Теория Автоматов и Алгоритмические Языки

Домашняя работа №1-1

Очкин Никита

Вариант №9

Задача I

По номеру $№^{\underline{\underline{A}}}(\alpha) = 1335 - 36 \cdot N \cdot (53 - n)$ слова $\alpha \in A^{+}$ в натуральном словаре позитивного языка над алфавитом $\underline{\underline{A}} = \langle a, b, c, d, e, f \rangle$ определить это слово и проверить результат вычисления.

Дано

$$N = 9, \quad n = 52, \quad №^{\underline{\underline{A}}}(\alpha) = 1011$$

Решение

Опишем алгоритм нахождения слова в виде псевдокода

Псевдокод алгоритма нахождения слова по его номеру в лексикографическом словаре

```
ввод: число, алфавит
условие: число > 0
вывод: результирующее слово

ответ = пустая строка
длина = размер алфавита

пока число не равно нулю:
    номерБуквы = число мод длина
    если номерБуквы равен 0:
        вычесть длину из числа

    буква = алфавит по индексу (номерБуквы - 1) мод длина
    добавить ответ к букве

    разделить число на длину (целочисленное деление) и обновить число

вернуть перевернутый ответ
```

Вычисления произведем в python:

алфавит: ['a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f']
длина алфавита: 6

Номер итерации:	1
Текущее значение:	1011
1011 % 6 =	3
Текущий индекс буквы в словаре:	2
Текущая буква:	c
Текущее слово:	c

Номер итерации:	2
Текущее значение:	168
168 % 6 =	0
Новое текущее значение:	162
Текущий индекс буквы в словаре:	5
Текущая буква:	f
Текущее слово:	fc

Номер итерации:	3
Текущее значение:	27
27 % 6 =	3
Текущий индекс буквы в словаре:	2
Текущая буква:	c
Текущее слово:	cfc

Номер итерации:	4
Текущее значение:	4
4 % 6 =	4
Текущий индекс буквы в словаре:	3
Текущая буква:	d
Текущее слово:	dcfc

Итого мы получили слово «dcfc »из номера 1011 за 4 итерации.

Для проверки результата воспользуемся библиотекой ITERTOOLS, с помощью которой найдем все возможные слова вплоть до «ffffff »и упорядоченно их запишем:

[a, b, c, d, e, f, aa, ab, ac, ad, ae, af, ba, bb, bc, bd, be, bf, ca, cb, cc, cd, ce,
cf, da, db, dc, dd, de, df, ea, eb, ec, ed, ee, ef, fa, fb, fc, fd, fe, ff, aaa, aab,
...
cccccd, ccccce, cccccf, ccccda, ccccdb, ccccdc, ccccdd, ccccde, ccccdf,
ccccea, cccceb, ccccec, cccced, ccccee, ccccef, ccccfa, ccccfb, ccccfc,
...
ffffda, ffffdb, ffffdcffffdd, ffffde, ffffdf, ffffea, ffffeb, ffffec,
ffffed, ffffee, ffffef, fffffa, fffffb, fffffc, fffffd, fffffe, ffffff]

Теперь же выведем 1011 - 1 й элемент и получим «dcfc».

Задача II

По номерам $№^{\underline{\underline{A}}}(\alpha) = 1332 - 34 \cdot N \cdot (53 - n)$ и $№^{\underline{\underline{A}}}(\beta) = 996 + 14 \cdot N \cdot (53 - n)$ слов $\alpha, \beta \in A^+$ в в натуральном словаре позитивного языка над алфавитом $\underline{\underline{A}} = \langle a, b, c, d, e, f \rangle$ определить номер слова $№^{\underline{\underline{A}}}(\alpha \otimes \beta)$ и проверить справедливость формулы:
$№^{\underline{\underline{A}}}(\alpha \otimes \beta) = |A|^{|\beta|} \cdot №^{\underline{\underline{A}}}(\alpha) + №^{\underline{\underline{A}}}(\beta)$

