Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

О т ч е т

по домашней работе № 1-2

Вариант № 9

Дисциплина:
Теория автоматов и алгоритмические языки

Студент группы ФН11-52Б ____________ **Очкин Н.В.**
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель ____________ **Кутыркин В.А.**
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

Содержание

1 Задача I

Найти СДНФ, СКНФ и полином Жегалкина булевой функции f от четырёх переменных, заданной таблицей:

#	**A**	**B**	**C**	**D**	***f***
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

Если возможно, сократить запись совершенных нормальных форм и сделать проверку, используя таблицу истинности, в том числе и для полинома Жегалкина.

1.1 СДНФ

1.1.1 Часть 1. Метод Квайна — Мак-Класки

1.1.1.1 Шаг 1: находим основные импликанты

Можно легко записать СДНФ, просто просуммировав минтермы, где функция принимает значение 1.

$$f = \overset{0}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{6}{\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}} + \overset{7}{\overline{A}\,B\,C\,D} + \overset{9}{A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D} + \overset{11}{A\,\overline{B}\,C\,D} + \overset{12}{A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{13}{A\,B\,\overline{C}\,D} + \overset{15}{A\,B\,C\,D}$$

$$f = (0,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15)$$

Для оптимизации запишем минтермы, включая те, которые соответствуют равнодушным состояниям, в следующую таблицу:

Количество “1”	Минтерм	Двоичное представление
0	m0	0000*
2	m6	0110
	m9	1001
	m12	1100
3	m7	0111
	m11	1011
	m13	1101
4	m15	1111

Теперь можно начинать комбинировать между собой минтермы, то есть проводить операцию склеивания. Если два минтерма отличаются лишь символом, который стоит в одной и той же позиции в обоих, заменяем этот символ на «-», это означает, что данный символ для нас не имеет значения. Термы, не поддающиеся дальнейшему комбинированию, обозначаются «*». При переходе к импликантам второго ранга, трактуем «-» как третье значение. Например: -110 и -100 или -11- могут быть скомбинированы, но не -110 и 011-.

Импликанты 1-го уровня

Количество "1"	Минтерм	Двоичное представление
2	m(6, 7)	011-*
	m(9, 11)	10-1
	m(9, 13)	1-01
	m(12, 13)	110-*
3	m(7, 15)	-111
	m(11, 15)	1-11
	m(13, 15)	11-1

Импликанты 2-го уровня

Количество "1"	Минтерм	Двоичное представление
2	m(9, 11, 13, 15)	1–1*
	m(9, 13, 11, 15)	1–1

Таким образом, мы получили следующую **сокращенную дизъюнктивную нормальную форму** заданной функции:

$$f = \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\mathrm{C}}\,\bar{\mathrm{D}} + \bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\mathrm{C} + \mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\,\mathrm{D}$$

1.1.1.2 Шаг 2: таблица простых импликант

	0	6	7	9	11	12	13	15	
m0	1								$\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$
m(6, 7)		1	1						$\bar{A}\,B\,C$
m(12, 13)						1	1		$A\,B\,\bar{C}$
m(9, 11, 13, 15)				1	1		1	1	$A\,D$
	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	☆	

1.1.2 Часть 2. Метод Петрика

Поскольку сокращенная форма функции очень часто не является минимальной, воспользуемся методом Петрика для нахождения всех возможных минимальных форм на основе сокращенных.

Рассмотрим таблицу простых импликант, полученную в методе Квайна — Мак-Класки. В колонках находится различное число единиц. Например, в колонке 0 записана одна единица, это значит, что минтерм m0 останется в функции, если ипликанта $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ не будет удалена. Следовательно, импликанту $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$ удалять нельзя. Точно так же нельзя удалять и импликанту $A\,D$, и т.д. На этом основании импликантную матрицу можно упростить.

Поскольку простые испликанты $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$, $A\,D$, и т.д. являются обязательными для всех вариантов тупиковых форм, то их из матрицы можно удалить. Вместе с ними можно удалить и образующие их минтермы, так как в функции они уже содержатся за счет импликант $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\,\bar{D}$, $A\,D$, и т.д. В таблице эти минтермы отмечены звездочками (под колонками).

