Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

О т ч е т

по лабораторной работе № 6

Название лабораторной работы:
Последовательный критерий отношения правдоподобия

Вариант № 9

Дисциплина:

Теория вероятности и математическая статистика

Студент группы ФН11-52Б ____________ **Очкин Н.В.**
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель ____________ **Облакова Т.В.**
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

Задание

1. Постройте последовательный критерий Вальда для проверки гипотезы H_0 : $a = a_0$ против альтернативы $H_1 : a = a_1$ при известном $\sigma = \sigma_1$. Ошибка первого рода задана в условии, ошибка второго рода β вычислена вами в пункте 4.

2. Примените построенный критерий к заданной выборке (порядок чтения - по столбцам), сформулируйте результат. Дайте графическую иллюстрацию последовательного критерия.

3. Вычислите математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_0 и при альтернативе H_1.

4. Перепишите критерий S_1 из пункта 3 предыдущей задачи в виде $\left(\frac{L(\vec{X}_n, a_1)}{L(\vec{X}_n, a_0)} \geq C\right)$, отметьте на графике найденное значение и сравните результаты применения критериев Вальда и Неймана-Пирсона.

5. Сформулируйте выводы.

Исходные данные

α	a_0	σ_0	a_1	σ_1	ε	n	β	C_1
0.1	3	2.1	3.5	2.2	0.1	100	0.1608	3.2819

−3.442	1.295	3.672	2.354	5.238	1.136	4.421	2.071	0.269	0.894
8.202	0.605	−2.011	3.375	3.767	1.068	2.928	−0.276	4.924	3.31
5.741	6.951	3.417	2.991	5.599	4.896	9.197	3.823	1.827	5.389
2.504	4.212	−2.021	1.891	3.689	5.366	3.117	4.641	2.968	4.645
3.752	4.582	3.601	0.934	2.785	3.294	4.695	1.092	3.155	4.352
0.896	0.839	4.309	2.793	7.233	0.95	5.228	1.28	5.19	0.972
4.562	1.915	4.243	4.495	0.648	5.34	3.294	2.791	6.805	3.474
3.044	5.452	2.957	7.862	4.61	1.317	5.383	3.205	−1.022	3.602
3.373	5.415	4.093	5.407	0.501	2.135	1.957	0.826	5.34	3.759
1.735	−3.277	5.101	1.43	3.494	0.545	4.699	3.44	2.85	4.33

Ход выполнения работы

Построим последовательный критерий Вальда для проверки гипотезы
$H_0 : a = a_0 = 3$ против альтернативы $H_1 : a = a_1 = 3.5$ при известном $\sigma = \sigma_1 = 2.2$.

Найдем такие границы A и B, которые удовлетворяют следующему условию:

$$B < z(\vec{X_n}) < A,$$

где

$$z(\vec{X_n}) = \frac{L(\vec{X_n}, a_1)}{L(\vec{X_n}, a_0)} \qquad - \qquad \text{функция отношения правдоподобия}$$

Положим

$$\nu = \min\left\{n : z\left(\vec{X_n}\right) \notin (B, A)\right\},$$

то есть статистикой критерия будет $z(\nu, X_1, ..., X_\nu)$.

Сформулируем критерий Вальда:

- если $z\left(\vec{X_n}\right) \geq A$, то принимается H_1
- если $z\left(\vec{X_n}\right) \leq B$, то принимается H_0

Тогда ошибка первого рода принимает вид:

$$\alpha = P\left(z\left(\vec{X_n}\right) \geq A | H_0\right),$$

а ошибка второго рода:

$$\beta = P\left(z\left(\vec{X_n}\right) \leq B | H_1\right).$$

Постоянные A и B вычислим по формулам Вальда:

$$A = \frac{1 - \beta}{\alpha} \qquad B = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

```
A_ = (1 - beta)/alpha
B_ = beta/(1 - alpha)
```

$$A \approx 8.392 \qquad B \approx 0.1787$$

Вычислим отношение правдоподобия:

$$\frac{L(\vec{X}_n, a_1, \sigma_1)}{L(\vec{X}_n, a_0, \sigma_1)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(X_i, a_1, \sigma_1)}{p(X_i, a_0, \sigma_1)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\dfrac{-(X_i - a_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\dfrac{-(X_i - a_0)^2}{2\sigma_1^2}}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left[\frac{-(X_i - a_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(X_i - a_0)^2}{2\sigma_1^2}\right] = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{-(X_i - a_1)^2 + (X_i - a_0)^2}{2\sigma_1^2}\right] =$$

$$= \exp\left[n \cdot \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

Применим построенный критерий к данной выборке.
Введем следующее обозначение:

$$z = X^T$$

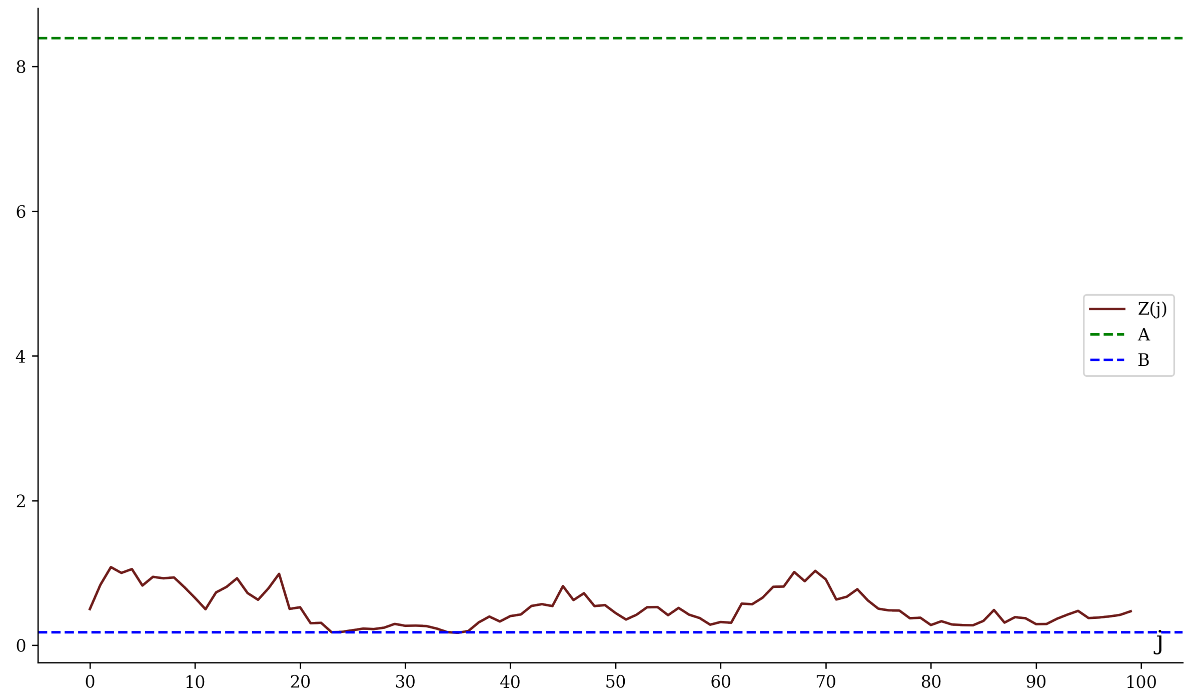
Тогда

$$Z(j) = \prod_{i=1}^{j} \exp\left[\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2} z_i\right]$$

Приведем графическую иллюстрацию последовательного критерия:

```
def Z(j):
    res = 1
    for i in range(0, j + 1):
        res *= np.exp((a0**2 - a1**2)/(2*sigma1**2) + \
                       (a1 - a0)/sigma1**2 * data_[i])
    return res
```

$\downarrow$



Заметим, что график пересекает прямую B $\Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Вычислим математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе $H_0 : a = a_0 = 3$ и при альтернативе $H_1 : a = a_1 = 3.5$.

