Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

О т ч е т

по домашней работе № 2-1

Название домашней работы:
Интерполяция Лагранжа.
Вычисление интерполяционного полинома Лагранжа.

Вариант № 9

Дисциплина:
Численные методы

Студент группы ФН11-52Б	____________ (Подпись, дата)	**Очкин Н.В.** (И.О. Фамилия)
Преподаватель	____________ (Подпись, дата)	**Кутыркин В.А.** (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

Задание

Для гладкой на отрезке [0;2] функции

$$f(\tau) = \frac{20 + 0.2 \cdot N}{1 + (20 + 0.2 \cdot N) \cdot (1 + 0.05 \cdot (54 - n)) \cdot (\tau - 1)^2},$$

используя равномерную сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяции.

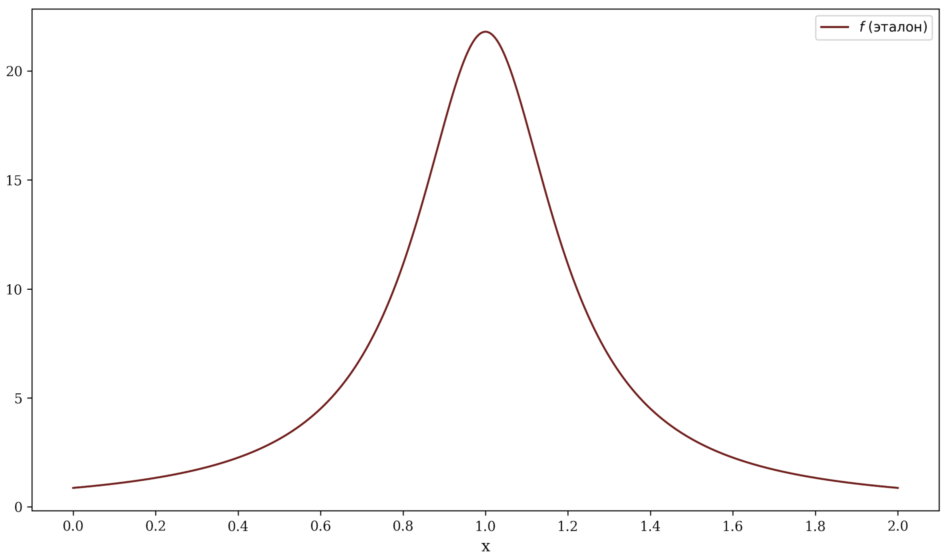
Для гладкой на отрезке [0;2] функции f, используя чебышевскую сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.

Прокомментировать результаты интерполяций с равномерными и чебышевскими узлами.

Исходные данные

$$N = 9 \qquad n = 52$$

$$f(\tau) = \frac{20 + 0.2 \cdot 9}{1 + (20 + 0.2 \cdot 9) \cdot (1 + 0.05 \cdot (54 - 52)) \cdot (\tau - 1)^2}$$



Часть 1

Используя равномерную сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа.

Равномерная сетка

Для построения равнмоерной сетки с 11-ю узлами воспользуемся следующей формулой:

$$x_i = a + i \cdot h, \qquad i = 0, 1, 2, ..., 10,$$

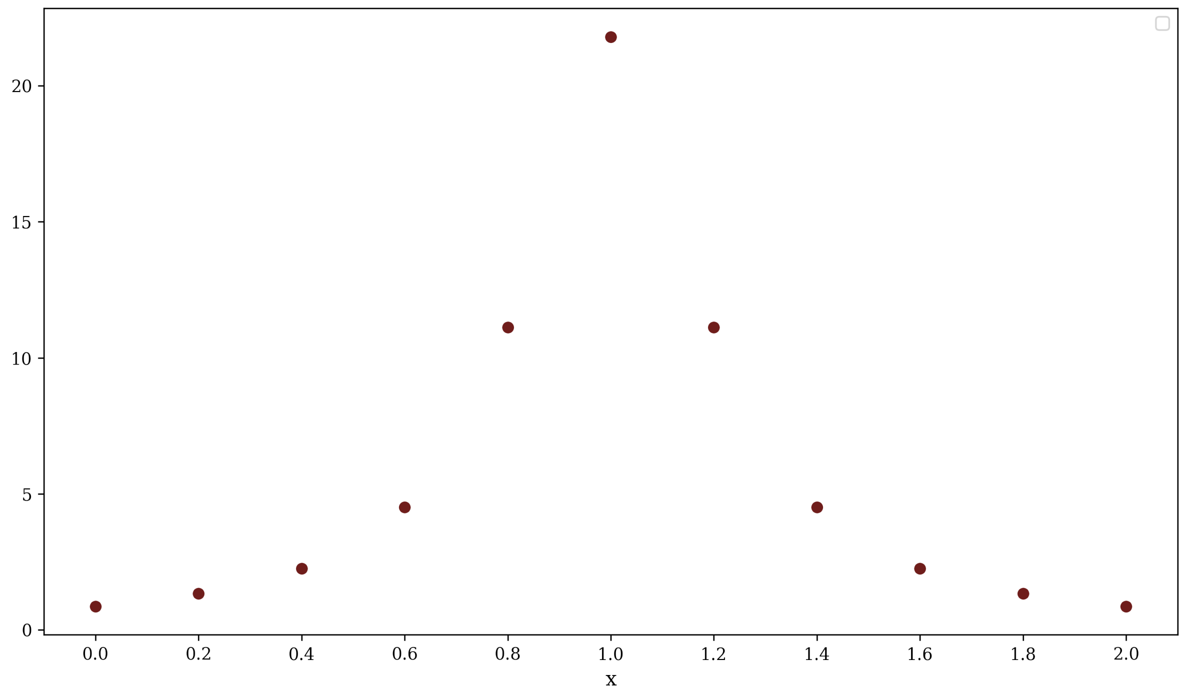
где $h = \frac{b-a}{10}$.

Также вычислим значения функции $f(\tau)$ в узлах:

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, ..., 10,$$

Итого получим следующие точки:

1. (x: 0.0, y: 0.873)
2. (x: 0.2, y: 1.334)
3. (x: 0.4, y: 2.263)
4. (x: 0.6, y: 4.507)
5. (x: 0.8, y: 11.127)
6. (x: 1.0, y: 21.8)
7. (x: 1.2, y: 11.127)
8. (x: 1.4, y: 4.507)
9. (x: 1.6, y: 2.263)
10. (x: 1.8, y: 1.334)
11. (x: 2.0, y: 0.873)



Интерполяционный многочлен Лагранжа (с использованием равномерной сетки с 11-ю узлами)

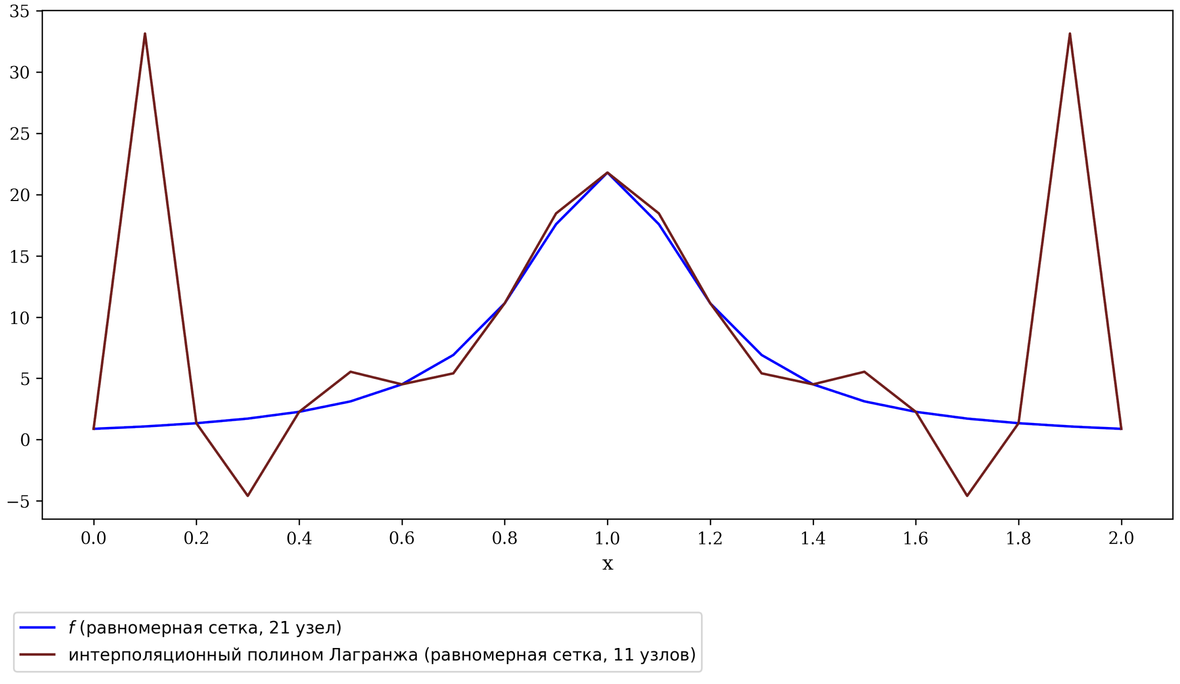
Интерполяционный многочлен Лагранжа будем искать по следующей формуле:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x),$$

