

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«Московский государственный технический университет имени Н.Э.
Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

**ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»**

Направление: Математика и компьютерные науки

Дисциплина: Численные методы

**Домашняя работа №1
«Погрешности при решении СЛАУ»
Группа ФН11-52Б**

Вариант 9

Студент: Очкин Н. В.

Преподаватель: Кутыркин В. А.

Оценка:

Москва 2024

Задание 1.1

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале, $\alpha = \frac{n-50}{100}$, где n – номер группы):

$$\begin{cases} 150(1 + 0.5N + \alpha)x^1 + 150(1 + 0.5N)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \\ 150.1 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 149.9 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \\ 149.9 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 150 \cdot (1 + 0.5N)x^2 + 150.1 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha); \end{cases} \quad (1)$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 150(1 + 0.5N + \alpha)x^1 + 150(1 + 0.5N)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 + 0.01); \\ 150.1 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 149.9 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^2 + 150(1 + 0.5N)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 - 0.01); \\ 149.9 \cdot (1 + 0.5N)x^1 + 150 \cdot (1 + 0.5N)x^2 + 150.1 \cdot (1 + 0.5N + \alpha)x^3 = 150(3 + 1.5N + \alpha)(1 + 0.01); \end{cases} \quad (2)$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.

Решение

Подставим $N = 9$ и $\alpha = \frac{52-50}{100} = 0.02$ в (1):

$$\begin{cases} 828x^1 + 825x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 825.55x^1 + 827.448x^2 + 825x^3 = 2478; \\ 824.45x^1 + 825x^2 + 828.552x^3 = 2478; \end{cases} \quad (3)$$

Матрица СЛАУ (1) имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 828 & 825 & 825 \\ 825.55 & 827.448 & 825 \\ 824.45 & 825 & 828.552 \end{pmatrix} \quad (4)$$

1. Найдем число обусловленности матрицы A.

Число обусловленности матрицы равно:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (5)$$

Вычислим обратную матрицу с помощью функции `inv()` библиотеки `sympy`:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.230115056512510 & -0.135989231310137 & -0.0937223080651046 \\ -0.178193673016471 & 0.272396398402827 & -0.0937988785782234 \\ -0.0515460443076003 & -0.135912660797018 & 0.187861995036292 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Норма матрицы вычисляется по формуле:

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_j^i| : i = \overline{1, n} \right\} \quad (7)$$

Вычислим нормы, воспользовавшись функцией `norm()`:

$$\|A\| = 2478.00387699616 \quad (8)$$

$$\|A^{-1}\| = 0.501400308248106 \quad (9)$$

Теперь вычислим число обусловленности матрицы:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 2478.00387699616 \cdot 0.501400308248106 \approx 1242.47190776588 \quad (10)$$

Следовательно, СЛАУ (3) плохо обусловлена.