МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

Домашняя работа №1
«Погрешности при решении СЛАУ»
Группа ФН11-52Б

Вариант 9

Студент: Очкин Н. В.

Преподаватель: Кутыркин В. А.

Оценка:

Москва 2024

Задание 1.1

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале, $\alpha = \frac{n-50}{100}$, где n – номер группы):

$$\begin{cases} 150(1+0.5N+\alpha)x^1 + 150(1+0.5N)x^2 + 150(1+0.5N)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha); \\ 150.1\cdot(1+0.5N)x^1 + 149.9\cdot(1+0.5N+\alpha)x^2 + 150(1+0.5N)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha); \\ 149.9\cdot(1+0.5N)x^1 + 150\cdot(1+0.5N)x^2 + 150.1\cdot(1+0.5N+\alpha)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha); \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 150(1+0.5N+\alpha)x^1 + 150(1+0.5N)x^2 + 150(1+0.5N)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha)(1+0.01); \\ 150.1\cdot(1+0.5N)x^1 + 149.9\cdot(1+0.5N+\alpha)x^2 + 150(1+0.5N)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha)(1-0.01); \\ 149.9\cdot(1+0.5N)x^1 + 150\cdot(1+0.5N)x^2 + 150.1\cdot(1+0.5N+\alpha)x^3 = 150(3+1.5N+\alpha)(1+0.01); \end{cases} \tag{2}$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.

Решение

Подставим $N = 9$ и $\alpha = \frac{52-50}{100} = 0.02$ в (1):

$$\begin{cases} 828x^1 + 825x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 825.55x^1 + 827.448x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 824.45x^1 + 825x^2 + 828.552x^3 = 2478; \end{cases} \tag{3}$$

Матрица СЛАУ (1) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \tag{4}$$

1. Найдем число обусловленности матрицы A.

Число обусловленности матрицы равно:

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \tag{5}$$

Вычислим обратную матрицу с помощью функции inv() библиотеки sympy:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Норма матрицы вычисляется по формуле:

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a^i_j| : i = \overline{1, n} \right\} \tag{7}$$

Вычислим нормы:

$$\|A\| = 2478.002 \tag{8}$$

$$\|A^{-1}\| = 0.544388949997522 \tag{9}$$

Теперь вычислим число обусловленности матрицы:

$$\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 2478.002 \cdot 0.544388949997522 \approx 1348.99690687176 \tag{10}$$

Следовательно, СЛАУ (3) плохо обусловлена.

2. Найдем относительную погрешность в решении приближенной СЛАУ (2).

Подставим $N = 9$ и $\alpha = \frac{52-50}{100} = 0.02$ в (2):

$$\begin{cases} 828x^1 + 825x^2 + 825x^3 = 2502.78; \\ 825.55x^1 + 827.448x^2 + 825x^3 = 2453.22; \\ 824.45x^1 + 825x^2 + 828.552x^3 = 2502.78; \end{cases} \tag{11}$$

Запишем СЛАУ (3) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$^{>}x = A^{-1>}b =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.999915466153453 \\ 1.00073239055399 \\ 0.999352450688377 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Запишем СЛАУ (11) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2502.78 \\ 2453.22 \\ 2502.78 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 2502.78 \\ 2453.22 \\ 2502.78 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2478 \\ 2478 \\ 2478 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.78 \\ -24.78 \\ 24.78 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Тогда ошибка ${}^{>}\Delta x = A^{-1>}\Delta b =$

$$= \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24.78 \\ -24.78 \\ 24.78 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6.74962545839196 \\ -13.4899581809387 \\ 6.74582499360713 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Поскольку $\|{}^{>}x\| = 1$ и $\|{}^{>}\Delta x\| = 13.4899581809387$,
относительная погрешность $\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} = 13.4899581809387$

Действительно,
$\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} = 13.4899581809387 \leq \mathrm{cond}(A) \cdot \frac{\|{}^{>}\Delta b\|}{\|{}^{>}b\|} = 1348.99690687176 \cdot 0.01 = 13.4899690687176$

Результаты

Число обусловленности $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 1348.99690687176 > 10^2$, значит, матрица СЛАУ плохо обусловлена. Относительная погрешность решения $\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} = 13.4899581809387$ очень велика вследствие плохой обусловленности СЛАУ.

