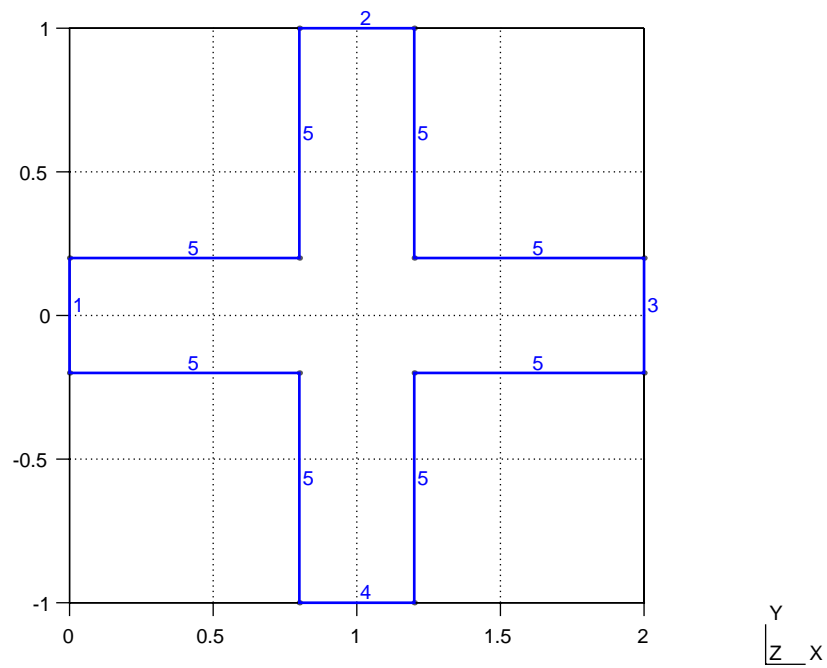
$$\hat{\gamma}_k = 0.001 \quad \text{dla } k = 1, \dots, K$$

dla warunku brzegowego (3.31).

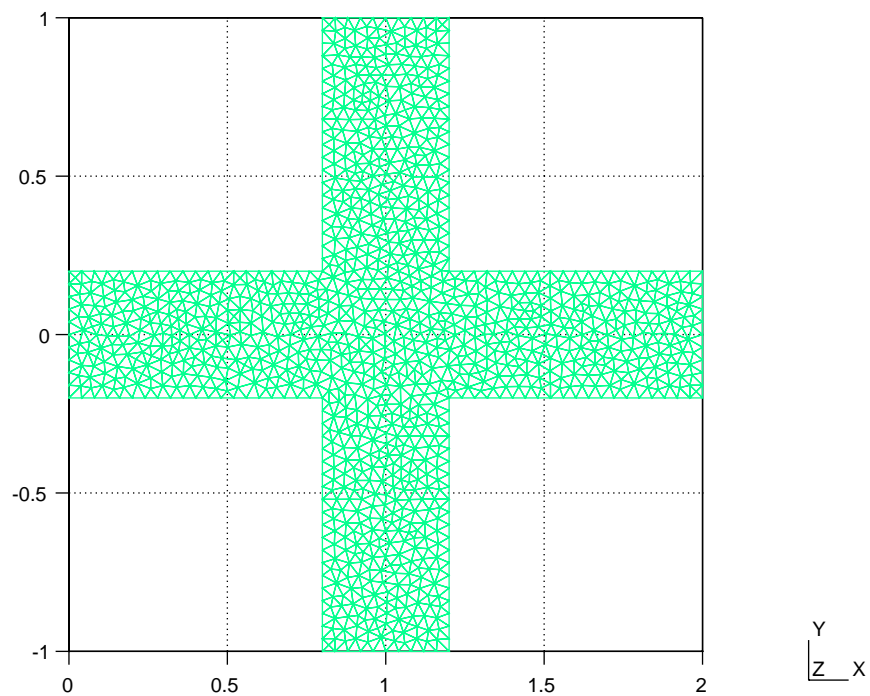
Całkowity czas symulacji oznaczać będziemy przez T_k . W niniejszej pracy zawsze przyjmujemy, że:

$$T_k = 5.0.$$

5.2. ZAŁOŻENIA SYMULACJI



Rysunek 5.2: Geometria X z numeracją brzegów.



Rysunek 5.3: Geometria X z podziałem na elementy skończone.

Na sztywnej ścianie, oznaczonej numerem (5), zgodnie z modelem przyjmujemy zerowy warunek brzegowy. Przyjmujemy również

$$f = 0.$$

Parametr lepkościowy ustalamy na:

$$\nu = 0.001.$$

5.3 Przegląd kodu realizującego algorytm

Kod, jak już wcześniej wspomniano, został napisany w języku Python. Skupimy się na wariancie (3.30) warunku brzegowego. Implementacja dla wariantu (3.31) jest analogiczna. Kod uwzględniający warunek brzegowy (3.31) jest w zasadzie analogiczny do poniższego, z dokładnością do różnic opisanych w podrozdziale poświęconemu algorytmowi.

Na początku załączono odpowiednie biblioteki i pakiety.

```
from dolfin import *
import numpy as np
from petsc4py import PETSc
from tqdm import trange
```

Biblioteka `dolfin` zapewnia nam struktury danych i algorytmy dla siatek w metodzie elementu skończonego oraz łączenie ze sobą tychże elementów z odpowiednimi strukturami numerycznej algebry liniowej w celu przeprowadzenia całej procedury rozwiązywania równań różniczkowych.

Biblioteka `numpy` daje nam możliwość budowania odpowiednich struktur numerycznych i działań za pomocą odpowiednio zoptymalizowanych funkcji Pythonowych. `PETSc` zapewnia zestaw struktur danych powiązanych z równoległymi obliczeniami numerycznymi. Będzie nam niezbędna do deklaracji wektorów w FEniCS. Biblioteka `tqdm` służy do wyświetlania paska postępu symulacji i stanowi jedynie *wizualny* dodatek do kodu.

Komenda:

```
set_log_level(40)
```

powoduje niewyświetlanie danych dla każdego kroku czasowego dotyczących zbieżności metody, za pomocą której rozwiązujemy układy równań.

Dalsze rozważania algorytmu będziemy prowadzić dla geometrii X (dla pozostałych przypadków są one analogiczne).

