

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э.  
Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

**ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ  
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»**

**Направление: Математика и компьютерные науки**

**Дисциплина: Численные методы**

**Домашняя работа №1  
«Погрешности при решении СЛАУ»  
Группа ФН11-52Б**

**Вариант 9**

**Студент: Очкин Н. В.**

**Преподаватель: Кутыркин В. А.**

**Оценка:**

**Москва 2024**

## Задание 1.1

Дана СЛАУ (  $N$  – номер студента в журнале,  $\alpha = \frac{n-50}{100}$ , где  $n$  – номер группы):

$$\begin{cases} 150(1 + 0.5N + \alpha)x^1 + 150(1 + 0.5N)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \\ 150.1 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 149.9 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \\ 149.9 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 150 \cdot (1 + 0.5N)x^2 + 150.1 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 150(1 + 0.5N + \alpha)x^1 + 150(1 + 0.5N)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 + 0.01); \\ 150.1 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 149.9 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 - 0.01); \\ 149.9 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 150 \cdot (1 + 0.5N)x^2 + 150.1 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 + 0.01); \end{cases} \quad (2)$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.

## Решение

Подставим  $N = 9$  и  $\alpha = \frac{52-50}{100} = 0.02$  в (1):

$$\begin{cases} 828x^1 + 825x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 825.55x^1 + 827.448x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 824.45x^1 + 825x^2 + 828.552x^3 = 2478; \end{cases} \quad (3)$$

Матрица СЛАУ (1) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \quad (4)$$

### 1. Найдем число обусловленности матрицы A.

Число обусловленности матрицы равно:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (5)$$

Вычислим обратную матрицу с помощью функции `inv()` библиотеки `sympy`:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Норма матрицы вычисляется по формуле:

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_j^i| : i = \overline{1, n} \right\} \quad (7)$$

Вычислим нормы:

$$\|A\| = 2478.002 \quad (8)$$

$$\|A^{-1}\| = 0.544388949997522 \quad (9)$$

Теперь вычислим число обусловленности матрицы:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 2478.002 \cdot 0.544388949997522 \approx 1348.99690687176 \quad (10)$$

Следовательно, СЛАУ (3) плохо обусловлена.

## 2. Найдем относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ (2).

Подставим  $N = 9$  и  $\alpha = \frac{52-50}{100} = 0.02$  в (2):

$$\begin{cases} 828x^1 + 825x^2 + 825x^3 = 2502.78; \\ 825.55x^1 + 827.448x^2 + 825x^3 = 2453.22; \\ 824.45x^1 + 825x^2 + 828.552x^3 = 2502.78; \end{cases} \quad (11)$$

Запишем СЛАУ (3) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$${}^>x = A^{-1}{}^>b =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.999915466153453 \\ 1.00073239055399 \\ 0.999352450688377 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем СЛАУ (11) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2502.78 \\ 2453.22 \\ 2502.78 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 2502.78 \\ 2453.22 \\ 2502.78 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.78 \\ -24.78 \\ 24.78 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Тогда ошибка  ${}^>\Delta x = A^{-1}{}^>\Delta b =$

$$= \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24.78 \\ -24.78 \\ 24.78 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6.74962545839196 \\ -13.4899581809387 \\ 6.74582499360713 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Поскольку  $\|{}^>x\| = 1$  и  $\|{}^>\Delta x\| = 6.74962545839196$ ,

относительная погрешность  $\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} = 6.74962545839196$

Действительно,

$$\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} = 6.74962545839196 \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|{}^>\Delta b\|}{\|{}^>b\|} = 1242.47190776588 \cdot 0.01 = 12.4247190776588$$

## Результаты

Число обусловленности  $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1242.47190776588 > 10^2$ , значит, матрица СЛАУ плохо обусловлена. Относительная погрешность решения  $\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} = 6.74962545839196$  очень велика вследствие плохой обусловленности СЛАУ.