После всех удалений матрица простых импликант уничтожается, что означает, что найденная скоращенная форма является минимальной.

1.1.3 Проверка

#	**A**	**B**	**C**	**D**	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}BC$	$AB\bar{C}$	AD	$\boldsymbol{f}$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	0	2	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0	0	0	1	1
12	1	1	0	0	0	0	1	0	1
13	1	1	0	1	0	0	1	1	1
14	1	1	1	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	0	0	0	1	1

Провекра сошлась.

1.1.4 Ответ

Единственная минимальная дизъюнктивная нормальная форма исходной функции:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + AD$$

1.2 СКНФ

При нахождении тупиковых и минимальных КНФ булевых функций необходимо действовать в той же последовательности, что и в предыдщем подразделе, но с учетом того, что для инверсии заданной функции требуется найти все тупиковые формы. В общем случае последовательность действий, представленная в данном подразделе состоит в следующем:

a) найти СДНФ заданной функции f;

b) записать СДНФ функции $\overline{f}$;

c) представить функцию $\overline{f}$ в виде сокращенной ДНФ;

d) методом Петрика найти все тупиковые формы для ДНФ функции $\overline{f}$;

e) все тупиковые форму проинвертировать по теореме де Моргана. Получим список тупиковых КНФ заданной функции $\overline{f}$;

f) выбрать из тупиковых форм все минимальные по числу вхождений аргументов.

1.2.1 Нахождение тупиковых и минимальных КНФ

1.2.1.1 Найти СДНФ заданной функции *f*

$$f = \overset{0}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{6}{\overline{A}\,B\,C\,\overline{D}} + \overset{7}{\overline{A}\,B\,C\,D} + \overset{9}{A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D} + \overset{11}{A\,\overline{B}\,C\,D} + \overset{12}{A\,B\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{13}{A\,B\,\overline{C}\,D} + \overset{15}{A\,B\,C\,D}$$

$$f = (0,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15)$$

1.2.1.2 Записать СДНФ функции $\overline{f}$

$$\overline{f} = \overset{1}{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D} + \overset{2}{\overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D}} + \overset{3}{\overline{A}\,\overline{B}\,C\,D} + \overset{4}{\overline{A}\,B\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{5}{\overline{A}\,B\,\overline{C}\,D} + \overset{8}{A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}} + \overset{10}{A\,\overline{B}\,C\,\overline{D}} + \overset{14}{A\,B\,C\,\overline{D}}$$

$$\overline{f} = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 14)$$

1.2.1.3 Представить функцию $\bar{f}$ в виде сокращенной ДНФ

Количество "1"	Минтерм	Двоичное представление
1	m1	0001
	m2	0010
	m4	0100
	m8	1000
2	m3	0011
	m5	0101
	m10	1010
3	m14	1110

Импликанты 1-го уровня

Количество "1"	Минтерм	Двоичное представление
1	m(1, 3)	00-1*
	m(1, 5)	0-01*
	m(2, 3)	001-*
	m(2, 10)	-010*
	m(4, 5)	010-*
	m(8, 10)	10-0*
2	m(10, 14)	1-10*

Таким образом, мы получили следующую **сокращенную дизъюнктивную нормальную форму** инверсии заданной функции:

$$\bar{f} = \bar{A}\,\bar{B}\,D + \bar{A}\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C + \bar{B}\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,\bar{D} + A\,C\,\bar{D}$$

	1	2	3	4	5	8	10	14	
m(1, 3)	1		1						$\bar{A}\,\bar{B}\,D$
m(1, 5)	1				1				$\bar{A}\,\bar{C}\,D$
m(2, 3)		1	1						$\bar{A}\,\bar{B}\,C$
m(2, 10)		1					1		$\bar{B}\,C\,\bar{D}$
m(4, 5)				1	1				$\bar{A}\,B\,\bar{C}$
m(8, 10)						1	1		$A\,\bar{B}\,\bar{D}$
m(10, 14)							1	1	$A\,C\,\bar{D}$
				☆	☆	☆	☆	☆	