Standardowo w Pythonie deklarujemy kolejno dane związane z czasem, liczbą kroków, a także funkcjami dalekiego pola ciśnienia oraz wydatkami. W zależności od rzędu metody backward

5.3. PRZEGLĄD KODU REALIZUJĄCEGO ALGORYTM

musimy również zadeklarować wartości współczynników α . Poza tym, podajemy również (tym razem w formie wektora z biblioteki `numpy`) wartości współczynników λ oraz γ . Dla geometrii X mamy:

```
# podstawowe dane dotyczace symulacji
T          = 5.0          # czas symulacji
num_steps  = 5000         # liczba krokow czasowych
dt         = T/num_steps  # dlugosc kroku czasowego
nu         = 0.001        # lepkość (dynamiczna)
rho        = 1           # gestosc

# parametry wlotowo - wylotowe
# zadaj funkcje S_1 przy wlocie (1)
S_1 = 100
# zadaj wydatek przy wylocie (2)
Q_2 = 0
# zadaj wydatek przy wylocie (3)
Q_3 = 50
# zadaj wydatek przy wylocie (4)
Q_4 = 50

# wspolczynniki alpha do metody backward
# J == 1
alpha_0 = 1
alpha_1 = 1

# wspolczynniki lambda i gamma (podane w formie tablicy)
_lambda = np.array([1, 1, 1, 1])
_gamma  = np.array([1, 1, 1, 1])
_eta    = _lambda + alpha_0/dt * _gamma
```

Siatkę, którą będziemy wykorzystywać w obliczeniach numerycznych tworzymy za pomocą programu Gmsh. Jest ona zapisywana w formacie `.msh`, który nie jest niestety obsługiwany bezpośrednio przez FEniCSa. W pliku tym znajdują się informacje na temat położenia punktów podziału dziedziny, a także oznaczeń brzegów i odpowiednich regionów.

Formatem nas interesującym jest `.xml`. Biblioteka `dolfin` posiada wewnętrzny konwerter, dzięki któremu możemy z plików `.msh` uzyskać pliki `.xml`, w których zapisane są informacje na temat samej siatki jak i położenia odpowiednich punktów (czy leżą wewnątrz dziedziny (`physical_region`) czy na brzegu (`facet_region`), a jeżeli na brzegu, to na którym).

I tak, na przykład dla geometrii X , po stworzeniu regionów i siatki w programie Gmsh otrzymujemy plik $X.msh$. Następnie konwertujemy go za pomocą komendy `dolfin-convert X.msh X.xml`. Otrzymujemy trzy pliki z żądanym rozszerzeniem: $X.xml$ – zawiera punkty siatki, $X_facet_region.xml$ – oznaczenia dla brzegów, $X_physical_region.xml$ – dla wnętrza naszej dziedziny.

Za pomocą funkcji `Mesh` wskazujemy FEniCSowi, co jest naszą siatką. Następnie, używając funkcji `MeshFunction`, definiujemy elementy wnętrza i brzegów naszej siatki.

```
mesh = Mesh('X.xml')
cd = MeshFunction('size_t', mesh, 'X_physical_region.xml') # wnetrze
fd = MeshFunction('size_t', mesh, 'X_facet_region.xml')    # brzegi
```

Analogicznie w zasadzie, jak ma to miejsce przy badaniu matematycznym układu, musimy zdefiniować przestrzeń funkcyjną dla szukanych rozwiązań pola prędkości i ciśnienia. Robimy to w następujący sposób:

```
V0_elem = VectorElement('P', mesh.ufl_cell(), 2)
Q0_elem = FiniteElement('P', mesh.ufl_cell(), 1)
MEO_elem = MixedElement([V0_elem, Q0_elem])
MEO      = FunctionSpace(mesh, MEO_elem)

V2 = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 2)
Q2 = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

V3 = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 2)
Q3 = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)

V4 = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 2)
Q4 = FunctionSpace(mesh, 'P', 1)
```

Zadeklarowane obiekty `V0_elem` oraz `Q0_elem` mówią nam o przestrzeni potencjalnych rozwiązań układu – wektorowego pola prędkości i skalarnego pola ciśnienia. Argument `'P'` wskazuje, że rozwiązania poszukujemy wśród tzw. *funkcji Lagrange’a* odpowiednio drugiego i pierwszego rzędu na komórkach siatki `mesh.ufl_cell()`. Jako, że przestrzeń rozwiązań składa się z funkcji z różnych przestrzeni (dwuwymiarowe pole prędkości i skalarnie pole ciśnienia), deklarujemy to za pomocą `MixedElement` a określamy jako przestrzeń funkcyjną na siatce za pomocą `FunctionSpace`. Dalej określamy kolejno przestrzenie rozwiązań dla odpowiednich podzagadnień Stokesa, które będziemy rozwiązywać.

Na sztywnych ścianach, które w naszym przypadku oznaczyliśmy numerem (5), określamy

5.3. PRZEGLĄD KODU REALIZUJĄCEGO ALGORYTM

warunek *no-slip*. Argument `ME0.sub(0)` oznacza, że odwołujemy się do pola prędkości.

```
bcu_walls = DirichletBC(ME0.sub(0), Constant((0,0)), fd, 5)
```

W bardzo prosty sposób definiujemy miary całek (brzegowe i powierzchniowe).

```
ds = Measure('ds', domain =mesh, subdomain_data =fd)
dx = Measure('dx', domain =mesh, subdomain_data =cd)
```

Następnie za pomocą funkcji `TestFunctions` na przestrzeni funkcyjnej `ME0` deklarujemy funkcje próbne, zaś używając funkcji `Function` – rozwiązania podzagadnień. Poniżej podamy deklaracje dla podzagadnienia zerowego (dla pozostałych analogicznie):

```
# zerowe zagadnienie
v0, q0 = TestFunctions(ME0)

_w0 = Function(ME0)
w0, p0 = split(_w0)
```

Teraz zadamy zerowy warunek początkowy dla funkcji prędkości i ciśnienia. Funkcja `Expression` umożliwia nam odpowiedni zapis tych warunków (używamy w jej argumentach czystego C++). Następnie, funkcja `project` rzutuje nam dane wyrażenia na zerowy krok czasowy i odpowiednią podprzestrzeń (metoda `collapse`).

```
# warunek początkowy na poprzedni krok czasowy
war_01 = Expression(('0', '0'), degree =2)
war_02 = Expression('0', degree =1)

un = project(war_01, ME0.sub(0).collapse())
pn = project(war_02, ME0.sub(1).collapse())

# funkcja g ze sformułowania
g = Expression(('0', '0'), degree =2)
```

