*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования*

***«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»***
***(национальный исследовательский университет)***
***(МГТУ им. Н.Э. Баумана)***

---

**ФАКУЛЬТЕТ** ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

**КАФЕДРА** ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)

**НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ** МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

# О т ч е т

## по лабораторной работе № 5

**Название лабораторной работы:**
**Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.**

**Вариант № 9**

**Дисциплина:**

Теория вероятности и математическая статистика

Студент группы ФН11-52Б _____ (Подпись, дата) **Очкин Н.В.** (И.О. Фамилия)

Преподаватель _____ (Подпись, дата) **Облакова Т.В.** (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

# Задание

По данной выборке из нормально распределенной генеральной совокупности:

1. постройте критерий $S_2$ уровня $\alpha$ и проверьте гипотезу $H_0 : a = a_0$ против односторонней альтернативы $H_2$, если $\sigma$ неизвестно;
2. постройте критерий $S_3$ уровня $\alpha$ и проверьте гипотезу $H_{01} : \sigma = \sigma_0$ против альтернативы $H_3$, если $a$ неизвестно;
3. постройте оптимальный критерий $S_1$ уровня $\alpha$ и проверьте $H_0$ против простой альтернативы $H_1 : a = a_1$, если $\sigma = \sigma_1$ известно;
4. найдите ошибку второго рода $\beta = P(\overline{S_1}|H_1)$ критерий $S_1$;
5. найдите такие значения $a_1$, для которых ошибка второго рода критерия $S_1$ не превосходит $\varepsilon$;
6. постройте совмещенные графики гистограммы относительных частот данной выборки и плотностей нормального распределения с параметрами $(a_0, \sigma_1)$ и $(a_1, \sigma_1)$

# Исходные данные

| $\alpha$ | $a_0$ | $H_2$ | $\sigma_0$ | $H_3$ | $a_1$ | $H_1$ | $\sigma_1$ | $\varepsilon$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 3 | $a > a_0$ | 2.1 | $\sigma > \sigma_0$ | 3.5 | $a = a_1$ | 2.2 | 0.1 | 100 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −3.442 | 1.295 | 3.672 | 2.354 | 5.238 | 1.136 | 4.421 | 2.071 | 0.269 | 0.894 |
| 8.202 | 0.605 | −2.011 | 3.375 | 3.767 | 1.068 | 2.928 | −0.276 | 4.924 | 3.31 |
| 5.741 | 6.951 | 3.417 | 2.991 | 5.599 | 4.896 | 9.197 | 3.823 | 1.827 | 5.389 |
| 2.504 | 4.212 | −2.021 | 1.891 | 3.689 | 5.366 | 3.117 | 4.641 | 2.968 | 4.645 |
| 3.752 | 4.582 | 3.601 | 0.934 | 2.785 | 3.294 | 4.695 | 1.092 | 3.155 | 4.352 |
| 0.896 | 0.839 | 4.309 | 2.793 | 7.233 | 0.95 | 5.228 | 1.28 | 5.19 | 0.972 |
| 4.562 | 1.915 | 4.243 | 4.495 | 0.648 | 5.34 | 3.294 | 2.791 | 6.805 | 3.474 |
| 3.044 | 5.452 | 2.957 | 7.862 | 4.61 | 1.317 | 5.383 | 3.205 | −1.022 | 3.602 |
| 3.373 | 5.415 | 4.093 | 5.407 | 0.501 | 2.135 | 1.957 | 0.826 | 5.34 | 3.759 |
| 1.735 | −3.277 | 5.101 | 1.43 | 3.494 | 0.545 | 4.699 | 3.44 | 2.85 | 4.33 |

# Ход решения работы

## Первоначальная обработка статистических данных

Обработка статистических данных происходит в среде Jupyter Notebook.

