МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУК
КАФЕДРА
«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: **Математика и компьютерные науки**

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1.3
«Методы простой итерации и Зейделя
Методы касательных, секущих, метод деления отрезка пополам»
Группа ФН11-52Б

Вариант №9

Студент: Очкин Н.В.

Преподаватель: Кутыркин В.А.

Оценка:

Москва, 2024

Задание 1.1

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot^{>} x =^{>} b$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Кроме того, используя неравенство

$$||^{>}x_{(k)} -^{>} x_{*}|| \leq \frac{||F||^{k}}{1-||F||} \cdot ||^{>}g|| + ||F||^{k} \cdot ||^{>}x_{(0)}||,$$

найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность

Дано

$$A = \begin{pmatrix} 10.6 & 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ -1.0 & 10.6 & -3.0 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 & 10.6 & 1.0 \\ 3.0 & 2.0 & 1.0 & 10.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 16.6 \\ 8.6 \\ 16.6 \\ 16.6 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Решение

Рабочая формула метода простой итерации для решения СЛАУ:

$$^{>}x_{k+1} = F \cdot {}^{>}x_{(k)} +^{>} g, \tag{1}$$

где
$F = E - D \cdot A$,
E - единичная матрица,
D - матрица, состоящая только из диагонали матрицы A, где каждый элемент находится в -1 степени,
$||F|| < 1$,
$^{>}g = D \cdot {}^{>}b$

Все вычисления произведем в python, при помощи библиотеки numpy

$$D = \begin{pmatrix} 0.094 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.094 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.094 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.094 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.094 & -0.189 & -0.283 \\ 0.094 & 0.0 & 0.283 & -0.189 \\ -0.189 & -0.283 & 0.0 & -0.094 \\ -0.283 & -0.189 & -0.094 & 0.0 \end{pmatrix} \quad ||F|| = 0.566$$

$$g = \begin{pmatrix} 1.566 \\ 0.811 \\ 1.566 \\ 1.566 \end{pmatrix}$$

Вычислим теоретическое количество шагов, необходимых для результата с заданной погрешностью

$$k \geq 10$$

Воспользуемся рабочей формулой (1)

$k : 0$
$x_{(0)} : [0., 0., 0., 0.]$
$x_{(1)} : [1.566, 0.811, 1.566, 1.566]$

$k : 1$
$x_{(1)} : [1.566, 0.811, 1.566, 1.566]$
$x_{(2)} : [0.751, 1.107, 0.893, 0.822]$
$0.8152367390530441 > 0.01$

$k : 2$
$x_{(2)} : [0.751, 1.107, 0.893, 0.822]$
$x_{(3)} : [1.06, 0.98, 1.034, 1.06]$
$0.30965159158231315 > 0.01$

$k : 3$
$x_{(3)} : [1.06, 0.98, 1.034, 1.06]$
$x_{(4)} : [0.978, 1.004, 0.989, 0.984]$
$0.08199753601839999 > 0.01$

$k : 4$
$x_{(4)} : [0.978, 1.004, 0.989, 0.984]$
$x_{(5)} : [1.006, 0.998, 1.005, 1.006]$
$0.028001258253636863 > 0.01$

$k : 5$
$x_{(5)} : [1.006, 0.998, 1.005, 1.006]$
$x_{(6)} : [0.998, 1.001, 0.999, 0.998]$
$0.00893777171591037 < 0.01$

Итого мы получили ответ с заданной погрешностью за $k = 5$ шагов.

Задание 1.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $A \cdot^{>} x =^{>} b$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,01.

Дано

$$A = \begin{pmatrix} 10.6 & 1.0 & 2.0 & 3.0 \\ -1.0 & 10.6 & -3.0 & 2.0 \\ 2.0 & 3.0 & 10.6 & 1.0 \\ 3.0 & 2.0 & 1.0 & 10.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 16.6 \\ 8.6 \\ 16.6 \\ 16.6 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Решение

Рабочая формула метода Зейделя для решения СЛАУ:

$$^{>}y_{(k)} = (E - Q)^{-1} \cdot P \cdot {}^{>}y_{(k-1)} + (E - Q)^{-1} \cdot {}^{>}g, \tag{2}$$

где
$F = E - D_1 \cdot A$,
E - единичная матрица,
D_1 - матрица, состоящая только из диагонали матрицы A, где каждый элемент находится в -1 степени,
$||F|| < 1$,
$^{>}g = D_1 \cdot {}^{>}b$,
B - нижний треугольник матрицы F,
D_2 - матрица, состоящая только из диагонали матрицы F,
$Q = B - D_2$,
$P = F - Q$,