Przed zaimplementowaniem słabych postaci podzagadnień rozwiązujących układ, zdefiniujemy stałe wartości występujące w tych postaciach (takie jak np. lepkość, czy wartości współczynników γ). Jak pamiętamy, zadeklarowaliśmy już wcześniej ich wartości liczbowe.

```
# zdefiniowanie stałych wartosci wystepujacych w slabych postaciach
alpha_0 = Constant(alpha_0)
k = Constant(dt)
nu = Constant(nu)
```

```
gamma1 = Constant(_gamma[0])
gamma2 = Constant(_gamma[1])
gamma3 = Constant(_gamma[2])
gamma4 = Constant(_gamma[3])
```

Zdefiniujmy również wektor normalny:

```
n = FacetNormal(mesh)      # wektor normalny.
```

Przechodzimy do wypisania słabych postaci podzagadnień. Zaimplementujemy tylko pierwszą, resztę można analogicznie. W naszym przypadku \mathbf{dx} oznacza, że całkujemy względem miary zbioru, natomiast $\mathbf{ds}(\mathbf{nb})$ – względem odpowiedniego brzegu, gdzie \mathbf{nb} oznacza numer brzegu. Funkcja $\mathbf{dot}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ oznacza iloczyn skalarny wektorów \mathbf{u}, \mathbf{v} ; $\mathbf{grad}(\mathbf{u})$, gradient danej funkcji \mathbf{u} ; $\mathbf{div}(\mathbf{u})$ – jej dywergencję, natomiast $\mathbf{inner}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ oznacza iloczyn $u : v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} v_{ij}$.

I tak wyrażenie:

$$\frac{\alpha_0}{k} \int_{\Omega} w_1 v_1 dx + \nu \int_{\Omega} \nabla w_1 : \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} p_1 \nabla \cdot v_1 dx + \int_{\Gamma_1} v_1 \cdot n d\Gamma + \int_{\Omega} q_1 \nabla \cdot w_1 dx,$$

które jest odzwierciedleniem (5.9) w zapisie za pomocą zdefiniowanych funkcji w FEniCSie, ma postać:

```
F1 = alpha_0/k * dot(w1, v1) * dx + nu * inner(grad(w1), grad(v1)) * dx \
    - p1 * div(v1) * dx + dot(v1, n) * ds(1) + q1 * div(w1) * dx.
```

Żeby rozwiązać powyższe zagadnienie wariacyjne, używamy domyślnego solver-a FEniCSa, mianowicie funkcji:

```
solve(F1 == 0, _w1, [bcu_walls]),
```

gdzie kolejno za argumenty przyjmujemy zagadnienie wariacyjne, funkcję, gdzie będzie przechowywane rozwiązanie podzagadnienia (zdefiniowane wcześniej za pomocą `Function`) oraz warunki brzegowe (jeżeli uprzednio nie zostały włączone bezpośrednio do równania).

Jako, że funkcja `_w1` jest funkcją określoną na produkcie dwóch przestrzeni, żeby dostać się do rozwiązania będącego prędkością i ciśnieniem, używamy:

```
u1, p1 = _w1.split().
```

Poniższy kod pozwoli dla danego przypadku uzyskać informacje dotyczące wydatków na poszczególnych brzegach (ich liczbowe wartości). Dane te pozwolą nam sprawdzić, czy podczas przepływu spełniony jest warunek nieściśliwości (tyle samo płynu wpływa do układu, co wypływa).

```
F11 = assemble(dot(u1, n) * ds(1))
```

5.3. PRZEGLĄD KODU REALIZUJĄCEGO ALGORYTM

```
F12 = assemble(dot(u1, n) * ds(2))
F13 = assemble(dot(u1, n) * ds(3))
F14 = assemble(dot(u1, n) * ds(4))
```

Analogicznie postępujemy dla każdego podzagadnienia.

Stwórzmy teraz macierz F z algorytmu. Na początku, korzystając z biblioteki PETSc, definiujemy macierz **A1**. Określamy kolejno rozmiar oraz typ. Potem, za pomocą biblioteki **numpy** do macierzy **A** przypisujemy odpowiednio wyliczone wartości numeryczne. Wartości te wstawiamy do macierzy z biloteki PETSc za pomocą funkcji `setValues()` oraz `assemble()`. Na końcu, za pomocą funkcji `PETScMatrix()` mówimy FEniCSowi, żeby traktował stworzoną macierz **A1** jako macierz typu PETSc.

```
A1 = PETSc.Mat().create()
A1.setSizes([4,4])
A1.setType('aij')
A1.setUp()

A = np.zeros([4,4])
A[0,0] = 1 - _eta[0] * F11
A[0,1] = - _eta[0] * F21
A[0,2] = - _eta[0] * F31
A[0,3] = - _eta[0] * F41

A[1,0] = F12
A[1,1] = F22
A[1,2] = F32
A[1,3] = F42

A[2,0] = F13
A[2,1] = F23
A[2,2] = F33
A[2,3] = F43

A[3,0] = F14
A[3,1] = F24
A[3,2] = F34
A[3,3] = F44

A1.setValues([0,1,2,3], [0,1,2,3], A)
```

```
A1.assemble()
```

```
F = PETScMatrix(A1)
```

Dane dla poszczególnych kroków czasowych zapisywać będziemy w plikach o rozszerzeniu `.xdmf`, które będzie można wczytać za pomocą programu ParaView.

```
xdmf_file0 = XDMFFile('mgr_x2_t_' + str(num_steps) + '/solution_u.xdmf')
xdmf_file1 = XDMFFile('mgr_x2_t_' + str(num_steps) + '/solution_p.xdmf')
```

Linijka:

```
comm = MPI.comm_world
```

definiuje komunikator pomiędzy procesami, które mogą zachodzić równolegle. U nas jest niezbędny do późniejszego zdefiniowania wektora `beta` odzwierciedlającego β z algorytmu.

Całkowite wydatki na poszczególnych wlotach/wylotach, otrzymane z rozwiązania zaimplementowanych podzagadnień, można policzyć ze wzoru:

```
wydatek1 = assemble(dot(u1, n) * ds(1) + dot(u1, n) * ds(2) + dot(u1, n) * ds(3) +
    dot(u1,n) * ds(4))
```

dla pierwszego podzagadnienia (dla pozostałych analogicznie).