- Крайние члены вариационного ряда и размах выборки
  Крайние члены вариационного ряда находятся как минимум и максимум выборки:

```
min_ = min(data)
max_ = max(data)

range_ = max_ - min_
```

$$\min : -3.442 \qquad \max : 9.197$$

$$\omega : 12.639$$

- Группировка данных
  Элементы выборки можно объединить в группы и построить интервальный вариационный ряд. Для этого отрезок $\omega$ разбивается на $l$ равных интервалов. Количество интервалов $l$ можно вычислить по правилу Стёрджеса:

$$l = 1 + \lfloor \log_2 N \rfloor,$$

  где $\lfloor \quad \rfloor$ - обозначение целой части числа.

```
l_ = 1 + int(np.log2(n_))
```

$$l = 7$$

  Для группировки данных найдем интервальный шаг:

```
h_ = range_ / l_
```

$$h = 1.8056$$

  Найдем границы интервалов, интервалы и середины интервалов группировки:

```
int_boundaries_ = np.array(
    [min_ + i * h_ for i in range(0, l_ + 1, 1)]
)

intervals_ = np.array(
    [(int_boundaries_[i], int_boundaries_[i+1]) for i in range(0, l_, 1)]
)

mid_ranges_ = np.array(
    [sum(interval)/2 for interval in intervals_]
)
```

границы интервалов :

$$[-3.442 \quad -1.6364 \quad 0.1691 \quad 1.9747 \quad 3.7803 \quad 5.5859 \quad 7.3914 \quad 9.197]$$

интервалы :

$$\begin{bmatrix} -3.442 & -1.6364 \\ -1.6364 & 0.1691 \\ 0.1691 & 1.9747 \\ 1.9747 & 3.7803 \\ 3.7803 & 5.5859 \\ 5.5859 & 7.3914 \\ 7.3914 & 9.197 \end{bmatrix}$$

середины интервалов :

$$[-2.5392 \quad -0.7336 \quad 1.0719 \quad 2.8775 \quad 4.6831 \quad 6.4886 \quad 8.2942]$$

Найдём частоты попадания элементов из выборки в каждый из интервалов:

```
present = lambda el, int_ : int_[0] <= el < int_[1]
freqs_ = np.zeros(l_)
for el in data:
    for j in range(0, l_, 1):
        if present(el, intervals_[j]):
            freqs_[j] += 1

freqs_[-1] += np.count_nonzero(data == max_)
```

частоты :

$$[4. \quad 2. \quad 24. \quad 32. \quad 30. \quad 5. \quad 3.]$$

Найдем относительные частоты:

```
rel_freqs_ = freqs_ / n_
```

относительные частоты :

$$[0.04 \quad 0.02 \quad 0.24 \quad 0.32 \quad 0.3 \quad 0.05 \quad 0.03]$$

Проверим, что сумма вероятности равна 1:

```
assert np.sum(rel_freqs_) == 1
```

Найдем вектор плотности относительной частоты:

```
rel_freqs_density_ = rel_freqs_ / h_
```

вектор плотности относительной частоты :

$$[0.0222 \quad 0.0111 \quad 0.1329 \quad 0.1772 \quad 0.1662 \quad 0.0277 \quad 0.0166]$$

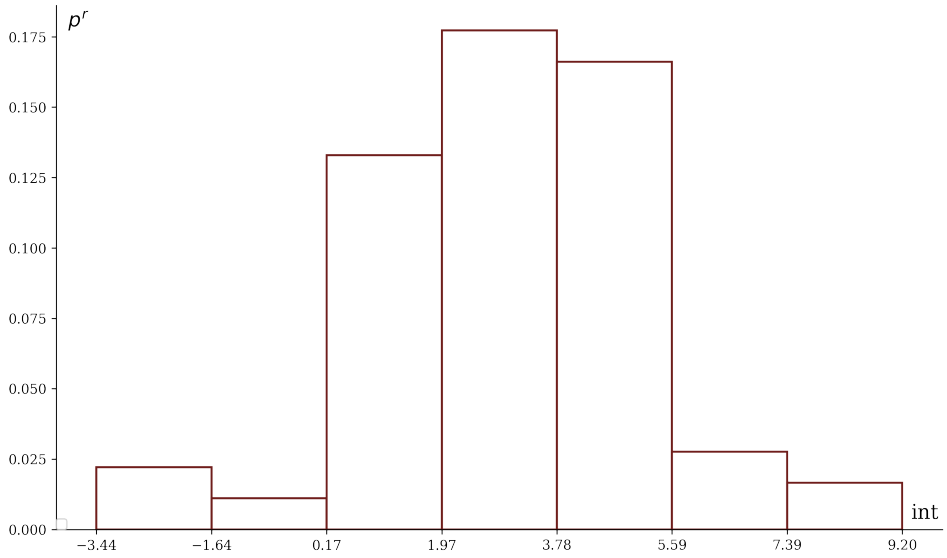
Таким образом была произведена группировка статистических данных. Результатом группировки является интервальный вариационный ряд, который можно представить в виде таблицы:

Интервальный вариационный ряд

| Интервал | Частота | Относительная Частота | Плотность относительной частоты |
|---|---|---|---|
| $[-3.442 \quad -1.6364)$ | 4 | 0.04 | 0.0222 |
| $[-1.6364 \quad 0.1691)$ | 2 | 0.02 | 0.0111 |
| $[\ 0.1691 \quad 1.9747)$ | 24 | 0.24 | 0.1329 |
| $[\ 1.9747 \quad 3.7803)$ | 32 | 0.32 | 0.1772 |
| $[\ 3.7803 \quad 5.5859)$ | 30 | 0.30 | 0.1662 |
| $[\ 5.5859 \quad 7.3914)$ | 5 | 0.05 | 0.0277 |
| $[\ 7.3914 \quad 9.197\ ]$ | 3 | 0.03 | 0.0166 |

- Гистограмма относительных частот

```
def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = mid_ranges_
    y_values = rel_freqs_density_

    ax.bar(x_values,
           y_values,
           width=h_,
           color='white',
           edgecolor=RED,
           linestyle='-',
           linewidth=1.5,
           align='center')

    decorate_plot(ax, int_boundaries_, 'int', '$p^r$', loc=(0, 0))

    plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)

    plt.show()
```




- Выборочные характеристики выборки
  Найдем выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение выборки:

```
overlineX = 1/n_ * sum(data_)

S2 = 1/(n_ - 1) * sum((data_ - overlineX)**2)
```

$$\overline{X} \approx 3.17705 \qquad S^2 \approx 5.1431775$$

## Решение задания

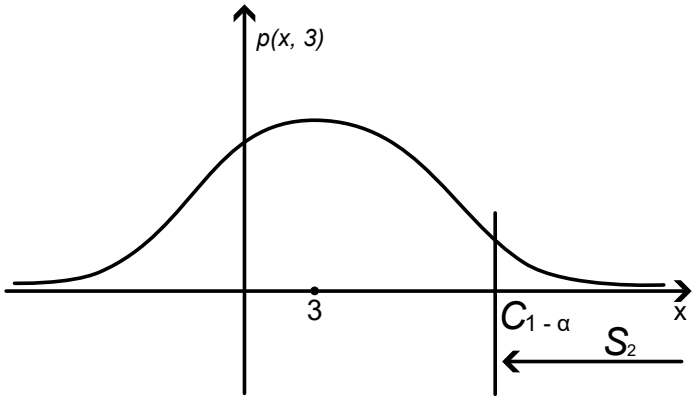
1. Постройте критерий $S_2$ уровня $\alpha$ и проверьте гипотезу $H_0 : a = a_0$ против односторонней альтернативы $H_2$, если $\sigma$ неизвестно.

$$\alpha = 0.1 \qquad H_0 : a = 3 \qquad H_2 : a > 3 \qquad \sigma - \text{неизвестно} \qquad S_2$$

---

Критическое множество для среднего при альтернативе $H_2 : a > 3$ имеет вид:

$$S_2 = \left\{\overline{X} > C_2\right\}$$



Рассмотрим статистику:

$$\frac{\overline{X}-a}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Тогда по определению ошибки первого рода $\alpha = P(S_2|H_0)$:

$$\alpha = P\left(\overline{X} > C_2 | a=3\right) = P\left(\frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n} > \frac{C_2-a_0}{S}\sqrt{n}\right) = F_{t(n-1)}\left(\frac{C_2-a_0}{S}\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{C_2-a_0}{S}\sqrt{n} = t_{1-\alpha}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{S\cdot t_{1-\alpha}(n-1)}{\sqrt{n}} + a_0 \approx 3.29259$$

```
quantile = sp.stats.t.ppf(1-alpha, n_-1)

C2 = np.sqrt(S2)*quantile/np.sqrt(n_) + a0
```