Дано

$$N = 9, \quad n = 52, \quad №^{\underline{\underline{A}}}(\alpha) = 1026, \quad №^{\underline{\underline{A}}}(\beta) = 1122$$

Решение

Найдем оба слова, воспользовавшись алгоритмом из первой задачи

Алфавит : $[a, b, c, d, e, f]$
Длина алфавита : 6

Номер итерации:	1
Текущее значение:	1026
$1026 \quad \% \quad 6 =$	0
Новое текущее значение:	1020
Текущий индекс буквы в словаре:	5
Текущая буква:	f
Текущее слово:	f

Номер итерации:	2
Текущее значение:	170
$170 \quad \% \quad 6 =$	2
Текущий индекс буквы в словаре:	1
Текущая буква:	b
Текущее слово:	bf

Номер итерации:	3
Текущее значение:	28
$28 \quad \% \quad 6 =$	4
Текущий индекс буквы в словаре:	3
Текущая буква:	d
Текущее слово:	dbf

Номер итерации:	4
Текущее значение:	4
$4 \quad \% \quad 6 =$	4
Текущий индекс буквы в словаре:	3
Текущая буква:	d
Текущее слово:	ddbf

Результат «ddbf»

Номер итерации:	1
Текущее значение:	1122
$1122 \quad \% \quad 6 =$	0
Новое текущее значение:	1116
Текущий индекс буквы в словаре:	5
Текущая буква:	f
Текущее слово:	f

Номер итерации:	2
Текущее значение:	186
$186 \quad \% \quad 6 =$	0
Новое текущее значение:	180
Текущий индекс буквы в словаре:	5
Текущая буква:	f
Текущее слово:	ff

Номер итерации:	3
Текущее значение:	30
$30 \quad \% \quad 6 =$	0
Новое текущее значение:	24
Текущий индекс буквы в словаре:	5
Текущая буква:	f
Текущее слово:	fff

Номер итерации:	4
Текущее значение:	4
$4 \quad \% \quad 6 =$	4
Текущий индекс буквы в словаре:	3
Текущая буква:	d
Текущее слово:	dfff

Результат «dfff»

$\alpha \otimes \beta = \text{ddbfdfff}$

Снова воспользовавшись ITERTOOLS найдем:

$\text{№}^{\underline{\underline{A}}}(\alpha \otimes \beta) = 1330818$

Проверка:

$\text{№}^{\underline{\underline{A}}}(\alpha \otimes \beta) = 6^4 \cdot 1026 + 1122 = 1330818$