Все вычисления произведем в python, при помощи библиотеки numpy

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0.094 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.094 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.094 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.094 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.094 & -0.189 & -0.283 \\ 0.094 & 0.0 & 0.283 & -0.189 \\ -0.189 & -0.283 & 0.0 & -0.094 \\ -0.283 & -0.189 & -0.094 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.094 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.189 & -0.283 & 0.0 & 0.0 \\ -0.283 & -0.189 & -0.094 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.094 & -0.189 & -0.283 \\ 0.0 & 0.0 & 0.283 & -0.189 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.094 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.094 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.189 & -0.283 & 0.0 & 0.0 \\ -0.283 & -0.189 & -0.094 & 0.0 \end{pmatrix}$$

$$||F|| = 0.566 \qquad g = \begin{pmatrix} 1.566 \\ 0.811 \\ 1.566 \\ 1.566 \end{pmatrix}$$

Воспользуемся рабочей формулой (2)

$k : 0$
$y_{(0)} : [0., 0., 0., 0.]$
$y_{(1)} : [1.566, 0.959, 0.999, 0.848]$

$k : 1$
$y_{(1)} : [1.566, 0.959, 0.999, 0.848]$
$y_{(2)} : [1.047, 1.033, 0.996, 0.981]$
$0.5188807833469409 > 0.01$

$k : 2$
$y_{(2)} : [1.047, 1.033, 0.996, 0.981]$
$y_{(3)} : [1.003, 1.003, 1., 0.999]$
$0.04410560814660225 > 0.01$

$$k : 3$$
$$y_{(3)} : [1.003, 1.003, 1., 0.999]$$
$$y_{(4)} : [1., 1., 1., 1.]$$
$$0.0029932562017636055 < 0.01$$

Итого мы получили ответ с заданной погрешностью за $k = 3$ шагов.

Задание 2.1

С погрешностью, не превосходящей величину $\varepsilon = 0,0001$, найти все корни уравнения:

$(N+5.2+(-1)^N \cdot \alpha) \cdot x^3 - (2 \cdot N^2 + 10.4 \cdot N + (-1)^{N+1} \cdot \alpha) \cdot x^2 - N^2 \cdot (N+5.2) \cdot (x-2N) + (-1)^N \cdot \alpha$

Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.