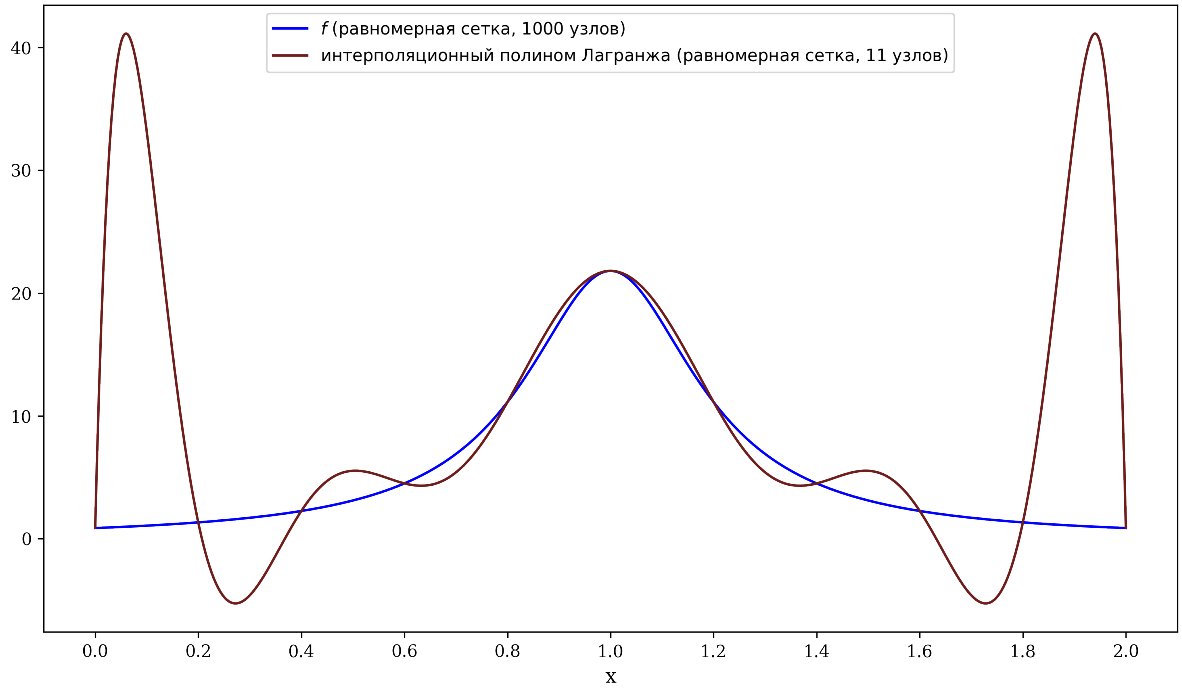
где базисные полиномы l_i определяются по формуле

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Используя равномерную сетку с 21 узлом, представим совмещенные графики функции f, и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.



Также представим совмещенные графики функции f, и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа, используя равномерную сетку с 1000 узлами.



Как видно из графиков, на концах отрезков присутствует сильный эффект нежелательных осцилляций (феномен Рунге).

Часть 2

Используя чебышевскую сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа.