Zdefiniujmy teraz zerowe zagadnienie Stokesa, które jest zdyskretyzowaną formą (5.11). Na początku zapiszmy pojawiające się w równaniu wydatki:

```
f1 = dot(un, n) * ds(1)
f1 = Constant(assemble(f1))
```

```
f2 = dot(un, n) * ds(2)
f2 = Constant(assemble(f2))
```

```
f3 = dot(un, n) * ds(3)
f3 = Constant(assemble(f3))
```

```
f4 = dot(un, n) * ds(4)
f4 = Constant(assemble(f4))
```

Równanie (5.11) w składni FEniCS przyjmuje postać:

```
F0 = alpha_0/k * dot(w0, v0) * dx \
    + nu * inner(grad(w0), grad(v0)) * dx \
    - p0 * div(v0) * dx \
```

5.3. PRZEGLĄD KODU REALIZUJĄCEGO ALGORYTM

```

+ q0 * div(w0) * dx \
- dot(g , v0) * dx \
- alpha_1/k * dot(un, v0) * dx \
- alpha_1/k * gamma1 * f1 * dot(v0, n) * ds(1) \
- alpha_1/k * gamma2 * f2 * dot(v0, n) * ds(2) \
- alpha_1/k * gamma3 * f3 * dot(v0, n) * ds(3) \
- alpha_1/k * gamma4 * f4 * dot(v0, n) * ds(4)

```

Czas mierzymy od 0.0, zatem zdefiniujemy również:

```
t = 0.0
```

Teraz przechodzimy do głównej pętli układu. Funkcja `solve` rozwiązuje postawione przez nas wcześniej zagadnienie zerowe. Następnie aktualizujemy warunki dotyczące wlotów i wylotów na odpowiednich brzegach, oraz przypisujemy rozwiązanie.

```

for qq in trange(num_steps):

    solve(F0 == 0, _w0, [bcu_walls])

    Q_2 = 50 * np.sin(qq/l11 * np.pi)
    Q_3 = 50 - Q_2
    Q_4 = 50 + Q_2

    u0, p0 = _w0.split()

```

Dalej w pętli liczymy wydatki na odpowiednich brzegach z zagadnienia zerowego. W wektorze `b` zapisujemy prawe strony układu równań (5.20).

```

b = np.zeros(4)
b[0] = S_1 + F01
b[1] = Q_2 - F02
b[2] = Q_3 - F03
b[3] = Q_4 - F04

```

Definiujemy wektor β rozwiązań układu (5.20) – zauważmy, że właśnie tutaj potrzebujemy wcześniej zdefiniowanego komunikatora `comm`. Podobnie definiujemy wektor `z`, do którego przypisujemy znane policzone wcześniej wartości wektora `b`. Za pomocą funkcji `solve` rozwiązujemy liniowy układ równań $M * \text{beta} = z$.

```

beta = Vector(comm, 4)
z = Vector(comm, 4)
z.add_local(b)

```



```
# rozwiadz ukklad
solve(M, beta, z)
```

Otrzymane współczynniki przekształcamy na typ `float`, pozyskując je wcześniej za pomocą funkcji `.get_local()`. Następnie na podstawie (5.13) tworzymy kombinacje liniowe, które będą stanowić rozwiązanie dla poprzedniego kroku czasowego. Funkcja `project` rzutuje nam rozwiązanie na odpowiednią podprzestrzeń ME0. Funkcja `collapse` użyta przy podprzestrzeni powoduje, że jest ona traktowana jako odpowiednia przestrzeń funkcyjna.

```
bt = beta.get_local()

b1 = float(bt[0])
b2 = float(bt[1])
b3 = float(bt[2])
b4 = float(bt[3])

# poprzednie rozwiazanie
un_temp = project(u0 + b1*u1 + b2*u2 + b3*u3 + b4*u4, ME0.sub(0).collapse())
pn_temp = project(p0 + b1*p1 + b2*p2 + b3*p3 + b4*p4, ME0.sub(1).collapse())

un.vector()[:] = un_temp.vector()
pn.vector()[:] = pn_temp.vector()
```

Następnie aktualizujemy wartości wydatków względem już nowego rozwiązania, otrzymane rozwiązanie zapisujemy do pliku i aktualizujemy krok czasowy. Tym samym kończymy iterację pętli dla danego kroku czasowego.

```
f1 = dot(un, n) * ds(1)
f1 = Constant(assemble(f1))

f2 = dot(un, n) * ds(2)
f2 = Constant(assemble(f2))

f3 = dot(un, n) * ds(3)
f3 = Constant(assemble(f3))

f4 = dot(un, n) * ds(4)
f4 = Constant(assemble(f4))
```

```

xdmf_file0.write(un, t)
xdmf_file1.write(pn, t)

t += dt

```

5.4 Wyniki i testy

W dowodzie istnienia, jednoznaczności i regularności niestacjonarnego problemu Stokesa skupiliśmy się na warunku brzegowym (3.31). W testach algorytmu rozważania prowadzić będziemy dla warunku brzegowego (3.30). Wyjątek uczynimy w przypadku badania zależności względem parametrów $\widehat{\lambda}_k$ i $\widehat{\gamma}_k$ (w (3.30) analogiczne parametry oznaczaliśmy przez λ_k i γ_k), gdzie pokażemy istotne różnice pomiędzy wynikami dwóch implementacji.

Warunki sprzętowe i oprogramowanie

Testy przeprowadzono na laptopie z procesorem Intel® Core™ i7-4600U CPU @ 2.10GHz, 2701 MHz, liczba rdzeni: 2, liczba procesorów logicznych: 4. Zainstalowana pamięć fizyczna: 8 GB. Symulacje testowano na systemie Linux Manjaro (wersja jądra: 4.14.109-1-MANJARO). Skrypt napisano w języku Python w wersji 3.7.3, z GCC z wersją 8.2.1, przy pomocy platformy FEniCS w wersji 2018.1.0. Siatki wykonano za pomocą programu Gmsh w wersji 4.1.0-linux64. Wizualizacje wykonano za pomocą programu Paraview w wersji 5.6.0-MPI-Linux_64bit oraz biblioteki `matplotlib` w wersji 2.2.3.