1.2.1.4 Методом Петрика найти все тупиковые формы для ДНФ функции $\bar{f}$

После всех удалений получим упрощенную матрицу:

	1	2	3		
m(1, 3)	1		1	$\bar{A}\,\bar{B}\,D$	φ_1
m(1, 5)	1			$\bar{A}\,\bar{C}\,D$	φ_2
m(2, 3)		1	1	$\bar{A}\,\bar{B}\,C$	φ_3
m(2, 10)		1		$\bar{B}\,C\,\bar{D}$	φ_4
m(4, 5)				$\bar{A}\,B\,\bar{C}$	φ_5
m(8, 10)				$A\,\bar{B}\,\bar{D}$	φ_6
m(10, 14)				$A\,C\,\bar{D}$	φ_7

Введем логические переменные $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_6$ (они записаны в дополнительной колонке в правой части таблицы). Будем считать, что $\varphi_1 = 1$, если простая импликанта $\bar{A}\,\bar{B}\,D$ входит в функцию, и $\varphi_1 = 0$, если не входит. Аналогично и для других простых импликант. Тогда если

$$\varphi_1 + \varphi_3 = 1,$$

то минтерм m_3 входит в функцию; если $\varphi_3 + \varphi_4 = 1$, то m_2 входит в функцию и т.д.

Условие, при котором все минтермы останутся в функции, запишется в виде

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_3 + \varphi_4)(\varphi_1 + \varphi_3) = 1.$$

Раскроем скобки и выполним все операции согласно теореме поглощения. В конечном итоге получим

$$\overset{\textcircled{1}}{\varphi_1\varphi_3} + \overset{\textcircled{2}}{\varphi_1\varphi_4} + \overset{\textcircled{3}}{\varphi_2\varphi_3} = 1$$

Таким образом, мы нашли ответ на поставленную задачу, правда, пока этот ответ представлен в зашифрованном виде. Расшифруем его. Каждая конъюнкция в полученном уравнении может быть равной единице. Если $\varphi_1\varphi_3 = 1$, то это значит, что в функцию должны войти простые импликанты $\bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{D}$ и $\bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{C}$. Следовательно, получили первый вариант тупиковой формы:

$$\textcircled{1}: \quad \bar{f}_1 = \bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\mathrm{D}} + \mathrm{A}\,\mathrm{C}\,\bar{\mathrm{D}} + \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{D} + \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{C},$$

содержащий 12 вхождений аргументов.

Аналогично находим еще две тупиковые формы:

$$\textcircled{2}: \quad \bar{f}_2 = \bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\mathrm{D}} + \mathrm{A}\,\mathrm{C}\,\bar{\mathrm{D}} + \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{D} + \bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{C}\,\bar{\mathrm{D}};$$
$$\textcircled{3}: \quad \bar{f}_3 = \bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\,\bar{\mathrm{B}}\,\bar{\mathrm{D}} + \mathrm{A}\,\mathrm{C}\,\bar{\mathrm{D}} + \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{C}}\,\mathrm{D} + \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{B}}\,\mathrm{C}.$$

Таким образом, инверсия заданной функции имеет три тупиковые дизъюнктивные нормальные формы.

1.2.1.5 Все тупиковые форму проинвертировать по теореме де Моргана.

$$f = \left(\mathrm{A} + \bar{\mathrm{B}} + \mathrm{C}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \mathrm{D}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{C}} + \mathrm{D}\right)\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \bar{\mathrm{D}}\right)\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \bar{\mathrm{C}}\right)$$

$$f = \left(\mathrm{A} + \bar{\mathrm{B}} + \mathrm{C}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \mathrm{D}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{C}} + \mathrm{D}\right)\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \bar{\mathrm{D}}\right)\left(\mathrm{B} + \bar{\mathrm{C}} + \mathrm{D}\right)$$

$$f = \left(\mathrm{A} + \bar{\mathrm{B}} + \mathrm{C}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \mathrm{D}\right)\left(\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{C}} + \mathrm{D}\right)\left(\mathrm{A} + \mathrm{C} + \bar{\mathrm{D}}\right)\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \bar{\mathrm{C}}\right)$$

1.2.1.6 Выбрать из тупиковых форм все минимальные по числу вхождений аргументов.