Чебышевская сетка

Для натурального числа n узлы Чебышёва на отрезке [-1, 1] задаются формулой

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, ..., n.$$

Это корни многочлена Чебышёва первого рода степени n. Для получения узлов на произвольном отрезке [a, b] можно применить аффинное преобразование отрезков:

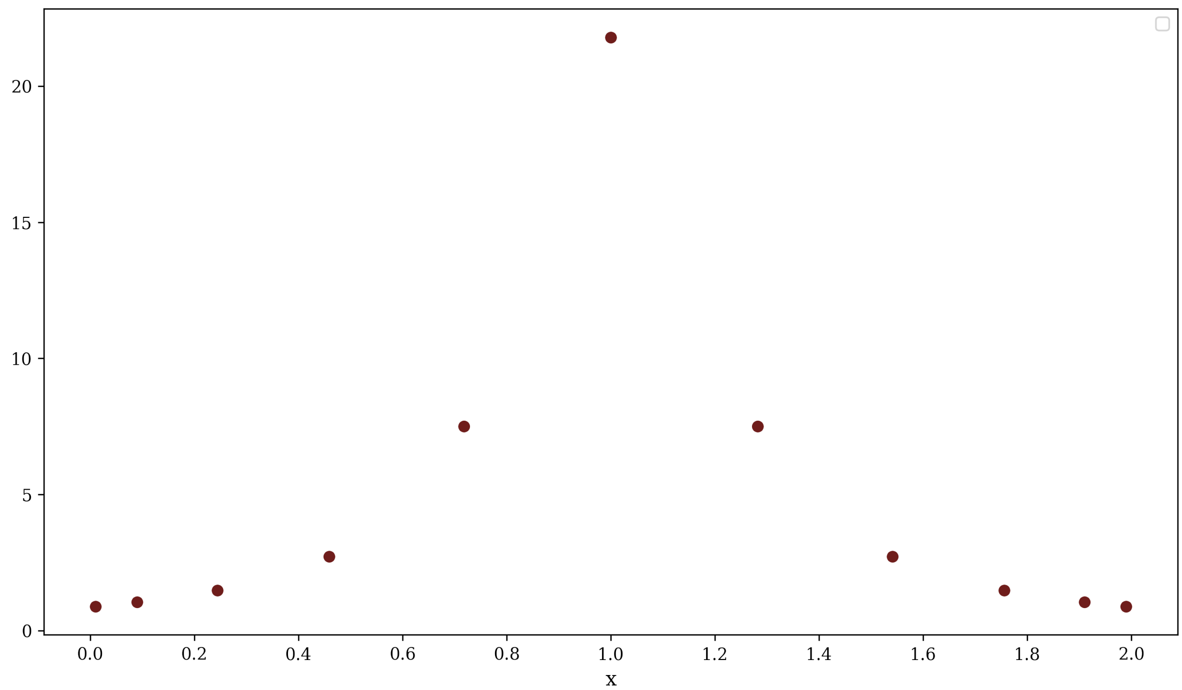
$$x_k = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, ..., n.$$

Также вычислим значения функции $f(\tau)$ в узлах:

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, ..., 10,$$

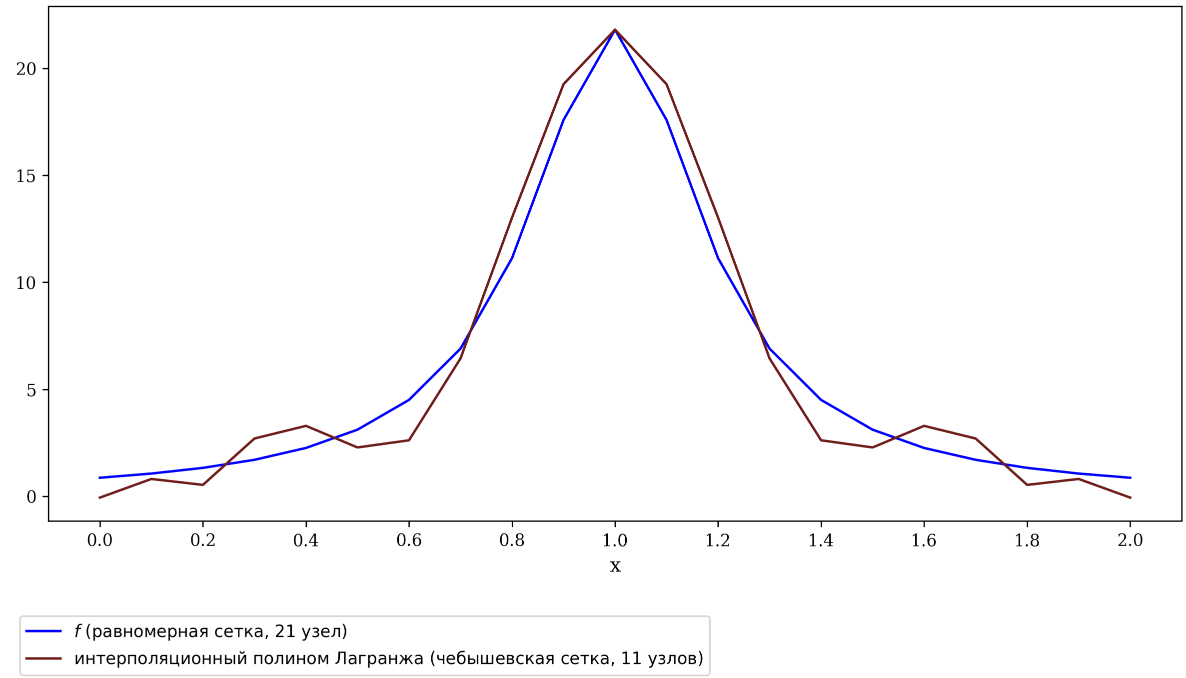
Итого получим следующие точки:

1. (x: 0.01, y: 0.89)
2. (x: 0.09, y: 1.046)
3. (x: 0.244, y: 1.483)
4. (x: 0.459, y: 2.722)
5. (x: 0.718, y: 7.509)
6. (x: 1.0, y: 21.8)
7. (x: 1.282, y: 7.509)
8. (x: 1.541, y: 2.722)
9. (x: 1.756, y: 1.483)
10. (x: 1.91, y: 1.046)
11. (x: 1.99, y: 0.89)

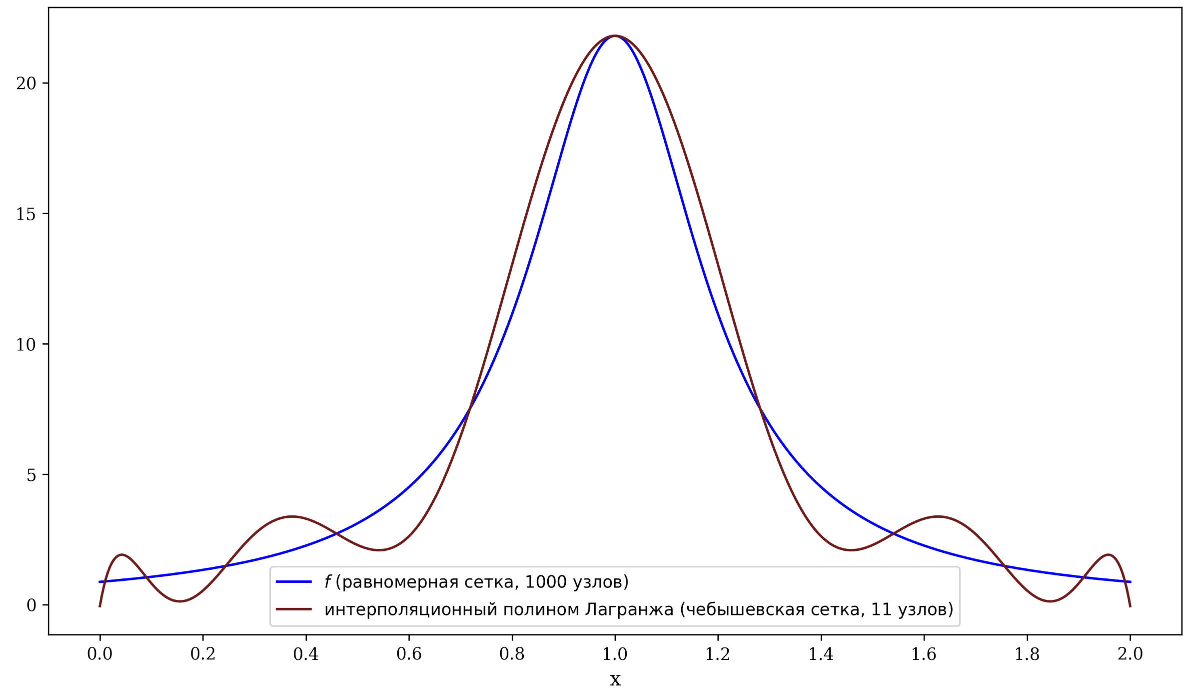


Интерполяционный многочлен Лагранжа (с использованием чебышевской сетки с 11-ю узлами)

Представим совмещенные графики функции f, используя равномерную сетку с 21 узлом и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.



