



«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана»  
(национальный исследовательский университет)  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ФИЗИКА (ФН11)

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ

НАУКИ (02.03.01)

**О Т Ч Е Т**

по домашней работе № 2-2

Название домашней работы:

Определение списка полиномов интерполяционного  
сплайна третьей степени единичного дефекта  
для заданной сеточной функции

Вариант № 9

Дисциплина:

Численные методы

Студент группы ФН11-52Б

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Очкин Н.В.

(И.О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Кутыркин В.А.

(И.О. Фамилия)

## Задание

---

На отрезке  $[0; 2]$  задана равномерная сетка  $A = \langle \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ , где  $k=20$ , с шагом  $h = 0.1 = \text{stp}(A)$  и определена функция

$$f(\tau) = 2(54 - n) \sin(\pi\tau) \sqrt{1 + 2N(\tau - 0.5)^2 + N^2},$$

где  $n$  – номер группы и  $N$  – номер студента в журнале группы. Для  $A$ -сеточной функции  ${}^>y = \hat{A}(f) = [y_0, y_1, \dots, y_k] \in {}^>\mathbb{R}^{|A|}(A)$ , где  $y_i = f(\tau_i)$  для  $i = \overline{0, k}$ , решить задачу  $A$ -интерполяции сеточной функции  ${}^>y$  с помощью сплайна  $\text{spl}_3(A; {}^>y)$  3-ей степени дефекта 1. Затем сравнить в узлах равномерной сетки  $B = \langle \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2k} \rangle$  ( $\text{stp}(B) = 0.05$ ) отрезка  $[0; 2]$  значения функции  $f(\tau)$  и сплайна  $\text{spl}_3(A; {}^>y)$  и, кроме того, значения их производных, т.е. значения функций. Результаты проиллюстрировать графически.

## Исходные данные

---

$$[0; 2] \quad k = 20 \quad h = 0.1 \quad N = 0 \quad n = 52$$

$$f(\tau) = 2(54 - n) \sin(\pi\tau) \sqrt{1 + 2N(\tau - 0.5)^2 + N^2}$$

## Ход выполнения работы

---

Для построения равномерной сетки с 21-м узлом воспользуемся следующей формулой:

$$x_i = a + i \cdot h \quad i = 0, 1, 2, \dots, k,$$

где  $h = \frac{b-a}{k}$ .

Также вычислим значения функции  $f(\tau)$  в узлах:

$$y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

Итого получим следующие точки:

- |                        |                        |                          |
|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 1. (x: 0.0, y: 0.0)    | 5. (x: 0.4, y: 34.487) | 9. (x: 0.8, y: 21.5)     |
| 2. (x: 0.1, y: 11.388) | 6. (x: 0.5, y: 36.222) | 10. (x: 0.9, y: 11.388)  |
| 3. (x: 0.2, y: 21.5)   | 7. (x: 0.6, y: 34.487) | 11. (x: 1.0, y: 0.0)     |
| 4. (x: 0.3, y: 29.432) | 8. (x: 0.7, y: 29.432) | 12. (x: 1.1, y: -11.627) |

13. (x: 1.2, y: -22.406)

16. (x: 1.5, y: -40.0)

19. (x: 1.8, y: -24.929)

14. (x: 1.3, y: -31.295)

17. (x: 1.6, y: -38.755)