Siatka

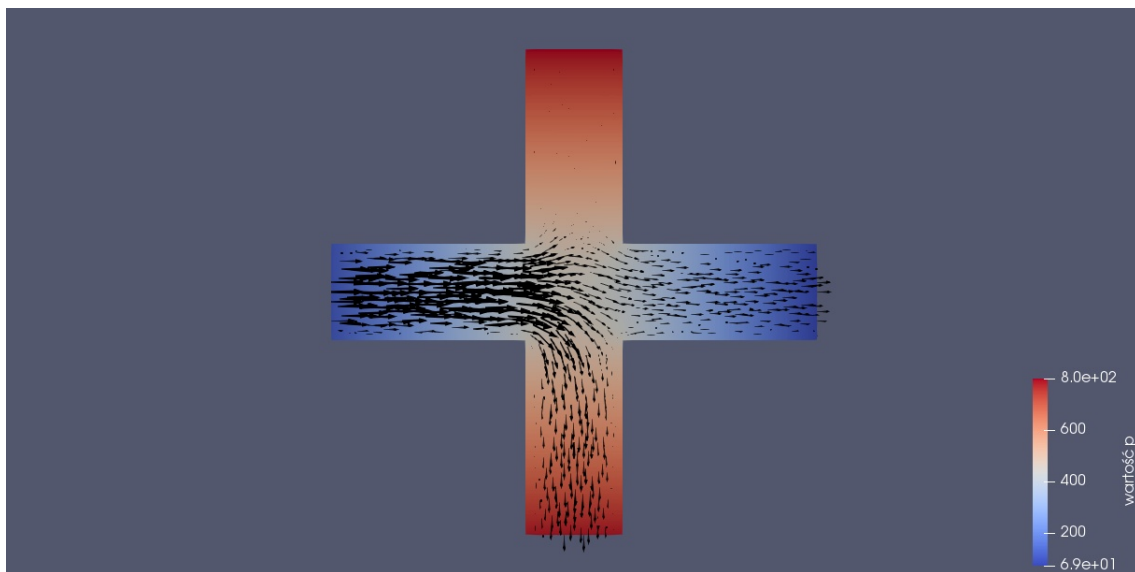
Do badań algorytmu używaliśmy siatki jak na rysunku 5.3. Dziedzina zawiera 1256 węzłów, które dzielą obszar na 2510 elementów skończonych.

Przykładowy wynik symulacji

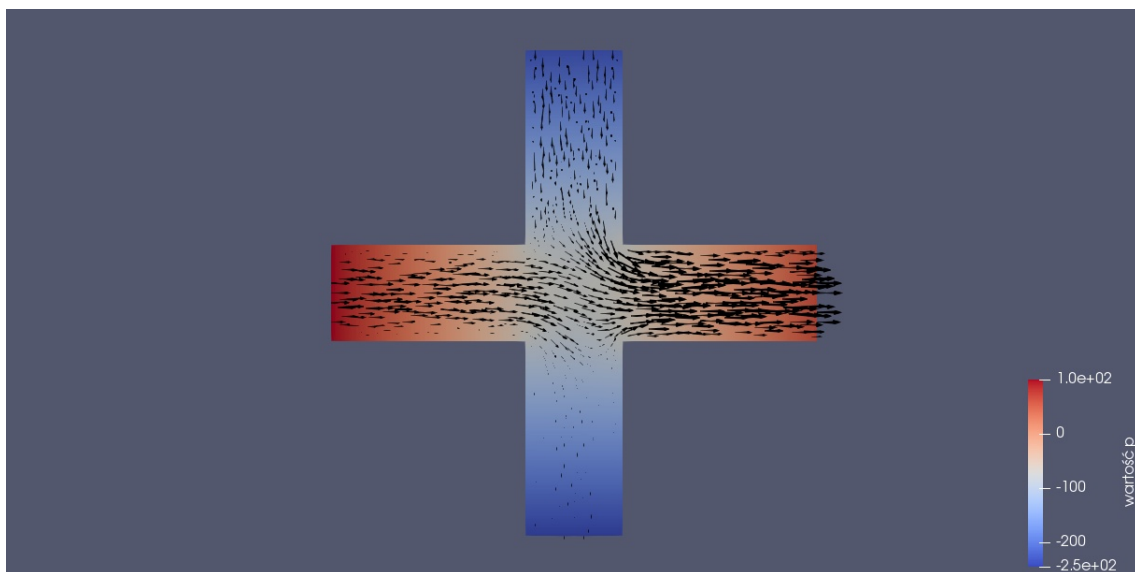
Wynikiem działania symulacji są pliki `solution_u.xmdf` oraz `solution_p.xmdf`, które przechowują dane dotyczące odpowiednio pola prędkości i pola ciśnienia. Przykładową wizualizację symulacji dla warunku (3.31) przedstawia rysunek 5.4.

Badanie zależności względem długości kroku czasowego

Zbadajmy teraz, jak wygląda zależność długości kroku czasowego Δt od wydatku objętościowego dla całego układu, przy BDF rzędu 1. W tym celu rozważmy przypadki $\Delta t \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Wiemy, że przepływ jest nieściśliwy, co oznacza, że wydatek ten powinien wynosić 0.



Rysunek 5.4: Symulacja przepływu w geometrii X, dla założeń przyjętych w podrozdziale 5.2, przy $N = 500$ kroków czasowych w czasie $t = 0.5$. Implementacja została wykonana dla warunku brzegowego (3.31). Na rysunku widzimy zaznaczone pole wektorowe prędkości. W skali kolorów zaznaczona jest wartość ciśnienia p .



Rysunek 5.5: Symulacja przepływu z tymi samymi założeniami, co w przypadku rysunku 5.4, jednakże dla czasu $t = 1.67$. Nastąpiła zmiana wartości funkcji S na brzegu (1) więc widzimy dopasowanie pola ciśnienia oraz zmianę kierunku pola prędkości.

Jak widzimy w tab. 5.2, symulacje odzwierciedlają nieściśliwość cieczy. Całkowity wydatek objętościowy dla przeprowadzonych kroków czasowych jest rzędu 10^{-12} , w najkorzystniejszym przypadku 10^{-13} . Zmniejszanie kroku czasowego nie wpływa znacząco na różnice w wynikach.