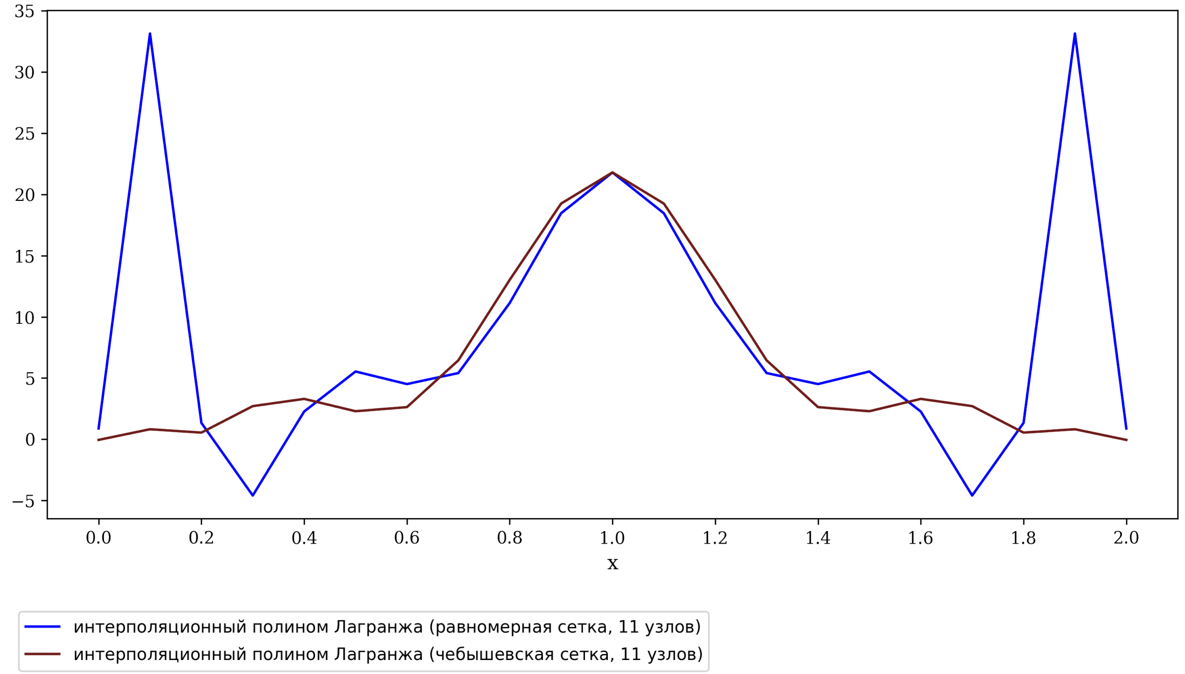
Также представим совмещенные графики функции f, и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа, используя равномерную сетку с 1000 узлами.



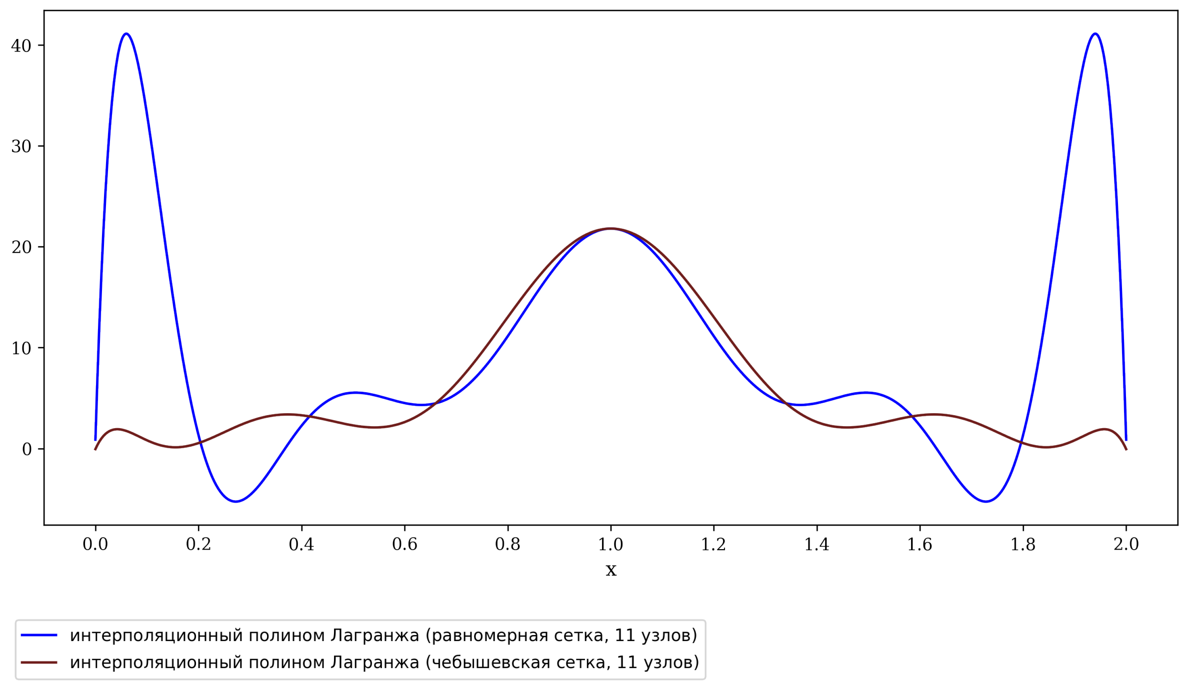
Благодаря тому, что в этот раз была использована Чебышевская сетка, нам удалось снизить влияние феномена Рунге.