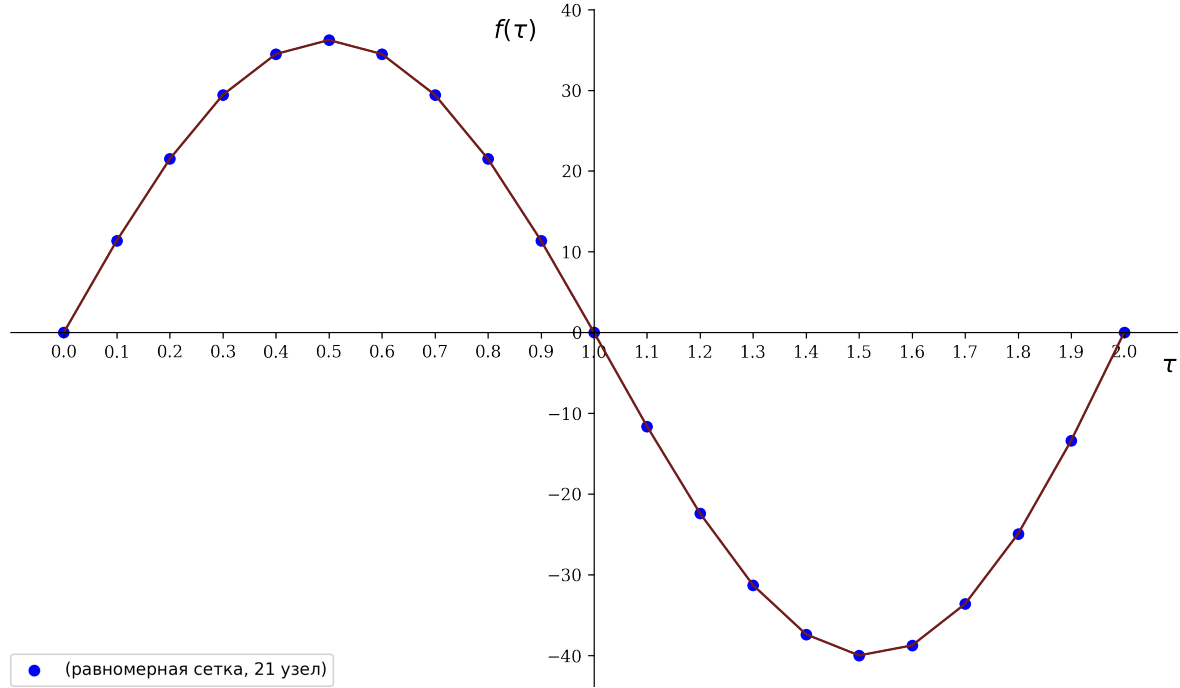
20. (x: 1.9, y: -13.386)

15. (x: 1.4, y: -37.386)

18. (x: 1.7, y: -33.618)

21. (x: 2.0, y: -0.0)

Построим график по полученным точкам:



Теперь найдем коэффициенты сплайна:

$$S_i(t) = a_i + b_i(t - \tau_{i-1}) + c_i(t - \tau_{i-1})^2 + d_i(t - \tau_{i-1})^3 \quad (1)$$

$$h_i = \tau_i - \tau_{i-1} \quad i \in \langle 1, 2, \dots, k \rangle \quad (2)$$

$$h = \langle 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1 \rangle$$

$$a_i = y_{i-1} \quad i \in \langle 1, \dots, k \rangle \quad (3)$$

$$a = \langle 0.0, 11.38794, 21.49977, 29.43221, \dots, -24.92875, -13.38611 \rangle$$

$$g_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} \quad i \in \langle 1, \dots, k-1 \rangle \quad (4)$$

$$g = \langle 113.87937, 101.11831, 79.32444, 50.54309, \dots, 86.88999, 115.4264 \rangle$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_i c_i + 2(h_i + h_{i+1})c_{i+1} + h_{i+1}c_{i+2} = 3(g_{i+1} - g_i) & i \in \langle 1, \dots, k-2 \rangle \\ c_k = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Представим (5) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{k-2} + h_{k-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} g_2 - g_1 \\ g_3 - g_2 \\ \vdots \\ g_{k-1} - g_{k-2} \end{pmatrix}$$

Откуда находим значения  $c_1, c_2, \dots, c_k$ :

$$c = \langle 0, -68.25541, -109.81016, -146.31981, -168.35114, \dots, 170.54982, 0 \rangle$$

Теперь мы можем найти два последних коэффициента:

$$b_i = g_i - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad i \in \langle 1, \dots, k-1 \rangle \quad (6)$$