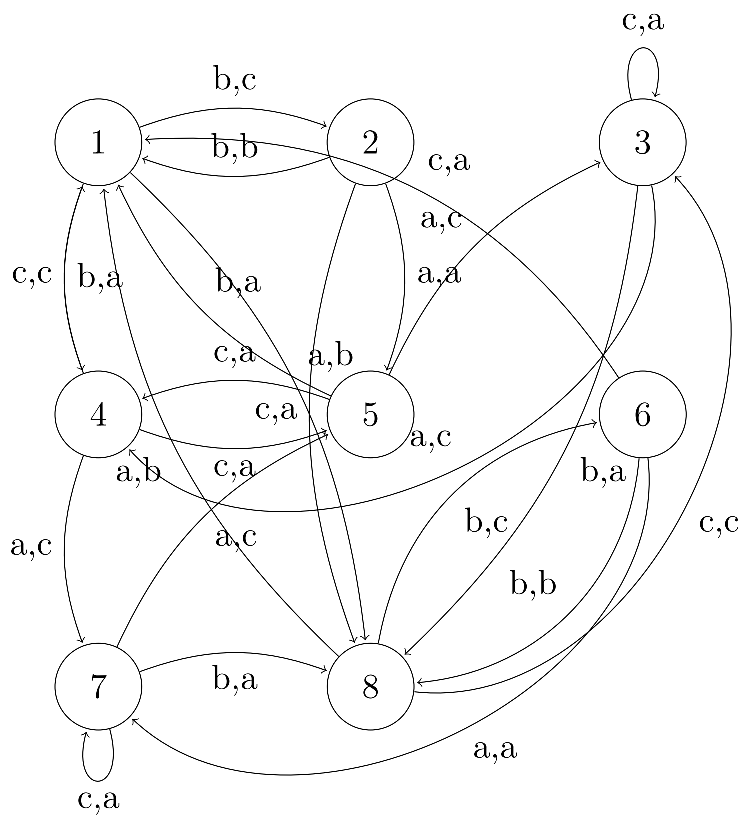
Задача III

Минимизировать автомат по состояниям. Если исходный автомат не окажется приведённым, то изобразить диаграмму минимизированного автомата и произвести частичную проверку корректности минимизации, используя входную строку не менее чем из 5 (пяти) знаков входного алфавита и соответствующие начальные состояния исходного и минимизированного автоматов. Кроме того, доказать приведённость минимизированного автомата.

Дано

	a		b		c	
1	8	b	2	c	4	c
2	5	a	1	b	8	a
3	4	c	8	a	3	a
4	7	c	1	a	5	a
5	3	c	1	a	4	a
6	7	a	8	b	1	a
7	5	c	8	a	7	a
8	1	b	6	c	3	c

Изобразим графически схему состояний автомата.



Решение

<u>**Первый шаг**</u>. Отношение эквивалентности $\sim^e$ индуцирует разбиение $\boldsymbol{\pi} = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$ совокупность состояний $V = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \rangle$ автомата Γ на классы $\sim^e$ -эквивалентности $\pi_1 = \langle 1, 8 \rangle$, $\pi_2 = \langle 2, 6 \rangle$, $\pi_3 = \langle 3, 4, 5, 7 \rangle$, в каждом из которых буква выхода автомата определяется входной буквой, не зависящей от состояния автомата из рассматриваемого класса эквивалентности. Проиллюстрируем полученное разбиение $\boldsymbol{\pi} = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$.

$$\boldsymbol{\pi} = \langle \pi_1, \pi_2, \pi_3 \rangle$$
$$\pi_1 = \langle 1, 8 \rangle \quad \pi_2 = \langle 2, 6 \rangle \quad \pi_3 = \langle 3, 4, 5, 7 \rangle$$

	a		b		c		
1	8	b	2	c	4	c	π_1
8	1	b	6	c	3	c	
2	5	a	1	b	8	a	π_2
6	7	a	8	b	1	a	
3	4	c	8	a	3	a	π_3
4	7	c	1	a	5	a	
5	3	c	1	a	4	a	
7	5	c	8	a	7	a	

Второй шаг. Отношение эквивалентности $\sim$ индуцирует разбиения $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = (\Pi_1)$, $\boldsymbol{\pi}^{(2)} = (\Pi_2)$ и $\boldsymbol{\pi}^{(3)} = (\Pi_3)$ на каждом из классов $\pi_1 = \langle 1, 8\rangle$, $\pi_2 = \langle 2, 6\rangle$, $\pi_3 = \langle 3, 4, 5, 7\rangle$, соответственно, где в каждом из классов $\Pi_1 = \langle 1, 8\rangle$, $\Pi_2 = \langle 2, 6\rangle$, $\Pi_3 = \langle 3, 4, 5, 7\rangle$ буква входа автомата переводит состояние автомата из этого класса в состояние одного из этих классов π_1, π_2 или π_3, зависящего только от этой входной буквы. Проиллюстрируем эти переходы.

$$\Pi_1 = \langle 1, 8\rangle \quad \Pi_2 = \langle 2, 6\rangle \quad \Pi_3 = \langle 3, 4, 5, 7\rangle$$

		a	b	c	
π_1	1	π_1	π_2	π_3	Π_1
	8	π_1	π_2	π_3	
π_2	2	π_3	π_1	π_1	Π_2
	6	π_3	π_1	π_1	
π_3	3	π_3	π_1	π_3	Π_3
	4	π_3	π_1	π_3	
	5	π_3	π_1	π_3	
	7	π_3	π_1	π_3	

Третий шаг. Так как $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\Pi}$, то присваиваем разбиению $\boldsymbol{\pi}$ значение разбиения $\boldsymbol{\Pi}$ ($\boldsymbol{\pi} := \boldsymbol{\Pi}$) и переходим к четвертому шагу алгоритма.