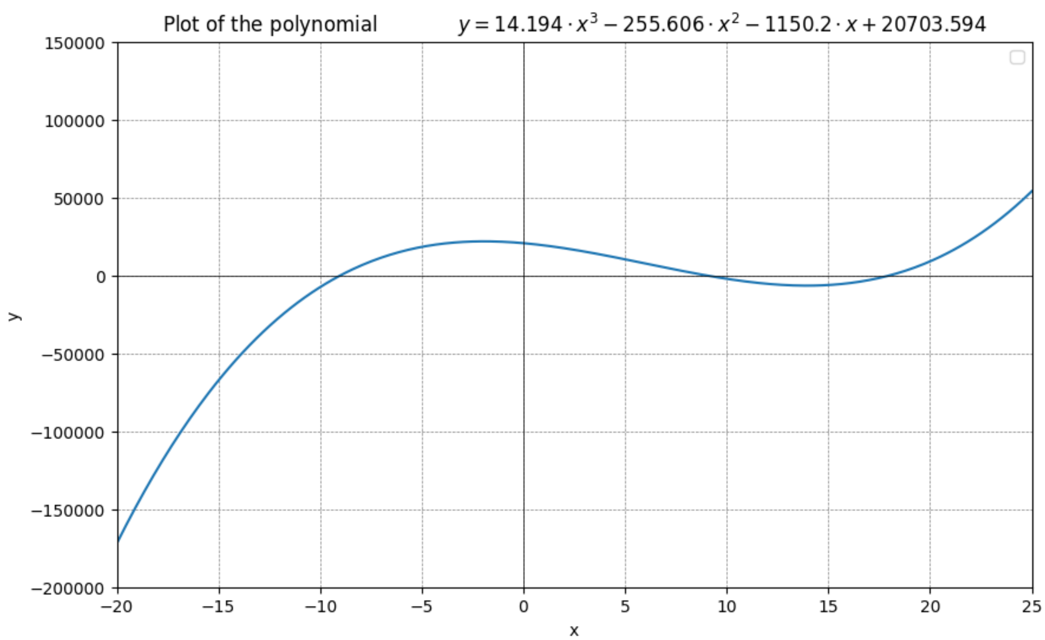
Дано

$$N = 9 \quad n = 52 \quad \alpha = 0.006 \quad \varepsilon = 0.0001$$

$$y = 14.194 \cdot x^3 - 255.606 \cdot x^2 - 1150.2 \cdot x + 20703.594$$

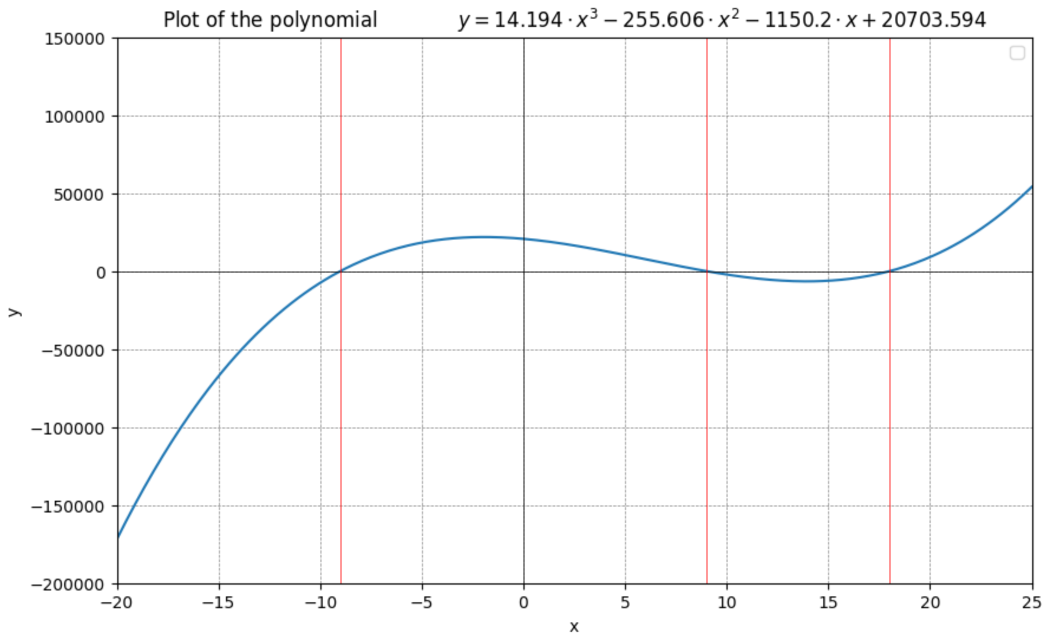
Решение

Воспользуемся библиотекой matplotlib для изображения заданного многочлена



С помощью библиотеки scipy найдем эталонные корни уравнения

$$[-9.000562591621339, \quad 8.997886402334267, \quad 18.010707751918982]$$



Найдем каждый из кореней тремя разными способами:

- Метод касательных (Ньютона).
- Метод секущих.
- Метод деления отрезка пополам.

Метод Ньютона

Для нахождения левого корня уравнения воспользуемся методом касательных (Ньютона).
Рабочая формула

$$x_k = x_{k-1} - (f'(x_{k-1}))^{-1} \cdot f(x_{k-1})$$

Производную будем искать методом центральных разностей.
Рабочая формула

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

В качестве x_0 возьмем -10.

$k : 0$	$k : 1$	$k : 2$	$k : 3$
$x_{(0)} : -10$	$x_{(1)} : -9.08164$	$x_{(2)} : -9.00116$	$x_{(3)} : -9.00056$
$x_{(1)} : -9.08164$	$x_{(2)} : -9.00116$	$x_{(3)} : -9.00056$	$x_{(4)} : -9.00056$
	$0.08047849 > 0.0001$	$0.00060173 > 0.0001$	$3e-08 < 0.0001$

Итого мы получили ответ с заданной погрешностью за k = 3 шагов

Метод деления отрезка пополам

Для нахождения срединного корня уравнения воспользуемся методом деления отрезка пополам.
Данный метод может быть записан в виде псевдокода

Псевдокод Метода Деления Отрезка Пополам

```
input: Function f,
       endpoint values a, b,
       tolerance TOL,
       maximum iterations NMAX
conditions: a < b,
            either f(a) < 0 and f(b) > 0 or f(a) > 0 and f(b) < 0
output: value which differs from a root of f(x) = 0 by less than TOL

N ← 1
while N <= NMAX do // limit iterations to prevent infinite loop
    c ← (a + b)/2 // new midpoint
    if f(c) = 0 or (b - a)/2 < TOL then // solution found
        Output(c)
        Stop
    end if
    N ← N + 1 // increment step counter
    if sign(f(c)) = sign(f(a)) then a ← c else b ← c // new interval
end while
Output("Method failed.") // max number of steps exceeded
```

В качестве отрезка [a, b] возьмем [5, 10].