$$b_k = b_{k-1} + h_{k-1}(c_{k-1} + c_k) \quad (7)$$

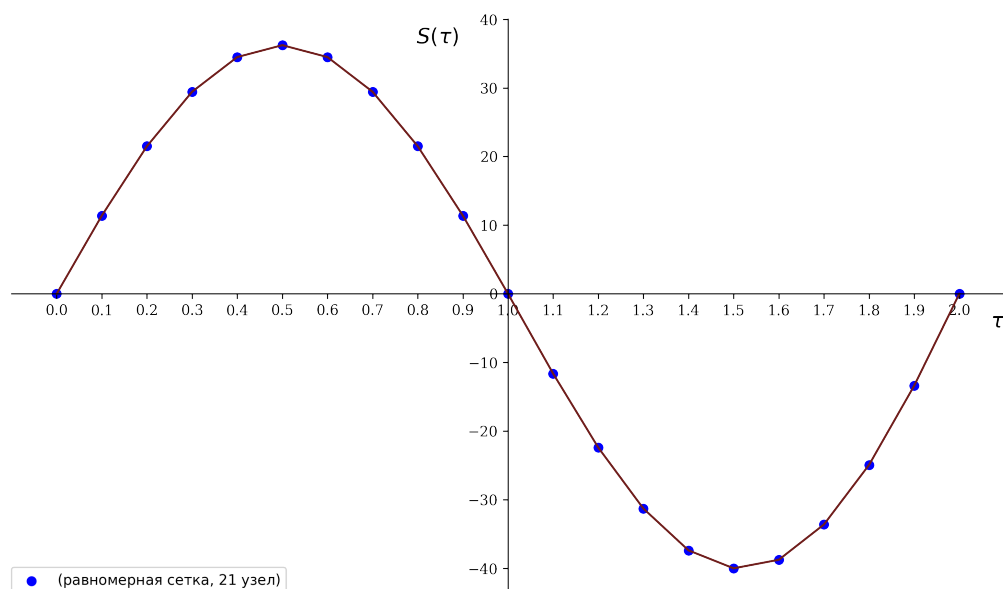
$$b = \langle 116.15455, 109.32901, 91.52245, 65.90945, \dots, 104.05641, 121.11139 \rangle$$

$$d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i) \quad i \in \langle 1, \dots, k-1 \rangle \quad (8)$$

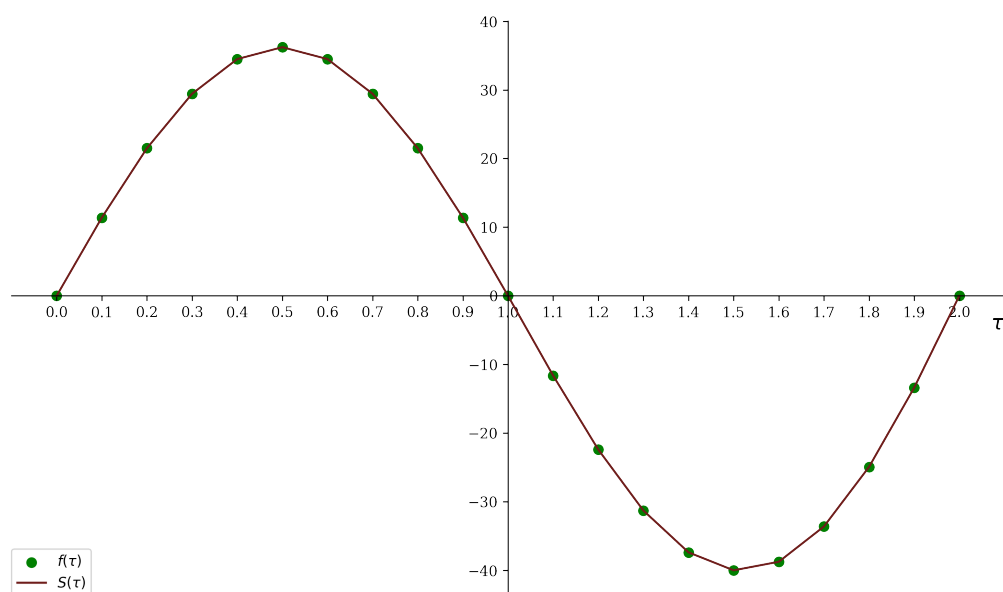
$$d_k = \frac{1}{h_k^3}(y_k - a_k - b_k h_k - c_k h_k^2) \quad (9)$$

$$d = \langle -227.51803, -138.51583, -121.69885, -73.43777, \dots, -568.49939, 1274.96921 \rangle$$

Подставляя (2)-(9) в (1) получим искомый сплайн. Построим его график на ранее найденных узлах:



Теперь построим совмещенные графики заданной функции  $f(\tau)$  (точки) и найденного сплайна  $S(\tau)$ :