Найдем математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_0:

$$M_{a_0}\nu = \frac{\alpha ln(A) + (1-\alpha)ln(B)}{M_0}$$

$$M_0 = M_{a_0} ln\left(\frac{\rho(X_k, a_1, \sigma_1)}{\rho(X_k, a_0, \sigma_1)}\right) = \frac{-(a_1 - a_0)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
M0_ = -(a1 - a0)**2/(2 * sigma1**2)
Ma0nu_ = (alpha * np.log(A_) + (1 - alpha) * np.log(B_))/M0_
```

$$M_0 \approx -0.025826 \qquad M_{a_0}\nu \approx 51.779566$$

Найдем математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_1:

$$M_{a_1}\nu = \frac{\beta ln(B) + (1-\beta)ln(A)}{M_1}$$

$$M_1 = M_{a_1} ln\left(\frac{\rho(X_k, a_1, \sigma_1)}{\rho(X_k, a_0, \sigma_1)}\right) = \frac{(a_1 - a_0)^2}{2\sigma_1^2}$$

```
M1_ = (a1 - a0)**2/(2 * sigma1**2)
Ma1nu_ = (beta * np.log(B_) + (1 - beta) * np.log(A_))/M1_
```

$$M_1 \approx 0.0258264 \qquad M_{a_1}\nu \approx 58.400497$$

Перепишем критическое множество из пункта 3 в виде $\left(\frac{L(\vec{X_n}, a_1)}{L(\vec{X_n}, a_0)} \geq C\right)$, отметим на графике и сравним результаты применения критериев Вальда и Неймана-Пирсона.

Запишем критическое множество в следующем виде:

$$S = \left\{\frac{L(X_k, a_1, \sigma_1)}{L(X_k, a_0, \sigma_1)} \geq C\right\} = \left\{\exp\left[n \cdot \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right] \geq C\right\}$$

Выразим $\overline{X}$:

$$S = \left\{n\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{a_1 - a_0}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq ln(C)\right\} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{\left(\frac{ln(C)}{n} - \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right)\sigma_1^2}{(a_1 - a_0)}\right\}$$

Заметим, что $a_1 - a_0 = 0.5 > 0 \Rightarrow$ при делении знак неравенства не меняется.

Следовательно:

$$C_1 = 3.2819 = \frac{\left(\frac{ln(C)}{n} - \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right)\sigma_1^2}{(a_1 - a_0)}$$

Итого:

$$C = \exp\left[\frac{C_1(a_1 - a_0)n}{\sigma_1^2} + n\frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma_1^2}\right]$$

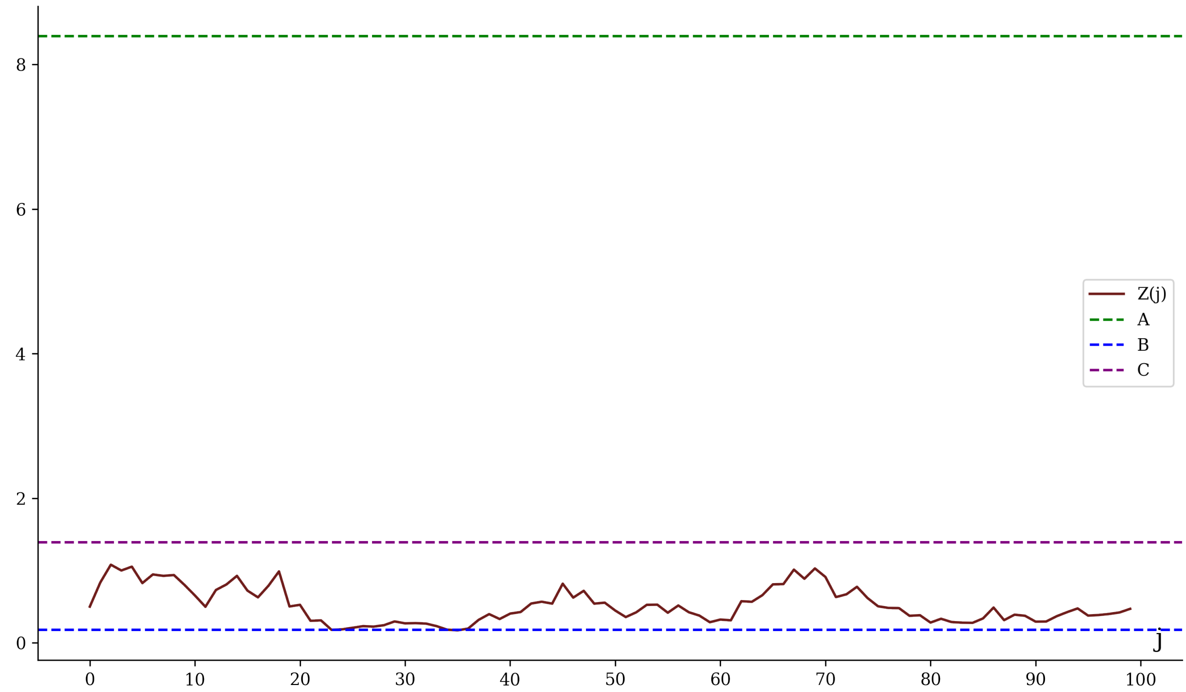
```
C_ = np.exp((C1 * (a1 - a0) * n) / (sigma1**2) + \
                            n * (a0**2 - a1**2)/(2 * sigma1**2))
```

$$C \approx 1.39034$$

Таким образом, получаем критическое множество:

$$S = \left\{ \frac{L(X_k, a_1, \sigma_1)}{L(X_k, a_0, \sigma_1)} \geq 1.39034 \right\}$$

Приведем графическую иллюстрацию последовательного критерия:



При $n = 100$:

```
    likelihoodRatio_ = np.exp(n * (a0**2 - a1**2)/(2 * sigma1**2) + \
                                (a1 - a0)/sigma1**2 * np.sum(data_))
```

$$\frac{L(\bar{X}_n, a_1, \sigma_1)}{L(\bar{X}_n, a_0, \sigma_1)} \approx 0.47066 < C$$

$\Rightarrow$ принимается гипотеза H_0.

Вывод

В процессе выполнения задания мы научились строить последовательный критерий Вальда для проверки простых гипотез о среднем значении нормального закона (основная гипотеза $H_0 : a = a_0$ против альтернативы $H_1 : a = a_1$ при известном $\sigma = \sigma_1$) а также применять построенный критерий к заданной выборке, вычислять математическое ожидание момента принятия решения при основной гипотезе H_0 и при альтернативе H_1. Было установлено, что критерий Вальда и критерий Неймана-Пирсона дали одинаковый результат.

Приложение

Программный код, с помощью которого была выполнена данная лабораторная работа.

```
import numpy as np
from IPython.display import Math, display
import matplotlib.pyplot as plt

data_ = np.array([
    [-3.442, 1.295, 3.672, 2.354, 5.238, 1.136, 4.421, 2.071, 0.269, 0.894],
    [8.202, 0.605, -2.011, 3.375, 3.767, 1.068, 2.928, -0.276, 4.924, 3.31],
    [5.741, 6.951, 3.417, 2.991, 5.599, 4.896, 9.197, 3.823, 1.827, 5.389],
    [2.504, 4.212, -2.021, 1.891, 3.689, 5.366, 3.117, 4.641, 2.968, 4.645],
    [3.752, 4.582, 3.601, 0.934, 2.785, 3.294, 4.695, 1.092, 3.155, 4.352],
    [0.896, 0.839, 4.309, 2.793, 7.233, 0.95, 5.228, 1.28, 5.19, 0.972],
    [4.562, 1.915, 4.243, 4.495, 0.648, 5.34, 3.294, 2.791, 6.805, 3.474],
    [3.044, 5.452, 2.957, 7.862, 4.61, 1.317, 5.383, 3.205, -1.022, 3.602],
    [3.373, 5.415, 4.093, 5.407, 0.501, 2.135, 1.957, 0.826, 5.34, 3.759],
    [1.735, -3.277, 5.101, 1.43, 3.494, 0.545, 4.699, 3.44, 2.85, 4.33]
])

