Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (национальный исследовательский университет) (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (ФН11)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ (02.03.01)

О т ч е т

по домашней работе № 1-4

Название домашней работы:

Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы

Вариант № 9

Дисциплина:

Численные методы

Студент группы ФН11-52Б ______________ **Очкин Н.В.**

(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель ______________ **Кутыркин В.А.**

(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Москва, 2024

Задание

Используя метод Якоби, найти приближённое полное решение спектральной задачи для матрицы $\boldsymbol{A}$. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальная по модулю внедиагональная компонента преобразованной матрицы станет меньше $\varepsilon = 0.01$. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$, проверив соответствующие приближённые равенства $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i \approx \tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$ для любого $i \in \overline{1,4}$ с указанием погрешности (отдельно показать вектор $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$, отдельно вектор $\tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$ и, затем, вектор $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i - \tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$).

Исходные данные

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10.0 & -1.0 & 2.0 & 3.0 \\ -1.0 & 10.0 & -3.0 & 2.0 \\ 2.0 & -3.0 & 10.0 & 1.0 \\ 3.0 & 2.0 & 1.0 & 10.0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} N &= 9 \\ n &= 52 \\ \beta &= 1 \\ \varepsilon &= 0.01 \end{aligned}$$

Решение

Инициализируем матрицу собственных векторов $\boldsymbol{V}$ как единичную матрицу.

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Подробно опишем первую итерацию алгоритма.

Примечание: Индексация будет начинаться с нуля.

Для начала найдем максимальный по абсолютной величине недиагональный элемент a_{ij} матрицы $\boldsymbol{A}$.

$$a_{ij} = 3, \quad i = 0, \quad j = 3$$

Теперь вычислим угол поворота θ

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}\right) \approx 0.7854$$

Найдем также $\cos(\theta)$ и $\sin(\theta)$

$$\mathrm{c} = \cos(\theta) = 0.70711, \qquad \mathrm{s} = \sin(\theta) = 0.70711$$

Построим матрицу поворота $\boldsymbol{R}$, которая является единичной матрицей с заменой элементов:

$$\boldsymbol{R}_{ii} = \boldsymbol{R}_{jj} = c, \quad \boldsymbol{R}_{ij} = -s, \quad \boldsymbol{R}_{ji} = s$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & -0.7071068 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

Обновим матрицу $\boldsymbol{A}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{R^T A R}$$

Это приведет к аннулированию элемента a_{ij} и изменению других элементов матрицы.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.0 & 0.7071068 & 2.1213203 & 0.0 \\ 0.7071068 & 10.0 & -3.0 & 2.1213203 \\ 2.1213203 & -3.0 & 10.0 & -0.7071068 \\ -0.0 & 2.1213203 & -0.7071068 & 7.0 \end{pmatrix}$$

Обновим также и матрицу собственных значений $\boldsymbol{V}$:

$$\boldsymbol{V} \leftarrow \boldsymbol{V R}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & -0.7071068 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

Проверим стала ли матрица $\boldsymbol{A}$ диагональной с заданной точностью ε.
Для проверки вычислим сумму квадратов всех недиагональных элементов матрицы:

$$S = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \approx 38$$

Так как $38 > \varepsilon(0.01)$, то матрица $\boldsymbol{A}$ не проходит проверку и мы вновь запускаем итерационный алгоритм.

Итерация 2

$$a_{ij} : 3, \quad i : 1, \quad j : 2$$
$$\theta : 0.7853982, \quad \text{c} : 0.7071068, \quad \text{s} : 0.7071068$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7071068 & -0.7071068 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7071068 & 0.7071068 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.0000007 & 2.0000001 & 1.0000001 & 0.0 \\ 2.0000001 & 7.0000004 & -0.0 & 1.0000001 \\ 1.0000001 & -0.0 & 13.0000007 & -2.0000001 \\ 0.0 & 1.0000001 & -2.0000001 & 7.0000004 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & -0.7071068 \\ 0.0 & 0.7071068 & -0.7071068 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7071068 & 0.7071068 & 0.0 \\ 0.7071068 & 0.0 & 0.0 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 20 > 0.01$$

Итерация 3

$$a_{ij} : 2, \quad i : 0, \quad j : 1$$
$$\theta : 0.2940013, \quad \text{c} : 0.957092, \quad \text{s} : 0.2897841$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.957092 & -0.2897841 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2897841 & 0.957092 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.6055509 & 3e-07 & 0.9570921 & 0.2897841 \\ 3e-07 & 6.3944486 & -0.2897841 & 0.9570921 \\ 0.9570921 & -0.2897841 & 13.0000007 & -2.0000001 \\ 0.2897841 & 0.9570921 & -2.0000001 & 7.0000004 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.6767663 & -0.2049083 & 0.0 & -0.7071068 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & -0.7071068 & 0.0 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & 0.7071068 & 0.0 \\ 0.6767663 & -0.2049083 & 0.0 & 0.7071068 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 12 > 0.01$$