$k : 0$	$k : 1$	$k : 2$	$k : 3$
$a : 5$	$a : 7.5$	$a : 8.75$	$a : 8.75$
$b : 10$	$b : 10$	$b : 10$	$b : 9.375$
$c : 7.5$	$c : 8.75$	$c : 9.375$	$c : 9.0625$
$f(c) : 3687.35025$	$f(c) : 578.38072$	$f(c) : -849.40649$	$f(c) : -148.23685$
$2.5 > 0.0001$	$1.25 > 0.0001$	$0.625 > 0.0001$	$0.3125 > 0.0001$

$k : 4$	$k : 5$	$k : 6$	$k : 7$
$a : 8.75$	$a : 8.90625$	$a : 8.98438$	$a : 8.98438$
$b : 9.0625$	$b : 9.0625$	$b : 9.0625$	$b : 9.02344$
$c : 8.90625$	$c : 8.98438$	$c : 9.02344$	$c : 9.00391$
$f(c) : 212.05338$	$f(c) : 31.13332$	$f(c) : -58.74804$	$f(c) : -13.85611$
$0.15625 > 0.0001$	$0.07812 > 0.0001$	$0.03906 > 0.0001$	$0.01953 > 0.0001$

$k : 8$	$k : 9$	$k : 10$	$k : 11$
$a : 8.98438$	$a : 8.99414$	$a : 8.99414$	$a : 8.99658$
$b : 9.00391$	$b : 9.00391$	$b : 8.99902$	$b : 8.99902$
$c : 8.99414$	$c : 8.99902$	$c : 8.99658$	$c : 8.9978$
$f(c) : 8.62646$	$f(c) : -2.61786$	$f(c) : 3.00354$	$f(c) : 0.19265$
$0.00977 > 0.0001$	$0.00488 > 0.0001$	$0.00244 > 0.0001$	$0.00122 > 0.0001$
$k : 12$	$k : 13$	$k : 14$	$k : 15$
$a : 8.9978$	$a : 8.9978$	$a : 8.9978$	$a : 8.9978$
$b : 8.99902$	$b : 8.99841$	$b : 8.99811$	$b : 8.99796$
$c : 8.99841$	$c : 8.99811$	$c : 8.99796$	$c : 8.99788$
$f(c) : -1.21266$	$f(c) : -0.51002$	$f(c) : -0.15869$	$f(c) : 0.01698$
$0.00061 > 0.0001$	$0.00031 > 0.0001$	$0.00015 > 0.0001$	$8e - 05 < 0.0001$

Итого мы получили ответ с заданной погрешностью за k = 15 шагов

Метод секущих

Для нахождения правого корня уравнения воспользуемся методом секущих.
Рабочая формула

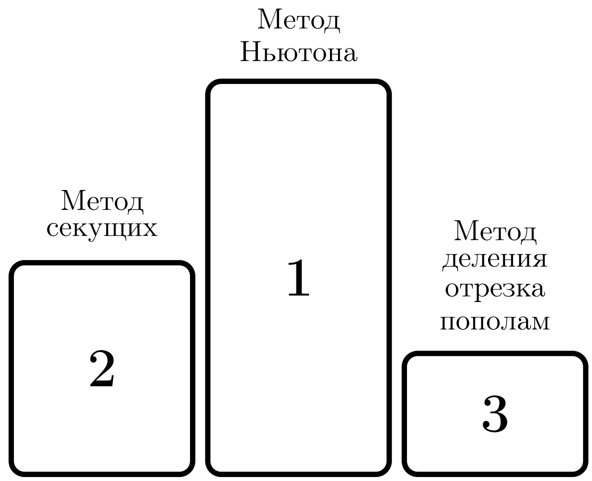
$$x_k = x_{k-1} - \frac{(b - x_{k-1})f(x_{k-1})}{f(b) - f(x_{k-1})}$$

В качестве отрезка [a, b] возьмем [15, 20];
В качестве x_0 возьмем 15.

$k : 0$	$k : 1$	$k : 2$
$x_{(0)} : 15$	$x_{(1)} : 17.02965$	$x_{(2)} : 17.75509$
$x_{(1)} : 17.02965$	$x_{(2)} : 17.75509$	$x_{(3)} : 17.94866$
	$0.72544 > 0.0001$	$0.19357 > 0.0001$
$k : 3$	$k : 4$	$k : 5$
$x_{(3)} : 17.94866$	$x_{(4)} : 17.99592$	$x_{(5)} : 18.0072$
$x_{(4)} : 17.99592$	$x_{(5)} : 18.0072$	$x_{(6)} : 18.00988$
$0.04726 > 0.0001$	$0.01128 > 0.0001$	$0.00268 > 0.0001$
$k : 6$	$k : 7$	$k : 8$
$x_{(6)} : 18.00988$	$x_{(7)} : 18.01051$	$x_{(8)} : 18.01066$
$x_{(7)} : 18.01051$	$x_{(8)} : 18.01066$	$x_{(9)} : 18.0107$
$0.00063 > 0.0001$	$0.00015 > 0.0001$	$4e - 05 < 0.0001$

Итого мы получили ответ с заданной погрешностью за k = 8 шагов

Вывод


Метод Ньютона
1
Метод секущих
2
Метод деления отрезка пополам
3