## Задание 1.2

Исходные данные варианта 9:

$N$	$\alpha$	$\lambda + \alpha$	$\lambda$	$F$	$a$	$b$
9	$\frac{55-52}{100} = 0.03$	0.4	0.37	arctan	0	1

Согласно этой таблице, на отрезке  $[a;b]$  выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами

$$\begin{aligned}
s_1 &= \tau_1 = a + \frac{h}{2}, \\
s_2 &= \tau_2 = \tau_1 + h, \\
s_3 &= \tau_3 = \tau_2 + h, \\
&\dots \\
s_{10} &= \tau_{10} = \tau_9 + h,
\end{aligned}$$

имеющая шаг  $h = \frac{b-a}{10} = 0.1$

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$(E + \lambda A) \cdot x = \cdot b + \cdot \Delta b, \text{ где} \quad (17)$$

$\lambda = 0.37$ ;

$E \in GL(\mathbb{R}; 10)$  – единичная матрица;

$A = (a_j^i)_{10}^{10} \in GL(\mathbb{R}; 10)$  – матрица, которая определяется соотношением:  
 $a_j^i = F(s_i \cdot \tau_j) \frac{b-a}{10}$  для  $i, j = \overline{1, 10}$ ;

$\cdot b = [b^1, \dots, b^{10}] \in \cdot \mathbb{R}^{10}$  – вектор, который определяется соотношением:  
 $\cdot b = (E + \lambda A) \cdot \cdot x_*$  и  $\cdot x_* = [1, 1, \dots, 1] \in \cdot \mathbb{R}^{10}$

Найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (17). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Кроме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (17) делением каждого её  $i$ -го уравнения ( $i = \overline{1, 10}$ ) на число  $b_i + \Delta b_i$ . После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (17).

## Решение

$$A = \begin{pmatrix} 0.00025 & 0.00075 & 0.00125 & 0.00175 & 0.00225 & 0.00275 & 0.00325 & 0.00375 & 0.00425 & 0.00475 \\ 0.00075 & 0.00225 & 0.00375 & 0.00525 & 0.00674 & 0.00823 & 0.00972 & 0.0112 & 0.01268 & 0.01415 \\ 0.00125 & 0.00375 & 0.00624 & 0.00873 & 0.0112 & 0.01366 & 0.01611 & 0.01853 & 0.02094 & 0.02332 \\ 0.00175 & 0.00525 & 0.00873 & 0.01219 & 0.01562 & 0.01902 & 0.02237 & 0.02567 & 0.02892 & 0.0321 \\ 0.00225 & 0.00674 & 0.0112 & 0.01562 & 0.01998 & 0.02426 & 0.02846 & 0.03255 & 0.03653 & 0.0404 \\ 0.00275 & 0.00823 & 0.01366 & 0.01902 & 0.02426 & 0.02937 & 0.03433 & 0.03912 & 0.04373 & 0.04815 \\ 0.00325 & 0.00972 & 0.01611 & 0.02237 & 0.02846 & 0.03433 & 0.03998 & 0.04536 & 0.05048 & 0.05532 \\ 0.00375 & 0.0112 & 0.01853 & 0.02567 & 0.03255 & 0.03912 & 0.04536 & 0.05124 & 0.05675 & 0.06191 \\ 0.00425 & 0.01268 & 0.02094 & 0.02892 & 0.03653 & 0.04373 & 0.05048 & 0.05675 & 0.06257 & 0.06793 \\ 0.00475 & 0.01415 & 0.02332 & 0.0321 & 0.0404 & 0.04815 & 0.05532 & 0.06191 & 0.06793 & 0.07342 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Исходная СЛАУ:

$$(E + \lambda A) \cdot x = b \quad (19)$$

$$E + \lambda A = \begin{pmatrix} 1.00009 & 0.00028 & 0.00046 & 0.00065 & 0.00083 & 0.00102 & 0.00120 & 0.00139 & 0.00157 & 0.00176 \\ 0.00028 & 1.00083 & 0.00139 & 0.00194 & 0.00249 & 0.00305 & 0.00360 & 0.00414 & 0.00469 & 0.00524 \\ 0.00046 & 0.00139 & 1.00231 & 0.00323 & 0.00414 & 0.00505 & 0.00596 & 0.00686 & 0.00775 & 0.00863 \\ 0.00065 & 0.00194 & 0.00323 & 1.00451 & 0.00578 & 0.00704 & 0.00828 & 0.00950 & 0.01070 & 0.01188 \\ 0.00083 & 0.00249 & 0.00414 & 0.00578 & 1.00739 & 0.00898 & 0.01053 & 0.01204 & 0.01352 & 0.01495 \\ 0.00102 & 0.00305 & 0.00505 & 0.00704 & 0.00898 & 1.01087 & 0.01270 & 0.01447 & 0.01618 & 0.01782 \\ 0.00120 & 0.00360 & 0.00596 & 0.00828 & 0.01053 & 0.01270 & 1.01479 & 0.01678 & 0.01868 & 0.02047 \\ 0.00139 & 0.00414 & 0.00686 & 0.00950 & 0.01204 & 0.01447 & 0.01678 & 1.01896 & 0.02100 & 0.02291 \\ 0.00157 & 0.00469 & 0.00775 & 0.01070 & 0.01352 & 0.01618 & 0.01868 & 0.02100 & 1.02315 & 0.02513 \\ 0.00176 & 0.00524 & 0.00863 & 0.01188 & 0.01495 & 0.01782 & 0.02047 & 0.02291 & 0.02513 & 1.02717 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$(E + \lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\ -0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\ -0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\ -0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\ -0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\ -0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\ -0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\ -0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\ -0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\ -0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\|E + \lambda A\| = 1.1559365,$$

$$\|(E + \lambda A)^{-1}\| = 1.09161556563663$$

и число обусловленности

$$\text{cond}(E + \lambda A) = \|E + \lambda A\| \cdot \|(E + \lambda A)^{-1}\| = 1.26183827628753.$$

Таким образом, матрица СЛАУ (17) хорошо обусловлена.

Найдем решение  $x = (E + \lambda A)^{-1}b$  СЛАУ.

$$\begin{aligned}
{}^>b = & \begin{pmatrix} 1.00009 & 0.00028 & 0.00046 & 0.00065 & 0.00083 & 0.00102 & 0.00120 & 0.00139 & 0.00157 & 0.00176 \\ 0.00028 & 1.00083 & 0.00139 & 0.00194 & 0.00249 & 0.00305 & 0.00360 & 0.00414 & 0.00469 & 0.00524 \\ 0.00046 & 0.00139 & 1.00231 & 0.00323 & 0.00414 & 0.00505 & 0.00596 & 0.00686 & 0.00775 & 0.00863 \\ 0.00065 & 0.00194 & 0.00323 & 1.00451 & 0.00578 & 0.00704 & 0.00828 & 0.00950 & 0.01070 & 0.01188 \\ 0.00083 & 0.00249 & 0.00414 & 0.00578 & 1.00739 & 0.00898 & 0.01053 & 0.01204 & 0.01352 & 0.01495 \\ 0.00102 & 0.00305 & 0.00505 & 0.00704 & 0.00898 & 1.01087 & 0.01270 & 0.01447 & 0.01618 & 0.01782 \\ 0.00120 & 0.00360 & 0.00596 & 0.00828 & 0.01053 & 0.01270 & 1.01479 & 0.01678 & 0.01868 & 0.02047 \\ 0.00139 & 0.00414 & 0.00686 & 0.00950 & 0.01204 & 0.01447 & 0.01678 & 1.01896 & 0.02100 & 0.02291 \\ 0.00157 & 0.00469 & 0.00775 & 0.01070 & 0.01352 & 0.01618 & 0.01868 & 0.02100 & 1.02315 & 0.02513 \\ 0.00176 & 0.00524 & 0.00863 & 0.01188 & 0.01495 & 0.01782 & 0.02047 & 0.02291 & 0.02513 & 1.02717 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00925000000000 \\ 1.02764640000000 \\ 1.04578010000000 \\ 1.06349940000000 \\ 1.08065630000000 \\ 1.09716940000000 \\ 1.11299060000000 \\ 1.12804960000000 \\ 1.14236860000000 \\ 1.15593650000000 \end{pmatrix} \\
& (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^>x = & \begin{pmatrix} 0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\ -0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\ -0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\ -0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\ -0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\ -0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\ -0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\ -0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\ -0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\ -0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.00925000000000 \\ 1.02764640000000 \\ 1.04578010000000 \\ 1.06349940000000 \\ 1.08065630000000 \\ 1.09716940000000 \\ 1.11299060000000 \\ 1.12804960000000 \\ 1.14236860000000 \\ 1.15593650000000 \end{pmatrix} = \\
& = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] \\
& (23)
\end{aligned}$$