Следовательно, гипотеза $H_0 : a = 3$ принимается, потому что $\overline{X} = 3.17705$ не принадлежит критическому множеству $S_2 = \left\{\overline{X} > 3.29259\right\}$

---

2. Постройте критерий $S_3$ уровня $\alpha$ и проверьте гипотезу $H_{01} : \sigma = \sigma_0$ против альтернативы $H_3$, если $a$ неизвестно.

$$\alpha = 0.1 \qquad H_{01} : \sigma = 2.1 \qquad H_3 : \sigma > 2.1 \qquad a - \text{неизвестно} \qquad S_3$$

---

Критическое множество для среднего квадратического отклонения при альтернативе $H_3 : \sigma > 2.1$ имеет вид:

$$S_3 = \left\{S^2 > C_3\right\}$$

Рассмотрим статистику:

$$\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Тогда по определению ошибки первого рода $\alpha = P(S_3|H_{01})$:

$$\alpha = P\left(S^2 > C_3 | \sigma = 2.1\right) = P\left(\frac{S^2(n-1)}{\sigma_0^2} > \frac{C_3(n-1)}{\sigma_0^2}\right) = \chi^2(n-1)\left(\frac{C_3(n-1)}{\sigma_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{C_3(n-1)}{\sigma_0^2} = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}{n-1}\cdot\sigma_0^2 \approx 5.22994$$

```
quantile = sp.stats.chi2.ppf(1-alpha, n_-1)

C3 = quantile * sigma0**2 / (n_ - 1)
```

Следовательно, гипотеза $H_{01} : \sigma = 2.1$ принимается, потому что $S^2 = 5.1431775$ не принадлежит критическому множеству $S_3 = \{S^2 > 5.22994\}$

---

3. Постройте оптимальный критерий $S_1$ уровня $\alpha$ и проверьте $H_0$ против простой альтернативы $H_1 : a = a_1$, если $\sigma = \sigma_1$ известно.

$$\alpha = 0.1 \qquad H_0 : a = 3 \qquad H_1 : a = 3.5 \qquad \sigma = 2.2 \qquad S_1$$

---

Критическое множество для среднего квадратического отклонения при альтернативе $H_1 : a = 3.5$ имеет вид:

$$S_1 = \left\{\overline{X} < C_1\right\}$$

Рассмотрим статистику:

$$\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Тогда по определению ошибки первого рода $\alpha = P(S_1|H_0)$:

$$\alpha = P\left(\overline{X} < C_1 | a = 3\right) = P\left(\frac{\overline{X} - a_0}{\sigma_1}\sqrt{n} < \frac{C_1 - a_0}{\sigma_1}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{C_1 - a_0}{\sigma_1}\sqrt{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{C_1 - a_0}{\sigma_1}\sqrt{n} = u_\alpha$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{u_\alpha \cdot \sigma_1}{\sqrt{n}} + a_0 \approx 2.7180587$$

```
quantile = sp.stats.norm.ppf(alpha, 0, 1)

C1 = quantile * sigma1 / np.sqrt(n_) + a0
```

Следовательно, гипотеза $H_0 : a = 3$ принимается, потому что $\overline{X} = 3.17705$ не принадлежит критическому множеству $S_1 = \left\{\overline{X} < 2.7180587\right\}$

---

4. Найдите ошибку второго рода $\beta = P(\overline{S_1}|H_1)$ критерий $S_1$.

---

$$S_1 = \left\{\overline{X} < C_1\right\} = \left\{\overline{X} < 2.7180587\right\}$$

$$\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Согласно определению ошибки второго рода $\beta = P(\overline{S_1}|H_1)$:

$$\beta = P(\overline{X} > C_1 | a = 3.5) = P(\frac{\overline{X} - a_0}{\sigma_1}\sqrt{n} > \frac{C_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n}) = 1 - \Phi(\frac{C_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n}) \approx 0.99981$$

```
val = (C1 - a1)/sigma1 * np.sqrt(n_)

beta = 1 - sp.stats.norm.cdf(val, 0, 1)
```

---

5. Найдите такие значения $a_1$, для которых ошибка второго рода критерия $S_1$ не превосходит $\varepsilon$.