Na podstawie założeń symulacji, wiemy, że wydatek Q_2 to zmieniająca się w czasie sinusoida,

Δt	wydatek maksymalny	wydatek minimalny
0.1	$2.42 \cdot 10^{-12}$	$2.63 \cdot 10^{-13}$
0.01	$3.37 \cdot 10^{-12}$	$3.84 \cdot 10^{-13}$
0.001	$1.50 \cdot 10^{-12}$	$3.61 \cdot 10^{-13}$

Tablica 5.2: Krok czasowy, wraz z otrzymanym wydatkiem maksymalnym oraz minimalnym podczas przeprowadzania symulacji.

która ma istotny wpływ na wydatki Q_3 i Q_4 . Schematycznie przedstawia to wykres 5.1.

Algorytm powinien samodzielnie dopasować wydatek na brzegu (1) na podstawie informacji o ciśnieniu w dalekim polu. Żeby zachować nieściślność układu, Q_1 powinno być równe sumie Q_2 , Q_3 i Q_4 , ale z przeciwnym znakiem:

$$Q_1 = -(Q_2 + Q_3 + Q_4).$$

Z faktu, że w naszym przypadku $Q_3 + Q_4 = 100$, musi być:

$$Q_1 = -Q_2 - 100 \quad (5.25)$$

i z tą wartością porównujemy otrzymane w symulacji wyniki.

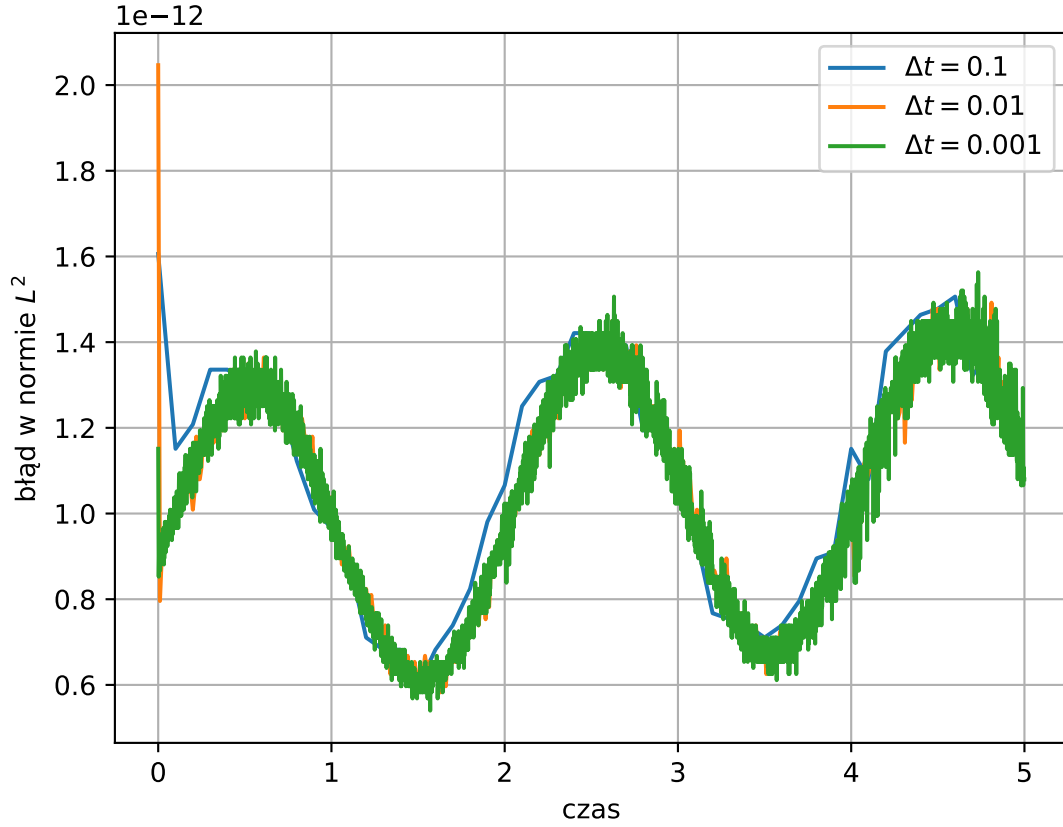
Rysunek 5.6 przedstawia wykres błędu, liczonego względem normy L^2 pomiędzy dokładną wartością Q_1 (obliczoną na podstawie (5.25)), a otrzymaną w symulacji dla rozważanych przez nas kroków czasowych.

Jak widzimy, zmniejszanie kroku czasowego nie zmniejsza istotnie wielkości błędu względem dokładnej wartości Q_1 . Wartości różnic w normie L^2 są zbliżone. Ma to istotne znaczenie, ze względu na fakt, że zaimplementowany domyślny solver wykonywał algorytm w prędkości ok. 4.8 sekundy na jedną iterację pętli, zaś liczba iteracji jest zależna od liczby kroków czasowych, więc każde zwiększenie liczby kroków liniowo powoduje zwiększenie czasu wykonywania algorytmu.

Badanie zależności względem współczynników $\hat{\lambda}$ i $\hat{\gamma}$ oraz λ i γ

Zbadajmy teraz wrażliwość algorytmów na zmiany współczynników $\hat{\lambda}$ i $\hat{\gamma}$ dla BDF rzędu 1. Rozważmy algorytm realizujący kod dla warunku brzegowego typu (3.31).

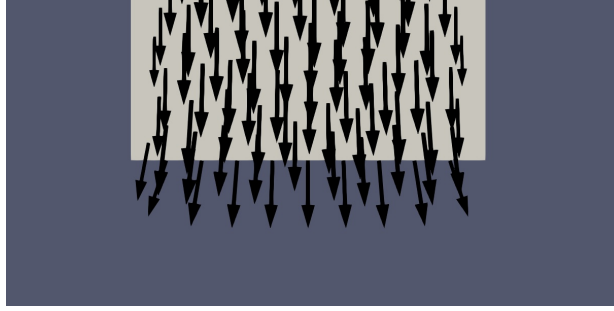
Symulacje przeprowadzimy dla ustalonych wcześniej założeń dotyczących warunków brzegowo-początkowych, z dokładnością do wprowadzanych zmian w zakresie wektorów parametrów $\hat{\lambda}$ i $\hat{\gamma}$. Wszystkie algorytmy będziemy realizować dla $N = 500$ kroków czasowych, gdzie krok czasowy jest stały i $\Delta t = 0.01$. Rozważamy wylot z numerem (4).