Во всех трех тупиковых формах оказалось по 15 вхождений переменных, а значит они все являются и минимальными.

1.2.2 Проверка

Проверим первую из трех минимальных форм.

#	**A**	**B**	**C**	**D**	$A+\bar{B}+C$	$\bar{A}+B+D$	$\bar{A}+\bar{C}+D$	$A+B+\bar{D}$	$A+B+\bar{C}$	f
0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
2	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
6	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
9	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
11	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
13	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Провекра сошлась.

1.2.3 Ответ

Три минимальные конъюктивные нормальные формы исходной функции:

$$f=\left(A+\bar{B}+C\right)\left(\bar{A}+B+D\right)\left(\bar{A}+\bar{C}+D\right)\left(A+B+\bar{D}\right)\left(A+B+\bar{C}\right)$$

$$f=\left(A+\bar{B}+C\right)\left(\bar{A}+B+D\right)\left(\bar{A}+\bar{C}+D\right)\left(A+B+\bar{D}\right)\left(B+\bar{C}+D\right)$$

$$f=\left(A+\bar{B}+C\right)\left(\bar{A}+B+D\right)\left(\bar{A}+\bar{C}+D\right)\left(A+C+\bar{D}\right)\left(A+B+\bar{C}\right)$$

1.3 Полином Жегалкина

1.3.1 Метод треугольника

Метод треугольника (часто называемый методом треугольника Паскаля) позволяет преобразовать таблицу истинности в полином Жегалкина путём построения вспомогательной треугольной таблицы в соответствии со следующими правилами:

- Строится полная таблица истинности, в которой строки идут в порядке возрастания двоичных кодов от 000...00 до 111...11.
- Строится вспомогательная треугольная таблица, в которой первый столбец совпадает со столбцом значений функции в таблице истинности.
- Ячейка в каждом последующем столбце получается путём суммирования по модулю 2 двух ячеек предыдущего столбца — стоящей в той же строке и строкой ниже.
- Столбцы вспомогательной таблицы нумеруются двоичными кодами в том же порядке, что и строки таблицы истинности.
- Каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы. Например, ячейке 111 соответствует член ABC, ячейке 101 — член AC, ячейке 010 — член B, ячейке 000 — член 1 и т. д.
- Если в верхней строке какого-либо столбца стоит единица, то соответствующий член присутствует в полиноме Жегалкина.

#	**A**	**B**	**C**	**D**	***f***
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

1	D	C	CD	B	BD	BC	BCD	A	AD	AC	ACD	AB	ABD	ABC	ABCD
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0		
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1			
0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1				
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1					
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1						
1	1	0	0	0	1	0	1	0							
0	1	0	0	1	1	1	1								
1	1	0	1	0	0	0									
0	1	1	1	0	0										
1	0	0	1	0											
1	0	1	1												
1	1	0													
0	1														
1															

$$f(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}) = 1 \oplus \mathrm{D} \oplus \mathrm{C} \oplus \mathrm{CD} \oplus \mathrm{B} \oplus \mathrm{BD} \oplus \mathrm{BCD} \oplus \mathrm{A} \oplus \mathrm{AC} \oplus \mathrm{ACD} \oplus \mathrm{ABC}$$

В качестве проверки посчитаем полином еще раз другим способом.

1.3.2 Метод БПФ

Наиболее экономным с точки зрения объёма вычислений и целесообразным для построения полинома Жегалкина вручную является метод быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Строим таблицу, состоящую из 2N столбцов и N + 1 строк, где N — количество переменных в функции. В верхней строке таблицы размещаем вектор значений функции, то есть последний столбец таблицы истинности.

Каждую строку полученной таблицы разбиваем на блоки (черные линии на рисунке). В первой строке блок занимает одну клетку, во второй строке — две, в третьей — четыре, в четвёртой — восемь и т. д. Каждому блоку в некоторой строке, который мы будем называть «нижний блок», всегда соответствует ровно два блока в предыдущей строке. Будем называть их «левый верхний блок» и «правый верхний блок».