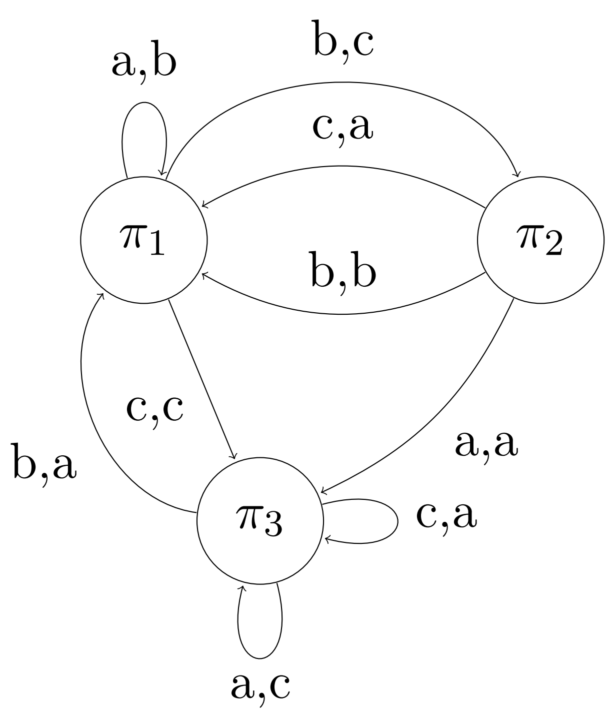
__**Четвертый шаг**__. Создаем автомат $\Omega = \Gamma/\sim^a = (A, B, \boldsymbol{\pi}, \widetilde{\delta}, \widetilde{\lambda}) = (A, B, \boldsymbol{\pi}, *, \bullet)$, где для состояния $v \in \pi_j (j = \overline{1,4})$ из компоненты $\pi_j \in \boldsymbol{\pi}$:

$$\begin{cases} \widetilde{\delta}(a, \widetilde{v}^a) = a * \widetilde{v}^a = \delta(a, v); \\ \widetilde{\lambda}(a, \widetilde{v}^a) = a \bullet \widetilde{v}^a = \lambda(a, v). \end{cases}$$

__**Пятый шаг**__. Выходим из алгоритма с результатом в виде приведенного автомата $\Omega = \Gamma/\sim^a$, работу которого проиллюстрируем

	a		b		c	
π_1	π_1	b	π_2	c	π_3	c
π_2	π_3	a	π_1	b	π_1	a
π_3	π_3	c	π_1	a	π_3	a

Изобразим графически схему состояний приведенного автомата.



$$\pi_1 \xrightarrow[\text{b}]{\text{a}} \pi_1 \xrightarrow[\text{c}]{\text{b}} \pi_2 \xrightarrow[\text{a}]{\text{c}} \pi_1$$

$$1 \xrightarrow[\text{b}]{\text{a}} 8 \xrightarrow[\text{c}]{\text{b}} 6 \xrightarrow[\text{a}]{\text{c}} 1$$

$$\text{abc } \cdot \pi_1 = \text{bca} \Longrightarrow \text{abc} \cdot 1 = \text{bca}$$

Доказательство приведенности автомата: $\Omega = (A, B, \boldsymbol{\pi}, *, \bullet)$

$$\begin{cases} a \cdot \pi_1 = b \\ a \cdot \pi_2 = a \\ a \cdot \pi_3 = c \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \pi_1 \not\sim^{a} \pi_2 \\ \pi_1 \not\sim^{a} \pi_3 \\ \pi_2 \not\sim^{a} \pi_3 \end{cases}$$