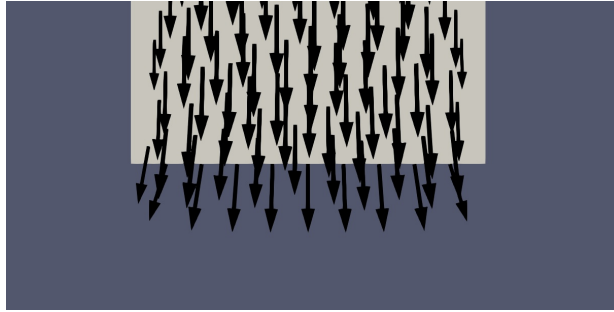
Rysunek 5.6: Różnica między dokładną wartością Q_1 a otrzymaną w symulacji dla rozważanych kroków czasowych, liczona w normie L^2 .

Zauważmy jak zmienia się pole prędkości przy tym wylocie. Dla algorytmu z ustawionymi parametrami $\hat{\lambda}_k = 10, k = 1, \dots, 4$ oraz $\hat{\gamma}_k = 10, k = 1, \dots, 4$ wektory nie są równoległe względem ścian kanału. Nie jest to zachowanie przez nas pożądane. Kolejne testy numeryczne wykazują, że w miarę zmniejszania parametrów $\hat{\lambda}_k$ i $\hat{\gamma}_k$ linie pola są zbliżone do prostopadłych względem wylotu. Otrzymane wyniki przedstawiają rysunki 5.7 – 5.10.

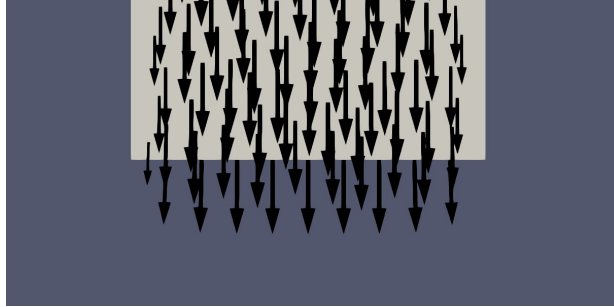
W przypadku algorytmu zaimplementowanego dla warunku brzegowego (3.30), linie pola wektorowego bardzo słabo zależą od parametrów λ i γ . Przedstawiają to rysunki 5.11 – 5.13.



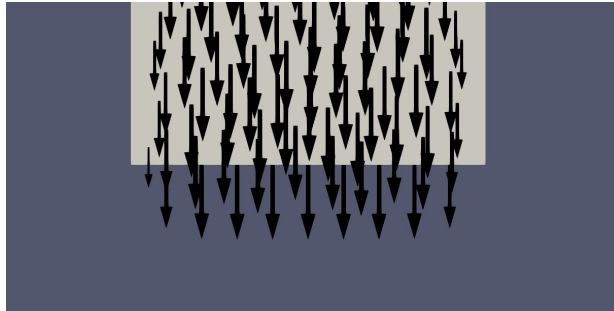
Rysunek 5.7: Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 10, \widehat{\gamma}_k = 10, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. Widoczne wyraźne *rozptywanie się* płynu poza obszarem dziedziny.



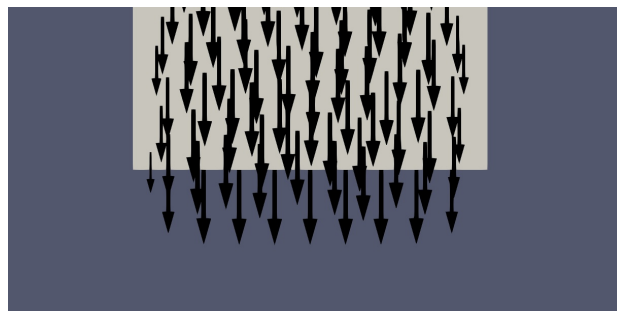
Rysunek 5.8: Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 1, \widehat{\gamma}_k = 1, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$.



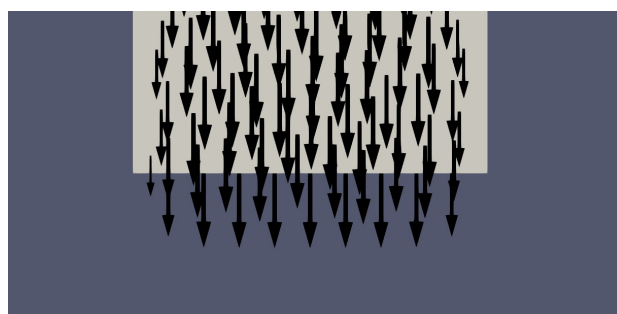
Rysunek 5.9: Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 0.01, \widehat{\gamma}_k = 0.01, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. Linie pola prędkości są zbliżone równoległym względem ścianek.



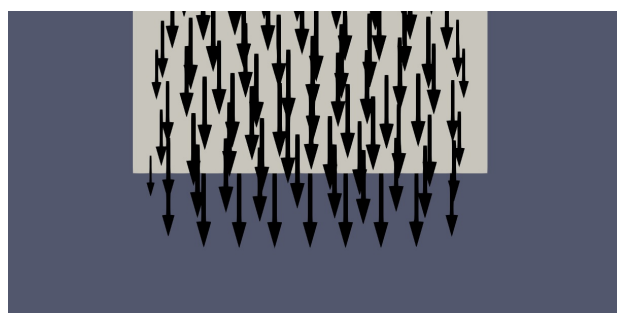
Rysunek 5.10: Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 0.0001, \widehat{\gamma}_k = 0.0001, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. W miarę zmniejszania parametrów obserwujemy pożądany wynik.



Rysunek 5.11: Wylot (4) dla $\lambda_k = 10, \gamma_k = 10, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$.



Rysunek 5.12: Wylot (4) dla $\lambda_k = 1, \gamma_k = 1, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$.



Rysunek 5.13: Wylot (4) dla $\lambda_k = 0.0001, \gamma_k = 0.0001, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$.

Rozdział 6

Podsumowanie

Dyskusja

W niniejszej pracy szczegółowo przedstawiliśmy analizę matematyczną badanego zagadnienia Stokesa z postawionymi warunkami brzegowymi typu open dissipative i w tym zakresie jest ona samowystarczalna. Dowody do cytowanych twierdzeń podane są w odnośnikach do literatury.

Po krótkim wstępie dotyczącym mechaniki płynów szybko przeszliśmy do wyprowadzenia układu. Wytlumaczyliśmy również na czym polegają warunki brzegowe typu open oraz przedstawiliśmy sens fizyczny postawionych przez nas warunków brzegowych.