$$\varepsilon = 0.1$$

---

$$1 - \Phi\left(\frac{C_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n}\right) <= 0.1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{C_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n}\right) \leq 0.9$$

$$\frac{C_1 - a_1}{\sigma_1}\sqrt{n} = u_{1-\varepsilon}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-u_{0.9} \cdot \sigma_1}{\sqrt{n}} + C_1 \approx 2.436117$$

```
quantile = sp.stats.norm.ppf(1 - epsilon, 0, 1)

a1_ = -quantile * sigma1 / np.sqrt(n_) + C1
```

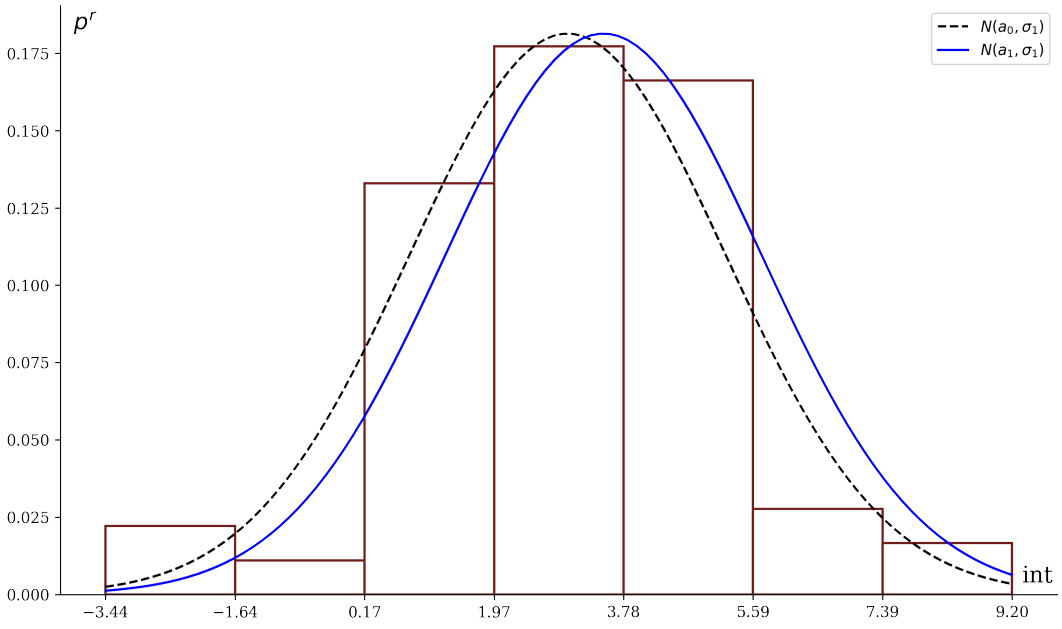
---

6. Постройте совмещенные графики гистограммы относительных частот данной выборки и плотностей нормального распределения с параметрами $(a_0, \sigma_1)$ и $(a_1, \sigma_1)$.

---

```
def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = mid_ranges_
    y_values = rel_freqs_density_
```

```
    # hist
    ax.bar(x_values,
           y_values,
           width=h_,
           color='white',
           edgecolor=RED,
           linestyle='-',
           linewidth=1.5,
           align='center')

    x_values = np.linspace(min_, max_, 100)

    # norm pdf with a0 sigma1
    y_values = sp.stats.norm.pdf(x_values, a0, sigma1)
    ax.plot(x_values,
            y_values,
            color='black',
            linestyle='--',
            linewidth=1.5,
            label='$N(a_0, \\sigma_1)$')

    # norm pdf with a1 sigma1
    y_values = sp.stats.norm.pdf(x_values, a1, sigma1)
    ax.plot(x_values,
            y_values,
            color='blue',
            linestyle='-',
            linewidth=1.5,
            label='$N(a_1, \\sigma_1)$')

    decorate_plot(ax, int_boundaries_, 'int', '$p^r$', loc='best')

    plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)

    plt.show()
```