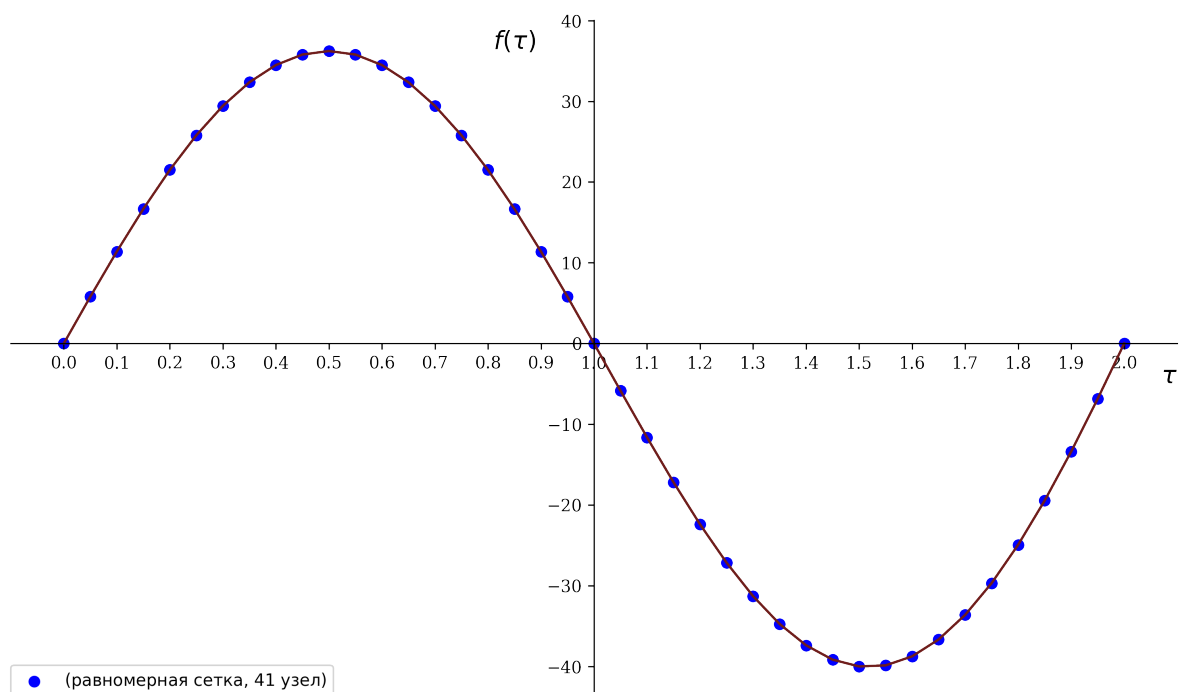


В качестве проверки, проведем все вышеописанные действия для равномерной сетки с 41м узлом:

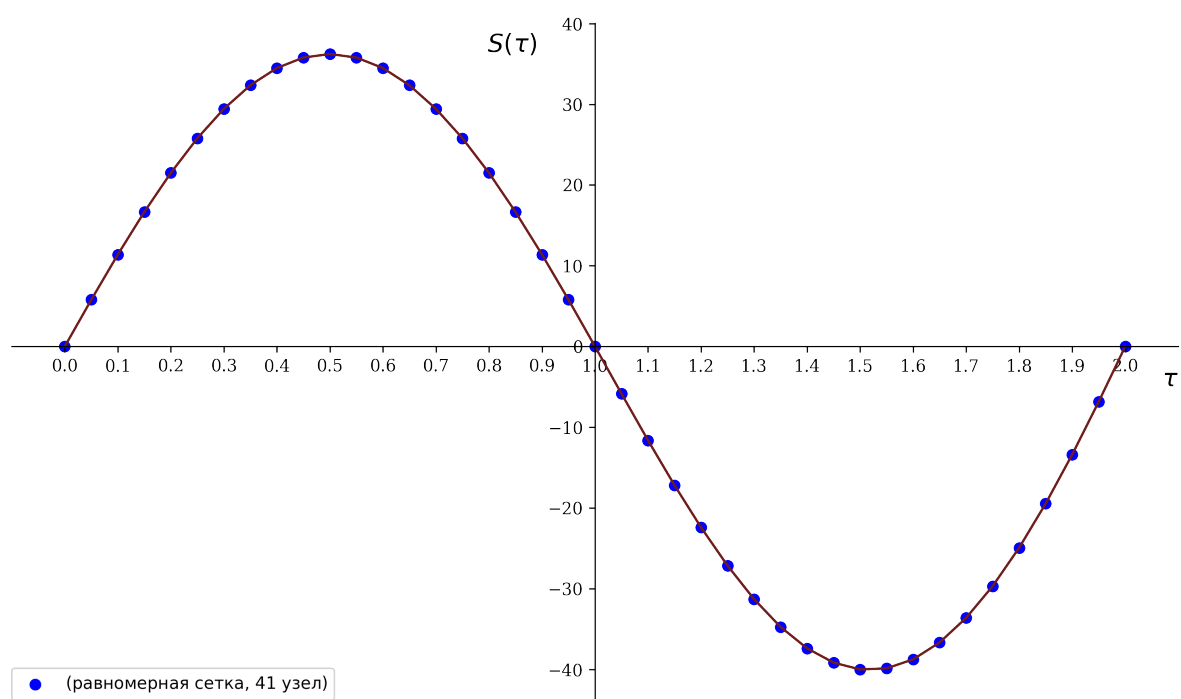
- |                         |                          |                          |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. (x: 0.0, y: 0.0)     | 6. (x: 0.25, y: 25.788)  | 11. (x: 0.5, y: 36.222)  |
| 2. (x: 0.05, y: 5.791)  | 7. (x: 0.3, y: 29.432)   | 12. (x: 0.55, y: 35.785) |
| 3. (x: 0.1, y: 11.388)  | 8. (x: 0.35, y: 32.353)  | 13. (x: 0.6, y: 34.487)  |
| 4. (x: 0.15, y: 16.664) | 9. (x: 0.4, y: 34.487)   | 14. (x: 0.65, y: 32.353) |
| 5. (x: 0.2, y: 21.5)    | 10. (x: 0.45, y: 35.785) | 15. (x: 0.7, y: 29.432)  |