data_ = data_.T
new_data_ = []

for i in range(len(data_)):
    for j in range(len(data_[i])):
        new_data_.append(data_[i][j])

data_ = new_data_
data_

alpha = 0.1
a0 = 3
sigma0 = 2.1
a1 = 3.5
sigma1 = 2.2
epsilon = 0.1
n = 100
beta = 0.1608
C1 = 3.2819

def decorate_plot(ax, x_ticks, xname, yname, loc=(-0.025, -0.3)):
    SIZE_TICKS = 10

    # Eliminate upper and right axes
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')

    # Show ticks in the left and lower axes only
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')
```

```
    # axis names
    ax.set_xlabel(xname, fontsize=15)
    ax.xaxis.set_label_coords(0.98, 0.05)

    ax.set_ylabel(yname, rotation=0, fontsize=15)
    ax.yaxis.set_label_coords(0.025, 0.95)

    ax.set_xticks(x_ticks)

    # Adjust the font size of the tick labels
    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=SIZE_TICKS)

    plt.legend(fontsize=10, loc=loc)

    # Update font settings
    plt.rcParams.update({'font.family': 'serif', 'font.size': 12})

    # Adjust layout
    plt.tight_layout()

A_ = (1 - beta)/alpha
B_ = beta/(1 - alpha)

print(f'A: {A_}')
print(f'B: {B_}')

def Z(j):
    res = 1
    for i in range(0, j + 1):
        res *= np.exp((a0**2 - a1**2)/(2*sigma1**2) + (a1 - a0)/sigma1**2 * data_[i]
    return res

def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = np.arange(0, n)
    y_values = [Z(int(x)) for x in x_values]

    ax.plot(x_values,
            y_values,
            color=RED,
            linestyle='-',
            linewidth=1.5,
            label='Z(j)')

    ax.axhline(y=A_, color='green', linestyle='--', label=f'A')
    ax.axhline(y=B_, color='blue', linestyle='--', label=f'B')

    decorate_plot(ax, np.arange(0,n + 10,10), 'j', '', loc='best')

    # plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)

    plt.show()
```

```
buildBar('iterative_crit_A_B')

M0_ = -(a1 - a0)**2/(2 * sigma1**2)
Ma0nu_ = (alpha * np.log(A_) + (1 - alpha) * np.log(B_))/M0_

display(Math(f'$M_0 = {M0_}$'))
display(Math(f'$M_{{a_0}}\\nu = {Ma0nu_}$'))

M1_ = (a1 - a0)**2/(2 * sigma1**2)
Ma1nu_ = (beta * np.log(B_) + (1 - beta) * np.log(A_))/M1_

display(Math(f'$M_1 = {M1_}$'))
display(Math(f'$M_{{a_1}}\\nu = {Ma1nu_}$'))

a1 - a0

C_ = np.exp((C1 * (a1 - a0) * n) / (sigma1**2) + n * (a0**2 - a1**2)/(2 * sigma1**2)

print(f'C = {C_}')

def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = np.arange(0, n)
    y_values = [Z(int(x)) for x in x_values]

    ax.plot(x_values,
           y_values,
           color=RED,
           linestyle='-',
           linewidth=1.5,
           label='Z(j)')

    ax.axhline(y=A_, color='green', linestyle='--', label=f'A')
    ax.axhline(y=B_, color='blue', linestyle='--', label=f'B')
    ax.axhline(y=C_, color='purple', linestyle='--', label=f'C')

    decorate_plot(ax, np.arange(0,n + 10,10), 'j', '', loc='best')

    # plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)

    plt.show()

buildBar('iterative_crit_A_B_C')

likelihoodRatio_ = np.exp(n * (a0**2 - a1**2)/(2 * sigma1**2) + (a1 - a0)/sigma1**2
display(Math(f'$$\\frac{{L(\\bar{{X}}_n, a_1, \\sigma_1)}}{{L(\\bar{{X}}_n, a_0, \\s
```