Задание 1.2

Исходные данные варианта 9:

N	α	$\lambda + \alpha$	λ	F	a	b
9	$\frac{55-52}{100} = 0.03$	0.4	0.37	arctan	0	1

Согласно этой таблице, на отрезке [a;b] выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами

$$
\begin{gathered}
s_1 = \tau_1 = a + \frac{h}{2}, \\
s_2 = \tau_2 = \tau_1 + h, \\
s_3 = \tau_3 = \tau_2 + h, \\
\dots \\
s_{10} = \tau_{10} = \tau_9 + h,
\end{gathered}
$$

имеющая шаг $h = \frac{b-a}{10} = 0.1$

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$
(E + \lambda A)^{>}x = {}^{>}b + {}^{>}\Delta b, \text{ где} \tag{17}
$$

$\lambda = 0.37;$

$E \in GL(\mathbb{R}; 10) -$ единичная матрица;

$A = (a^i_j)^{10}_{10} \in GL(\mathbb{R}; 10) -$ матрица, которая определяется соотношением:
$a^i_j = F(s_i \cdot \tau_j)\frac{b-a}{10}$ для $i, j = \overline{1, 10}$;

${}^{>}b = [b^1, \dots, b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10} -$ вектор, который определяется соотношением:
${}^{>}b = (E + \lambda A) \cdot {}^{>}x_*$ и ${}^{>}x_* = [1, 1, \dots, 1\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$

Найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (17). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Кроме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (17) делением каждого её i -го уравнения $(i = \overline{1, 10})$ на число $b_i + \Delta b_i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (17).

Решение

$$A = \begin{pmatrix}
0.00025 & 0.00075 & 0.00125 & 0.00175 & 0.00225 & 0.00275 & 0.00325 & 0.00375 & 0.00425 & 0.00475 \\
0.00075 & 0.00225 & 0.00375 & 0.00525 & 0.00674 & 0.00823 & 0.00972 & 0.0112 & 0.01268 & 0.01415 \\
0.00125 & 0.00375 & 0.00624 & 0.00873 & 0.0112 & 0.01366 & 0.01611 & 0.01853 & 0.02094 & 0.02332 \\
0.00175 & 0.00525 & 0.00873 & 0.01219 & 0.01562 & 0.01902 & 0.02237 & 0.02567 & 0.02892 & 0.0321 \\
0.00225 & 0.00674 & 0.0112 & 0.01562 & 0.01998 & 0.02426 & 0.02846 & 0.03255 & 0.03653 & 0.0404 \\
0.00275 & 0.00823 & 0.01366 & 0.01902 & 0.02426 & 0.02937 & 0.03433 & 0.03912 & 0.04373 & 0.04815 \\
0.00325 & 0.00972 & 0.01611 & 0.02237 & 0.02846 & 0.03433 & 0.03998 & 0.04536 & 0.05048 & 0.05532 \\
0.00375 & 0.0112 & 0.01853 & 0.02567 & 0.03255 & 0.03912 & 0.04536 & 0.05124 & 0.05675 & 0.06191 \\
0.00425 & 0.01268 & 0.02094 & 0.02892 & 0.03653 & 0.04373 & 0.05048 & 0.05675 & 0.06257 & 0.06793 \\
0.00475 & 0.01415 & 0.02332 & 0.0321 & 0.0404 & 0.04815 & 0.05532 & 0.06191 & 0.06793 & 0.07342
\end{pmatrix} \tag{18}$$

Исходная СЛАУ:

$$(E + \lambda A)^{>} x = {}^{>} b \tag{19}$$

$$E{+}\lambda A = \begin{pmatrix}
1.00009 & 0.00028 & 0.00046 & 0.00065 & 0.00083 & 0.00102 & 0.00120 & 0.00139 & 0.00157 & 0.00176 \\
0.00028 & 1.00083 & 0.00139 & 0.00194 & 0.00249 & 0.00305 & 0.00360 & 0.00414 & 0.00469 & 0.00524 \\
0.00046 & 0.00139 & 1.00231 & 0.00323 & 0.00414 & 0.00505 & 0.00596 & 0.00686 & 0.00775 & 0.00863 \\
0.00065 & 0.00194 & 0.00323 & 1.00451 & 0.00578 & 0.00704 & 0.00828 & 0.00950 & 0.01070 & 0.01188 \\
0.00083 & 0.00249 & 0.00414 & 0.00578 & 1.00739 & 0.00898 & 0.01053 & 0.01204 & 0.01352 & 0.01495 \\
0.00102 & 0.00305 & 0.00505 & 0.00704 & 0.00898 & 1.01087 & 0.01270 & 0.01447 & 0.01618 & 0.01782 \\
0.00120 & 0.00360 & 0.00596 & 0.00828 & 0.01053 & 0.01270 & 1.01479 & 0.01678 & 0.01868 & 0.02047 \\
0.00139 & 0.00414 & 0.00686 & 0.00950 & 0.01204 & 0.01447 & 0.01678 & 1.01896 & 0.02100 & 0.02291 \\
0.00157 & 0.00469 & 0.00775 & 0.01070 & 0.01352 & 0.01618 & 0.01868 & 0.02100 & 1.02315 & 0.02513 \\
0.00176 & 0.00524 & 0.00863 & 0.01188 & 0.01495 & 0.01782 & 0.02047 & 0.02291 & 0.02513 & 1.02717
\end{pmatrix} \tag{20}$$

$$(E+\lambda A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\ -0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\ -0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\ -0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\ -0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\ -0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\ -0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\ -0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\ -0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\ -0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Следовательно,

$\|E+\lambda A\| = 1.1559365,$

$\|(E+\lambda A)^{-1}\| = 1.09161556563663$

и число обусловленности

$\mathrm{cond}(E+\lambda A) = \|E+\lambda A\| \cdot \|(E+\lambda A)^{-1}\| = 1.26183827628753.$

Таким образом, матрица СЛАУ (17) хорошо обусловлена.

Найдем решение ${}^{>}x = (E+\lambda A)^{-1>}b$ СЛАУ.

$$
{}^{>}b = \begin{pmatrix}
1.00009 & 0.00028 & 0.00046 & 0.00065 & 0.00083 & 0.00102 & 0.00120 & 0.00139 & 0.00157 & 0.00176 \\
0.00028 & 1.00083 & 0.00139 & 0.00194 & 0.00249 & 0.00305 & 0.00360 & 0.00414 & 0.00469 & 0.00524 \\
0.00046 & 0.00139 & 1.00231 & 0.00323 & 0.00414 & 0.00505 & 0.00596 & 0.00686 & 0.00775 & 0.00863 \\
0.00065 & 0.00194 & 0.00323 & 1.00451 & 0.00578 & 0.00704 & 0.00828 & 0.00950 & 0.01070 & 0.01188 \\
0.00083 & 0.00249 & 0.00414 & 0.00578 & 1.00739 & 0.00898 & 0.01053 & 0.01204 & 0.01352 & 0.01495 \\
0.00102 & 0.00305 & 0.00505 & 0.00704 & 0.00898 & 1.01087 & 0.01270 & 0.01447 & 0.01618 & 0.01782 \\
0.00120 & 0.00360 & 0.00596 & 0.00828 & 0.01053 & 0.01270 & 1.01479 & 0.01678 & 0.01868 & 0.02047 \\
0.00139 & 0.00414 & 0.00686 & 0.00950 & 0.01204 & 0.01447 & 0.01678 & 1.01896 & 0.02100 & 0.02291 \\
0.00157 & 0.00469 & 0.00775 & 0.01070 & 0.01352 & 0.01618 & 0.01868 & 0.02100 & 1.02315 & 0.02513 \\
0.00176 & 0.00524 & 0.00863 & 0.01188 & 0.01495 & 0.01782 & 0.02047 & 0.02291 & 0.02513 & 1.02717
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
1.00925000000000 \\ 1.02764640000000 \\ 1.04578010000000 \\ 1.06349940000000 \\ 1.08065630000000 \\ 1.09716940000000 \\ 1.11299060000000 \\ 1.12804960000000 \\ 1.14236860000000 \\ 1.15593650000000
\end{pmatrix}
\tag{22}
$$

$$
{}^{>}x = \begin{pmatrix}
0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\
-0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\
-0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\
-0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\
-0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\
-0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\
-0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\
-0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\
-0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\
-0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1.00925000000000 \\ 1.02764640000000 \\ 1.04578010000000 \\ 1.06349940000000 \\ 1.08065630000000 \\ 1.09716940000000 \\ 1.11299060000000 \\ 1.12804960000000 \\ 1.14236860000000 \\ 1.15593650000000
\end{pmatrix}
=
$$

$$
= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\rangle \tag{23}
$$

Погрешность решения приближенной СЛАУ найдем так:

$$
{}^{>}\Delta x = (E + \lambda A)^{-1>}\Delta b, \text{ где} \tag{24}
$$

${}^{>}\Delta b = [\Delta b^1, \ldots, \Delta b^{10}\rangle = 0.01 \cdot [b^1, -b^2, b^3, -b^4, b^5, -b^6, b^7, -b^8, b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10} =$

$$
\begin{gathered}
= [0.0100925000000000, -0.0102764640000000, 0.0104578010000000, \\
-0.0106349940000000, 0.0108065630000000, -0.0109716940000000, \\
0.0111299060000000, -0.0112804960000000, 0.0114236860000000,
\end{gathered}
$$

$$-0.0115593650000000\rangle \tag{25}$$

$$
{}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix}
0.99992 & -0.00025 & -0.00041 & -0.00058 & -0.00074 & -0.00091 & -0.00108 & -0.00125 & -0.00142 & -0.00159 \\
-0.00025 & 0.99926 & -0.00124 & -0.00173 & -0.00223 & -0.00273 & -0.00323 & -0.00373 & -0.00423 & -0.00473 \\
-0.00041 & -0.00124 & 0.99794 & -0.00288 & -0.00371 & -0.00453 & -0.00535 & -0.00617 & -0.00698 & -0.00780 \\
-0.00058 & -0.00173 & -0.00288 & 0.99597 & -0.00517 & -0.00631 & -0.00743 & -0.00854 & -0.00964 & -0.01072 \\
-0.00074 & -0.00223 & -0.00371 & -0.00517 & 0.99338 & -0.00805 & -0.00946 & -0.01083 & -0.01218 & -0.01349 \\
-0.00091 & -0.00273 & -0.00453 & -0.00631 & -0.00805 & 0.99024 & -0.01142 & -0.01302 & -0.01457 & -0.01606 \\
-0.00108 & -0.00323 & -0.00535 & -0.00743 & -0.00946 & -0.01142 & 0.98670 & -0.01510 & -0.01681 & -0.01843 \\
-0.00125 & -0.00373 & -0.00617 & -0.00854 & -0.01083 & -0.01302 & -0.01510 & 0.98295 & -0.01889 & -0.02060 \\
-0.00142 & -0.00423 & -0.00698 & -0.00964 & -0.01218 & -0.01457 & -0.01681 & -0.01889 & 0.97919 & -0.02258 \\
-0.00159 & -0.00473 & -0.00780 & -0.01072 & -0.01349 & -0.01606 & -0.01843 & -0.02060 & -0.02258 & 0.97562
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0.0100925000000000 \\
-0.0102764640000000 \\
0.0104578010000000 \\
-0.0106349940000000 \\
0.0108065630000000 \\
-0.0109716940000000 \\
0.0111299060000000 \\
-0.0112804960000000 \\
0.0114236860000000 \\
-0.0115593650000000
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0.0101022344981114 \\
-0.0102475051573947 \\
0.0105054578609862 \\
-0.0105695306103990 \\
0.0108887038899682 \\
-0.0108740881677665 \\
0.0112415673850983 \\
-0.0111558957774656 \\
0.0115598593276807 \\
-0.0114126855030443
\end{pmatrix} \tag{26}
$$

Найдем решение приближенной СЛАУ:

$$
{}^{>}x + {}^{>}\Delta x = \begin{pmatrix} 1.01010223449811 \\ 0.989752494842605 \\ 1.01050545786099 \\ 0.989430469389601 \\ 1.01088870388997 \\ 0.989125911832234 \\ 1.01124156738510 \\ 0.988844104222534 \\ 1.01155985932768 \\ 0.988587314496956 \end{pmatrix} \tag{27}
$$

Рассмотрим результаты:

$\|{}^{>}x\| = 1$,

$\|{}^{>}\Delta x\| = 0.0115598593276807$,

$\|{}^{>}b\| = 1.1559365$,

$\|{}^{>}\Delta b\| = 0.011423686$,

$\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} = 0.0115598593276807$,

$\mathrm{cond}(A)\ \frac{\|{}^{>}\Delta b\|}{\|{}^{>}b\|} = 0.0124702734545453$,

т.к. $0.0115598593276807 < 0.0124702734545453$,

можем сделать вывод, что неравенство $\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} < \mathrm{cond}(A)\frac{\|{}^{>}\Delta b\|}{\|{}^{>}b\|}$ - выполняется

Найдем решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (17) делением каждого ее i-го уравнения $(i = \overline{1, 10})$ га число $b_i + \Delta b_i$.