Udowodniliśmy, że w szczególnym przypadku, to znaczy gdy znane są pola dalekiego ciśnienia dla wszystkich wlotów i wylotów, postawiony układ (3.29) z warunkiem brzegowym (3.31) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dzięki wprowadzonemu w pierwszych dwóch rozdziałach aparatowi matematycznemu pokazaliśmy szczegółowo opisany dowód istnienia rozwiązania (dla szczególnego przypadku) oparty na aproksymacyjnej metodzie Galerkina.

Na podstawie preprintu [10] skonfrontowaliśmy otrzymane ścisłe wyniki matematyczne z symulacjami, które potwierdziły fizyczną naturę tak zaproponowanych warunków brzegowych. Opisaliśmy między innymi kod, który tę symulację realizuje oraz sprawdziliśmy podstawowe zależności (takie jak zależność od długości kroku czasowego a nieściśliwość cieczy oraz zależność od parametrów λ i γ). W wynikach tych uwzględniliśmy już dwa warunki brzegowe (3.30) oraz (3.31).

Płyn w symulacji zachowuje swoją nieściśliwą naturę. Okazuje się również, że długość kroku czasowego nie wpływa istotnie na dokładność rozwiązania – wyniki zachowują ten sam rząd wielkości. Zauważyliśmy, że podany schemat numeryczny dla warunku brzegowego (3.30) zależy ściśle od parametrów.

Możliwość kontynuacji badań

W dalszych pracach związanych z modelem warto skupić się na następujących aspektach, które podzielono na te związane z matematyczną częścią pracy oraz numeryczną.

Matematyczna część pracy:

- Wykazanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania dla warunku brzegowego (3.31).
- Pokazanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania w ogólności (to znaczy, gdy pole dalekiego ciśnienia jest znane jedynie dla części wlotów i wylotów – tak jak dla założeń symulacji).
- Zbadanie zależności rozwiązania od parametrów λ i γ .

Numeryczna część pracy:

- Znalezienie dokładnego rozwiązania na dziedzinie T lub X kształtnej i zbadanie dokładności metody.
- Zbadanie zależności metody od rzędu metody BDF.
- Zbadanie zależności metody od gęstości siatki.
- Rozważenie układu równań Naviera-Stokesa.

Bibliografia

- [1] A. Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1986.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer 2011.
- [3] I.N. Bronsztejn, H. Muhlig, G. Musiol, K.A. Siemiendiajew, *Nowoczesne Kompendium Matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004
- [4] A.J. Chorin, J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, Nowy Jork, 1993.
- [5] L.C. Evans, *Równania Różniczkowe Cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [6] A. Kufner, O. John, S. Fucik, *Function Spaces*, Springer Netherlands, 1997.
- [7] B. Maury, *The Respiratory Systems in Equations. Modeling, Simulation and Applications*, Springer Verlag Italia 2013.
- [8] W. Rudin, *Analiza Funkcjonalna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
- [9] W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona.*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Łódź 1986.
- [10] J. Szumbarski, *Inertial incompressible flows with inertial-dissipative inflow/outflow conditions. Part 1: Mathematical formulation and numerical methods*, preprint.
- [11] R. Temam, A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [12] T. I. Zohdi, *A Finite Element Primer for Beginners*, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.

Spis rysunków

3.1	Schematyczny rysunek płuc z zaznaczonym drzewem oskrzelowym.	41
3.2	Porównanie rzeczywistego układu z rozważanym schematem.	42
3.3	Rozkład pola prędkości przy wylocie dla warunku brzegowego z symetrycznym tensorem naprężeń σ	42
3.4	Rozkład pola prędkości przy wylocie dla warunku brzegowego z niesymetrycznym tensorem naprężeń σ	43
3.5	Płyn wpływa w <i>wirtualny</i> kanał.	43
4.1	Schemat dziedziny dla rozważanego zagadnienia.	47
5.1	Zadane wydatki na brzegach (2), (3) i (4) odpowiednio	68
5.2	Geometria X z numeracją brzegów.	69
5.3	Geometria X z podziałem na elementy skończone.	69
5.4	Symulacja przepływu w geometrii X, dla założeń przyjętych w podrozdziale 5.2, przy $N = 500$ kroków czasowych w czasie $t = 0.5$. Implementacja została wykonana dla warunku brzegowego (3.31). Na rysunku widzimy zaznaczone pole wektorowe prędkości. W skali kolorów zaznaczona jest wartość ciśnienia p	80
5.5	Symulacja przepływu z tymi samymi założeniami, co w przypadku rysunku 5.4, jednakże dla czasu $t = 1.67$. Nastąpiła zmiana wartości funkcji S na brzegu (1) więc widzimy dopasowanie pola ciśnienia oraz zmianę kierunku pola prędkości.	80
5.6	Różnica między dokładną wartością Q_1 a otrzymaną w symulacji dla rozważanych kroków czasowych, liczona w normie L^2	82
5.7	Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 10, \widehat{\gamma} = 10, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. Widoczne wyrażenie <i>rozpływanie się</i> płynu poza obszarem dziedziny.	83
5.8	Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 1, \widehat{\gamma}_k = 1, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$	83
5.9	Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 0.01, \widehat{\gamma}_k = 0.01, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. Linie pola prędkości są zbliżone równoległym względem ścianek.	83

5.10	Wylot (4) dla $\widehat{\lambda}_k = 0.0001, \widehat{\gamma}_k = 0.0001, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$. W miarę zmniejszania parametrów obserwujemy pożądaną wynik.	83
5.11	Wylot (4) dla $\lambda_k = 10, \gamma_k = 10, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$	84
5.12	Wylot (4) dla $\lambda_k = 1, \gamma_k = 1, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$	84
5.13	Wylot (4) dla $\lambda_k = 0.0001, \gamma_k = 0.0001, k = 1, \dots, 4$, w czasie $t = 0.5$	84

Spis tabel

5.1	Współczynniki α dla schematu BDF dla różnych rzędów J	63
5.2	Krok czasowy, wraz z otrzymanym wydatkiem maksymalnym oraz minimalnym podczas przeprowadzania symulacji.	81

Spis załączników

1. Płyta CD zawierająca treść niniejszej pracy dyplomowej oraz kody użyte w części numerycznej.