Построение начинается со второй строки. Содержимое левых верхних блоков без изменения переносится в соответствующие клетки нижнего блока. Затем над правым верхним и левым верхним блоками побитно производится операция «сложение по модулю два», и полученный результат переносится в соответствующие клетки правой части нижнего блока. Эта операция проводится со всеми строками сверху вниз и со всеми блоками в каждой строке. После окончания построения в нижней строке оказывается строка чисел, которая является коэффициентами полинома Жегалкина, записанными в той же последовательности, что и в описанном выше методе треугольника.

1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	D	C	CD	B	BD	BC	BCD	A	AD	AC	ACD	AB	ABD	ABC	ABCD

$$f(A, B, C, D) = 1 \oplus D \oplus C \oplus CD \oplus B \oplus BD \oplus BCD \oplus A \oplus AC \oplus ACD \oplus ABC$$

1.3.3 Проверка

Результаты в методах треугольника и БПФ совпали.

2 Задача II

Для булевой функции из задачи I:

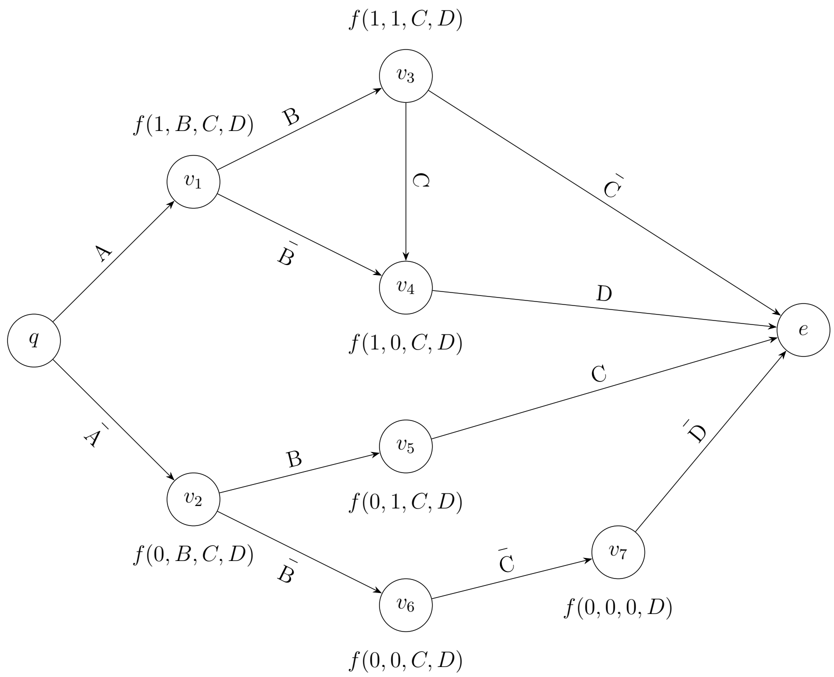
а) используя метод каскадов, построить контактную схему, проанализировав и проверив правильность её построения с помощью дерева анализа;

б) положив $X_{(N \ mod \ 4)+1} = 0$, построить логическую схему из функциональных элементов (инвертора, дизьюнктора, коньюнктора и дублятора).

2.1 Часть а)

2.1.1 Синтез контактной схемы методом каскадов

$$f(\mathrm{A,B,C,D}) = 1 \oplus \mathrm{D} \oplus \mathrm{C} \oplus \mathrm{C\,D} \oplus \mathrm{B} \oplus \mathrm{B\,D} \oplus \mathrm{B\,C\,D} \oplus \mathrm{A} \oplus \mathrm{A\,C} \oplus \mathrm{A\,C\,D} \oplus \mathrm{A\,B\,C}$$



$f(1, B, C, D) = \mathrm{D} \oplus \mathrm{B} \oplus \mathrm{B\,D} \oplus \mathrm{B\,C\,D} \oplus \mathrm{B\,C}$