Получим матрицу

$$
B = \begin{pmatrix}
0.98112 & 0.00027 & 0.00045 & 0.00064 & 0.00082 & 0.0010 & 0.00118 & 0.00136 & 0.00154 & 0.00172 \\
0.00027 & 0.98374 & 0.00136 & 0.00191 & 0.00245 & 0.00299 & 0.00353 & 0.00407 & 0.00461 & 0.00515 \\
0.00044 & 0.00131 & 0.94894 & 0.00306 & 0.00392 & 0.00479 & 0.00564 & 0.00649 & 0.00734 & 0.00817 \\
0.00061 & 0.00184 & 0.00307 & 0.95407 & 0.00549 & 0.00668 & 0.00786 & 0.00902 & 0.01016 & 0.01128 \\
0.00076 & 0.00228 & 0.00380 & 0.00530 & 0.92297 & 0.00822 & 0.00965 & 0.01103 & 0.01238 & 0.01370 \\
0.00094 & 0.00280 & 0.00465 & 0.00648 & 0.00826 & 0.93065 & 0.01169 & 0.01333 & 0.01490 & 0.01640 \\
0.00107 & 0.00320 & 0.00530 & 0.00736 & 0.00937 & 0.01130 & 0.90274 & 0.01493 & 0.01662 & 0.01821 \\
0.00124 & 0.00371 & 0.00614 & 0.00850 & 0.01078 & 0.01296 & 0.01503 & 0.91242 & 0.01880 & 0.02051 \\
0.00136 & 0.00407 & 0.00672 & 0.00927 & 0.01171 & 0.01402 & 0.01619 & 0.01820 & 0.88677 & 0.02178 \\
0.00154 & 0.00457 & 0.00754 & 0.01038 & 0.01306 & 0.01557 & 0.01789 & 0.02002 & 0.02196 & 0.89758
\end{pmatrix} \tag{28}
$$

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix}
1.01926 & -0.00025 & -0.00044 & -0.00061 & -0.00081 & -0.00099 & -0.00121 & -0.00139 & -0.00164 & -0.00182 \\
-0.00025 & 1.01662 & -0.00131 & -0.00183 & -0.00243 & -0.00296 & -0.00363 & -0.00416 & -0.00488 & -0.00541 \\
-0.00042 & -0.00126 & 1.05406 & -0.00304 & -0.00404 & -0.00492 & -0.00601 & -0.00689 & -0.00806 & -0.00892 \\
-0.00059 & -0.00176 & -0.00305 & 1.04862 & -0.00565 & -0.00685 & -0.00835 & -0.00954 & -0.01113 & -0.01227 \\
-0.00076 & -0.00227 & -0.00391 & -0.00545 & 1.08423 & -0.00875 & -0.01063 & -0.01210 & -0.01405 & -0.01543 \\
-0.00093 & -0.00277 & -0.00478 & -0.00664 & -0.00879 & 1.07560 & -0.01283 & -0.01454 & -0.01681 & -0.01838 \\
-0.00110 & -0.00328 & -0.00565 & -0.00782 & -0.01032 & -0.01240 & 1.10917 & -0.01686 & -0.01939 & -0.02109 \\
-0.00127 & -0.00379 & -0.00651 & -0.00900 & -0.01182 & -0.01414 & -0.01697 & 1.09772 & -0.02179 & -0.02358 \\
-0.00145 & -0.00430 & -0.00738 & -0.01015 & -0.01329 & -0.01582 & -0.01890 & -0.02109 & 1.12978 & -0.02584 \\
-0.00162 & -0.00481 & -0.00823 & -0.01129 & -0.01472 & -0.01744 & -0.02072 & -0.02301 & -0.02605 & 1.11648
\end{pmatrix} \tag{29}
$$