Часть 3

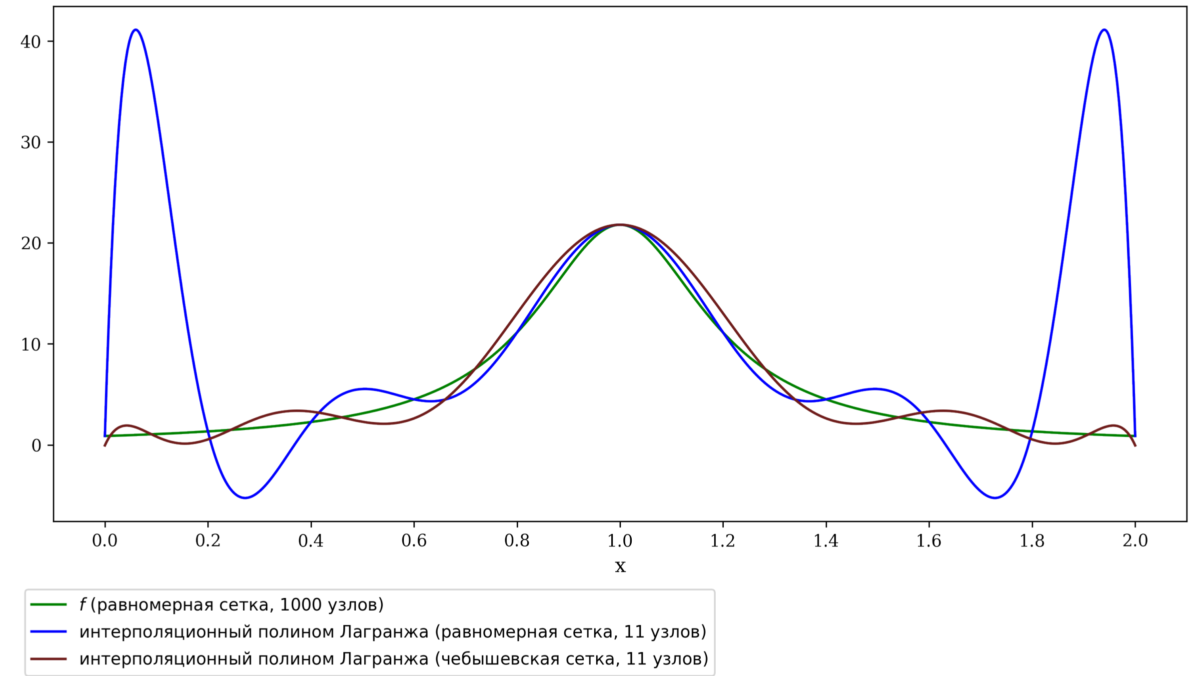
Дополнительно изобразим совмещенные графики полученных интерполяционных полиномов Лагранжа с 11-ю равномерными и с 11-ю чебышевскими узлами, используя равномерную сетку с 21 узлом.



и с 1000 узлами.



А также добавим эталонный график.



Вывод

В ходе проделанного домашнего задания были вычислены интерполяционные полиномы Лагранжа, с использованием равномерной и Чебышевской сетки с 11-ю узлами. Исходя из результов работы, можно сделать вывод, что при втором способе вычисления, значительно снижается эффект нежелательных колебаний.