# Вывод

В процессе выполнения задания мы освоили этапы первоначальной обработки статистических данных и изучили основные понятия, связанные с этой темой. Мы научились по заданной выборке составлять интервальный вариационный ряд, который является результатом группировки данных, а также вычислять выборочное среднее и среднее квадратичное отклонение выборки. На следующем этапе был разобран способ построения гистограммы относительных частот. Затем, были посчитаны критические множества для среднего и среднего квадратичного отклонения, а также проверены 3 гипотезы с разными альтернативами. Была найдена ошибка второго рода для критерия $S_1$ и такое значение параметра $a_1$, при котором ошибка второго рода критерия $S_1$ не превосходит $\varepsilon$. Также были построены совмещенные графики гистограммы относительных частот $x$ и плотностей нормального распределения $N(a_0, \sigma_1)$ и $N(a_1, \sigma_1)$. По второму рисунку видно, что кривая плотности нормального закона для основной гипотезы $H_0 : a = 3$ лучше ложится на гистограмму, чем в случае альтернативы $H_1 : a = 3.5$, что согласуется в пункте 3.

# Приложение

Программный код, с помощью которого была выполнена данная лабораторная работа.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy as sp

def decorate_plot(ax, x_ticks, xname, yname, loc=(-0.025, -0.3)):
    SIZE_TICKS = 10

    # Eliminate upper and right axes
    ax.spines['right'].set_color('none')
    ax.spines['top'].set_color('none')

    # Show ticks in the left and lower axes only
    ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
    ax.yaxis.set_ticks_position('left')

    # axis names
    ax.set_xlabel(xname, fontsize=15)
    ax.xaxis.set_label_coords(0.98, 0.05)

    ax.set_ylabel(yname, rotation=0, fontsize=15)
    ax.yaxis.set_label_coords(0.025, 0.95)

    ax.set_xticks(x_ticks)

    # Adjust the font size of the tick labels
    ax.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=SIZE_TICKS)

    plt.legend(fontsize=10, loc=loc)

    # Update font settings
    plt.rcParams.update({'font.family': 'serif', 'font.size': 12})

    # Adjust layout
    plt.tight_layout()

data_ = np.array([
    -3.442, 1.295, 3.672, 2.354, 5.238, 1.136, 4.421, 2.071, 0.269, 0.894,
    8.202, 0.605, -2.011, 3.375, 3.767, 1.068, 2.928, -0.276, 4.924, 3.31,
    5.741, 6.951, 3.417, 2.991, 5.599, 4.896, 9.197, 3.823, 1.827, 5.389,
    2.504, 4.212, -2.021, 1.891, 3.689, 5.366, 3.117, 4.641, 2.968, 4.645,
    3.752, 4.582, 3.601, 0.934, 2.785, 3.294, 4.695, 1.092, 3.155, 4.352,
    0.896, 0.839, 4.309, 2.793, 7.233, 0.95, 5.228, 1.28, 5.19, 0.972,
    4.562, 1.915, 4.243, 4.495, 0.648, 5.34, 3.294, 2.791, 6.805, 3.474,
    3.044, 5.452, 2.957, 7.862, 4.61, 1.317, 5.383, 3.205, -1.022, 3.602,
    3.373, 5.415, 4.093, 5.407, 0.501, 2.135, 1.957, 0.826, 5.34, 3.759,
    1.735, -3.277, 5.101, 1.43, 3.494, 0.545, 4.699, 3.44, 2.85, 4.33
])
```

```
data_

def group(data):
    n_ = len(data)
    print(f'n: {n_}')

    min_ = min(data)
    max_ = max(data)
    print(f'min: {min_}     max: {max_}')

    range_ = max_ - min_
    print(f'range: {range_}')

    l_ = 1 + int(np.log2(n_))
    print(f'l: {l_}')

    h_ = range_ / l_
    print(f'h: {h_}')

    int_boundaries_ = np.array(
        [min_ + i * h_ for i in range(0, l_ + 1, 1)]
    )
    print(f'interval boundaries: {int_boundaries_}')
    intervals_ = np.array(
        [(int_boundaries_[i], int_boundaries_[i+1]) for i in range(0, l_, 1)]
    )
    print(f'intervals: {intervals_}')
    mid_ranges_ = np.array(
        [sum(interval)/2 for interval in intervals_]
    )
    print(f'intervals\' midpoints: {mid_ranges_}')