Таким образом, получим СЛАУ: $B \cdot {}^{>}x' = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\rangle = b_i + \Delta b_i$
Отсюда получаем:

$$
{}^{>}x' = B^{-1} \cdot [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1.01010223449811 \\ 0.989752494842605 \\ 1.01050545786099 \\ 0.989430469389601 \\ 1.01088870388997 \\ 0.989125911832234 \\ 1.01124156738510 \\ 0.988844104222535 \\ 1.01155985932768 \\ 0.988587314496955 \end{pmatrix} \tag{30}
$$

$$
{}^{>}b' = \begin{pmatrix}
0.98112 & 0.00027 & 0.00045 & 0.00064 & 0.00082 & 0.0010 & 0.00118 & 0.00136 & 0.00154 & 0.00172 \\
0.00027 & 0.98374 & 0.00136 & 0.00191 & 0.00245 & 0.00299 & 0.00353 & 0.00407 & 0.00461 & 0.00515 \\
0.00044 & 0.00131 & 0.94894 & 0.00306 & 0.00392 & 0.00479 & 0.00564 & 0.00649 & 0.00734 & 0.00817 \\
0.00061 & 0.00184 & 0.00307 & 0.95407 & 0.00549 & 0.00668 & 0.00786 & 0.00902 & 0.01016 & 0.01128 \\
0.00076 & 0.00228 & 0.00380 & 0.00530 & 0.92297 & 0.00822 & 0.00965 & 0.01103 & 0.01238 & 0.01370 \\
0.00094 & 0.00280 & 0.00465 & 0.00648 & 0.00826 & 0.93065 & 0.01169 & 0.01333 & 0.01490 & 0.01640 \\
0.00107 & 0.00320 & 0.00530 & 0.00736 & 0.00937 & 0.01130 & 0.90274 & 0.01493 & 0.01662 & 0.01821 \\
0.00124 & 0.00371 & 0.00614 & 0.00850 & 0.01078 & 0.01296 & 0.01503 & 0.91242 & 0.01880 & 0.02051 \\
0.00136 & 0.00407 & 0.00672 & 0.00927 & 0.01171 & 0.01402 & 0.01619 & 0.01820 & 0.88677 & 0.02178 \\
0.00154 & 0.00457 & 0.00754 & 0.01038 & 0.01306 & 0.01557 & 0.01789 & 0.02002 & 0.02196 & 0.89758
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \\ 0.990099009900990 \\ 1.01010101010101 \end{pmatrix} \tag{31}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{>}\Delta b' &= [\Delta b'^{1}, \ldots, \Delta b'^{10}\rangle = 0.01 \cdot [b'^{1}, -b'^{2}, b'^{3}, -b'^{4}, b'^{5}, -b'^{6}, b'^{7}, -b'^{8}, b'^{9}, -b'^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10} = \\
&= [0.00990099009900990, -0.0101010101010101, 0.00990099009900990 \\
&\quad -0.0101010101010101, 0.00990099009900990, -0.0101010101010101, \\
&\quad 0.00990099009900990, -0.0101010101010101, 0.00990099009900990, \\
&\quad -0.0101010101010101\rangle
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
{}^{>}\Delta x' = B^{-1} \cdot {}^{>}\Delta b' = \begin{pmatrix} 0.0101022344981114 \\ -0.0102475051573948 \\ 0.0105054578609862 \\ -0.0105695306103990 \\ 0.0108887038899682 \\ -0.0108740881677665 \\ 0.0112415673850983 \\ -0.0111558957774656 \\ 0.0115598593276807 \\ -0.0114126855030442 \end{pmatrix} \tag{33}
$$

Таким образом, абсолютная погрешности:

$\|{}^{>}\Delta x'\| = 0.0115598593276807$ и

$\|{}^{>}\Delta x\| = 0.0115598593276807$

решений приближенной и исходной СЛАУ совпадают.

Результаты

Число обусловленности матрицы СЛАУ (17) $\mathrm{cond}(E+\lambda A) = 1.26183827628753 < 10$, то есть матрица $E + \lambda A$ хорошо обусловлена. Следствие этого является малая относительная погрешность при решении приближенной СЛАУ $\frac{\|{}^{>}\Delta x\|}{\|{}^{>}x\|} = 0.0115598593276807$. Эта погрешность в 1.0787565056855462 раз меньше верхней границы относительной погрешности $\mathrm{cond}(A)\frac{\|{}^{>}\Delta b\|}{\|{}^{>}b\|} = 0.0124702734545453$. Кроме того, при делении каждого i-го уравнения $(i = \overline{1,10})$ СЛАУ на число $b_i + \Delta b_i$ абсолютная погрешность не изменилась: $\|{}^{>}\Delta x'\| = \|{}^{>}\Delta x\| = 0.0115598593276807$.