№3

Условие:

Задано тензорное поле $\mathrm{T}(X^i)$, где X^i - цилиндрические координаты. Найти:
1) ковариантные, контравариантные компоненты этого поля в базисах $\mathrm{r_i}$, $\mathrm{r^i}$, где $\mathrm{r_i}$ — ортогональный локальный базис цилиндрической системы координат;
2) ковариантные производные компонент тензорного поля в базисах $\mathrm{r_i}$, $\mathrm{r^i}$

Исходные данные:

Поле задано в виде: $\mathrm{T} = T^i j \mathrm{e_i} \otimes \mathrm{e_j}$;

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -(X^2) + (X^1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot (X^3) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$\mathrm{r_i}$ - ортогональный локальный базис цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} x^1 = X^1 \cdot \cos(X^2) \\ x^2 = X^1 \cdot \sin(X^2) \\ x^3 = X^3 \end{cases}$$

1) Для того, чтобы найти компоненты тензорного поля в базисах $\mathrm{r_i}$, $\mathrm{r^i}$, найдем сначала метрическую матрицу для цилиндрических координат X^i и локальные векторы базиса.
1.1) Найдем якобиеву матрицу для криволинейных координат X^i:

$$Q^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}$$

$$\begin{array}{lll} Q^1_1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial X^1} = \cos(X^2) & Q^1_2 = \dfrac{\partial x^1}{\partial X^2} = -(X^1) \cdot \sin(X^2) & Q^1_3 = \dfrac{\partial x^1}{\partial X^3} = 0 \\ Q^2_1 = \dfrac{\partial x^2}{\partial X^1} = \sin(X^2) & Q^2_2 = \dfrac{\partial x^2}{\partial X^2} = (X^1) \cdot \cos(X^2) & Q^2_3 = \dfrac{\partial x^2}{\partial X^3} = 0 \\ Q^3_1 = \dfrac{\partial x^3}{\partial X^1} = 0 & Q^3_2 = \dfrac{\partial x^3}{\partial X^2} = 0 & Q^3_3 = \dfrac{\partial x^3}{\partial X^3} = 1 \end{array}$$

Тогда якобиева матрица цилиндрической системы координат имеет вид:

$$Q_k^i = \begin{pmatrix} \cos(X^2) & -(X^1)\cdot\sin(X^2) & 0 \\ \sin(X^2) & (X^1)\cdot\cos(X^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2) Найдем локальные векторы базиса для цилиндрических координат X^i:

$$\mathrm{r_k} = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}\overline{\mathrm{e_k}} = Q_k^i\overline{\mathrm{e_k}}$$

Матрица Q_k^i была найдена на предыдущем шаге.
1.3) Найдем метрическую матрицу для цилиндрических координат X^i:

$$\mathrm{g_{ij}} = \mathrm{r_i}\cdot\mathrm{r_j} = Q_i^s Q_j^p \delta_{sp}$$

Найдем компоненты метрической матрицы для цилиндрической системы координат:

$$\begin{aligned}
\mathrm{g_{11}} &= Q_1^s \cdot Q_1^p * \delta_{sp} = 1 \\
\mathrm{g_{12}} &= Q_1^s \cdot Q_2^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{13}} &= Q_1^s \cdot Q_3^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{21}} &= Q_2^s \cdot Q_1^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{22}} &= Q_2^s \cdot Q_2^p * \delta_{sp} = (X^1)^2 \\
\mathrm{g_{23}} &= Q_2^s \cdot Q_3^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{31}} &= Q_3^s \cdot Q_1^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{32}} &= Q_3^s \cdot Q_2^p * \delta_{sp} = 0 \\
\mathrm{g_{33}} &= Q_3^s \cdot Q_3^p * \delta_{sp} = 1
\end{aligned}$$

Запишем полученную метрическую матрицу для цилиндрической системы координат:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (X^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную метрическую матрицу:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(X^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4) Найдем векторы взаимного локального базиса для цилиндрических координат X^i:

$$\mathrm{r^i} = \mathrm{g^{ij}} \mathrm{r_j} = \mathrm{g^{ij}} Q_j^m \overline{\mathrm{e_m}} = Q^{im} \overline{\mathrm{e_m}} :$$

$$Q^{11} = \mathrm{g^{1j}} Q_j^1 = g^{11} \cdot Q_1^1 + g^{12} \cdot Q_2^1 = g^{13} \cdot Q_3^1 = \cos(X^2) + 0 + 0 = \cos(X^2)$$
$$Q^{12} = \mathrm{g^{1j}} Q_j^2 = g^{11} \cdot Q_1^2 + g^{12} \cdot Q_2^2 = g^{13} \cdot Q_3^2 = \sin(X^2) + 0 + 0 = \sin(X^2)$$
$$Q^{13} = \mathrm{g^{1j}} Q_j^3 = g^{11} \cdot Q_1^3 + g^{12} \cdot Q_2^3 = g^{13} \cdot Q_3^3 = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$Q^{21} = \mathrm{g^{2j}} Q_j^1 = g^{21} \cdot Q_1^1 + g^{22} \cdot Q_2^1 = g^{23} \cdot Q_3^1 = 0 + -\sin(X^2)/(X^1) + 0 = -\sin(X^2)/(X^1)$$
$$Q^{22} = \mathrm{g^{2j}} Q_j^2 = g^{21} \cdot Q_1^2 + g^{22} \cdot Q_2^2 = g^{23} \cdot Q_3^2 = 0 + \cos(X^2)/(X^1) + 0 = \cos(X^2)/(X^1)$$
$$Q^{23} = \mathrm{g^{2j}} Q_j^3 = g^{21} \cdot Q_1^3 + g^{22} \cdot Q_2^3 = g^{23} \cdot Q_3^3 = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$Q^{31} = \mathrm{g^{3j}} Q_j^1 = g^{31} \cdot Q_1^1 + g^{32} \cdot Q_2^1 = g^{33} \cdot Q_3^1 = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$Q^{32} = \mathrm{g^{3j}} Q_j^2 = g^{31} \cdot Q_1^2 + g^{32} \cdot Q_2^2 = g^{33} \cdot Q_3^2 = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$Q^{33} = \mathrm{g^{3j}} Q_j^3 = g^{31} \cdot Q_1^3 + g^{32} \cdot Q_2^3 = g^{33} \cdot Q_3^3 = 0 + 0 + 1 = 1$$

Запишем полученную матрицу:

$$Q^{im} = \begin{pmatrix} \cos(X^2) & \sin(X^2) & 0 \\ -\sin(X^2)/(X^1) & \cos(X^2)/(X^1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5)Найдем теперь компоненты тензорного поля.