Итерация 4

$$a_{ij} : 2, \quad i : 2, \quad j : 3$$
$$\theta : 0.2940013, \quad \text{c} : 0.957092, \quad \text{s} : 0.2897841$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.957092 & -0.2897841 \\ 0.0 & 0.0 & 0.2897841 & 0.957092 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.6055509 & 3e-07 & 1.0 & -0.0 \\ 3e-07 & 6.3944486 & 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 11.3867505 & -3.328201 \\ -0.0 & 1.0 & -3.328201 & 8.6132491 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.6767663 & -0.2049083 & -0.2049083 & -0.6767663 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & -0.6767663 & 0.2049083 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & 0.6767663 & -0.2049083 \\ 0.6767663 & -0.2049083 & 0.2049083 & 0.6767663 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 26 > 0.01$$

Итерация 5

$$a_{ij} : 3.328201, \quad i : 2, \quad j : 3$$
$$\theta : 0.5880026, \quad \text{c} : 0.8320503, \quad \text{s} : 0.5547002$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.8320503 & -0.5547002 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5547002 & 0.8320503 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.6055509 & 3e-07 & 0.8320503 & -0.5547002 \\ 3e-07 & 6.3944486 & 0.5547002 & 0.8320503 \\ 0.8320503 & 0.5547002 & 7.46118 & -2.5601549 \\ -0.5547002 & 0.8320503 & -2.5601549 & 12.5388199 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.6767663 & -0.2049083 & -0.5458964 & -0.4494409 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & -0.4494409 & 0.5458964 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & 0.4494409 & -0.5458964 \\ 0.6767663 & -0.2049083 & 0.5458964 & 0.4494409 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 17.109 > 0.01$$

Итерация 6

$$a_{ij} : 2.5601549, \quad i : 2, \quad j : 3$$
$$\theta : -0.3947912, \quad \text{c} : 0.9230769, \quad \text{s} : -0.3846154$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.9230769 & 0.3846154 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3846154 & 0.9230769 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.6055509 & 3e-07 & 0.9813927 & -0.1920116 \\ 3e-07 & 6.3944486 & 0.1920116 & 0.9813927 \\ 0.9813927 & 0.1920116 & 10.0301715 & -3.6054249 \\ -0.1920116 & 0.9813927 & -3.6054249 & 9.9698278 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.6767663 & -0.2049083 & -0.3310425 & -0.6248287 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & -0.6248287 & 0.3310425 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & 0.6248287 & -0.3310425 \\ 0.6767663 & -0.2049083 & 0.3310425 & 0.6248287 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 29.998 > 0.01$$

Итерация 7

$$a_{ij} : 3.6, \quad i : 2, \quad j : 3$$
$$\theta : 0.781214, \quad \text{c} : 0.7100592, \quad \text{s} : 0.704142$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7100592 & -0.704142 \\ 0.0 & 0.0 & 0.704142 & 0.7100592 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13.6055509 & 3e-07 & 0.5616435 & -0.8273794 \\ 3e-07 & 6.3944486 & 0.8273794 & 0.5616435 \\ 0.5616435 & 0.8273794 & 6.3949536 & -0.0603414 \\ -0.8273794 & 0.5616435 & -0.0603414 & 13.6050462 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.6767663 & -0.2049083 & -0.6750279 & -0.2105644 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & -0.2105644 & 0.6750279 \\ 0.2049083 & 0.6767663 & 0.2105644 & -0.6750279 \\ 0.6767663 & -0.2049083 & 0.6750279 & 0.2105644 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 4 > 0.01$$

Итерация 8

$$a_{ij} : 0.827, \quad i : 0, \quad j : 3$$
$$\theta : 0.7852457, \quad \text{c} : 0.7072146, \quad \text{s} : 0.7069989$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.7072146 & 0.0 & 0.0 & -0.7069989 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.7069989 & 0.0 & 0.0 & 0.7072146 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12.7779184 & 0.3970815 & 0.3545412 & -0.0005047 \\ 0.3970815 & 6.3944486 & 0.8273794 & 0.3972023 \\ 0.3545412 & 0.8273794 & 6.3949536 & -0.4397557 \\ -0.0005047 & 0.3972023 & -0.4397557 & 14.4326769 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.3297502 & -0.2049083 & -0.6750279 & -0.6273872 \\ 0.6221581 & 0.6767663 & -0.2105644 & 0.3325196 \\ -0.3323298 & 0.6767663 & 0.2105644 & -0.6222595 \\ 0.6274878 & -0.2049083 & 0.6750279 & -0.3295588 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 2.638 > 0.01$$