- |                          |                           |                           |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 16. (x: 0.75, y: 25.788) | 25. (x: 1.2, y: -22.406)  | 34. (x: 1.65, y: -36.66)  |
| 17. (x: 0.8, y: 21.5)    | 26. (x: 1.25, y: -27.148) | 35. (x: 1.7, y: -33.618)  |
| 18. (x: 0.85, y: 16.664) | 27. (x: 1.3, y: -31.295)  | 36. (x: 1.75, y: -29.682) |
| 19. (x: 0.9, y: 11.388)  | 28. (x: 1.35, y: -34.739) | 37. (x: 1.8, y: -24.929)  |
| 20. (x: 0.95, y: 5.791)  | 29. (x: 1.4, y: -37.386)  | 38. (x: 1.85, y: -19.458) |
| 21. (x: 1.0, y: 0.0)     | 30. (x: 1.45, y: -39.159) | 39. (x: 1.9, y: -13.386)  |
| 22. (x: 1.05, y: -5.851) | 31. (x: 1.5, y: -40.0)    | 40. (x: 1.95, y: -6.85)   |
| 23. (x: 1.1, y: -11.627) | 32. (x: 1.55, y: -39.87)  | 41. (x: 2.0, y: -0.0)     |
| 24. (x: 1.15, y: -17.19) | 33. (x: 1.6, y: -38.755)  |                           |

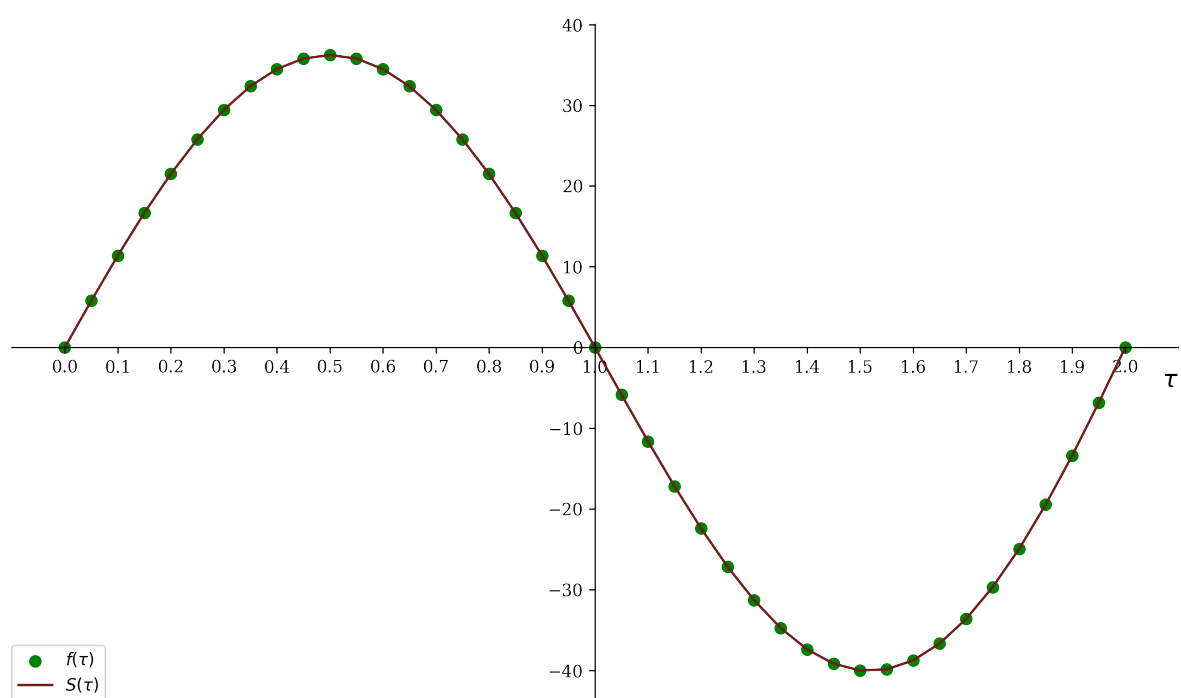
Исходная функция:



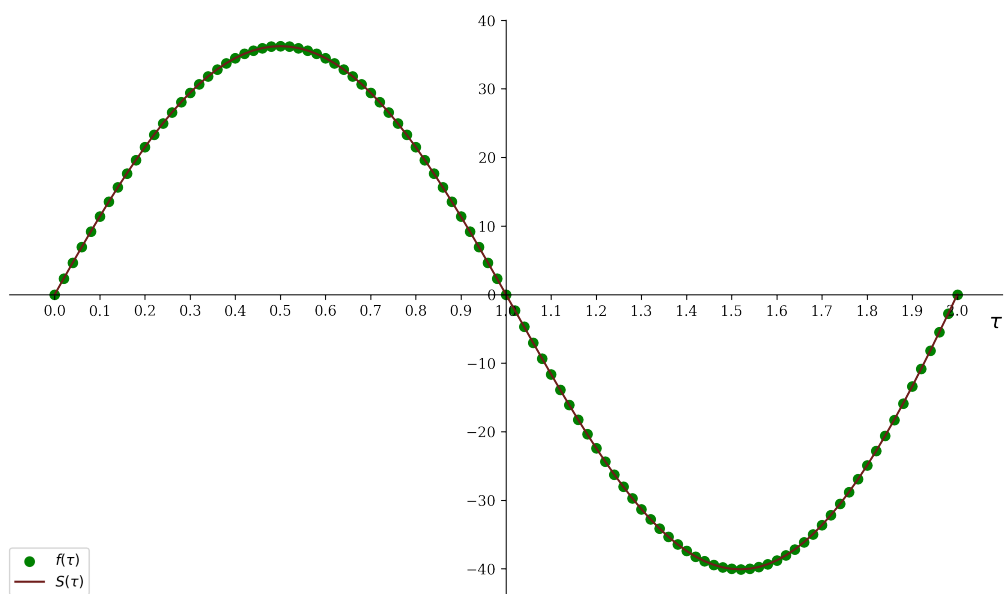
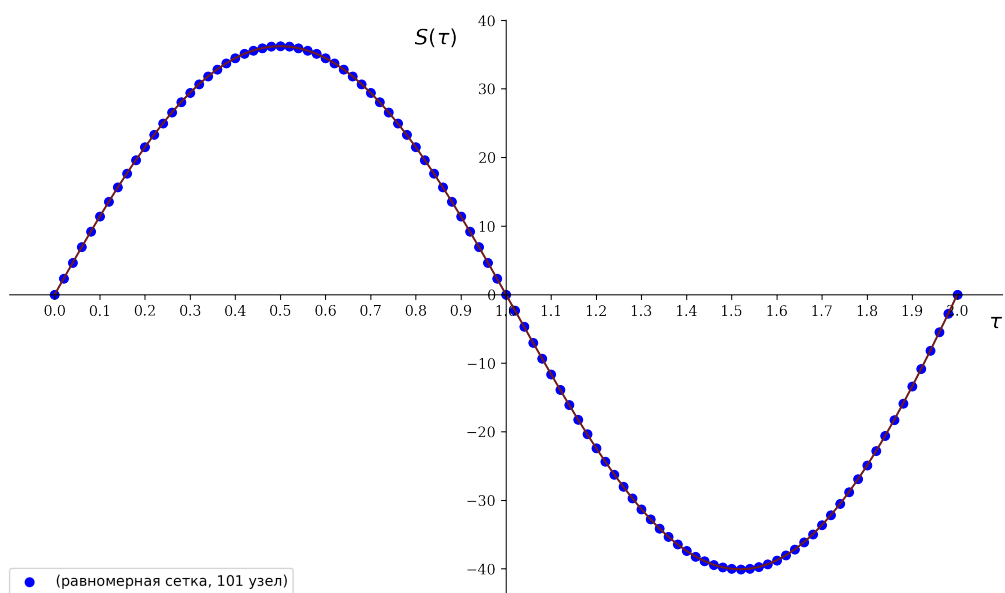
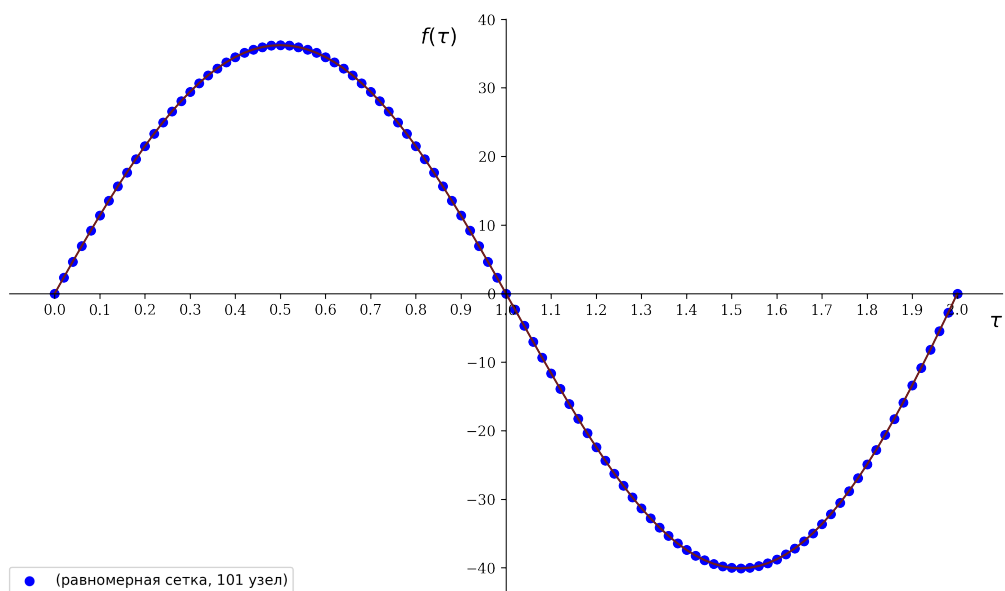
Найденный кубический сплайн:



Совмещенные графики:



А также посмотрим на графики на равномерной сетке со 101 узлом.





Теперь найдем значения производных функций  $f(\tau)$  и  $S(\tau)$  в узлах равномерной сетки при  $k=20, 40$  и  $100$  и построим совмещенные графики.

Производные будем искать методом центральных разностей.

Рабочая формула

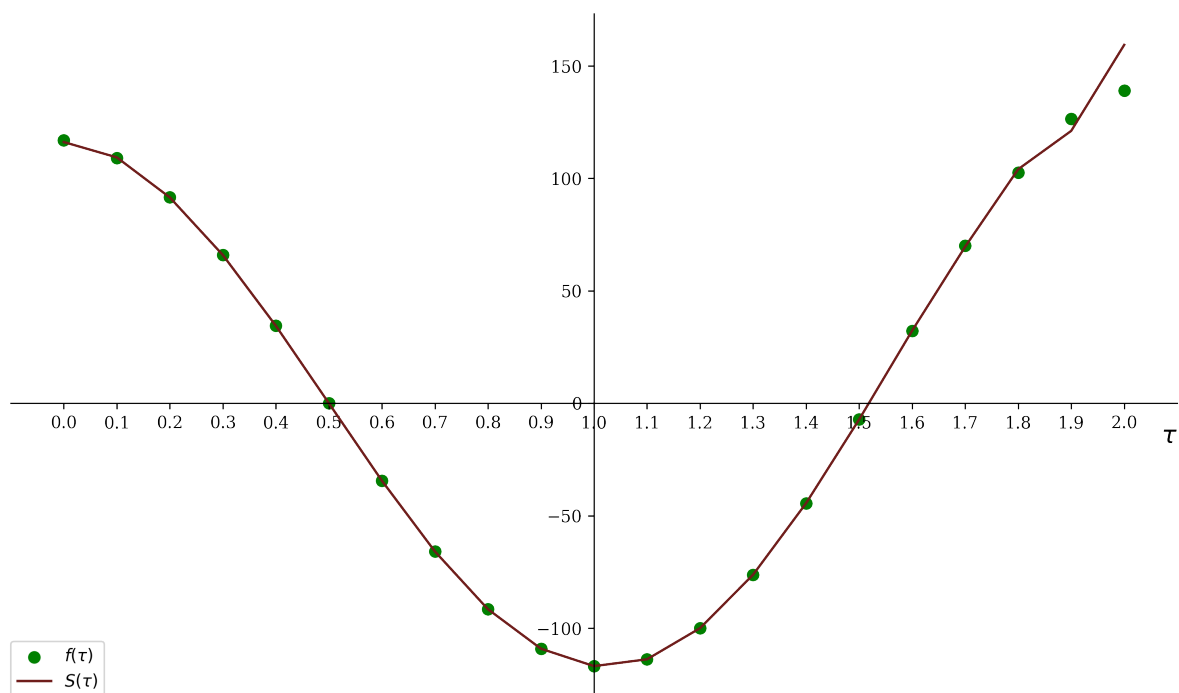
$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Погрешность определяется как  $O(h)$ ,  $h$  примем равной  $1e-6$ .

$k = 20$ :

$$f'(\tau) = \langle 116.874, 109.14201, 91.57726, 65.89814, \dots, 126.5517, 139.08424 \rangle$$

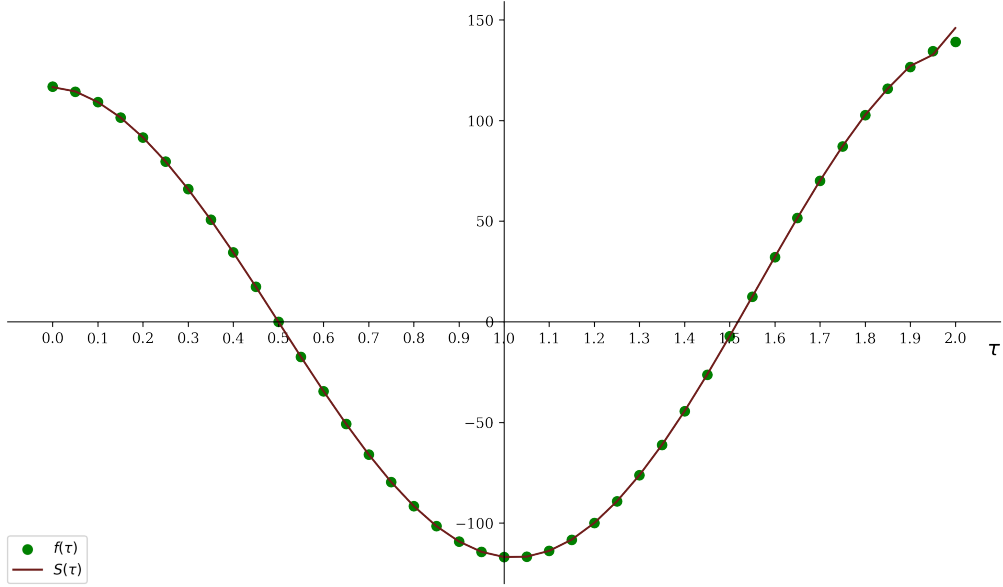
$$S'(\tau) = \langle 116.15455, 109.32901, 91.52245, 65.90945, \dots, 121.11139, 159.36047 \rangle$$



k = 40:

$$f'(\tau) = \langle 116.874, 114.31549, 109.14201, 101.49801, \dots, 134.38322, 139.08424 \rangle$$

$$S'(\tau) = \langle 116.52112, 114.40966, 109.11642, 101.50455, \dots, 132.55742, 145.89636 \rangle$$



k = 100:

$$f'(\tau) = \langle 116.874, 116.17146, 115.0401, 113.48611, \dots, 137.59343, 139.08424 \rangle$$

$$S'(\tau) = \langle 116.73348, 116.2091, 115.03, 113.48881, \dots, 137.08692, 140.9745 \rangle$$

