Теорема сложения

Теорема и ее связи

Рассмотрим два множества A и B. Если множество A содержит $n(A)$ элементов, а множество B — $n(B)$ элементов и пересечение множеств A и B не пусто, то число элементов в их объединении $n(A \cup B)$ вычисляется по формуле:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Замечания

Следствие:

$$n(A \cup B \cup C) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Если речь идет о мощности объединения произвольного числа множеств, то по индукции легко доказывается формула «включений-исключений»:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} n(A_i) - \sum_{i<j} n(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} n(A_i A_j A_k) - \ldots + (-1)^m n(A_1 A_2 \ldots A_m)$$

Доказательство

Множество $A \cup B$ и множество B можно представить как объединение двух непересекающихся множеств:

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B), B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Тогда по правилу суммы имеем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(\overline{A} \cap B) \qquad (1)$$
$$n(B) = n(A \cap B) + n(\overline{A} \cap B) \qquad (2)$$

Вычитая из выражения (1) выражение (2), получаем:

$$n(A \cup B) - n(B) = n(A) + n(\overline{A} \cap B) - n(A \cup B) - n(\overline{A} \cap B) = n(A) - n(A \cup B)$$

Окончательно имеем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

что и требовалось доказать.