$f(0, B, C, D) = 1 \oplus \mathrm{D} \oplus \mathrm{C} \oplus \mathrm{C\,D} \oplus \mathrm{B} \oplus \mathrm{B\,D} \oplus \mathrm{B\,C\,D}$

$f(1, 1, C, D) = 1 \oplus \mathrm{C} \oplus \mathrm{C\,D}$

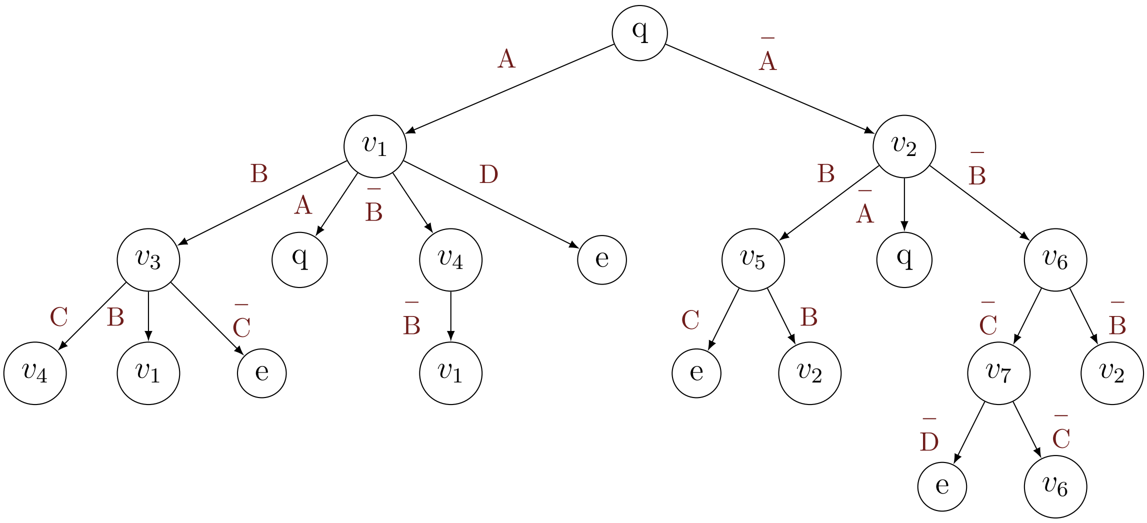
$f(1, 0, C, D) = D$

$f(0, 1, C, D) = C$

$f(0, 0, C, D) = 1 \oplus \mathrm{D} \oplus \mathrm{C} \oplus \mathrm{C\,D}$

$f(0, 0, 0, D) = 1 \oplus \mathrm{D}$

2.1.2 Дерево анализа контактной схемы



$$\pi_1 = \left(q \xrightarrow{\mathrm{A}} v_1, v_1 \xrightarrow{\mathrm{D}} e \right)$$

$$\pi_2 = \left(q \xrightarrow{\mathrm{A}} v_1, v_1 \xrightarrow{\mathrm{B}} v_3, v_3 \xrightarrow{\overline{\mathrm{C}}} e \right)$$

$$\pi_3 = \left(q \xrightarrow{\overline{\mathrm{A}}} v_2, v_2 \xrightarrow{\mathrm{B}} v_5, v_5 \xrightarrow{\mathrm{C}} e \right)$$

$$\pi_4 = \left(q \xrightarrow{\overline{\mathrm{A}}} v_2, v_2 \xrightarrow{\overline{\mathrm{B}}} v_6, v_6 \xrightarrow{\overline{\mathrm{C}}} v_7, v_7 \xrightarrow{\overline{\mathrm{D}}} e \right)$$

$$f = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}} + \overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\mathrm{C} + \mathrm{A}\,\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\,\mathrm{D}$$

2.2 Часть б)

2.2.1 Логическая схема из функциональных элементов

$$X_{(9 \ mod \ 4)+1} = X_2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{B} = 0$$

$$f = \bar{\mathrm{A}}\,\bar{\mathrm{C}}\,\bar{\mathrm{D}} + \mathrm{A}\,\mathrm{D}$$