Погрешность решения приближенной СЛАУ найдем так:

$${}^>\Delta x = (E + \lambda A)^{-1} {}^>\Delta b, \text{ где} \quad (24)$$

$${}^>\Delta b = [\Delta b^1, \dots, \Delta b^{10}] = 0.01 \cdot [b^1, -b^2, b^3, -b^4, b^5, -b^6, b^7, -b^8, b^9, -b^{10}] \in {}^>\mathbb{R}^{10} =$$

$$\begin{aligned}
& = [0.0100925000000000, -0.0102764640000000, 0.0104578010000000, \\
& -0.0106349940000000, 0.0108065630000000, -0.0109716940000000, \\
& 0.0111299060000000, -0.0112804960000000, 0.0114236860000000,
\end{aligned}$$



$$-0.0115593650000000\rangle \quad (25)$$

$${}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix} 0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\ -0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\ -0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\ -0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\ -0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\ -0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\ -0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\ -0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\ -0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\ -0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0100925000000000 \\ -0.0102764640000000 \\ 0.0104578010000000 \\ -0.0106349940000000 \\ 0.0108065630000000 \\ -0.0109716940000000 \\ 0.0111299060000000 \\ -0.0112804960000000 \\ 0.0114236860000000 \\ -0.0115593650000000 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.0101022344981114 \\ -0.0102475051573947 \\ 0.0105054578609862 \\ -0.0105695306103990 \\ 0.0108887038899682 \\ -0.0108740881677665 \\ 0.0112415673850983 \\ -0.0111558957774656 \\ 0.0115598593276807 \\ -0.0114126855030443 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Найдем решение приближенной СЛАУ:

$${}^>x + {}^>\Delta x = \begin{pmatrix} 1.01010223449811 \\ 0.989752494842605 \\ 1.01050545786099 \\ 0.989430469389601 \\ 1.01088870388997 \\ 0.989125911832234 \\ 1.01124156738510 \\ 0.988844104222534 \\ 1.01155985932768 \\ 0.988587314496956 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Рассмотрим результаты:

$$\|{}^>x\| = 1,$$

$$\|{}^>\Delta x\| = 0.0115598593276807,$$

$$\|{}^>b\| = 1.1559365 ,$$

$$\|{}^>\Delta b\| = 0.011423686 ,$$

$$\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} = 0.0115598593276807 ,$$

$$\text{cond}(A) \frac{\|{}^>\Delta b\|}{\|{}^>b\|} = 0.0124702734545453 ,$$

т.к.  $0.0115598593276807 < 0.0124702734545453$ ,

можем сделать вывод, что неравенство  $\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} < \text{cond}(A) \frac{\|{}^>\Delta b\|}{\|{}^>b\|}$  - выполняется

**Найдем решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (17) делением каждого ее  $i$ -го уравнения ( $i = \overline{1, 10}$ ) на число  $b_i + \Delta b_i$ .**

Получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 0.98112 & 0.00027 & 0.00045 & 0.00064 & 0.00082 & 0.0010 & 0.00118 & 0.00136 & 0.00154 & 0.00172 \\ 0.00027 & 0.98374 & 0.00136 & 0.00191 & 0.00245 & 0.00299 & 0.00353 & 0.00407 & 0.00461 & 0.00515 \\ 0.00044 & 0.00131 & 0.94894 & 0.00306 & 0.00392 & 0.00479 & 0.00564 & 0.00649 & 0.00734 & 0.00817 \\ 0.00061 & 0.00184 & 0.00307 & 0.95407 & 0.00549 & 0.00668 & 0.00786 & 0.00902 & 0.01016 & 0.01128 \\ 0.00076 & 0.00228 & 0.00380 & 0.00530 & 0.92297 & 0.00822 & 0.00965 & 0.01103 & 0.01238 & 0.01370 \\ 0.00094 & 0.00280 & 0.00465 & 0.00648 & 0.00826 & 0.93065 & 0.01169 & 0.01333 & 0.01490 & 0.01640 \\ 0.00107 & 0.00320 & 0.00530 & 0.00736 & 0.00937 & 0.01130 & 0.90274 & 0.01493 & 0.01662 & 0.01821 \\ 0.00124 & 0.00371 & 0.00614 & 0.00850 & 0.01078 & 0.01296 & 0.01503 & 0.91242 & 0.01880 & 0.02051 \\ 0.00136 & 0.00407 & 0.00672 & 0.00927 & 0.01171 & 0.01402 & 0.01619 & 0.01820 & 0.88677 & 0.02178 \\ 0.00154 & 0.00457 & 0.00754 & 0.01038 & 0.01306 & 0.01557 & 0.01789 & 0.02002 & 0.02196 & 0.89758 \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1.01926 & -0.00025 & -0.00044 & -0.00061 & -0.00081 & -0.00099 & -0.00121 & -0.00139 & -0.00164 & -0.00182 \\ -0.00025 & 1.01662 & -0.00131 & -0.00183 & -0.00243 & -0.00296 & -0.00363 & -0.00416 & -0.00488 & -0.00541 \\ -0.00042 & -0.00126 & 1.05406 & -0.00304 & -0.00404 & -0.00492 & -0.00601 & -0.00689 & -0.00806 & -0.00892 \\ -0.00059 & -0.00176 & -0.00305 & 1.04862 & -0.00565 & -0.00685 & -0.00835 & -0.00954 & -0.01113 & -0.01227 \\ -0.00076 & -0.00227 & -0.00391 & -0.00545 & 1.08423 & -0.00875 & -0.01063 & -0.01210 & -0.01405 & -0.01543 \\ -0.00093 & -0.00277 & -0.00478 & -0.00664 & -0.00879 & 1.07560 & -0.01283 & -0.01454 & -0.01681 & -0.01838 \\ -0.00110 & -0.00328 & -0.00565 & -0.00782 & -0.01032 & -0.01240 & 1.10917 & -0.01686 & -0.01939 & -0.02109 \\ -0.00127 & -0.00379 & -0.00651 & -0.00900 & -0.01182 & -0.01414 & -0.01697 & 1.09772 & -0.02179 & -0.02358 \\ -0.00145 & -0.00430 & -0.00738 & -0.01015 & -0.01329 & -0.01582 & -0.01890 & -0.02109 & 1.12978 & -0.02584 \\ -0.00162 & -0.00481 & -0.00823 & -0.01129 & -0.01472 & -0.01744 & -0.02072 & -0.02301 & -0.02605 & 1.11648 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Таким образом, получим СЛАУ:  $B \cdot \vec{x}' = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = b_i + \Delta b_i$

Отсюда получаем:

$${}^>x' = B^{-1} \cdot [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1] = \begin{pmatrix} 1.01010223449811 \\ 0.989752494842605 \\ 1.01050545786099 \\ 0.989430469389601 \\ 1.01088870388997 \\ 0.989125911832234 \\ 1.01124156738510 \\ 0.988844104222535 \\ 1.01155985932768 \\ 0.988587314496955 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$${}^>b' = \begin{pmatrix} 0.98112 & 0.00027 & 0.00045 & 0.00064 & 0.00082 & 0.0010 & 0.00118 & 0.00136 & 0.00154 & 0.00172 \\ 0.00027 & 0.98374 & 0.00136 & 0.00191 & 0.00245 & 0.00299 & 0.00353 & 0.00407 & 0.00461 & 0.00515 \\ 0.00044 & 0.00131 & 0.94894 & 0.00306 & 0.00392 & 0.00479 & 0.00564 & 0.00649 & 0.00734 & 0.00817 \\ 0.00061 & 0.00184 & 0.00307 & 0.95407 & 0.00549 & 0.00668 & 0.00786 & 0.00902 & 0.01016 & 0.01128 \\ 0.00076 & 0.00228 & 0.00380 & 0.00530 & 0.92297 & 0.00822 & 0.00965 & 0.01103 & 0.01238 & 0.01370 \\ 0.00094 & 0.00280 & 0.00465 & 0.00648 & 0.00826 & 0.93065 & 0.01169 & 0.01333 & 0.01490 & 0.01640 \\ 0.00107 & 0.00320 & 0.00530 & 0.00736 & 0.00937 & 0.01130 & 0.90274 & 0.01493 & 0.01662 & 0.01821 \\ 0.00124 & 0.00371 & 0.00614 & 0.00850 & 0.01078 & 0.01296 & 0.01503 & 0.91242 & 0.01880 & 0.02051 \\ 0.00136 & 0.00407 & 0.00672 & 0.00927 & 0.01171 & 0.01402 & 0.01619 & 0.01820 & 0.88677 & 0.02178 \\ 0.00154 & 0.00457 & 0.00754 & 0.01038 & 0.01306 & 0.01557 & 0.01789 & 0.02002 & 0.02196 & 0.89758 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$${}^>\Delta b' = [\Delta b'^1, \dots, \Delta b'^{10}] = 0.01 \cdot [b'^1, -b'^2, b'^3, -b'^4, b'^5, -b'^6, b'^7, -b'^8, b'^9, -b'^{10}] \in {}^>\mathbb{R}^{10} =$$

$$\begin{aligned} &= [0.00990099009900990, -0.0101010101010101, 0.00990099009900990 \\ &\quad -0.0101010101010101, 0.00990099009900990, -0.0101010101010101, \\ &\quad 0.00990099009900990, -0.0101010101010101, 0.00990099009900990, \\ &\quad -0.0101010101010101] \end{aligned} \quad (32)$$

$${}^>\Delta x' = B^{-1} \cdot {}^>\Delta b' = \begin{pmatrix} 0.0101022344981114 \\ -0.0102475051573948 \\ 0.0105054578609862 \\ -0.0105695306103990 \\ 0.0108887038899682 \\ -0.0108740881677665 \\ 0.0112415673850983 \\ -0.0111558957774656 \\ 0.0115598593276807 \\ -0.0114126855030442 \end{pmatrix} \quad (33)$$

Таким образом, абсолютная погрешности:

$$\|{}^>\Delta x'\| = 0.0115598593276807 \text{ и}$$

$$\|{}^>\Delta x\| = 0.0115598593276807$$

решений приближенной и исходной СЛАУ совпадают.

## Результаты

Число обусловленности матрицы СЛАУ (17)  $\text{cond}(E + \lambda A) = 1.26183827628753 < 10$ , то есть матрица  $E + \lambda A$  хорошо обусловлена. Следствие этого является малая относительная погрешность при решении приближенной СЛАУ  $\frac{\|{}^>\Delta x\|}{\|{}^>x\|} = 0.0115598593276807$ . Эта погрешность в 1.0787565056855462 раз меньше верхней границы относительной погрешности  $\text{cond}(A) \frac{\|{}^>\Delta b\|}{\|{}^>b\|} = 0.0124702734545453$ . Кроме того, при делении каждого  $i$ -го уравнения ( $i = \overline{1, 10}$ ) СЛАУ на число  $b_i + \Delta b_i$  абсолютная погрешность не изменилась:  $\|{}^>\Delta x'\| = \|{}^>\Delta x\| = 0.0115598593276807$ .