Итерация 9

$$a_{ij} : 0.827, \quad i : 1, \quad j : 2$$
$$\theta : -0.7852456, \quad \text{c} : 0.7072147, \quad \text{s} : -0.7069989$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.7072147 & 0.7069989 & 0.0 \\ 0.0 & -0.7069989 & 0.7072147 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12.7779184 & 0.0301616 & 0.5314729 & -0.0005047 \\ 0.0301616 & 5.5673221 & 0.0 & 0.5918141 \\ 0.5314729 & 0.0 & 7.2220811 & -0.0301801 \\ -0.0005047 & 0.5918141 & -0.0301801 & 14.4326769 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.3297502 & 0.3323298 & -0.6222596 & -0.6273872 \\ 0.6221581 & 0.6274879 & 0.3295588 & 0.3325196 \\ -0.3323298 & 0.3297503 & 0.6273873 & -0.6222595 \\ 0.6274878 & -0.6221581 & 0.3325197 & -0.3295588 \end{pmatrix}$$

$$\text{S} \approx 1.269 > 0.01$$

Итерация 10

$$a_{ij} : 0.5918, \quad i : 1, \quad j : 3$$
$$\theta : -0.0663634, \quad \mathrm{c} : 0.9977988, \quad \mathrm{s} : -0.0663147$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9977988 & 0.0 & 0.0663147 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0663147 & 0.0 & 0.9977988 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12.7779184 & 0.0301287 & 0.5314729 & 0.0014966 \\ 0.0301287 & 5.52799 & 0.0020014 & -3e-07 \\ 0.5314729 & 0.0020014 & 7.2220811 & -0.0301137 \\ 0.0014966 & -3e-07 & -0.0301137 & 14.4720107 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.3297502 & 0.3732033 & -0.6222596 & -0.6039678 \\ 0.6221581 & 0.6040557 & 0.3295588 & 0.3733993 \\ -0.3323298 & 0.3702894 & 0.6273873 & -0.5990225 \\ 0.6274878 & -0.598934 & 0.3325197 & -0.3700916 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S} \approx 0.569 > 0.01$$

Итерация 11

$$a_{ij} : 0.5315, \quad i : 0, \quad j : 2$$
$$\theta : 0.0945181, \quad \mathrm{c} : 0.9955365, \quad \mathrm{s} : 0.0943774$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.9955365 & 0.0 & -0.0943774 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0943774 & 0.0 & 0.9955365 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12.8283025 & 0.0301831 & 1e-07 & -0.0013521 \\ 0.0301831 & 5.52799 & -0.000851 & -3e-07 \\ 1e-07 & -0.000851 & 7.1716973 & -0.0301205 \\ -0.0013521 & -3e-07 & -0.0301205 & 14.4720107 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.2695511 & 0.3732033 & -0.6506031 & -0.6039678 \\ 0.650484 & 0.6040557 & 0.2693702 & 0.3733993 \\ -0.2716353 & 0.3702894 & 0.6559514 & -0.5990225 \\ 0.6560694 & -0.598934 & 0.2718148 & -0.3700916 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S} \approx 0.00364 < 0.01$$

Итого мы получили следующие две матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12.8283025 & 0.0301831 & 1e-07 & -0.0013521 \\ 0.0301831 & 5.52799 & -0.000851 & -3e-07 \\ 1e-07 & -0.000851 & 7.1716973 & -0.0301205 \\ -0.0013521 & -3e-07 & -0.0301205 & 14.4720107 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.2695511 & 0.3732033 & -0.6506031 & -0.6039678 \\ 0.650484 & 0.6040557 & 0.2693702 & 0.3733993 \\ -0.2716353 & 0.3702894 & 0.6559514 & -0.5990225 \\ 0.6560694 & -0.598934 & 0.2718148 & -0.3700916 \end{pmatrix} \tag{1}$$

где диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ являются собственными значениями исходной, а столбцы матрицы $\boldsymbol{V}$ - собственные вектора.

Проведем проверку.

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}q_0 = \begin{pmatrix} 3.4699646 \\ 8.3623336 \\ -3.4726334 \\ 8.39868 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^{>}q_1 = \begin{pmatrix} 2.0717541 \\ 3.3586175 \\ 2.0381995 \\ -3.2913293 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^{>}q_2 = \begin{pmatrix} -4.648054 \\ 1.9200805 \\ 4.722012 \\ 1.9610305 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} \cdot {}^{>}q_3 = \begin{pmatrix} -8.7213971 \\ 5.3948451 \\ -8.6884501 \\ -5.3650433 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 \cdot {}^{>}q_0 = \begin{pmatrix} 3.45788305 \\ 8.34460552 \\ -3.4846198 \\ 8.41625672 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 \cdot {}^{>}q_1 = \begin{pmatrix} 2.06306411 \\ 3.33921387 \\ 2.0469561 \\ -3.31090116 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 \cdot {}^{>}q_2 = \begin{pmatrix} -4.6659285 \\ 1.93184154 \\ 4.70428488 \\ 1.94937347 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 \cdot {}^{>}q_3 = \begin{pmatrix} -8.74062846 \\ 5.40383866 \\ -8.66906003 \\ -5.3559696 \end{pmatrix}$$

Проверка сходится

Вывод

Используя метод Якоби найдено приближённое решение спектральной задачи матрицы $\boldsymbol{A}$. Приближённые собственные значения данной матрицы стоят на главной диагонали преобразованной матрицы $\boldsymbol{A}$ (1). Собственными векторами являются столбцы преобразованной матрицы $\boldsymbol{V}$ (1). При проверке соответствующих приближённых равенств погрешность вышла равной заданной ($\varepsilon = 0.01$).