    present = lambda el, int_ : int_[0] <= el < int_[1]
    freqs_ = np.zeros(l_)
    for el in data:
        for j in range(0, l_, 1):
            if present(el, intervals_[j]):
                freqs_[j] += 1

    freqs_[-1] += np.count_nonzero(data == max_)
    print(f'frequencies: {freqs_}')


    rel_freqs_ = freqs_ / n_
    print(f'relative frequencies: {rel_freqs_}')

    assert np.sum(rel_freqs_) == 1

    rel_freqs_density_ = rel_freqs_ / h_
    print(f'relative frequencies\' density: {rel_freqs_density_}')

    print(f'-'*100)

    space_ = ' ' * 5
    for i in range(l_):
```

```
        print(f'{intervals_[i]}{space_}{freqs_[i]}{space_}{rel_freqs_[i]}{space_}{re

    return n_, min_, max_, h_, int_boundaries_, mid_ranges_, rel_freqs_density_

n_, min_, max_, h_, int_boundaries_, mid_ranges_, rel_freqs_density_ = group(data_)

def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = mid_ranges_
    y_values = rel_freqs_density_

    ax.bar(x_values,
           y_values,
           width=h_,
           color='white',
           edgecolor=RED,
           linestyle='-',
           linewidth=1.5,
           align='center')

    decorate_plot(ax, int_boundaries_, 'int', '$p^r$', loc=(0, 0))

    plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)

    plt.show()

buildBar('hist')

overlineX = 1/n_ * sum(data_)
print(f'mean: {overlineX}')

S2 = 1/(n_ - 1) * sum((data_ - overlineX)**2)
print(f'variance: {S2}')

alpha = 0.1
a0 = 3
sigma0 = 2.1
a1 = 3.5
sigma1 = 2.2
epsilon = 0.1

check = lambda cond : 'accept' if not cond else 'decline'

quantile = sp.stats.t.ppf(1-alpha, n_-1)

C2 = np.sqrt(S2)*quantile/np.sqrt(n_) + a0
print(f'C2 = {C2}, overlineX > C2 = {overlineX > C2} => {check(overlineX > C2)}')

quantile = sp.stats.chi2.ppf(1-alpha, n_-1)

C3 = quantile * sigma0**2 / (n_ - 1)
print(f'C3 = {C3}, S2 > C3 = {S2 > C3} => {check(S2 > C3)}')
```

```
quantile = sp.stats.norm.ppf(alpha, 0, 1)

C1 = quantile * sigma1 / np.sqrt(n_) + a0
print(f'C1 = {C1}, overlineX < C1 = {overlineX < C1} => {check(overlineX < C1)}')

val = (C1 - a1)/sigma1 * np.sqrt(n_)

beta = 1 - sp.stats.norm.cdf(val, 0, 1)
print(f'beta = {beta}')

quantile = sp.stats.norm.ppf(1 - epsilon, 0, 1)

a1_ = -quantile * sigma1 / np.sqrt(n_) + C1
print(f'a1\' = {a1_}')

def buildBar(filename):
    RED = '#6F1D1B'

    _, ax = plt.subplots(figsize=(10, 6))

    x_values = mid_ranges_
    y_values = rel_freqs_density_

    # hist
    ax.bar(x_values,
           y_values,
           width=h_,
           color='white',
           edgecolor=RED,
           linestyle='-',
           linewidth=1.5,
           align='center')

    x_values = np.linspace(min_, max_, 100)

    # norm pdf with a0 sigma1
    y_values = sp.stats.norm.pdf(x_values, a0, sigma1)
    ax.plot(x_values,
            y_values,
            color='black',
            linestyle='--',
            linewidth=1.5,
            label='$N(a_0, \\sigma_1)$')

    # norm pdf with a1 sigma1
    y_values = sp.stats.norm.pdf(x_values, a1, sigma1)
    ax.plot(x_values,
            y_values,
            color='blue',
            linestyle='-',
            linewidth=1.5,
            label='$N(a_1, \\sigma_1)$')

    decorate_plot(ax, int_boundaries_, 'int', '$p^r$', loc='best')
```

```
    plt.savefig(f'{filename}.png', dpi=300, transparent=True)
    plt.show()
buildBar('hist_pdf1_pdf2')
```